UNIVERSIDADE FEDERAL DA GRANDE DOURADOS - UFGD
MESTRADO PROFISSINAL EM MATEMÁTICA - PROFMAT

NAIGUIEL ALVENTINO DA SILVA

OS NÚMEROS DE STIRLING

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA

DOURADOS - MS
ABRIL - 2018

NAIGUIEL ALVENTINO DA SILVA

OS NÚMEROS DE STIRLING

ORIENTADORA: PROF.ª DR.ª IRENE MAGALHÃES CRAVEIRO

Dissertação apresentada ao final do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT da Universidade Federal da Grande Dourados – UFGD como exigência parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

DOURADOS - MS
ABRIL – 2018

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
FUNDAÇÃO UNIVERSIDADE FEDERAL DA GRANDE DOURADOS
FACULDADE DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLOGIA
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL - PROFMAT

Termo de Aprovação

Após a apresentação, arguição e apreciação pela banca examinadora, foi emitido o parecer APROVADO, para a dissertação intitulada: **"Os números de Stirling"**, de autoria de **Naiguiel Alventino da Silva**, apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática da Universidade Federal da Grande Dourados.

Profª. Dra. Irene Magalhães Craveiro (Orientador-UFGD)
Presidente da Banca Examinadora

Prof. Dr. Alexandre Pitangui Calixto
Membro Examinador (UFGD)

Adriana Wagner

Profª. Dra. Adriana Wagner
Membro Examinador (UFMS)

Dourados/MS, 26 de março de 2018

DEDICATÓRIA

.

Dedico este trabalho aos meus pais e minha amada esposa.

AGRADECIMENTOS

Primeiramente a Deus por ter me dado saúde e força para superar as dificuldades e me permitisse concluir esse trabalho.

À minha família, por ser à base de minha formação e pela compreensão nos momentos de minha ausência.

À minha amada esposa Michele, por todo apoio e incentivo que a mim sempre dedicou. Pelas cobranças e compreensão em todos os momentos.

A esta universidade e ao Profmat pela oportunidade de expandir meus conhecimentos.

A todos meus colegas mestrandos, pela colaboração, troca de experiência, alegria e disposição em estudar. Em especial, Marcia Teixeira.

À Prof.ª Dr.ª Irene, meu muito obrigado. Pois sua ajuda nas aulas e na orientação nesse trabalho, foram de suma importância.

Enfim, a todos os professores pela competência e brilhantismo com que ministraram todas as aulas.

A todos, minha eterna gratidão.

LISTA DE TABELAS E FIGURAS

LISTA DE NOTAÇÃO

$\mathbb{N}$:......................................CONJUNTOS DOS NÚMEROS NATURAIS.

$|A|$: ....QUANTIDADE DE ELEMENTOS DE UM CONJUNTO FINITO A .

$\left[\begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right]$: ....NÚMERO DE STIRLING DO PRIMEIRO TIPO.

$\left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\}$: ....NÚMERO DE STIRLING DO SEGUNDO TIPO.

$n!$:......................................FATORIAL DE UM NÚMERO n .

$\binom{n}{k}$: ....COMBINAÇÃO / COEFICIENTE BINOMIAL.

B_n : ....NÚMERO DE BELL.

H_n : ....NÚMERO HARMÔNICO.

RESUMO

Neste presente trabalho iremos explorar diversas interpretações combinatórias para os números de Stirling, relacionando essa sequência de números com conteúdos de Combinatória que podem ser abordados no Ensino Médio. Além disso, iremos pesquisar diversas propriedades relacionadas a esses números, fazendo demonstrações algébricas ou combinatórias de tais identidades.

Palavras-chave: Números do Stirling do primeiro tipo. Números do Stirling do segundo tipo. Números de Bell. Números Harmônicos.

ABSTRACT

In this paper we will explore several combinatory interpretations for the Stirling numbers, relating this sequence of numbers with Combinatory contents that can be approached in High School. In addition, we will search various properties related to that number, making algebraic or combinatorial demonstrations of such identities.

Keywords: Stirling numbers of the first type. Stirling numbers of the second type. Bell numbers. Harmonic Numbers.

SUMÁRIO

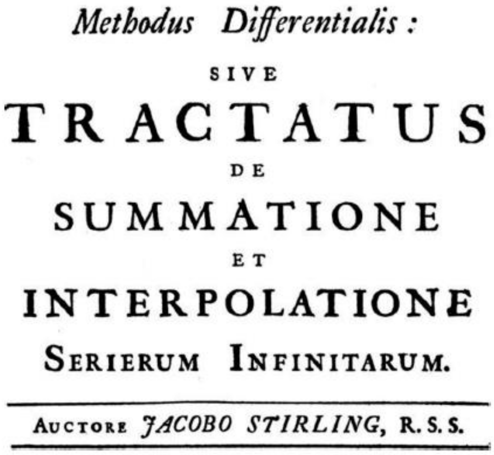
INTRODUÇÃO

O propósito deste trabalho é apresentar a sequência númerica chamada de números de Stirling do primeiro e segundo tipo e expor suas características, propriedades e demonstrar suas aplicações na resolução de problemas de caráter combinatório.

A nomenclatura dada a essa sequência númerica se deve a uma homenagem imposta pelo matemático dinamarques Neisl Nielsen (1865 - 1931) ao matemático britânico James Stirling (1692-1770) [1].

Essa homenagem se refere ao fato que Stirling utilizava-se desses números em seus trabalhos, dentre eles estão os publicado em 1718, intitulado Methodus Differentialis Newtoniana Illustrata e em seu livro Methodus Differentialis (The Method of Differences). A figura 1 mostra uma imagem da capa de seu livro.

Figura 1: Parte da página inicial do livro de Stirling


Methodus Differentialis:
SIVE
TRACTATUS
DE
SUMMATIONE
ET
INTERPOLATIONE
SERIERUM INFINITARUM.
AUCTORE *JACOBO STIRLING*, R.S.S.

Fonte: https://www.maa.org/sites/default/files/pdf/uplodlib rary/2/ Boyadzhiev-2013.pdf

Os números de Stirling são classificados em dois tipos: números de Stirling do primeiro tipo e segundo tipo. Ambos fornecem resultados utilizados para resolver problemas de natureza combinatória. Os números de Stirling do 1º tipo representa o total das permutações que um conjunto com n elementos pode se decompor em k ciclos. Já os do 2º tipo estão relacionados com partições de um conjunto com n elementos.

O desenvolvimento do trabalho é apresentado em quatro capítulos, sendo que no primeiro é apresentada a definição dos números de Stirling do primeiro tipo, sua relação de recorrência, função geradora e forma explícita, além de apresentarmos uma abordagem combinatória para suas propriedades.

No segundo capítulo, apresentaremos a definição de número de Stirling do segundo tipo, juntamente com a demonstração de uma recorrência que gera essa sequência de números. Também estabeleceremos uma formula explícita para essa sucessão, além de propriedades que são satisfeitas por elas. Além disso, relacionaremos o conceito de números de Stirling do segundo tipo com o cálculo da quantidade de funções sobrejetoras definidas de A em B, onde A e B são finitos.

No terceiro capítulo serão apresentados os números de Bell. Esses números recebem o nome do matemático e escritor Eric Temple Bell (1883-1960), pois foi um dos primeiros a fazer uma análise aprofundada dessa sequência. Os números de Bell surgem através dos números de Stirling do segundo tipo. Além disso, será apresentada uma aplicação dos números de Bell no conceito de rimas.

Por fim, no quarto capítulo, será abordada a relação que existe entre números de Stirling do segundo tipo e os números harmônicos. O capítulo iniciará com a definição dos números harmônicos, propriedades e exemplos. Em seguida mostraremos algumas relações entre os números harmônicos e os de Stirling do segundo tipo.

1 NÚMEROS DE STIRLING DE PRIMEIRO TIPO

Algumas sequências de números surgem tão frequentemente em Matemática que as reconhecemos quase que imediatamente, essas sequências recebem nomes especiais, como por exemplo, a sequência de Fibonacci[1].

Neste capítulo iremos apresentar a sequência de números, chamados de números de *Stirling do primeiro tipo,* que denotamos por $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}$, onde n e k são números naturais.

Os números de Stirling demonstram ser uma ferramenta útil para lidar com diversos problemas combinatórios. A ideia deste capítulo é desenvolver diversas propriedades para os números de Stirling do primeiro tipo, apresentando uma prova algébrica ou combinatória.

Inicialmente iremos definir os números de Stirling, por meio de permutações de um conjunto S de n objetos, $S = \{\mathrm{c}_1, \mathrm{c}_2, \ldots, \mathrm{c}_n\}$. Sem perda de generalidade, vamos supor que $S = \{1, 2, \ldots, n\}$, em seguida, estabelecer uma recorrência para os números de Stirling do primeiro tipo. A partir dessa relação de recorrência iremos estabelecer a função geradora ordinária, ou seja, um polinômio na indeterminada x cujos coeficientes das potências de $\boldsymbol{x}$ são números de Stirling do primeiro tipo.

A recorrência dos números de Stirling do primeiro tipo também permite dispor esses números na forma triangular, esse triângulo formado é similar ao Triângulo de Pascal formado pelos coeficientes binomiais. Os coeficientes binomiais $\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}$, podem ser interpretados combinatoriamente como o número de subconjuntos com k elementos de um conjunto com n objetos, enquanto que o número de Stirling do primeiro tipo pode ser interpretado como o número de permutações de um conjunto de n elementos que se decompõem em k ciclos, esses números apresentam certas similaridades que são exploradas na literatura.

---

[1] Sequência de Fibonacci é a sequência numérica proposta pelo matemático Leonardo Pisa, mais conhecido como Fibonacci: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89,.... Foi a partir de um problema criado por ele, que o mesmo detectou a existência de uma regularidade matemática. Trata-se do exemplo clássico dos coelhos, em que Fibonacci descreve o crescimento de uma população desses animais. A sequência é definida mediante a seguinte fórmula: $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$.

Finalizaremos este capítulo desenvolvendo algumas aplicações dos números de Stirling do primeiro tipo em alguns problemas de Combinatória Enumerativa.

1.1 DEFINIÇÃO DOS NÚMEROS DE STIRLING DE PRIMERIO TIPO

Considere o conjunto $S = \{1, 2, 3, 4\}$, vamos descrever todas as permutações de S_4. Essa representação será através de um diagrama, onde a primeira linha representa o elemento do conjunto S e a segunda linha as permutações. Segue abaixo todas as permutações:

$$\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&2&4&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&4&2&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&4&3&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&3&4&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&3&2&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&2&3&4\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&3&1&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&4&3&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&4&1&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&1&4&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&1&3&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&3&4&1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&4&2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&2&1&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&2&4&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&4&1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&1&4&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&1&2&4\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&3&1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&3&2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&2&3&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&2&1&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&1&2&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&1&3&2\end{pmatrix}.$$

O conjunto $S = \{1, 2, 3, 4\}$ permite 24 permutações. Observe que no primeiro diagrama trata-se de uma permutação, onde o algarismo 1 está no lugar do próprio 1; o 2 está no lugar do próprio 2; o 4 esta no lugar do 3; e o 3 esta no lugar do 4, ou seja,

$$\sigma = \begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&2&4&3\end{pmatrix} \text{ ou ainda,}$$

$$1 \to 1$$

$$2 \to 2$$

$$3 \to 4 \to 3,$$

em notação de ciclos representamos por $(1)\,(2)\,(3\,4)$, neste caso, temos 3 ciclos.

Vamos denotar por $A_{n,k}$ o conjunto das permutações de $S = \{1,2,3,\ldots,n\}$ que se decompõem em *k* ciclos disjuntos. Vamos representar todas as permutações S_4 em produtos de ciclos disjuntos. A tabela 1 representa todas as 24 permutações decompostas em produtos de ciclos.

Tabela 1: Permutações de S_4 em produtos ciclos.

k	$A_{4,k}$	$\lvert A_{4,k}\rvert$
1	$(1\,2\,3\,4)$; $(1\,3\,2\,4)$; $(1\,3\,4\,2)$; $(1\,4\,3\,2)$; $(1\,2\,4\,3)$; $(1\,4\,2\,3)$	6
2	$(1)\,(2\,3\,4)$; $(1)\,(2\,4\,3)$; $(2)\,(1\,3\,4)$; $(2)\,(1\,4\,3)$; $(3)\,(1\,2\,4)$; $(3)\,(1\,4\,2)$; $(4)\,(1\,2\,3)$; $(4)\,(1\,3\,2)$; $(1\,2)\,(3\,4)$; $(1\,3)\,(2\,4)$; $(1\,4)\,(2\,3)$	11
3	$(1)\,(2)\,(3\;4)$; $(1)\,(3)\,(2\;4)$; $(1)\,(4)\,(2\;3)$; $(2)\,(3)\,(1\;4)$; $(2)\,(4)\,(1\;3)$; $(3)\,(4)\,(1\;2)$	6
4	$(1)\,(2)\,(3)\,(4)$	1

Fonte: Autor

Observe que não é possível decompor uma permutação do conjunto $S=\{1,\ 2,3,4\}$ em um produto com exatamente 5 ciclos.

Definição 1.1: Sejam n, k, números naturais, com $n\geq k\geq 1$, o *número de Stirling do primeiro tipo* é o total permutações de n elementos que se decompõem em k ciclos disjuntos. O número de Stirling do primeiro tipo é denotado por $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}$.

Vamos convencionar $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}=1$.

De acordo com tabela 1, podemos concluir que:

$$\begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix}=6,\ \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix}=11,\ \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix}=6 \text{ e } \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \end{bmatrix}=1.$$

Segue da definição 1.1, algumas propriedades imediatas: dados $n,k\in\mathbb{N}$, tais que $n\geq k\geq 1$ temos que:

$$\begin{bmatrix} n \\ 0 \end{bmatrix}=1, \text{ se } n>0;\quad \begin{bmatrix} n \\ n \end{bmatrix}=1;\ \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}=0, \textit{ se } 0<n<k.$$

É possível obter os números de Stirling do primeiro tipo por meio de uma relação entre os termos sucessivos da sequência numérica $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}$, ou seja, podemos determinar uma relação de recorrência para esses números.

Teorema 1.1: Sejam n e k números naturais, tais que $n\geq k\geq 1$, temos que:

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} n-1 \\ k-1 \end{bmatrix}+(n-1)\begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix}\ . \qquad 1.1$$

Demonstração: Indicamos o conjunto das permutações de S_n que se decompõe em k ciclos por A. Vamos particionar A em dois subconjuntos disjuntos:

1) Subconjunto de A que tem um ciclo formado apenas pelo elemento n.

2) Subconjunto de A que o elemento n ficará num ciclo com mais de um elemento.

No primeiro caso temos $\begin{bmatrix} n-1 \\ k-1 \end{bmatrix}$ permutações de S_n que estão em A, pois o elemento n forma um ciclo e os $n-1$ números restantes podem ser distribuídos em $k-1$ ciclos.

No segundo caso, temos o complemento do primeiro, onde os ciclos podem ter mais do que um elemento, permitindo que os $n-1$ elementos restantes sejam distribuídos em todos os k ciclos, obtendo $\begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix}$ modos, como em cada ciclo temos $n-1$ posições para colocar o elemento n, pois não consideramos a posição do próprio elemento. Pelo princípio multiplicativo temos $(n\text{-}1)\begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix}$ permutações de S_n que estão em A.

Portanto, somando os números de maneiras determinadas em ambos os casos, temos que o número de elementos de A podem ser escritos:

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n-1 \\ k-1 \end{bmatrix} + (n-1)\begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix}. \blacksquare$$

Através do teorema 1.1, segue uma tabela com alguns números de Stirling do primeiro tipo:

Tabela 2: Números de Stirling do primeiro tipo, para $0 \le n \le 7$ **e** $0 \le k \le 7$**.**

$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}$	$k=1$	$k=2$	$k=3$	$k=4$	$k=5$	$k=6$	$k=7$
$n=1$	1	0	0	0	0	0	0
$n=2$	1	1	0	0	0	0	0
$n=3$	2	3	1	0	0	0	0
$n=4$	6	11	6	1	0	0	0
$n=5$	24	50	35	10	1	0	0
$n=6$	120	274	225	85	15	1	0
$n=7$	720	1764	1624	735	175	21	1

Fonte: Autor

A relação de recorrência dos números de Stirling do primeiro tipo apresenta características similares à relação de Stifel[2], também conhecida como regra de Pascal, cuja identidade envolve os coeficientes binomiais, ou seja, a relação de Stifel é uma combinação de *n* elementos tomados *k* a *k*. Pode ser representado pela seguinte recorrência:

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}.$$

A Tabela 3 é dada por meio da relação de Stifel, por outro lado, a recorrência provada no Teorema 1.1 permite representar os números de Stirling do primeiro tipo na forma triangular similar ao triângulo, já conhecido no Ensino Médio como no triângulo de Pascal.

Tabela 3: Triângulo de Pascal.

$\binom{0}{0}$	$\rightarrow$	1
$\binom{1}{0}\ \binom{1}{1}$	$\rightarrow$	1 1
$\binom{2}{0}\ \binom{2}{1}\ \binom{2}{2}$	$\rightarrow$	1 2 1
$\binom{3}{0}\ \binom{3}{1}\ \binom{3}{2}\ \binom{3}{3}$	$\rightarrow$	1 3 3 1
$\binom{4}{0}\ \binom{4}{1}\ \binom{4}{2}\ \binom{4}{3}\ \binom{4}{4}$	$\rightarrow$	1 4 6 4 1
$\vdots\ \vdots\ \vdots\ \vdots\ \vdots\ \vdots$		$\vdots\ \vdots\ \vdots\ \vdots\ \vdots\ \vdots$
$\vdots\ \vdots\ \vdots\ \vdots\ \vdots\ \vdots$		$\vdots\ \vdots\ \vdots\ \vdots\ \vdots\ \vdots$

Fonte: Autor

A tabela 4 representa um triângulo similar ao Triângulo de Pascal onde estão representados alguns dos números de Stirling do primeiro tipo.

[2] Michael Stifel (1487 - 1567) publicou em 1544 sua obra *Arithmetica integra*, o mais importante tratado de álgebra da Alemanha no século XVI. Nele aparece pela primeira vez o triângulo dos coeficientes do binômio, até de ordem 17, inclusive a fórmula recorrente entre eles, hoje conhecida como relação de Stifel.

Tabela 4: Triângulo similar ao triângulo de Pascal, para os números de Stirling do primeiro tipo.

$\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$	$\rightarrow$	1
$\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix}2\\2\end{bmatrix}$	$\rightarrow$	1 1
$\begin{bmatrix}3\\1\end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix}3\\2\end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix}3\\3\end{bmatrix}$	$\rightarrow$	2 3 1
$\begin{bmatrix}4\\1\end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix}4\\2\end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix}4\\3\end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix}4\\4\end{bmatrix}$	$\rightarrow$	6 11 6 1
$\begin{bmatrix}5\\1\end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix}5\\2\end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix}5\\3\end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix}5\\4\end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix}5\\5\end{bmatrix}$	$\rightarrow$	24 50 35 10 1
$\vdots$ $\vdots$ $\vdots$ $\vdots$ $\vdots$ $\vdots$		$\vdots$ $\vdots$ $\vdots$ $\vdots$ $\vdots$ $\vdots$
$\vdots$ $\vdots$ $\vdots$ $\vdots$ $\vdots$ $\vdots$		$\vdots$ $\vdots$ $\vdots$ $\vdots$ $\vdots$ $\vdots$

Fonte: Autor

Observe na tabela 4, que a soma dos valores obtidos em cada linha é igual a $n!$, por exemplo, somando os números de Stirling do primeiro tipo na linha 4 obtemos 24 que é igual a $4!$:

$$\begin{bmatrix}4\\1\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}4\\2\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}4\\3\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}4\\4\end{bmatrix} = 6+11+6+1 = 24 = 4!.$$

O total de permutações de um conjunto com n objetos é $n!$, então é natural que $\sum_{k=0}^{n}\begin{bmatrix}n\\k\end{bmatrix} = n!$**.**

Diversas propriedades relacionadas aos números de Stirling do primeiro tipo podem ser observadas por meio desse triângulo, uma delas é a proposição 1.1 que iremos validar a seguir, por meio de uma prova algébrica.

Proposição 1.1: Sejam *n* e *k* números naturais, tais que $n \geq k \geq 1$, temos que:

$$\sum_{k=0}^{n}\begin{bmatrix}n\\k\end{bmatrix} = n!.$$

Demonstração: Faremos a prova por indução sobre *n*. Para $n=0$, temos que $\sum_{k=0}^{0}\begin{bmatrix}0\\k\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix} = 1 = 0!$.

Suponha que o resultado seja válido para $n = t > 0$, ou seja, $\sum_{k=0}^{t} \begin{bmatrix} t \\ k \end{bmatrix} = t!$, temos que:

$$\sum_{k=0}^{t+1} \begin{bmatrix} t+1 \\ k \end{bmatrix} = \sum_{k=0}^{t+1} \left[\begin{bmatrix} t \\ k-1 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} t \\ k \end{bmatrix} \right] =$$

$$= \sum_{k=0}^{t+1} \begin{bmatrix} t \\ k-1 \end{bmatrix} + t \sum_{k=0}^{t+1} \begin{bmatrix} t \\ k \end{bmatrix} =$$

$$= \sum_{k=0}^{t+1} \begin{bmatrix} t \\ k-1 \end{bmatrix} + t \sum_{k=0}^{t} \begin{bmatrix} t \\ k \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} t \\ t+1 \end{bmatrix}$$

$$= \sum_{k=0}^{t+1} \begin{bmatrix} t \\ k-1 \end{bmatrix} + t\,t! \quad = \sum_{p=0}^{t} \begin{bmatrix} t \\ p \end{bmatrix} + t\,t! \; = t! + t\,t! \; = (t+1)!.$$

Portanto $\sum_{k=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = n!$. ■

Proposição 1.2: Sejam *n*, *k* números naturais, com $n \geq k \geq 1$, temos as seguintes propriedades para os números de Stirling do primeiro tipo:

(i) $\begin{bmatrix} n \\ 1 \end{bmatrix} = (n-1)!$;

(ii) $\begin{bmatrix} n \\ n \end{bmatrix} = 1$;

(iii) $\begin{bmatrix} n \\ n-1 \end{bmatrix} = \binom{n}{2}$

Demonstração: (i) Temos que $\begin{bmatrix} n \\ 1 \end{bmatrix}$ representa o total de permutações $\sigma \in S_n$ com exatamente 1 ciclo, assim podemos formar $(n-1)!$ permutações com exatamente 1 ciclo a partir de $\{1, 2, \ldots, n\}$, ou seja,

$$(1 \quad 2 \quad 3 \quad \cdots \quad n)$$

$$(2 \quad 1 \quad 3 \quad \cdots \quad n)$$

$$(3 \quad 1 \quad 4 \quad \cdots \quad n)$$

$$\vdots$$

$$(n-1 \quad n-2 \quad 2 \quad \cdots \quad n)$$

Portanto $\begin{bmatrix} n \\ 1 \end{bmatrix} = (n-1)!$.

(ii) Para uma permutação com n elementos e com n ciclos existe apenas a permutação identidade, portanto $\begin{bmatrix} n \\ n \end{bmatrix} = 1$.

(iii) Temos que $\begin{bmatrix} n \\ n-1 \end{bmatrix}$ é o total de permutações $\sigma \in S_n$ decomposta em um produto de $n-1$ ciclos. Para formar permutações de $n-1$ ciclos, temos que escolher dois elementos de $\{1, 2, \ldots, n\}$ para ser uma transposição e o restante fica pré-fixado para ser ciclo de comprimento 1. Dessa forma $\begin{bmatrix} n \\ n-1 \end{bmatrix} = \binom{n}{2}$. ■

Exemplo 1.1: Considere a seguinte identidade em particular:

$$\sum_{k=1}^{4} k \begin{bmatrix} 4 \\ k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4+1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix}. \qquad 1.2$$

Temos que $\begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix} = 50$.

No caso $k = 1$ na identidade 1.2, vamos considerar as permutações de $\{1, 2, 3, 4\}$ que se decompõe em um ciclo e transformá-las em permutações de $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ que se decompõe em produto de dois ciclos, temos que:

$$\begin{array}{lcl}
(2\,3\,4\,1) & \to & (2\,3\,4\,1)\,(5) \\
(2\,4\,1\,3) & \to & (2\,4\,1\,3)\,(5) \\
(3\,4\,2\,1) & \to & (3\,4\,2\,1)\,(5) \\
(1\,3\,4\,2) & \to & (1\,3\,4\,2)\,(5) \\
(4\,3\,1\,2) & \to & (4\,3\,1\,2)\,(5) \\
(4\,1\,2\,3) & \to & (4\,1\,2\,3)\,(5)
\end{array}$$

Temos um total de 6 permutações de $\{1, 2, 3, 4, 5\}$, que se decompõe em produto de dois ciclos.

No caso $k = 2$, para cada permutação de $\{1, 2, 3, 4\}$ que se decompõe em dois ciclos, vamos repeti-las de duas vezes, sublinhando um dos ciclos para diferencia-las, como segue:

$$(1)(234) \begin{array}{l} \nearrow (\underline{1})(234) \\ \searrow (1)(\underline{234}) \end{array}$$

$$(1)(243) \begin{array}{l} \nearrow (\underline{1})(243) \\ \searrow (1)(\underline{243}) \end{array}$$

$$(2)(134) \begin{array}{l} \nearrow (\underline{2})(134) \\ \searrow (2)(\underline{134}) \end{array}$$

$$(2)(143) \begin{array}{l} \nearrow (\underline{2})(143) \\ \searrow (2)(\underline{143}) \end{array}$$

$$(3)(124) \begin{array}{l} \nearrow (\underline{3})(124) \\ \searrow (3)(\underline{124}) \end{array}$$

$$(3)(142) \begin{array}{l} \nearrow (\underline{3})(142) \\ \searrow (3)(\underline{142}) \end{array}$$

$$(4)(123) \begin{array}{l} \nearrow (\underline{4})(123) \\ \searrow (4)(\underline{123}) \end{array}$$

$$(4)(132) \begin{array}{l} \nearrow (\underline{4})(132) \\ \searrow (4)(\underline{132}) \end{array}$$

$$(12)(34) \begin{array}{l} \nearrow (\underline{12})(34) \\ \searrow (12)(\underline{34}) \end{array}$$

$$(13)(24) \begin{array}{l} \nearrow (\underline{13})(24) \\ \searrow (13)(\underline{24}) \end{array}$$

$$(14)(23) \begin{array}{l} \nearrow (\underline{14})(23) \\ \searrow (14)(\underline{23}) \end{array}$$

Para cada uma das permutações duplicadas, vamos associá-las as seguintes permutações de $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ que se decompõem em produto de dois ciclos.

$(\underline{1})(234) \to (1)(5234)$;
$(1)(\underline{234}) \to (51)(234)$;
$(\underline{1})(243) \to (1)(5243)$;
$(1)(\underline{243}) \to (51)(243)$;
$(\underline{2})(134) \to (2)(5134)$;
$(2)(\underline{134}) \to (52)(134)$;
$(\underline{2})(143) \to (2)(5143)$;
$(2)(\underline{143}) \to (52)(143)$;
$(\underline{3})(124) \to (3)(5124)$;
$(3)(\underline{124}) \to (53)(124)$;
$(\underline{3})(142) \to (3)(5142)$;
$(3)(\underline{142}) \to (53)(142)$;
$(\underline{4})(123) \to (4)(5123)$;
$(4)(\underline{123}) \to (54)(123)$;
$(\underline{4})(132) \to (4)(5132)$;
$(4)(\underline{132}) \to (54)(132)$;
$(\underline{12})(34) \to (12)(534)$;
$(12)(\underline{34}) \to (512)(34)$;
$(\underline{13})(24) \to (13)(524)$;
$(13)(\underline{24}) \to (513)(24)$;
$(\underline{14})(23) \to (14)(523)$;
$(14)(\underline{23}) \to (514)(23)$.

Temos um total de 22 permutações de $\{1, 2, 3, 4, 5\}$, que se decompõe em produto de dois ciclos.

No caso $k = 3$, para cada permutação de $\{1, 2, 3, 4\}$ que se decompõe em três ciclos, vamos repeti-las três vezes, sublinhando um dos ciclos para diferencia-las, como segue:

$$(1)(2)(34) \begin{array}{l} \nearrow (\underline{1})(2)(34) \\ \rightarrow (1)(\underline{2})(34) \\ \searrow (1)(2)(\underline{34}) \end{array} \qquad (2)(3)(14) \begin{array}{l} \nearrow (\underline{2})(3)(14) \\ \rightarrow (2)(\underline{3})(14) \\ \searrow (2)(3)(\underline{14}) \end{array}$$

$$(1)(3)(24) \begin{array}{l} \nearrow (\underline{1})(3)(24) \\ \rightarrow (1)(\underline{3})(24) \\ \searrow (1)(3)(\underline{24}) \end{array} \qquad (2)(4)(13) \begin{array}{l} \nearrow (\underline{2})(4)(13) \\ \rightarrow (2)(\underline{4})(13) \\ \searrow (2)(4)(\underline{13}) \end{array}$$

$$(1)(4)(23) \begin{array}{l} \nearrow (\underline{1})(4)(23) \\ \rightarrow (1)(\underline{4})(23) \\ \searrow (1)(4)(\underline{23}) \end{array} \qquad (3)(4)(12) \begin{array}{l} \nearrow (\underline{3})(4)(12) \\ \rightarrow (3)(\underline{4})(12) \\ \searrow (3)(4)(\underline{12}) \end{array}$$

Para cada uma das permutações triplicada, vamos associar a seguinte permutação de $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ que se decompõem em produto de dois ciclos.

$(\underline{1})(2)(34) \rightarrow (1)(5342)$	$(\underline{1})(4)(23) \rightarrow (1)(5234)$	$(\underline{2})(4)(13) \rightarrow (2)(5134)$
$(1)(\underline{2})(34) \rightarrow (2)(5341)$	$(1)(\underline{4})(23) \rightarrow (4)(5231)$	$(2)(\underline{4})(13) \rightarrow (4)(5132)$
$(1)(2)(\underline{34}) \rightarrow (34)(521)$	$(1)(4)(\underline{23}) \rightarrow (23)(541)$	$(2)(4)(\underline{13}) \rightarrow (13)(542)$
$(\underline{1})(3)(24) \rightarrow (1)(5243)$	$(\underline{2})(3)(14) \rightarrow (2)(5143)$	$(\underline{3})(4)(12) \rightarrow (3)(5124)$
$(1)(\underline{3})(24) \rightarrow (3)(5241)$	$(2)(\underline{3})(14) \rightarrow (3)(5142)$	$(3)(\underline{4})(12) \rightarrow (4)(5123)$
$(1)(3)(\underline{24}) \rightarrow (24)(531)$	$(2)(3)(\underline{14}) \rightarrow (14)(532)$	$(3)(4)(\underline{12}) \rightarrow (12)(543)$

Temos um total de 18 permutações de $\{1, 2, 3, 4, 5\}$, que se decompõem em produto de dois ciclos.

No caso $k = 4$, para cada permutação de $\{1, 2, 3, 4\}$ que se decompõem em quatro ciclos, a saber: $(1)(2)(3)(4)$. Vamos repeti-los quatro vezes sublinhando um dos ciclos para diferencia-las:

$$(1)(2)(3)(4) \begin{array}{l} \nearrow (\underline{1})(2)(3)(4) \\ \rightarrow (1)(\underline{2})(3)(4) \\ \searrow (1)(2)(\underline{3})(4) \\ \searrow (1)(2)(3)(\underline{4}) \end{array}.$$

Para cada uma das permutações quadriplicada, que diferenciamos sublinhando um dos ciclos, vamos associar uma permutação de $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ que se decompõem em produto de dois ciclos.

$$(\underline{1})(2)(3)(4) \rightarrow (1)(5\,4\,3\,2)$$
$$(1)(\underline{2})(3)(4) \rightarrow (2)(5\,4\,3\,1)$$
$$(1)(2)(\underline{3})(4) \rightarrow (3)(5\,4\,2\,1)$$
$$(1)(2)(3)(\underline{4}) \rightarrow (4)(5\,3\,2\,1)$$

Observe que obtemos um total de 50 permutações de $\{1, 2, 3, 4, 5\}$, que decompõem em produto de dois ciclos.

Proposição 1.3: Sejam n e k números naturais, com $n, k \geq 0$, temos que:

$$\sum_{k=1}^{n} k \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n+1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Demonstração: Temos que o lado esquerdo conta o número de permutações de $\{1, 2, \ldots, n\}$ com um arbitrário número de ciclos. Para cada permutação de $\{1, 2, \ldots, n\}$ que se decompõem em k ciclos, vamos repeti-los k vezes sublinhando cada um dos ciclos que aparecem na decomposição da referida permutação, por exemplo, temos uma única permutação de $\{1,2,3,4\}$ que se decompõem em um produto de quatro ciclos, a saber: $(1)(2)(3)(4)$. Vamos quadriplicar essa permutação diferenciando cada copia sublinhando um dos ciclos:

$$(1)(2)(3)(4) \rightarrow \begin{cases} (\underline{1})(2)(3)(4) \\ (1)(\underline{2})(3)(4) \\ (1)(2)(\underline{3})(4) \\ (1)(2)(3)(\underline{4}) \end{cases}.$$

Para cada permutação repetida e diferenciada por meio de um traço abaixo do ciclo vamos associar uma permutação de $\{1,2,3,4,5\}$, que se decompõem em um produto de dois ciclos da seguinte forma:

- Vamos ler cada permutação repetida em k, diferenciada por meio de um traço abaixo de cada ciclo da direita para esquerda;
- O ciclo que possue um traço abaixo formará um ciclo na nova permutação de $\{1,2,3,4,5\}$ que se decompõem em produto de dois ciclos;
- Os ciclos restantes dessa permutação formaram um novo ciclo, cujo número $n+1$ estará no início do ciclo seguidos dos outros números, que aparecem no restantes dos ciclos, sempre tomando os ciclos na permutação anterior da direta para esquerda.

O exemplo 1.1 deixa claro como ocorre essa associação. Para isso, observe:

$$\underline{(1)}(2)(3)(4) \to (5432)(1);$$

$$(1)\underline{(2)}(3)(4) \to (5431)(2);$$

$$(1)(2)\underline{(3)}(4) \to (5421)(3);$$

$$(1)(2)(3)\underline{(4)} \to (5321)(4).$$

Em geral, transformamos a permutação com n elementos que se decompõe em k ciclos, diferenciando cada uma das k cópias por um traço abaixo de um dos ciclos como segue $(C_k)(C_{k-1})\ldots(C_{j+1})\underline{(C_j)}(C_{j-1})\ldots(C_2)(C_1)$ em uma permutação de $n+1$ objetos, a saber, $((n+1)C_1 \ldots C_k)(C_j)$ que se decompõem em dois ciclos.

Reciprocamente, dado uma permutação $\sigma \in T_{n+1}$, então σ é da forma:

$$\sigma = ((n+1)\, a_1\, a_2 \cdots a_{n-j})(b_1 b_2 \cdots b_j).$$

Vamos associar $\sigma' \in S_n$, cujo ciclo sublinhado C_j de σ' é $C_j = (b_1 b_2 \cdots b_j)$, ou seja, o ciclo de σ que não tem o elemento $(n+1)$. Assim $\sigma' = (C_k)(C_{k-1})\ldots(C_{j+1})\underline{(C_j)}(C_{j-1})\ldots(C_2)(C_1)$, onde C_1 é formado pelo elemento do ciclo σ, $((n+1)\, a_1\, a_2 \cdots a_{n-j})$, excluindo $n+1$ e tendo os elementos $a_1\, a_2 \cdots a_{n-j}$ nessa ordem, e os elementos de C_1 é a_1, a_2 até encontrar $a_{i_1} < a_1$ e assim $(C_1) = (a_1\, a_2 \cdots a_{i_{1-1}})$, (C_2) é formado por $a_{1_1}\, a_{1_{1+1}} \cdots$ até encontrar um $a_{i_2} < a_{i_1}$ e $(C_2) = (a_{i_1}\, a_{i_{1+1}} \cdots a_{i_{2-1}})$, e assim sucessivamente.

Por exemplo, $\sigma' = (9\,8\,3\,6\,5)(1\,2\,7\,4) \in T_{8+1} = T_9$. O ciclo sublinhado é $(1\,2\,7\,4)$. Temos que $a_1 = 8$ e $a_2 = 3 < a_1$, assim $C_1 = (8)$, seja $a_2 = 3$, $a_3 = 6$ e $a_4 = 5 < a_3$, logo $C_2 = (3\,6\,5)$. Portanto $\sigma = (1\,2\,7\,4)(8)(365)$.

Outro exemplo: $(9\,6\,8\,1\,7\,3)(2\,5\,4) \in T_{8+1} = T_9$. O ciclo sublinhado é $\underline{(2\,5\,4)}$. Temos que $a_1 = 6$, $a_2 = 8$, $a_3 = 1$ e $a_3 < a_2$, logo $C_1 = (6\,8)$. Seja $a_3 = 1$, $a_4 = 7$ e $a_5 = 3$ assim $C_2 = (1\,7\,3)$. Portanto $\sigma = (2\,5\,4)(6\,8)(173)$.

Por isso, temos uma correspondência um para um entre os conjuntos contados em ambos os lados da Proposição 1.10. ■

Proposição 1.4: Seja *n* natural, $n \geq 1$, temos que:

$$\begin{bmatrix} n+1 \\ 2 \end{bmatrix} = \sum_{k=1}^{n} \frac{n!}{k}.$$

Demonstração: Vamos denotar por T_{n+1} o conjunto de todas as permutações de $n+1$ objetos que se decompõe em produto de dois ciclos. Temos que $|T_{n+1}| = \begin{bmatrix} n+1 \\ 2 \end{bmatrix}$.

Nas permutações em T_{n+1} iremos colocar o ciclo que contém o elemento 1 primeiro e iremos chama-lo *ciclo esquerdo* e outro *ciclo direito*. Todas as permutações em T_{n+1} são da forma: $(a_1 a_2 \dots a_j)(a_{j+1} a_{j+2} \dots a_{n+1})$, onde, $a_1 = 1$, e a_{j+1} é o menor elemento do ciclo direito.

Vamos contar as permutações de T_{n+1} que tem exatamente k elementos no ciclo direito. Para isso, contaremos cada permutação do conjunto de $n+1$ objetos que se decompõem em produto de dois ciclos, cujo ciclo direito tem k elementos da seguinte maneira: primeiramente faremos k escolhas dos elementos de $\{2, 3, \dots, n+1\}$ que podemos fazê-las em um total de $\binom{n}{k}$ maneiras. Em seguida iremos organizar esses elementos em fila que podemos fazer de $(k-1)!$ formas, pois o menor elemento da escolha ficou fixado na primeira posição.

Para cada escolha do total $\binom{n}{k}$ para compor o ciclo direito temos que a escolha do ciclo esquerdo fica pré-determinada. Dessa forma, só precisamos colocar em fila e podemos fazê-la de $(n-k)!$.

Com isso, segue do princípio multiplicativo que

$$\binom{n}{k} . (k-1)!\,(n-k)! = \frac{n!}{(n-k)!}(k-1)!\,(n-k)! = \frac{n!}{k}$$

permutações em T_{n+1} com k elementos no ciclo direito. Fazendo k variar de 1 até n, temos a identidade:

$$\begin{bmatrix} n+1 \\ 2 \end{bmatrix} = \sum_{k=1}^{n} \frac{n!}{k}. \blacksquare$$

1.2 FUNÇÃO GERADORA ORDINÁRIA PARA OS NÚMEROS DE STIRLING DO PRIMERIO TIPO

A partir da relação de recorrência dada no Teorema 1.1 iremos estabelecer a função geradora ordinária para os números de Stirling do primeiro tipo, ou seja, essa função é um polinômio na indeterminada x cujos coeficientes das potências de x são números de Stirling do primeiro tipo. Dessa forma, podemos encontrar $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}$ expandindo esse polinômio e observando seus coeficientes. Para isso, considere: $F_n(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} x^k$, sendo $F_n(x)$ a função geradora ordinária para $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}$, para $n \geq k \geq 1$.

Vamos convencionar $F_0(x) = 1$.

Suponha que $k > 0$ e multiplique x^n em ambos os lados da recorrência do Teorema 1.1:

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} x^n = \begin{bmatrix} n-1 \\ k-1 \end{bmatrix} x^n + (n-1) \begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix} x^n .$$

Dessa forma,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} x^k = \sum_{k=1}^{\infty} \begin{bmatrix} n-1 \\ k-1 \end{bmatrix} x^k + \sum_{k=1}^{\infty} (n-1) \begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix} x^k \text{ para } k \geq 1.$$

Portanto:

$$F_n(x) = x \sum_{k=1}^{\infty} \begin{bmatrix} n-1 \\ k-1 \end{bmatrix} x^{k-1} + (n-1) \sum_{k=1}^{\infty} \begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix} x^k ,$$

ou seja, $F_n(x) = x\, F_{n-1}(x) + (n-1)\, F_{n-1}(x)$, ou ainda, $F_n(x) = (x + n - 1)\, F_{n-1}(x)$, $\forall\ n \geq 1$

Vamos avaliar a função $F_n(x)$, para $n = 1,2,3, \ldots$, ou seja ,

$$F_1(x) = (x+1-1)\, F_{1-1}(x) = x\, F_0(x) = x\,;$$

$$F_2(x) = (x+2-1)\, F_{2-1}(x) = (x+1)\, x\,;$$

$$F_3(x) = (x+3-1)\, F_{3-1}(x) = (x+2)\,(x+1)\, x\,;$$

$$F_4(x) = (x+4-1)\, F_{4-1}(x) = (x+3)(x+2)\,(x+1)\, x\,;$$

$$F_5(x) = (x+5-1)\, F_{5-1}(x) = (x+4)(x+3)(x+2)\,(x+1)\, x\,;$$

$$\vdots$$

$$\vdots$$

$$F_n(x) = (x+n-1)\ldots(x+4)\,(x+3)\,(x+2)\,(x+1)\,x\,.$$

Portanto, dado $n \geq 1$ os números de Stirling do primeiro tipo são gerados por meio do coeficiente de x^k na expansão do polinômio $F_n(x)$.

Proposição 1.5: Seja $n > 0,\ n \in \mathbb{N}$. A função ordinária para os números de Stirling do primeiro tipo é dada por:

$$F_n(x) = (x+n-1)\ldots(x+4)\,(x+3)\,(x+2)\,(x+1)\,x\,.$$

Exemplo 1.2: Seja $n = 1, 2, 3, 4$, temos que:

$F_1(x) = x$; $F_2(x) = x + x^2$; $F_3(x) = 2x + 3x^2 + x^3$ e $F_4(x) = 6x + 11x^2 + 6x^3 + x^4$.

A seguir podemos representar por meio de uma tabela a expansão do polinômio $F_n(x)$ e os números de Stirling do primeiro tipo através dos coeficientes de x^k.

Tabela 5: Número de Stirling do primeiro tipo, obtidos através dos coeficientes de x^k do polinômio $F_n(x)$, para $1 \leq n \leq 5$.

n	$F_n(x) = (x+n-1)\ldots(x+2)\,(x+1)\,x$	Números de Stirling do primeiro tipo
1	$F_1(x) = 1x$	$\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} = 1$
2	$F_2(x) = 1x + 1x^2$	$\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix} = 1$; $\begin{bmatrix}2\\2\end{bmatrix} = 1$
3	$F_3(x) = 2x + 3x^2 + 1x^3$	$\begin{bmatrix}3\\1\end{bmatrix} = 2$; $\begin{bmatrix}3\\2\end{bmatrix} = 3$; $\begin{bmatrix}3\\3\end{bmatrix} = 1$
4	$F_4(x) = 6x + 11x^2 + 6x^3 + x^4$	$\begin{bmatrix}4\\1\end{bmatrix} = 6$; $\begin{bmatrix}4\\2\end{bmatrix} = 11$; $\begin{bmatrix}4\\3\end{bmatrix} = 6$; $\begin{bmatrix}4\\4\end{bmatrix} = 1$
5	$F_5(x) = 24x + 50x^2 + 35x^3 + 10x^4 + x^5$	$\begin{bmatrix}5\\1\end{bmatrix} = 24$; $\begin{bmatrix}5\\2\end{bmatrix} = 50$; $\begin{bmatrix}5\\3\end{bmatrix} = 35$; $\begin{bmatrix}5\\4\end{bmatrix} = 10$; $\begin{bmatrix}5\\5\end{bmatrix} = 1$

Fonte: Autor

A relação de recorrência para os números de Stirling do primeiro tipo que demonstramos combinatoriamente no teorema 1.1 pode ser demonstrada por meio dos polinômios $F_n(x)$ que descrevemos na proposição 1.5, ou seja, podemos iniciar um trabalho fazendo uma abordagem algébrica para os números de Stirling do primeiro tipo, definindo como o coeficiente de x^k na expansão do polinômio $F_n(x)$, e em seguida validar a recorrência da seguinte forma:

$$F_{n+1}(x) = (x+n)\,(x+(n-1))\ldots(x+1)\,x = (x+n)\,F_n(x) = x\,F_n(x) + n\,F_n(n) \qquad 1.3$$

Comparando o coeficiente x^k em $F_{n+1}(x)$ e 1.3, temos que:

$$\begin{bmatrix} n+1 \\ k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n \\ k+1 \end{bmatrix} + n \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}.$$

Dessa forma obtemos uma prova algébrica para a relação de recorrência dos números de Stirling do primeiro tipo.

Observe que os números de Stirling do primeiro tipo no Ensino Médio podem ser trabalhados inicialmente por meio do conceito de polinômios e em seguida podemos usar esse conceito e explorar a natureza combinatória dessa sequência numérica.

1.3 OUTRO PROBLEMA COMBINATÓRIO VIA NÚMEROS DE STIRLING DO PRIMEIRO TIPO

Na seção anterior exploramos a natureza combinatória dos números de Stirling do primeiro tipo contando o número de permutações de um conjunto de n objetos que se decompõem em k ciclos. Agora iremos estabelecer outra interpretação combinatória para os números de Stirling do primeiro tipo, para isso considere o seguinte exemplo, cuja ideia foi retirada de [2]:

Exemplo 1.3: De quantas maneiras quatro pessoas podem se sentar em volta de duas mesas circulares, sem que nenhuma mesa fique vazia? E se forem três mesas?

Esse problema representa uma contagem, onde o número de mesas representa os ciclos e o número de pessoas os elementos do conjunto A, ou seja, como temos quatro pessoas, assim o conjunto A poderá ser definido por $A = \{a, b, c, d\}$.

Na primeira situação proposta no exemplo 1.3, temos duas mesas. Abaixo estão representadas as maneiras de organizarmos esta distribuição:

Tabela 6: Maneiras de distribuir quatro pessoas em duas mesas.

Pessoa a senta-se sozinha. Pessoa b, c e d sentam-se juntas.
Pessoa a senta-se sozinha. Pessoa b, d e c sentam-se juntas.
Pessoa b senta-se sozinha. Pessoa a, c e d sentam-se juntas.
Pessoa b senta-se sozinha. Pessoa a, d e c sentam-se juntas.
Pessoa c senta-se sozinha. Pessoa a, b e d sentam-se juntas.
Pessoa c senta-se sozinha. Pessoa b, a e d sentam-se juntas.
Pessoa d senta-se sozinha. Pessoa a, b e c sentam-se juntas.
Pessoa d senta-se sozinha. Pessoa a, c e b sentam-se juntas.
Pessoas a e b sentam-se numa mesa, c e d em outra.
Pessoas a e c sentam-se numa mesa, b e d em outra.
Pessoas a e d sentam-se numa mesa, b e c em outra.

Fonte:Autor

Ou seja, temos 11 maneiras de realizarmos a distribuição que é equivalente a $\begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix}$.

No caso de três mesas, ou seja, temos a seguinte distribuição:

Tabela 7: Maneiras de distribuir quatro pessoas em duas mesas.

Pessoas a e b sentam-se sozinhas. Pessoas c e d sentam-se juntas.
Pessoas a e c sentam-se sozinhas. Pessoas b e d sentam-se juntas.
Pessoas a e d sentam-se sozinhas. Pessoas b e c sentam-se juntas.
Pessoas b e c sentam-se sozinhas. Pessoas a e d sentam-se juntas.
Pessoas b e d sentam-se sozinhas. Pessoas a e c sentam-se juntas.
Pessoas c e d sentam-se sozinhas. Pessoas a e b sentam-se juntas.

Fonte: Autor

Neste caso, temos 6 maneiras de realizarmos a distribuição, ou seja, $\begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix}$.

No exemplo 1.3 cada pessoa representa um elemento da permutação descrita na definição 1.1, onde as mesas representam os ciclos disjuntos e o total de maneiras de realizarmos essa distribuição, representa total de permutações.

Proposição 1.6: Sejam n e k números naturais, com $n \geq k > 0$, $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}$ determina o número de maneiras de distribuirmos n pessoas sentadas em k mesas circulares idênticas, sem que seja permitido que alguma dessas mesas fique vazia.

Se $n<0$, $k<0$ ou $n<k$, convencionamos $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}=0$.

Nos casos a seguir faremos outra abordagem combinatória para demonstrarmos as propriedades da Proposição 1.2, onde as mesmas foram demonstradas usando conceito de permutações que se decompõe em k ciclos, sendo que aqui usaremos que os números de Stirling é o número de maneiras de distribuirmos n pessoas em k mesas. A ideia da prova dessas propriedades foram retiradas de [3].

Para isso sejam *n*, *k* números naturais, com $n \geq k \geq 1$, temos as seguintes propriedades que já provamos na Proposição 1.2:

(i) $\begin{bmatrix} n \\ 1 \end{bmatrix}=(n-1)!$

(ii) $\begin{bmatrix} n \\ n \end{bmatrix}=1$

(iii) $\begin{bmatrix} n \\ n-1 \end{bmatrix}=\binom{n}{2}$

A propriedade (i) pode ser abordada através seguinte questionamento. Quantas maneiras podemos posicionar *n* pessoas em 1 mesa? Para posicionarmos *n* pessoas em apenas uma mesa, as contagens só se distinguirão com relação ao ordenamento circular das pessoas nessa mesa. Tomando como referência a pessoa 1, restam $n-1$ pessoas para se sentarem em $n-1$ posições de $(n-1)!$ maneiras distintas, ou seja, $\begin{bmatrix} n \\ 1 \end{bmatrix}=(n-1)!$. Temos que (ii) representa o total de maneiras de posicionarmos *n* pessoas em *n* mesas circulares idênticas, como essa distribuição possui uma única maneira de ser realizada, cada uma das mesas contendo uma pessoa, ou seja, $\begin{bmatrix} n \\ n \end{bmatrix}=1$.

A propriedade (iii) representa quantas maneiras podemos posicionar *n* pessoas em $n-1$ mesas circulares idênticas, a única maneira para posicionarmos *n* pessoas em *n* - 1 mesas circulares idênticas é distribuirmos em *n* - 2 mesas com apenas uma pessoa cada e uma mesa com duas pessoas, então basta escolher dentre as *n* pessoas as duas que sentam juntas na mesma mesa. Essa escolha pode ser realizada através de uma combinação das *n* pessoas tomadas duas a duas, ou seja, $\begin{bmatrix} n \\ n-1 \end{bmatrix}=\binom{n}{2}$.

A seguir apresentaremos outra propriedade dos números de Stirling do primeiro tipo. A propriedade, tal como sua demonstração, foi retirada de [4].

Proposição 1.7: Sejam *m* e *n* números naturais, com $n, m \geq 0$, temos que:

$$\sum_{k=0}^{m}(n+k)\begin{bmatrix} n+k \\ k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m+n+1 \\ m \end{bmatrix}. \qquad 1.4$$

Demonstração: O lado direito da proposição 1.7, representa quantas maneiras $m+n+1$ pessoas (rotuladas por: pessoa 0 à pessoa $m + n$) podem se sentar em *m* mesas circulares, por definição $\begin{bmatrix} m+n+1 \\ m \end{bmatrix}$ maneiras, agora vamos provar essa quantidade é igual ao lado esquerdo de 1.4.

Dividimos em casos, de acordo com o maior número *k*, tal que a pessoa *k* não se senta sozinha em uma mesa, essa pessoa *k* pode ser no mínimo a pessoa $n+1$, quando as pessoas 0 à $n+1$se sentam em uma única mesa e as $m-1$pessoas seguintes (pessoa $n+2$ à pessoa$m+n$) se sentam em uma mesa cada uma. Por outro lado, o maior valor da pessoa *k* é $m+n$, quando a pessoa $m+n$ não estiver sozinha em uma mesa, logo, *k* é tal que $n+1 \leq k \leq m+n$. Por nossa hipótese, partimos do pressuposto que cada uma das pessoas $n+1$à $m+n$, ocupam sozinhas uma mesa cada, essas pessoas ocupam $m+n-k$ mesas, uma pessoa em cada mesa, restando $k-n$ mesas desocupadas.

Para ocuparmos as $k-n$ mesas desocupadas, deixamos inicialmente de fora a pessoa *k* e as ocupamos com as outras $k-1$ pessoas (pessoa 0 à pessoa $k-1$). Isso pode ser feito de $\begin{bmatrix} k \\ k-n \end{bmatrix}$maneiras, depois basta escolher à direita de qual dessas $k-1$ pessoas ficará a pessoa *k*, pelo princípio multiplicativo, temos $k\begin{bmatrix} k \\ k-n \end{bmatrix}$maneiras.

Somando todas as variações de *k* temos $\sum_{k=n+1}^{m+n} k\begin{bmatrix} k \\ k-n \end{bmatrix}$ que é equivalente ao lado esquerdo da propriedade, a menos do primeiro termo do somatório, mas esse termo é nulo, pois $\begin{bmatrix} n \\ 0 \end{bmatrix} = 0$. ■

2 NÚMEROS DE STIRLING DE SEGUNDO TIPO

Um conjunto de objetos pode ser classificado de acordo com muitos critérios diferentes, dependendo da natureza dos objetos. Por exemplo, podemos classificar pessoas de certa região por meio da idade, nacionalidade, etnia, profissão, do estado civil, etc. Observe que nesse exemplo, temos uma função do conjunto de pessoas de certa região (objetos), no conjunto de critérios pelos quais os objetos são classificados.

Estamos interessados em uma classificação, em que dois objetos no mesmo subconjunto sempre caiam no mesmo nível do critério, ou seja, uma classificação representa uma partição do conjunto de objeto, onde dois objetos pertencem à mesma classe da partição, sempre caem no mesmo nível.

Os números de Stirling são de importância fundamental na teoria da enumeração. Enquanto $\binom{n}{k}$ é o número dos subconjuntos com k elementos de um conjunto de n elementos, o número Stirling $\left\{ n \atop k \right\}$ representa o número de partições de um conjunto X, de n elementos formados por k subconjuntos não vazios de X (tais subconjuntos são as classes da partição).

Neste capítulo abordaremos a sequência de números, chamados de números de Stirling do segundo tipo, que denotamos por $\left\{ n \atop k \right\}$, onde n e k são números naturais. Essa sequência de números tem um padrão similar ao coeficiente binomial $\binom{n}{k}$, podemos escrever os números $\left\{ n \atop k \right\}$ na forma triangular como fazemos com $\binom{n}{k}$, e iremos desenvolver problemas combinatórios que podem ser modelados por meio dos números de Stirling do segundo tipo.

Inicialmente iremos definir os números de Stirling por meio das partições de um conjunto X, de n objetos, $\{c_1, c_2, \ldots, c_n\}$, sem perda de generalidade, vamos supor que $X = \{1, 2, \ldots, n\}$, em seguida, vamos estabelecer uma recorrência para os números de Stirling do segundo tipo.

A partir da relação de recorrência, vamos descrever uma função racional, cujos coeficientes na expansão em série de potências são números de Stirling do segundo tipo, essa é a função geradora ordinária para essa sequência numérica. Além disso, estabeleceremos uma fórmula explícita para os números de Stirling do segundo tipo e algumas propriedades inerentes desse conceito. Exploremos alguns problemas combinatórios que envolvem os números de Stirling do segundo tipo.

2.1 DEFINIÇÃO DOS NÚMEROS DE STIRLING DE SEGUNDO TIPO

Definição 2.1: Uma *partição* de um conjunto S é uma coleção de subconjuntos de S não vazios, disjuntos dois a dois, cuja união é igual a S. Os subconjuntos de S não vazios e disjuntos dois a dois, são chamados de *classe* de partição.

Exemplo 2.1: Seja $S=\{1,2,3,4,5\}$, temos que $\{1,2,3\}$, $\{4\}$ e $\{5\}$ formam uma partição de S, pois $S=\{1,2,3\}\bigcup\{4\}\bigcup\{5\}$, além disso, $\{1,2,3\}\bigcap\{4\}=\varnothing$, $\{1,2,3\}\bigcap\{5\}=\varnothing$ e $\{4\}\bigcap\{5\}=\varnothing$. Denotamos a partição por $\wp_1=\{\{1,2,3\},\{4\},\{5\}\}$, $c_1=\{1,2,3\}$, $c_2=\{4\}$ e $c_3=\{5\}$ são classes da partição $\wp_1$.

Exemplo 2.2: Seja $S=\{1,2,3,4,5\}$, temos que $\{1,2\}$, $\{3\}$ e $\{4,5\}$, formam uma partição de S, pois $S=\{1,2\}\bigcup\{3\}\bigcup\{4,5\}$, além disso, $\{1,2\}\bigcap\{3\}=\varnothing$, $\{1,2\}\bigcap\{4,5\}=\varnothing$ e $\{3\}\bigcap\{4,5\}=\varnothing$.

Exemplo 2.3: Seja $S=\{1,2,3,4,5\}$, temos que $\{1,2\}$, $\{3,4\}$ e $\{5\}$ formam uma partição de S, pois $S=\{1,2\}\bigcup\{3,4\}\bigcup\{5\}$, além disso, $\{1,2\}\bigcap\{3,4\}=\varnothing$, $\{1,2\}\bigcap\{5\}=\varnothing$ e $\{3,4\}\bigcap\{5\}=\varnothing$.

Exemplo 2.4: Seja $S=\{1,2,3,4\}$, vamos determinar todas as partições de $\{1,2,3,4\}$ em duas classes, segue tais partições:

$\wp_1=\{\{1,2\},\{3,4\}\}$; $\wp_2=\{\{1,3\},\{2,4\}\}$ $\wp_3=\{\{1,4\},\{2,3\}\}$; $\wp_4=\{\{1,2,3\},\{4\}\}$

$\wp_5=\{\{1,2,4\},\{3\}\}$; $\wp_6=\{\{1,3,4\},\{2\}\}$ $\wp_7=\{\{1\},\{2,3,4\}\}$.

Os exemplos acima nos ajudam a entender a definição dos números de Stirling do segundo tipo, que serão definidos por meio do conceito de partição de um conjunto finito.

Definição 2.2: Sejam $n,k\in\mathbb{N}$. O *número de Stirling do segundo tipo* é o total de partições de $\{1,2,\ldots,n\}$ em k classes. O número de Stirling do segundo tipo é denotado por $\left\{\begin{matrix} n \\ k \end{matrix}\right\}$.

Vamos convencionar $\left\{ \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix} \right\} = 1$.

Segue do exemplo 2.4, que um conjunto com 4 elementos permite construir 7 partições com duas classe, ou seja, $\left\{ \begin{matrix} 4 \\ 2 \end{matrix} \right\} = 7$.

A partir da definição 2.2 podemos obter algumas propriedades imediatas, tais como: $\left\{ \begin{matrix} n \\ 0 \end{matrix} \right\} = 0$, *se* $n > 0$; $\left\{ \begin{matrix} n \\ 1 \end{matrix} \right\} = 1$, *se* $n > 0$; $\left\{ \begin{matrix} n \\ n \end{matrix} \right\} = 1$; $\left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\} = 0$, *se* $0 < n < k$.

Exemplo 2.5: Sejam $S = \{1, 2, 3, 4\}$ e $S' = \{1, 2, 3\}$. Considere as partições de S' em duas classes:

$$\wp_1 = \{\{1\}, \{2, 3\}\}$$

$$\wp_2 = \{\{2\}, \{1, 3\}\}$$

$$\wp_3 = \{\{3\}, \{1, 2\}\}$$

temos que $\left\{ \begin{matrix} 3 \\ 2 \end{matrix} \right\} = 3$.

Para cada partição de S' em duas classes vamos construir uma nova partição de S em duas classes da seguinte forma: colocamos o objeto 4 em alguma classe da partição, por exemplo:

$$\begin{tikzcd} & \wp_1' = \{\{1, 4\}, \{2, 3\}\}; \\ \wp_1 = \{\{1\}, \{2, 3\}\} \arrow[ur] \arrow[dr] & \\ & \wp_1'' = \{\{1\}, \{2, 3, 4\}\}; \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} & \wp_2' = \{\{2, 4\}, \{1, 3\}\}; \\ \wp_2 = \{\{2\}, \{1, 3\}\} \arrow[ur] \arrow[dr] & \\ & \wp_2'' = \{\{2\}, \{1, 3, 4\}\}; \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} & \wp_3' = \{\{3, 4\}, \{1, 2\}\}; \\ \wp_3 = \{\{3\}, \{1, 2\}\} \arrow[ur] \arrow[dr] & \\ & \wp_3'' = \{\{3\}, \{1, 2, 4\}\}. \end{tikzcd}$$

Observe que para cada partição de $S^{'}=\{1,2,3\}$ em duas classes, geramos duas novas partições de $S=\{1,2,3,4\}$ em duas classes, cujo objeto 4 está em uma das classes.

Agora vamos listar as partições $S=\{1,2,3,4\}$ de duas classes:

$\{\{2,4\},\{1,3\}\}$	$\{\{3\},\{1,2,4\}\}$	$\{\{1\},\{2,3,4\}\}$
$\{\{2\},\{1,3,4\}\}$	$\{\{1,2,3\},\{4\}\}$	
$\{\{3,4\},\{1,2\}\}$	$\{\{1,4\},\{2,3\}\}$	

Observe que entre as partições acima temos:

- Partições de $S=\{1,2,3,4\}$, em duas classes, onde o objeto 4 está em pelos menos em uma das classes e a quantidade de elementos nessa classe é maior do que 1.
- Partições de $S=\{1,2,3,4\}$, em duas classes, onde a classe, $\{4\}$ formada só pelo objeto 4 está nessa partição.

Observando o fenômeno que ocorre no exemplo 2.5, podemos enunciar e em seguida provar o seguinte resultado para os números de Stirling do segundo tipo.

Teorema 2.1: Sejam n e k números naturais, tal que $n \geq k > 0$, então:

$$\begin{Bmatrix} n \\ k \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} n-1 \\ k-1 \end{Bmatrix} + k \begin{Bmatrix} n-1 \\ k \end{Bmatrix}.$$

Demonstração: Vamos dividir o conjunto das partições de $S=\{1,2,\ldots,n\}$ em k classes em dois conjuntos:

1) O conjunto A é formado pelas partições de S em k classes em que a classe $\{n\}$ está nessa partição. Temos um total de $\begin{Bmatrix} n-1 \\ k-1 \end{Bmatrix}$ partições em k classes, cuja classe $\{n\}$ faz parte dessa partição.

2) O conjunto B é formado pelas partições de S, onde a classe $\{n\}$ não faz parte dessa partição, neste caso, as classes das partições em que n é um objeto da classe tem uma quantidade de elementos maiores do que 1, ou seja, $B=\{\wp;\ \wp \notin A\}$. Para calcular $|B|$, vamos considerar $B'=\{\wp_1^{'}\ \textit{partições de}\ S'=\{1,2,\ldots,n-1\}\ \textit{em}\ k\ \textit{classes}\}$. Temos que $\wp_1^{'} \in B'$ se, e somente se, $\wp_1^{'}=\{c_1, c_2, \ldots, c_k\}$, com $c_i \cap c_j = \emptyset$ para todo $i \neq j$ e

$c_1 \cup c_2 \cup \cdots \cup c_k = S'$. Além disso, $|B'| = \left\{ \begin{matrix} n-1 \\ k \end{matrix} \right\}$. Para cada partição $\wp_1' \in B'$, vamos construir k partições $\wp_1$ em B colocando o objeto n em umas das classes c_i com $i = 1, 2, \ldots, k$, ou seja, a partir de $\wp_1'$ construímos k partições $\wp_1$ de $S = \{1, 2, \ldots, n\}$, portanto $|B| = k|B'| = k \left\{ \begin{matrix} n-1 \\ k \end{matrix} \right\}$.

Segue de 1) e 2) que:

$$\left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} n-1 \\ k-1 \end{matrix} \right\} + k \left\{ \begin{matrix} n-1 \\ k \end{matrix} \right\}. \quad \blacksquare$$

O teorema 2.1 estabelece uma relação de recorrência para $n, k \in \mathbb{N}$, além disso, podemos estender a definição de números de Stirling do segundo tipo para um par de inteiros *n* e *k*, ou seja;

$$\left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\} = \begin{cases} 0 & se \;\; k > n, \;\; n > 0 \;\; e \;\; k < 0 \\ 1 & se \;\; n = k = 0 \\ \left\{ \begin{matrix} n-1 \\ k-1 \end{matrix} \right\} + k \left\{ \begin{matrix} n-1 \\ k \end{matrix} \right\} & se \;\; (n,k) \neq (0,0) \end{cases} . \qquad 2.1$$

Através do Teorema 2.1 podemos ilustrar na tabela 8 alguns números de Stirling de segundo tipo.

Tabela 8: Número de Stirling do segundo tipo, para $0 \leq n \leq 7$ e $0 \leq k \leq 7$.

$\left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\}$	$k=1$	$k=2$	$k=3$	$k=4$	$k=5$	$k=6$	$k=7$
$n=1$	1	0	0	0	0	0	0
$n=2$	1	1	0	0	0	0	0
$n=3$	1	3	1	0	0	0	0
$n=4$	1	7	6	1	0	0	0
$n=5$	1	15	25	10	1	0	0
$n=6$	1	31	90	65	15	1	0
$n=7$	1	67	301	350	140	21	1

Fonte: Autor

Os números de Stirling do segundo tipo, também podem ser dispostos na forma triangular, de maneira análoga aos coeficientes binomiais, chamado de Triângulo de Pascal, ou seja:

Tabela 9: Número de Stirling do segundo tipo representados na forma de triangular

$\left\{ {1 \atop 1} \right\}$	$\rightarrow$	1
$\left\{ {2 \atop 1} \right\} \left\{ {2 \atop 2} \right\}$	$\rightarrow$	1 1
$\left\{ {3 \atop 1} \right\} \left\{ {3 \atop 2} \right\} \left\{ {3 \atop 3} \right\}$	$\rightarrow$	1 3 1
$\left\{ {4 \atop 1} \right\} \left\{ {4 \atop 2} \right\} \left\{ {4 \atop 3} \right\} \left\{ {4 \atop 4} \right\}$	$\rightarrow$	1 7 6 1
$\left\{ {5 \atop 1} \right\} \left\{ {5 \atop 2} \right\} \left\{ {5 \atop 3} \right\} \left\{ {5 \atop 4} \right\} \left\{ {5 \atop 5} \right\}$	$\rightarrow$	1 15 25 10 1
$\vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots$		$\vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots$

Fonte: Autor

Exemplo 2.6: Seja $A = \{1, 2, 3, 4\}$, considere uma distribuição dos quatro elementos em duas classes, primeiro posicionaremos o elemento 1 em uma das classes, com isso os outros 3 elementos teriam a possibilidade de escolher qualquer uma das duas classes. Assim temos um total de 2^3 maneira de realizarmos essa distribuição, porém temos que excluir a possibilidade de que todos os elementos fiquem na mesma classe, obtendo um total de $2^3 - 1 = \left\{ {4 \atop 2} \right\} = 7$.

Exemplo 2.7: Considere uma distribuição dos quatro elementos em três classes. Tal distribuição implica que uma das classes possuirá dois elementos, enquanto as demais um elemento. Para determinar o total de distribuição, basta realizar uma combinação dos 4 elemento dois a dois, ou seja:

$$\frac{4!}{2!(4-2)!} = \binom{4}{2} = \left\{ {4 \atop 3} \right\} = 6.$$

Proposição 2.1: Sejam *n*, *k* números naturais, com $n \geq k \geq 1$, temos as seguintes propriedades para os números de Stirling do segundo tipo:

i) $\left\{ \begin{matrix} n \\ 2 \end{matrix} \right\} = 2^{n-1} - 1$;

ii) $\left\{ \begin{matrix} n \\ n-1 \end{matrix} \right\} = \binom{n}{2}$.

Demonstração: (i) Seja $A = \{1, 2, \ldots, n\}$, considere uma distribuição dos *n* elementos em duas classes, onde posicionamos o elemento 1 em uma das duas classes e os $n-1$ elementos restantes distribuímos nas duas classes, ou seja, cada um dos $n-1$ elementos tem duas possibilidades de classe, assim temos um total de 2^{n-1} maneira de realizarmos essa distribuição, excluindo a possibilidade de todos os *n* elementos estarem na mesma classe, temos que, $\left\{ \begin{matrix} n \\ 2 \end{matrix} \right\} = 2^{n-1} - 1$.

(ii) Temos que, uma distribuição de *n* elementos em $n-1$ classe, implica que uma das classes possuirá dois elementos, para determinar quantas maneiras podemos realizar essa distribuição, basta fazer uma combinação dos *n* elementos dois a dois, ou seja, $\left\{ \begin{matrix} n \\ n-1 \end{matrix} \right\} = \binom{n}{2}$.

2.2 FÓRMULA EXPLÍCITA PARA OS NÚMEROS DE STIRLING DO SEGUNDO TIPO

Queremos estabelecer uma fórmula para $\left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\}$ por meio da recorrência que obtemos em 2.1. O procedimento que usaremos faz uso do conceito de funções geradoras. Temos três opções para função geradora para $\left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\}$.

$$A_n(y) = \sum_{k=0}^{\infty} \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\} y^k \ ;$$

$$B_k(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\} x^n \ ;$$

$$C(x, y) = \sum_{n,k \in \mathbb{N}}^{\infty} \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\} x^n y^k \ .$$

Vamos utilizar $B_k(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\left\{ {n \atop k} \right\} x^n$ para encontrar a função geradora para $\left\{ {n \atop k} \right\}$ por ser mais conveniente.

Observe que, $B_0(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\left\{ {n \atop 0} \right\} x^n=\left\{ {0 \atop 0} \right\}=1$.

Suponha que $k>0$ e multiplique x^n na recorrência:

$$\left\{ {n \atop k} \right\}=\left\{ {n-1 \atop k-1} \right\}+k\left\{ {n-1 \atop k} \right\}.$$

Temos que:

$$\left\{ {n \atop k} \right\}x^n=\left\{ {n-1 \atop k-1} \right\}x^n+k\left\{ {n-1 \atop k} \right\}x^n,$$

dessa forma,

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left\{ {n \atop k} \right\}x^n=\sum_{n=0}^{\infty}\left\{ {n-1 \atop k-1} \right\}x^n+\sum_{n=0}^{\infty}k\left\{ {n-1 \atop k} \right\}x^n.$$

Portanto, $B_k(x)=x\,B_{k-1}(x)+k\,x\,B_k(x)$, ou seja, $B_k(x)-k\,x\,B_k(x)=x\,B_{k-1}(x)$. Ou ainda $B_k(x)(1-k\,x)=x\,B_{k-1}(x)$, dessa forma, $B_k(x)=\frac{x}{1-k\,x}\,B_{k-1}(x)$, $\forall\ k\geq 1$.

Vamos avaliar a função $B_k(x)$, para $k=1,2,3,\ldots$, ou seja ,

$$B_1(x)=\frac{x}{1-x}\,B_0(x)=\frac{x}{1-x};$$

$$B_2(x)=\frac{x}{1-2x}\,B_1(x)=\frac{x^2}{(1-x)(1-2x)};$$

$$B_3(x)=\frac{x}{1-3x}\,B_2(x)=\frac{x^3}{(1-3x)(1-2x)(1-x)};$$

$$\vdots$$

$$B_k(x)=\frac{x^k}{(1-x)(1-2x)(1-3x)\cdots(1-kx)}.$$

Portanto: $B_k(x)=\dfrac{x^k}{(1-x)(1-2x)(1-3x)\cdots(1-kx)}$. 2.2

O coeficiente de x^n na expansão de $B_k(x)$ dada em 2.2 é o número de Stirling do segundo tipo $\left\{ n \atop k \right\}$, então dizemos que $\dfrac{x^k}{(1-x)(1-2x)(1-3x)\cdots(1-kx)}$ é a função geradora ordinária para $\left\{ n \atop k \right\}$. Observe que o coeficiente de $\left\{ n \atop k \right\}$ em 2.2 é equivalente ao coeficiente de x^{n-k} em:

$$\frac{1}{(1-x)(1-2x)(1-3x)\cdots(1-kx)} \quad . \tag{2.3}$$

Proposição 2.2: Sejam n e k números naturais, tais que $n \geq k > 0$, então $B_k(x) = \dfrac{x^k}{(1-x)(1-2x)(1-3x)\cdots(1-kx)}$ é a função geradora ordinária para os números de Stirling do segundo tipo.

O próximo passo é determinar uma fórmula explícita para $\left\{ n \atop k \right\}$ por meio de 2.3. A função dada em 2.3 é uma função racional, cujo denominador é formado por um produto de k fatores lineares e distintos. Desta forma, vamos decompor 2.3 em soma de funções racionais mais simples, a saber, fração parcial. Dessa forma, existem $A_1, A_2, \ldots, A_k \in \mathbb{R}$ tais que:

$$\frac{1}{(1-x)(1-2x)(1-3x)\cdots(1-kx)} = \frac{A_1}{1-x} + \frac{A_2}{1-2x} + \cdots + \frac{A_r}{1-rx} + \cdots + \frac{A_k}{1-kx} \tag{2.4}$$

Agora vamos determinar A_i, $i = 1, 2, \ldots, k$ que satisfazem 2.4. Temos que:

$$\frac{1}{(1-x)(1-2x)(1-3x)\cdots(1-kx)} = \frac{A_1(1-2x)\ldots(1-kx) + \cdots + A_k(1-x)\ldots(1-(k-1)x)}{(1-x)(1-2x)\ldots(1-kx)},$$

ou seja,

$$1 = A_1(1-2x)\ldots(1-kx) + \cdots + A_r(1-x)\ldots(1-(r-1)x)(1-(r+1)x)\ldots(1-kx) + \cdots +$$
$$+ \cdots + A_k(1-x)\cdots(1-(k-1)x) \;, \tag{2.5}$$

fazendo $x = \dfrac{1}{r}$ em 2.5 temos:

$$A_r\left(1-\frac{1}{r}\right)\left(1-2\frac{1}{r}\right)\cdots\left(1-(\mathrm{r}-1)\frac{1}{r}\right)\left(1-(\mathrm{r}+1)\frac{1}{r}\right)\ldots\left(1-\frac{k}{r}\right)=1,$$

ou seja,

$$A_r\left[\left(\frac{r-1}{r}\right)\left(\frac{r-2}{r}\right)\cdots\left(\frac{r-r+1}{r}\right)\left(\frac{r-r-1}{r}\right)\ldots\left(\frac{r-k}{r}\right)\right]=1,$$

isto é,

$$A_r\left[\frac{(r-1)(r-2)\ldots 1\,(-1)(-2)\ldots(r-k)}{r^{k-1}}\right]=1,$$

ou ainda,

$$A_r\,\frac{(r-1)!(-1)^{k-r}(k-r)!}{r^{k-1}}=1.\ \text{Logo}\ A_r=\frac{r^{k-1}(-1)^{k-r}}{(r-1)!\,(k-r)!}.$$

Vamos reescrever A_r:

$$A_r=\frac{r^{k-1}(-1)^{k-r}r}{(r-1)!\,(k-r)!\mathrm{r}}=\frac{r^k(-1)^{k-r}k!}{r!\,(k-r)!\,k!}=\frac{r^k}{k!}(-1)^{k-r}\frac{k!}{r!\,(k-r)!}=\frac{r^k}{k!}(-1)^{k-r}\binom{k}{r}\quad. \qquad 2.6$$

Substituindo 2.6 em 2.4, temos,

$$\frac{1}{(1-x)}\cdot\frac{1}{(1-2x)}\cdots\frac{1}{(1-kx)}=\sum_{r=1}^{k}A_r\frac{1}{1-rx}=\sum_{r=1}^{k}\frac{r^k(-1)^{k-r}}{k!}\binom{k}{r}\cdot\frac{1}{1-rx}\quad. \qquad 2.7$$

Observe que

$$\frac{1}{1-rx}=1+rx+r^2x^2+r^3x^3+\cdots+r^sx^s+\cdots\quad. \qquad 2.8$$

Substituindo 2.8 em 2.7, temos:

$$\frac{1}{(1-x)}\cdot\frac{1}{(1-2x)}\cdots\frac{1}{(1-kx)}=\sum_{r=1}^{k}A_r\frac{1}{1-rx}=\sum_{r=1}^{k}\frac{r^k(-1)^{k-r}}{k!}\binom{k}{r}.(1+rx+r^2x^2+r^3x^3+\cdots). \qquad 2.9$$

Segue de 2.9 que coeficiente de x^{n-k}, $\left\{\begin{matrix} n \\ k \end{matrix}\right\}$ é:

$$\left\{\begin{matrix} n \\ k \end{matrix}\right\}=\sum_{r=1}^{k}\frac{r^k(-1)^{k-r}}{k!}\binom{k}{r}r^{n-k}=\sum_{r=1}^{k}\frac{1}{k!}r^{k+n-k}(-1)^{k-r}\binom{k}{r}=\frac{1}{k!}\sum_{r=1}^{k}r^n(-1)^{k-r}\binom{k}{r}. \qquad 2.10$$

Reescrevendo 2.10, temos que:

$$\left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\} = \frac{1}{k!} \sum_{r=1}^{k} (-1)^{k-r} \binom{k}{r} r^n = (-1)^{k-1} 1^n \binom{k}{1} + (-1)^{k-2} 2^n \binom{k}{2} + \cdots + (-1)^1 (k-1)^n \binom{k}{k-1} + (-1)^0 k^n \binom{k}{k}.$$

Como $\binom{k}{k-i} = \binom{k}{i}$, então concluímos:

$$\left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\} = (-1)^{k-1} 1^n \binom{k}{k-1} + (-1)^{k-2} 2^n \binom{k}{k-2} + \cdots + (-1)^1 (k-1)^n \binom{k}{1} + (-1)^0 k^n \binom{k}{0} =$$

$$= \frac{1}{k!} \sum_{i=1}^{k} (-1)^i \binom{k}{i} (k-i)^n .$$

Sendo assim estabelecemos uma forma explícita para calcular os números de Stirling do segundo tipo.

Teorema 2.2: Sejam n e k números naturais, tal que $n \geq k > 0$, então:

$$\left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\} == \frac{1}{k!} \sum_{i=1}^{k} (-1)^i \binom{k}{i} (k-i)^n .$$

2.3 OUTROS PROBLEMAS QUE ENVOLVEM O NÚMERO DE STIRLING DO SEGUNDO TIPO

Muitos problemas de enumeração podem ser formulados como contagem do número de distribuições de bolas em caixas ou urnas, as bolas aqui correspondem aos objetos num conjunto finito X e as caixas ou urnas correspondem aos níveis. O número das possíveis distribuições de n bolas em k caixas depende se as bolas ou as caixas são idênticas ou distintas. Problemas de combinatória dessa natureza podem ser similares de determinar um número de Stirling do segundo tipo, ou determinar a quantidade de funções sobrejetoras que podemos definir de um conjunto finito A em um conjunto finito B. O objetivo da seção é estabelecer uma forma explícita para funções sobrejetoras de um conjunto finito A em um conjunto finito B e estabelecer uma conexão desse resultado com os números de Stirling do segundo tipo, para isso iremos abordar o princípio da inclusão e exclusão e por meio deste princípio determinaremos uma fórmula explícita para calcular a quantidade de tais funções que podem ser definidas.

Também nessa seção iremos determinar a função geradora exponencial para os números de Stirling do segundo tipo, finalizando com problemas de contagem que podem ser resolvidos usando o conceito de número de Stirling do segundo tipo.

2.3.1 PRINCÍPIO DA INCLUSÃO E EXCLUSÃO

Iniciaremos o Princípio da inclusão e exclusão por meio do seguinte exemplo:

Exemplo 2.8: Numa classe de 30 alunos, 14 falam inglês, 5 falam alemão e 3 falam inglês e alemão. Quantos alunos falam pelo menos uma língua dentre inglês e alemão?

Temos que:

A: conjunto formado pelos alunos que falam inglês;

B: conjunto formado pelos alunos que falam alemão;

$A \cap B$: conjunto formado pelos alunos que falam inglês e alemão.

Assim temos que $|A| = 14$, $|B| = 5$ e $|A \cap B| = 3$. Observe que:

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B| = 14 + 5 - 3 = 16.$$

Quando somamos 14 com 15, teremos contado duas vezes àqueles alunos que se encontram em $A \cap B$, ou seja, os que falam inglês e alemão.

Proposição 2.3: Considere A e B conjuntos finitos. Então:

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|.$$

Demonstração: A demonstração que faremos, consiste de verificar que $|A| + |B| - |A \cap B|$ conta o número de elementos na união $A \cup B$, ou seja, vamos mostrar $|A| + |B| - |A \cap B|$ conta cada elemento $x \in A \cup B$ exatamente uma vez.

Um elemento $x \in A \cup B$ pode pertencer somente a um dos dois conjuntos, ou a ambos.

1º caso: x pertence somente a um dos dois conjuntos:

Se x estiver em A e $x \notin B$, $|A|$ conta x uma vez, $|B|$ conta x zero e $|A \cap B|$ conta x zero vez, logo x é contado por $|A| + |B| - |A \cap B|$ uma vez.

Analogamente analisamos os casos em x estiver somente em B.

2º caso: x está em ambos os dois conjuntos: $x \in A \bigcap B$.

Se $x \in A \bigcap B$ temos:

i) $|A|$ conta x uma vez;

ii) $|B|$ conta x uma vez;

iii) $|A \bigcap B|$ conta x uma vez;

Logo, x é contado por $|A|+|B|-|A \bigcap B|: 1+1-1=1$ vezes.

Segue dos casos 1 e 2 que:

$$|A \bigcup B| = |A| + |B| - |A \bigcap B|. \blacksquare$$

Proposição 2.4 Considere três conjuntos A, B e C tais que A, B e C são finitos. Então:

$$|A \bigcup B \bigcup C| = |A| + |B| - |A \bigcap B| - |A \bigcap C| - |B \bigcap C| + |A \bigcap B \bigcap C|$$

Demonstração: A demonstração que faremos consiste de verificar que $|A|+|B|-|A \bigcap B|-|A \bigcap C|-|B \bigcap C|+|A \bigcap B \bigcap C|$, conta o número de elementos na união $A \bigcup B \bigcup C$, ou seja, vamos mostrar $|A|+|B|-|A \bigcap B|-|A \bigcap C|-|B \bigcap C|+|A \bigcap B \bigcap C|$, conta cada elemento $x \in A \bigcup B \bigcup C$ exatamente uma vez.

Um elemento $x \in A \bigcup B \bigcup C$, pode pertencer somente a um dos três conjuntos, ou exatamente dois deles ou aos três conjuntos.

1º caso: x pertence somente a um dos três conjuntos:

Se x estiver em A, $|A|$ conta x uma vez, $|B|$ conta x zero vez, $|C|$ conta x zero vez, $|A \bigcap B|$ conta x zero vez, $|A \bigcap C|$ conta x zero vez e $|A \bigcap B \bigcap C|$ conta x zero vez, logo x é contado por $|A|+|B|-|A \bigcap B|-|A \bigcap C|-|B \bigcap C|+|A \bigcap B \bigcap C|$ uma vez.

Analogamente analisamos os casos em x estiver somente em B ou x estiver somente em C.

2º caso: x está em exatamente dois dos conjuntos: $x \in A \bigcap B$ e $x \notin C$, ou $x \in A \bigcap C$ e $x \notin B$, ou $x \in B \bigcap C$ e $x \notin A$.

Se $x \in A \cap B$ e $x \notin C$, temos: $|A|$ conta x uma vez; $|B|$ conta x uma vez; $|C|$ conta x zero vez; $|A \cap B|$ conta x uma vez; $|A \cap C|$ conta x zero vez; $|B \cap C|$ conta x zero vez; $|A \cap B \cap C|$ conta x zero vez.

Logo x é contado por $|A| + |B| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$=1 + 1 + 0 – 1 - 0 – 0 + 0 = 1 vez. Analogamente analisamos os casos $x \in A \cap C$ e $x \notin B$, ou $x \in B \cap C$ e $x \notin A$.

3º caso: x está nos três conjuntos: $x \in A \cap B \cap C$, então: $|A|$ conta x uma vez; $|B|$ conta x uma vez; $|C|$ conta x uma vez; $|A \cap B|$ conta x uma vez; $|A \cap C|$ conta x uma vez; $|B \cap C|$ conta x uma vez; $|A \cap B \cap C|$ conta x uma vez.

Logo x é contado por $|A| + |B| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$: 1 + 1 + 1 – 1 – 1 – 1 + 1=1 vez. ■

Agora faremos a generalização das proposições 2.3 e 2.4, nesses casos fizemos demonstrações para o Princípio da Inclusão e Exclusão nos casos particular em que $n = 2, 3$, onde n denota a quantidade de conjuntos.

Teorema 2.3: Considere uma coleção de conjuntos finitos $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n$. Então:

$$|A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \ldots \cup A_n| = \sum_{i=1}^{n} |A_i| - \sum_{1 \le i_1 \le i_2 \le n} |A_{i_1} \cap A_{i_2}| + \sum_{1 \le i_1 \le i_2 \le i_3 \le n} |A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap A_{i_3}|$$

$$+ \cdots + \sum_{1 \le i_1 \le i_2 \le \cdots \le i_p \le n} |A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \ldots \cap A_{i_p}| + \cdots + (-1)^{n-1} |A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n| \qquad 2.11$$

Demonstração: Basta mostrar que dado $p = 1, 2, \ldots, n$ temos que cada elemento que pertence a p dos conjuntos $A_i's$ é contado exatamente uma vez pela fórmula dada em 2.11. De fato, se x pertence a p dos conjuntos $A_i's$ ele será contado:

$\binom{p}{1}$ vezes em $\sum_{i=1}^{n} |A_i|$;

$\binom{p}{2}$ vezes em $\sum_{i \le i_1 \le i_2 \le n} \left| A_{i_1} \cap A_{i_2} \right|$;

$\vdots$

$\vdots$

$\binom{p}{p}$ vezes em $\sum_{i \le i_1 \le i_2 \le \cdots \le i_p \le n} \left| A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \ldots \cap A_{i_p} \right|$.

Observe que a interseção de mais que p conjuntos dentre os A_i's não fornecerá nenhuma contribuição, uma vez que o elemento em questão x pertence à exatamente p dos conjuntos dentre $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n$, somando todas as contribuições com seus respectivos sinais temos:

$$\binom{p}{1} - \binom{p}{2} + \binom{P}{3} - \binom{p}{4} + \cdots + (-1)^{p-1} \binom{p}{p}. \qquad 2.12$$

Queremos provar que a expressão dada em 2.12 é igual a 2.11.

Segue do Teorema binomial que para todo $x \in \mathbb{R}$ e $p \in \mathbb{N}$ que:

$$(x+1)^p = \binom{p}{0} + \binom{P}{1} x + \binom{p}{2} x^2 + \cdots + \binom{p}{p} x^p,$$

e fazendo $x = -1$ temos:

$$0 = \binom{p}{0} - \binom{P}{1} + \binom{p}{2} - \binom{p}{3} + \cdots + (-1)^p \binom{p}{p},$$

ou seja,

$\binom{p}{0} = \binom{P}{1} - \binom{p}{2} + \binom{p}{3} + \cdots - (-1)^p \binom{p}{p} = \binom{P}{1} - \binom{p}{2} + \binom{p}{3} + \cdots + (-1)^{p-1} \binom{p}{p}$. Como $\binom{p}{0} = 1$, então segue o resultado. ■

O exemplo abaixo é uma aplicação direta do princípio da inclusão e exclusão.

Exemplo 2.9: Quantos são os anagramas da palavra PERDÃO em que P ocupa o primeiro lugar ou R ocupa o segundo lugar ou D ocupa o sexto lugar?

Utilizando o princípio da inclusão e exclusão, pois se trata de um problema de contagem da cardinalidade da união de um número finito de conjuntos finitos.

Vamos definir: A_1, A_2, A_3

A_1 : conjunto de todas os anagramas da palavra PERDÃO que começa com a letra P;

A_2 : conjunto de todas os anagramas da palavra PERDÃO tendo a letra R na segunda posição;

A_3 : conjunto de todas os anagramas da palavra PERDÃO tendo a letra D na sexta posição;

$A_1 \cap A_2$: conjunto de todas os anagramas da palavra PERDÃO tendo a letra P na primeira posição e R na segunda posição;

$A_1 \cap A_3$: conjunto de todas os anagramas da palavra PERDÃO tendo a letra P na primeira posição e D na sexta posição;

$A_2 \cap A_3$: conjunto de todas os anagramas da palavra PERDÃO tendo a letra R na segunda posição e D na sexta posição;

$A_1 \cap A_2 \cap A_3$: conjunto de todas os anagramas da palavra PERDÃO tendo a letra P na primeira posição e R na segunda posição e D na sexta posição.

Note que, para $i = 1,\ 2,\ 3$ cada elemento de A_i é uma permutação de 6 letras com uma delas fixas. Portanto $|A_i| = 120$.

Temos o número de anagramas da palavra PERDÃO com duas letras fixas é igual a 24.

Logo,

$$|A_1 \cap A_2| = |A_1 \cap A_3| = |A_2 \cap A_3| = 24.$$

Por último vamos contar a cardinalidade de $A_1 \cap A_2 \cap A_3$, $|A_1 \cap A_2 \cap A_3| = 6$ que é o total de anagramas da palavra PERDÃO com 3 letras fixas.

$$|A_1 \cup A_2 \cup A_3| = |A_1| + |A_2| + |A_3| - |A_1 \cap A_2| - |A_1 \cap A_3| - |A_2 \cap A_3| + |A_1 \cap A_2 \cap A_3| = 3 \times 120 - 3 \times 24 + 6$$

$$= 294 \bullet$$

2.3.2 UMA FÓRMULA EXPLÍCITA PARA O NÚMERO DE FUNÇÕES SOBREJETIVAS

Estaremos trabalhando com funções de A em B, tal que A e B são conjuntos finitos. Dessa forma, suponha que $|A| = n$ e $|B| = k$, com $n, k > 0$, no caso em que $k = n$ temos um total de $k!$ funções bijetoras $f : A \to B$.

De fato, se $A = \{a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n\}$ e $B = \{b_1, b_2, b_3, \ldots, \mathrm{b}_k\}$, então temos k possíveis imagens para a_1. Depois de escolhido a imagem para a_1, $k-1$ imagens para a_2, pois $f : A \to B$ é bijetiva. Fazendo isso sucessivamente temos uma imagem para a_k, então segue do princípio multiplicativo que o número de funções bijetivas de A em B é $k!$

No caso $n \le k$, então o número de funções injetivas de A em B é $k(k-1)\ldots(k-n+1)$.

De fato, se $A = \{a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n\}$ e $B = \{b_1, b_2, b_3, \ldots, \mathrm{b}_n, b_{n+1}, \ldots, b_k\}$. Temos k possíveis imagens para a_1, como $f : A \to B$ é injetiva então temos $k-1$ imagens para a_2, depois de já ter escolhido imagens para a_1. Fazendo isso sucessivamente até o objeto a_n, vemos que há $k-(n-1)$ imagens possíveis para a_n, dessa forma, segue do princípio multiplicativo o resultado. Segue também do princípio multiplicativo que o número de funções f de A e B é k^n.

Exemplo 2.9: Considere $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ e $B = \{a, b, c, d\}$, vamos definir as funções $f : A \to B$ e $\mathrm{g} : A \to B$, tais que:

$f(1) = f(2) = f(3) = f(4) = a$; $f(5) = f(6) = b$; $f(7) = f(8) = c$; $f(9) = d$

e

$\mathrm{g}(1) = g(2) = g(3) = g(4) = a$; $\mathrm{g}(5) = g(6) = b$; $g(7) = g(8) = g(9) = c$;

Temos que $\mathrm{Im}(f) = B$ e f é sobrejetora e $\mathrm{Im}(g) = \{a, b, c\} \neq B$ e g não é sobrejetora.

Observe que g não é sobrejetora, pois dado $d \in B$ não existe $x \in A$, tal que $d = g(x)$, ou seja, a equação $d = g(x)$ não tem solução em B.

Dados $A = \{a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n\}$, $B = \{b_1, b_2, b_3, \ldots, \mathrm{b}_k\}$ e $f : A \to B$, vamos definir:

$$f^{-1}(\{b_i\}) = \{x \in A; f(x) = b_i\}.$$

Do exemplo anterior temos:

$f^{-1}(\{a\}) = \{1, 2, 3, 4\}$; $f^{-1}(\{b\}) = \{5, 6\}$; $f^{-1}(\{c\}) = \{7, 8\}$; $f^{-1}(\{d\}) = \{9\}$ e

$g^{-1}(\{a\}) = \{1, 2, 3, 4\}$; $g^{-1}(\{b\}) = \{5, 6\}$; $g^{-1}(\{c\}) = \{7, 8, 9\}$; $g^{-1}(\{d\}) = \varnothing$.

Agora iremos contar as aplicações sobrejetivas $f : A \to B$, onde $|A| = n$ e $|B| = k$, com $n \geq k$ e segue do princípio de inclusão e exclusão uma formula explícita para os números de funções sobrejetivas.

Proposição 2.5: Para $n \geq k$, o número de funções sobrejetora $f : A \to B$, onde $|A| = n$ e $|B| = k$, é dado por:

$$T(n,k) = \sum_{i=0}^{k} (-1)^i \binom{k}{i} (k-i)^n .$$

Demonstração: Existem k^n funções $f : A \to B$, então vamos subtrair deste total o número de funções $f : A \to B$ que não são sobrejetoras, para isso, seja $A = \{a_1, a_2, a_3, \ldots, a_k, a_{k+1}, \ldots, a_n\}$ e $B = \{b_1, b_2, b_3, \ldots, b_k\}$.

Sabemos que uma função $f : A \to B$ é sobrejetora se, e somente se, para todo $b \in B$, existe $a \in A$, tal que $b = f(a)$, ou seja, a equação $b = f(a)$ tem solução em B. Dessa forma, vamos definir para todo $1 \leq i \leq k$: $C_i =$ conjunto de todas as funções $f : A \to B$, tais que $f^{-1}(\{b_i\}) = \varnothing$, ou seja, $f(a) \neq b_i$, $\forall\, a \in A$.

Como uma função $f : A \to B$ que não é sobrejetora pertence a pelo menos um dos C_i's, então o conjunto formado pelas funções que não são sobrejetoras é:

$$C_1 \cup C_2 \cup C_3 \cup \ldots \cup C_k .$$

Segue do princípio da inclusão e exclusão que:

$$|C_1 \cup C_2 \cup C_3 \cup \ldots \cup C_k| = \sum_{i=1}^{k} |C_i| - \sum_{1 \leq i_1 \leq i_2 \leq n} |C_{i_1} \cap C_{i_2}| + \sum_{1 \leq i_1 \leq i_2 \leq i_3 \leq n} |C_{i_1} \cap C_{i_2} \cap C_{i_3}| + \cdots +$$
$$+ (-1)^{n-1} |C_1 \cap C_2 \cap C_3 \cap \ldots \cap C_K| .$$

Queremos saber o total de funções $f : A \to B$, tal que, o elemento b_i não se corresponde com elementos A, nesse caso, esse número é $|C_i| = (k-1)^n$, para $i = 1, 2, \ldots, k$.

Agora queremos calcular $\left|C_i \cap C_j\right|$, que é o total de funções $f : A \to B$, tal que os elementos b_i e b_j não se corresponde com elementos A. Logo $\left|C_i \cap C_j\right| = (k-2)^n$, para todo $1 \le i < j \le n$. De maneira análoga, temos $\left|C_i \cap C_j \cap C_l\right| = (k-3)^n$ para todo $1 \le i < j < l \le n$ e $\left|C_1 \cap C_2 \cap C_3 \cap \ldots \cap C_k\right| = 0 = (k-k)^n$, além disso, temos:

$\binom{k}{1}$ parcelas em $\sum_{i=1}^{n} \left|C_i\right|$ e $\left|C_i\right| = (k-1)^n$;

$\binom{k}{2}$ parcelas em $\sum_{i \le i_1 \le i_2 \le n}^{n} \left|C_{i_1} \cap C_{i_2}\right|$ e $\left|C_{i_1} \cap C_{i_2}\right| = (k-2)^n$;

$\binom{k}{3}$ parcelas em $\sum_{i \le i_1 \le i_2 \le i_3 \le n}^{n} \left|C_{i_1} \cap C_{i_2} \cap C_{i_3}\right|$ e $\left|C_{i_1} \cap C_{i_2} \cap C_{i_3}\right| = (k-3)^n$;

$\vdots$

$\vdots$

$\binom{k}{k} = 1$ parcelas em $\left|C_1 \cap C_2 \cap C_3 \cap \ldots \cap C_k\right| = (k-k)^n$.

Portanto

$$\left|C_1 \cup C_2 \cup C_3 \cup \ldots \cup C_k\right| = \binom{k}{1}\left|C_1\right| - \binom{k}{2}\left|C_1 \cap C_2\right| + \binom{k}{3}\left|C_1 \cap C_2 \cap C_3\right| + \cdots + (-1)^{k-1}\left|C_1 \cap C_2 \cap \ldots \cap C_k\right| =$$

$$= \binom{k}{1}(k-1)^n - \binom{k}{2}(k-2)^n + \binom{k}{3}(k-3)^n + \cdots + (-1)^{k-1}(k-k)^n =$$

$$= \sum_{i=1}^{k} (-1)^{i-1} \binom{k}{i} (k-i)^n .$$

Subtraindo $\left|C_1 \cup C_2 \cup C_3 \cup \ldots \cup C_k\right|$ do total de k^n obtemos o resultado:

$$T(n,k) = k^n - \sum_{i=1}^{k} (-1)^{i-1} \binom{k}{i} (k-i)^n = k^n + \sum_{i=1}^{k} (-1)^{i} \binom{k}{i} (k-i)^n = \sum_{i=0}^{k} (-1)^{i} \binom{k}{i} (k-i)^n . \blacksquare$$

Portanto $T(n,k) = \sum_{i=0}^{k} (-1)^{i} \binom{k}{i} (k-i)^n$ é o número de funções sobrejetivas de A em B, onde $\left|A\right| = n$ e $\left|B\right| = k$. ■

2.3.3 FUNÇÃO GERADORA EXPONENCIAL PARA OS NÚMEROS DE STIRLING DO SEGUNDO TIPO

Sabemos que a expansão em série de potência da função exponencial é igual a:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^r}{r!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!},$$

dado $k \neq i$ temos que:

$$e^{(k-i)x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}(k-i)^n x^n . \qquad 2.12$$

Segue do Teorema Binomial que para $k \geq 0$, temos que:

$$(e^x - 1)^k = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} (-1)^i e^{(k-i)x} . \qquad 2.13$$

Substituindo 2.12 em 2.13 temos

$$(e^x - 1)^k = \sum_{i=1}^{k} \binom{k}{i} (-1)^i . \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (k-i)^n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{k} (-1)^i \binom{k}{i} (k-i)^n \frac{x^n}{n!} . \qquad 2.14$$

O coeficiente de $\frac{x^n}{n!}$ em 2.14 é $T(n,k) = \sum_{i=0}^{k} (-1)^i \binom{k}{i} (k-i)^n$, ou seja, $(\mathrm{e}^x - 1)^k$ é a função geradora exponencial para $T(n,k)$, onde $T(n,k)$ é o número de funções sobrejetiva de A em B, onde e $|A| = n$ e $|B| = k$.

Proposição 2.6: Seja $k \in \mathbb{N}$, então $(\mathrm{e}^x - 1)^k$ é a função geradora exponencial para $T(n,k)$.

O problema retirado de [5] que consiste em determinar o total de funções sobrejetora de A em B, onde $|A| = n$ e $|B| = k$ é equivalente a determinar o total de n-uplas, cujas entradas estão $\{1,2,3,\dots,k\}$, sendo que cada um dos números $1,2,3,\dots,k$, aparece pelo menos uma vez.

Proposição 2.7: O número de n-uplas cujas entradas são elementos do conjunto $\{1,2,3,\dots,k\}$, nas quais cada um dos números $1,2,3,\dots,k$, aparece pelo menos uma vez é igual a $T(n,k)$.

Demonstração: Cada um dos números $1,2,3,\ldots,k$ deve ocorrer pelo menos uma vez, e a ordem dos n números retirados é relevante, a função geradora para este problema é:

$$\left(x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots\right)^k=\left(e^x-1\right)^k.$$

Estamos interessados no coeficiente $\frac{x^n}{n!}$ nesta função. Sabemos que:

$$\left(e^x-1\right)^k=\sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}(-1)^i e^{x(k-i)} \qquad 2.15$$

e

$$e^{x(k-i)}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}(k-i)^n x^n \quad . \qquad 2.16$$

Substituindo 2.16 em 2.15 temos:

$$\left(e^x-1\right)^k=\sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}(-1)^i\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}(k-i)^n x^n . \qquad 2.17$$

Segue de 2.17 que o coeficiente de $\frac{x^n}{n!}$ é:

$$T(n,k)=\sum_{i=0}^{k}(-1)^i\binom{k}{i}(k-i)^n . \qquad \blacksquare$$

Em [5] é abordado o problema de determinar o número de funções sobrejetivas de A em B, onde $|A|=n$ e $|B|=k$ de outra forma, ou seja, o número de maneiras de distribuirmos n bolas distintas em k caixas distintas, sem que nenhuma delas fique vazia é igual a $T(n,k)$.

Para mostrar a equivalência entre os problemas, tomamos inicialmente uma distribuição de n bolas distintas e definimos uma função sobrejetora que nos fornece uma única distribuição, para isso façamos $A=\{b_1,b_2,\ldots,b_n\}$ o conjunto das n bolas e $B=\{c_1,c_2,\ldots,c_k\}$ o conjunto das k caixas, seja $f:A\to B$ uma função sobrejetora. Logo:

$$f^{-1}(\{c_i\})\neq\varnothing \text{ para } i=1,2,\ldots,k \text{ e } \bigcup_{i=1}^{k} f^{-1}(\{c_i\})=A.$$

Uma maneira de distribuirmos as n bolas, conhecida a função f é colocar na caixa c_i as bolas que estão em $f^{-1}(\{c_i\})$, dessa forma, temos o resultado:

Proposição 2.8: O número de maneiras de distribuirmos n bolas distintas em k caixas distintas é $T(n,k)$.

Exemplo 2.10: Consideremos $A=\{a_1, a_2, a_3\}$, e $B=\{b_1, b_2\}$. Temos que $|A|=3$ e $|B|=2$, logo o total de funções sobrejetivas $f: A \to B$ é dado por $T(3,2)=\sum_{i=0}^{2}(-1)^i\binom{2}{i}(2-i)^3=2^3-2=6$. Na tabela 10 representamos a funções sobrejetivas de A em B.

Tabela 10: Representação das funções sobrejetivas

$f_i: A \to B,\ i = 1,2,3,4,5,6$					
$f_1(a_1)=b_1$ $f_1(a_2)=b_1$ $f_1(a_3)=b_2$	$f_2(a_1)=b_1$ $f_2(a_2)=b_2$ $f_2(a_3)=b_2$	$f_3(a_1)=b_2$ $f_3(a_2)=b_2$ $f_3(a_3)=b_1$	$f_4(a_1)=b_2$ $f_4(a_2)=b_1$ $f_4(a_3)=b_1$	$f_5(a_1)=b_1$ $f_5(a_2)=b_2$ $f_5(a_3)=b_1$	$f_6(a_1)=b_2$ $f_6(a_2)=b_1$ $f_6(a_3)=b_2$

Fonte: Autor

Por outro lado, podemos supor que o conjunto $A=\{a_1, a_2, a_3\}$ é formado pelas bolas e conjunto $B=\{b_1, b_2\}$ representam as caixas, ou seja, $|A|=3$ e $|B|=2$.

As distribuições das bolas que estão em A nas caixas que estão em B por meio das funções $f_i, i = 1,2,3,4,5,6$ são:

Tabela 11: Distribuições das bolas nas caixas por meio das f_i

$f_1^{-1}(\{b_1\})=\{a_1,a_2\}$ $f_1^{-1}(\{b_2\})=\{a_3\}$	$f_2^{-1}(\{b_1\})=\{a_1\}$ $f_2^{-1}(\{b_2\})=\{a_2,a_3\}$	$f_3^{-1}(\{b_1\})=\{a_3\}$ $f_3^{-1}(\{b_2\})=\{a_1,a_2\}$	$f_4^{-1}(\{b_1\})=\{a_2,a_3\}$ $f_4^{-1}(\{b_2\})=\{a_1\}$	$f_5^{-1}(\{b_1\})=\{a_1,a_3\}$ $f_5^{-1}(\{b_2\})=\{a_2\}$
$f_6^{-1}(\{b_1\})=\{a_2\}$ $f_6^{-1}(\{b_2\})=\{a_1,a_3\}$				

Fonte: autor

Exemplo 2.11: De quantas maneiras podemos acomodar 9 pessoas em 4 quartos, sem que nenhum quarto fique vazio?

Observe que esse problema é equivalente a distribuição de 9 bolas distintas em 4 caixas distintas. Como todo quarto deve ter uma pessoa, esse número será igual a número de funções sobrejetivas de um conjunto de 9 elementos em um conjunto de 4 elementos, segue da proposição 2.7 que a resposta para o problema é $T(9,4)$, ou seja:

$$T(9,4)=\sum_{i=0}^{4}(-1)^i\binom{4}{i}(4-i)^9=4^9-4.3^9+6.2^9-4=186\,480.$$

Também podemos abordar o mesmo problema por meio a função geradora exponencial, para isso, observe que nenhum quarto poderá receber mais que 6 pessoas, uma vez que um deles ficará vazio.

A função geradora exponencial será usada, pois os quartos são diferentes e a ordem das pessoas dentro do quarto não nos importa. Dessa forma a função geradora para o problema é:

$f(x)=\left(x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots+\frac{x^6}{6!}\right)^4$ e a resposta é o coeficiente $\frac{x^9}{9!}$ em $f(x)$, ou seja, podemos considerar o coeficiente de $\frac{x^9}{9!}$ em $\left(x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots+\frac{x^6}{6!}+\cdots\right)^4=(e^x-1)^4$. Como $(e^x-1)^4=e^{4x}-4e^{3x}+6e^{2x}-4e^x+1$, então o coeficiente de $\frac{x^9}{9!}$ é:

$$(4^9-4.3^9+6.2^9-4)=186\,480.$$

Teorema 2.4: O número de maneiras de distribuirmos *n* bolas distintas em *k* caixas idênticas sem que nenhuma caixa fique vazia é

$$\left\{\begin{matrix} n \\ k \end{matrix}\right\}=\frac{1}{k!}T(n,k)=\frac{1}{k!}\sum_{i=0}^{k}(-1)^i\binom{k}{i}(k-i)^n .$$

Demonstração: Para que possamos obter uma distribuição de *n* bolas distintas em *k* caixas distintas, sem que nenhuma caixa fique vazia, basta encontrarmos uma distribuição de *n* bolas em *k* caixas idênticas (nenhuma vazia) e ordenar estas caixas, isto nos garante que $T(n,k)=k!\left\{\begin{matrix} n \\ k \end{matrix}\right\}$ o que conclui a demonstração. Portanto

$$\left\{\begin{matrix} n \\ k \end{matrix}\right\}=\frac{1}{k!}T(n,k)=\frac{1}{k!}\sum_{i=0}^{k}(-1)^i\binom{k}{i}(k-i)^n .\blacksquare$$

Exemplo 2.12: De quantas maneiras podemos distribuir 4 objetos distintos *a, b, c* e *d* em duas gavetas idênticas, de modo que nenhuma fique vazia?

Observe que esse problema é equivalente ao distribuir 4 bolas distintas em 2 caixas idênticas. Pelo teorema 2.4, com $n=4$ e $k=2$ temos que:

$$\left\{\begin{matrix} 4 \\ 2 \end{matrix}\right\} = \frac{1}{2!}\sum_{i=0}^{2}(-1)^i \binom{2}{i}(2-i)^4 = \frac{1}{2}(2^4-2) = 7$$

As distribuições são:

Tabela 12: Maneiras de distribuir 4 objetos distintos *a*, *b*, *c* e *d*, em duas gavetas idênticas

1	gaveta 1 – objeto *a* e gaveta 2 – objetos *b*, *c*, *d*
2	gaveta 1 – objeto *b* e gaveta 2 – objetos *a, c, d*
3	gaveta 1 – objeto *c* e gaveta 2 – objetos *a, b, d*
4	gaveta 1 – objeto *d* e gaveta 2 – objetos *a, b, c*
5	gaveta 1 – objetos *a, b* e gaveta 2 – objetos *c, d*
6	gaveta 1 – objetos *a, c* e gaveta 2 – objetos *b, d*
7	gaveta 1 – objetos *a, d* e gaveto 2 – objetos *b, c*

Fonte : Autor:

3. OS NÚMEROS DE BELL

Em matemática combinatória, os números de Bell contam as possíveis partições de um conjunto finito, esses números foram estudados por matemáticos desde o século XIX, e suas raízes remontam ao Japão medieval, são nomeadas em homenagem a Eric Temple Bell[3], que escreveu sobre eles na década de 1930.

Neste capítulo iremos apresentar as sequências de números, chamados de números de Bell que denotamos por B_n, onde n é um número natural. Os números de Bell representam o número de maneiras diferentes de particionar um conjunto que tenha exatamente n elementos, ou equivalentemente, o número de relações de equivalência nele.

Inicialmente iremos definir os números de Bell, através da definição de número de Stirling do segundo tipo, em seguida vamos estabelecer uma relação de recorrência e obter uma função geradora exponencial.

Finalizaremos este capítulo desenvolvendo uma aplicação dos números de Bell relacionada com contagem de esquemas de rimas poéticas.

3.1. DEFINIÇÃO DOS NÚMEROS BELL

Vamos denotar os números de Bell por B_n e definir que $B_0 = 1$. Para $n > 0$, B_n é o número de partições de um conjunto com n objetos distintos.

Exemplo: 3.1: Começando com $B_0 = B_1 = 1$, os primeiros números de Bell são: 1, 1, 2, 5, 15, 52, 203, 877, 4140, 21147, 115975, 678570, 4213597, 27644437, 190899322, 1382958545, 10480142147, 82864869804, 682076806159, 5832742205057,....

---

[3] Os números de Bell são nomeados para o matemático e escritor Eric Temple Bell (1883-1960) porque ele foi um dos primeiros a fazer uma análise aprofundada da seqüência. Bell foi um contribuinte para a teoria dos números, mas é mais conhecido por seus muitos livros sobre a História da Matemática. Bell também foi um prolífico escritor de ficção científica sob o nome de John Taine.

Como o número de Bell [6] é número de partições de um conjunto com n objetos distintos, segue por definição que:

$$B_n = \sum_{k=0}^{n} \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\}.$$

Pela da definição acima, podemos representar alguns números de Bell pela tabela abaixo:

Tabela 13: Números de Stirling do segundo tipo e Bell, para $0 \le n \le 6$ e $0 \le k \le 6$.

N	$\left\{ \begin{matrix} n \\ 0 \end{matrix} \right\}$	$\left\{ \begin{matrix} n \\ 1 \end{matrix} \right\}$	$\left\{ \begin{matrix} n \\ 2 \end{matrix} \right\}$	$\left\{ \begin{matrix} n \\ 3 \end{matrix} \right\}$	$\left\{ \begin{matrix} n \\ 4 \end{matrix} \right\}$	$\left\{ \begin{matrix} n \\ 5 \end{matrix} \right\}$	$\left\{ \begin{matrix} n \\ 6 \end{matrix} \right\}$	B_n
0	1							1
1	0	1						1
2	0	1	1					2
3	0	1	3	1				5
4	0	1	7	6	1			15
5	0	1	15	25	10	1		52
6	0	1	31	90	65	15	1	203

Fonte: Autor

E através do resultado obtido no teorema 2.2, podemos estabelecer uma forma explícita para calcular os seus números.

Proposição 3.1: Sejam n e k números naturais, tal que $n \ge k > 0$, então:

$$B_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \sum_{i=0}^{k} (-1)^i \binom{k}{i} (k-i)^n .$$

É possível obter os números de Bell, por meio de uma relação entre os termos sucessivos da sequência numérica B_n, ou seja, podemos determinar uma relação de recorrência para esses números.

Teorema 3.1: Sejam n e k, números naturais, tais que $n \ge k \ge 1$, os números de Bell satisfazem a seguinte recorrência:

$$\begin{cases} B_0 = 1 \\ B_n = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} B_k \end{cases} .$$

Demonstração: A condição inicial é que $B_0=\sum_{k=0}^{0}\binom{0}{k}=\binom{0}{0}=1=\binom{n}{0}$. Suponha que $n\geq 1$ podemos formar $\binom{n-1}{k}$ classes de um conjunto de $\{1,2,\ldots,n-1\}$ tal que a letra n esta em uma dessas classes. Para formar o restante das classes sobram $n-k-1$ elementos no conjunto de $\{1,2,\ldots,n\}$, podemos formar B_{n-k-1} classes dos elementos restantes.

Assim o total de partições de um conjunto formado por n objetos é:

$$B_n=\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}B_{n-k-1}=\binom{n-1}{0}B_{n-1}+\binom{n-1}{1}B_{n-2}+\binom{n-1}{2}B_{n-3}+\cdots+\binom{n-1}{n-2}B_1+\binom{n-1}{n-1}B_0.$$

Como $\binom{n-1}{k}=\binom{n-1}{n-k-1}$, então,

$$B_n=\binom{n-1}{n-1}B_{n-1}+\binom{n-1}{n-2}B_{n-2}+\cdots+\binom{n-1}{1}B_1+\binom{n-1}{0}B_0=\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}B_k.\blacksquare$$

Exemplo 3.2: Vamos determinar alguns números de Bell a partir do teorema 3.1, temos que:

$$B_0=1;$$

$$B_1=\sum_{k=0}^{0}\binom{1-1}{0}B_k=\binom{0}{0}B_0=1.1=1;$$

$$B_2=\sum_{k=0}^{1}\binom{1}{k}B_k=\binom{1}{0}B_0+\binom{1}{1}B_1=1.1+1.1=2;$$

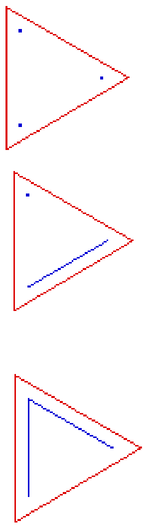
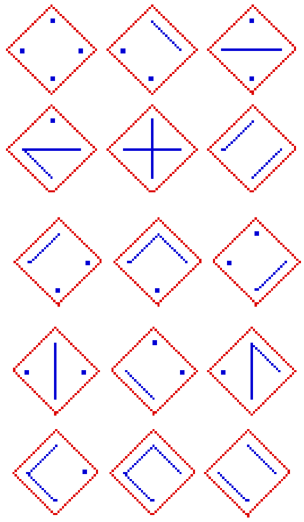
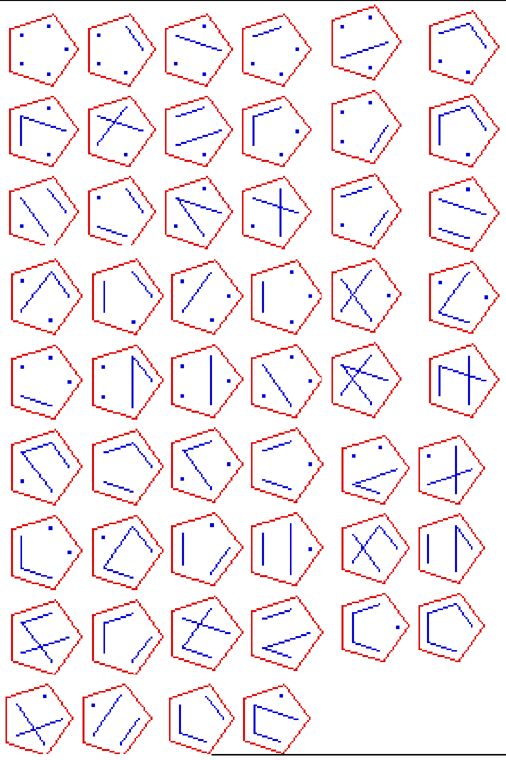
$$B_3=\sum_{k=0}^{2}\binom{2}{k}B_k=\binom{2}{0}B_0+\binom{2}{1}B_1+\binom{2}{2}B_2=1.1+2.1+1.2=5;$$

$$B_4=\sum_{k=0}^{3}\binom{3}{k}B_k=\binom{3}{0}B_0+\binom{3}{1}B_1+\binom{3}{2}B_2+\binom{3}{3}B_3=1.1+3.1+3.2+1.5=15;$$

$$B_5=\sum_{k=0}^{4}\binom{4}{k}B_k=\binom{4}{0}B_0+\binom{4}{1}B_1+\binom{4}{2}B_2+\binom{4}{3}B_3+\binom{4}{4}B_4=1.1+4.1+6.2+4.5+1.15=52.$$

Podemos representar os números de Bell por meio de um diagrama, onde uma linha significa que os elementos estão no mesmo subconjunto (classe), e um ponto representa um subconjunto com um único elemento. Observe a tabela abaixo com os diagramas dos números de Bell nos casos particulares $n=3{,}4$ e 5.

Tabela 14: Diagramas que representam os números de Bell.

B_3 - 5 partições	B_4 - 15 partições	B_5 - 52 partições
		

Fonte: http://www-history.mcs.standrews.ac.uk/Miscellaneous/StirlingBell/bell.html

Proposição 3.2: Sejam n e k, números naturais, tais que $n \geq k \geq 1$. A função geradora exponencial para os números de Bell é dada por $e^{e^x - 1}$.

Demonstração: Seja $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} B_n \frac{x^n}{n!}$ a função geradora para os números de Bell.

Provemos que $f(x) = e^{e^x - 1}$. De fato:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} B_n \frac{x^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\} \frac{x^n}{n!}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\} \frac{x^n}{n!}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(e^x - 1)^k}{k!}$$

$$= e^{e^x - 1}$$

Portanto $e^{e^x - 1}$ é a função geradora exponencial para os números de Bell. ■

3.2 UMA APLICAÇÃO DOS NÚMEROS DE BELL

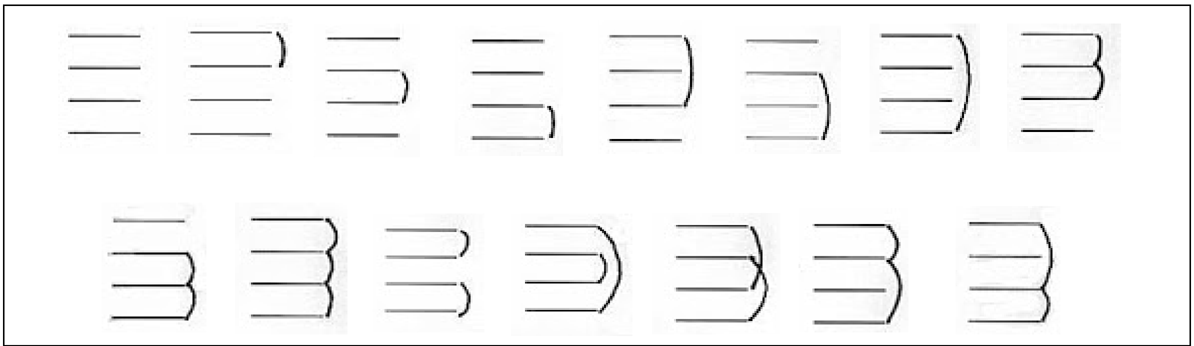
Nesse capítulo iremos apresentar uma interessante abordagem da utilização dos números de Bell, o seu uso em contagem de esquemas de rimas poéticas. A rima é um recurso usado para dar sonoridade aos poemas, consiste em colocar palavras com sons iguais nas rimas dos finais da estrofe. O padrão de rimas [7] é definido e categorizado pelas letras A, B,C, etc .

Um esquema de rimas descreve quais linhas rimam uma com a outra e, portanto podem ser interpretadas como uma partição do conjunto de linhas em um subconjunto de rimas. Os esquemas são representados geralmente por uma sequência de letras, uma por linha, com linhas de rimas, ou seja, em um esquema ABAB, temos que a última palavra de cada linha ao término dela, rima com a outra linha.

Em uma estrofe de três linhas, temos um esquema de 5 rimas (as possibilidades são : AAA,AAB,ABA,BBA,BBB) . Existem pares de rimas com palavras nas extremidades que podem ser unidas em arcos, sendo que nenhum arco se cruze. Os números de Bell representam um esquema de estrofe de *n* linhas, e o número possível de esquemas de rimas é dado pelo enésimo número de Bell.

Por exemplo, para estrofes de 4 linhas, os diagramas são úteis para acompanhar os vários esquemas de rimas, uma representação é essa tabela de 15 diagramas ¨Puttenham[4]¨ (em que as linhas de rimas formam no lado direito arcos), como foi introduzido em ¨The Arte of English Poesie¨.

Tabela 15: Representação do Diagrama de "Puttenham”



Fonte: https://poetrywithmathematics.blogspot.com.br/2011/02/counting-rhymes-catalan-bell-numbers.html

---

[4] George Puttenham (1529-1590) era um escritor inglês e crítico literário do século XVI. Ele geralmente é considerado o autor do influente manual sobre poesia e retórica, The Arte of English Poesie (1589).

Observe que o último diagrama da tabela representa um esquema de rimas ABAA, onde a primeira linha rima com a terceira e quarta linha.

Olhando cuidadosamente a tabela, verificamos as rimas possíveis para cada estrofe de 4 linhas, dos 15 possíveis esquemas de rimas,14 não possuem linhas cruzadas no diagrama de Puttenham e todos os esquemas de rimas possíveis são computados ao quarto número de Bell.

Abaixo alguns exemplos de esquemas de rimas.

Exemplo 3.3: Considere o poema abaixo, onde é possível verificar a rima alternada (ABAB), também chamada de rima cruzada, ocorre entre versos pares e ímpares, donde o primeiro verso rima com o terceiro, e o segundo verso rima com o quarto.

*Essa mulher que se arremessa, **fria** (A)*
*E lúbrica aos meus braços, e nos **seios** (B)*
*Me arrebata e me beija e **balbucia** (A)*
*Versos, votos de amor e nomes **feios**." (B)*

(Trecho do "Soneto de Devoção" de Vinícius de Moraes)

Exemplo 3.4: Considere o poema abaixo, onde é possível verificar rima intercalada (ABBA). Também chamada de rima interpolada ou rima oposta, ocorre entre o primeiro e o quarto verso e, entre o segundo e o terceiro verso.

*Hoje, voltas-me o rosto, se ao teu **lado** (A)*
*passo. E eu, baixo os meus olhos se te **avisto**. (B)*
*E assim fazemos, como se com **isto**, (B)*
*pudéssemos varrer nosso **passado**." (A)*

(Trecho do Poema "Indiferença" de Guilherme de Almeida)

Exemplo 3.5: Considere o poema abaixo, onde é possível verificar rima Emparelhada (AABB), nesse caso, a rima é encontrada entre o primeiro e o segundo verso e, entre o terceiro e o quarto verso.

*Aos que me chamam de **deputado** (A)*
*Quando nem mesmo sou **jurado**, (A)*
*Aos que, de bons, se babam: **mestre**! (B)*
*Inda se escrevo o que não **preste**." (B)*

(Trecho do poema "Obrigado" de Carlos Drummond de Andrade)

Exemplo 3.6: Considere o poema abaixo, onde é possível verificar rima Misturada, também chamada de rima mista, nesse caso, a rima pode ser encontrada em diversos momentos do texto poético, sem necessariamente seguir um padrão de posição.

E diz-me a desconhecida: (A)
Mais depressa! Mais depressa! (B)
Que eu vou te levar a vida! . . . (A)
Finaliza! Recomeça! (B)
Transpõe glórias e pecados! . . ."(C)
Eu não sei que voz seja essa (B)
Nos meus ouvidos magoados: (C)
Mas guardo a angústia e a certeza (D)
De ter os dias contados . . . (C)
Rolo, assim, na correnteza (D)
Da sorte que se acelera, (E)
Entre margens de tristeza, (D)
Sem palácios de quimera, (E)
Sem paisagens de ventura, (F)
Sem nada de primavera . . ." (E)

(Trecho do poema "*Ísis*" de Cecília Meireles)

4. NÚMEROS DE STIRLING E OS NÚMEROS HARMÔNICOS

Este capítulo foi fundamentado por meio do artigo [8] onde diversas propriedades envolvem números harmônicos e números de Stirling. Os números harmônicos são somas parciais da série harmônica.

O estudo e entendimento da série harmônica [9] teve origem no século VI antes de Cristo com as experiências feitas pelo filósofo e matemático grego Pitágoras. Pelas suas descobertas é possível estabelecer uma relação direta entre melodia e harmonia, sendo que seus conceitos e definições são utilizados até os dias atuais (oitavas, ciclo de quintas, etc).

Pitágoras (séc. VI, a.c.), afirmou que qualquer som para ser musical teria que ter altura definida, emitido por um instrumento ou por fonte natural, resultando em uma vibração ondulatória regular.

Essa vibração é composta pelo som gerador (1ª nota) e outros sons definidos de intensidade menor e frequência mais aguda, chamados de sons harmônicos ou série harmônica.

A série harmônica (som gerador + notas agudas subsequentes) apresenta uma relação intervalar característica e imutável de origem natural ou física.

Assim se tomarmos como exemplo uma corda de um violão (6ª Corda – Nota Mi Grave) pode-se observar que além de vibrar em toda a sua extensão, também vibra em sua metade, em sua terça parte, em sua quarta parte e quinta parte, etc., produzindo sons 2 cada vez mais agudos. A vibração da corda pode ser definida como ciclos ou Hertz (01 ciclo = é igual à ida e volta da vibração da corda), então ao tocarmos a 6ª Corda do Violão (nota Mi Grave) temos:

1º ciclo = nota Mi (fundamental);

2º ciclo = nota Mi, uma oitava mais aguda;

3º ciclo = nota sol uma oitava + uma quinta aguda; etc.

A série harmônica é fisicamente infinita, e suas primeiras 16 notas surgem, ao subdividir uma corda vibrante (experiência de Pitágoras) em 2 – 3 – 4 – 5 – 6 – 7 – 8 – 9 – 10, etc. partes iguais.

Inicialmente iremos definir e exemplificar os números harmônicos e apresentar algumas propriedades, bem como sua relação com os números de Stirling.

4.1 DEFINIÇÃO DOS NÚMEROS HARMÔNICOS

Os números harmônicos são definidos como sendo a soma dos inversos naturais, ou seja, $H_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$, com $n \geq 1$. Vamos convencionar $H_0 = 0$.

Exemplo 4.1: Seja n natural, com $1 \leq n \leq 5$, temos os seguintes números Harmônicos:

Tabela 16: Representação dos números harmônicos.

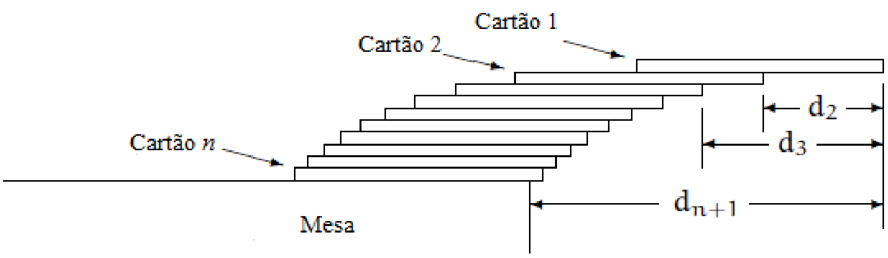
n	$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$	H_n
1	1	1
2	$1+\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$
3	$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}$	$\frac{11}{6}$
4	$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}$	$\frac{25}{12}$
5	$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}$	$\frac{137}{60}$

Fonte: Autor

O exemplo 4.2 que descreveremos a seguir é conhecido na literatura como o problema de empilhamento de livros (book stacking problem), para isso veja, [10],[11], [12] e [13]. O problema consiste em equilibrar na borda de uma mesa uma pilha de n livros idênticos e responder a seguinte questão: qual é a maior distância de deslocamento possível da borda da mesa?

Exemplo 4.2: Sejam n cartões e uma mesa, gostaríamos de criar o maior impulso possível empilhando os cartões sobre a borda da mesa, com a borda dos cartões sejam paralelas à borda da mesa, sujeitos às leis da gravidade, como ilustra a figura 2:

Figura 2: Empilhamento de cartões idênticos na borda de uma mesa.



Fonte: Imagem do livro *Concrete mathematics de* GRAHAM, RONALD LEWIS. Página 286.

Assumimos que cada cartão tem 2 unidades de comprimento, com um cartão, obtemos o máximo de saliência quando seu centro de gravidade é logo acima da borda da mesa. O centro de gravidade está no meio do cartão, para que possamos criar metade de um cartão ou 1 unidade de saliência.

Com duas cartas, obtemos o máximo quando o centro de gravidade do cartão superior está logo acima da borda do segundo cartão e o centro de gravidade de ambos os cartões é combinado acima da borda da mesa, o centro de gravidade dos dois cartões juntos será no meio de sua parte comum.

Este padrão sugere um método geral onde colocamos cartões, para que o centro de gravidade O dos k cartões situa-se acima da borda do cartão $k+1$ (que suporta os k cartões). A mesa desempenha o papel do cartão $n+1$.

Expressando as condições acima algébricamente, temos que d é a distância da borda e do cartão superior para a borda correspondente do cartão do topo, ou seja, $d_1 = 0$, d_2 é a distância da borda do cartão 2 até a borda do cartão 1, d_3 é distância da borda do cartão 3 até a borda do cartão 1, d_4 é distância da borda do cartão 4 até a borda do cartão 1, assim sucessivamente, até d_{n+1} ser distância da borda da mesa até a borda do cartão 1.

Vamos conseguir criar o maior impulso possível, quando d_{k+1} for o centro de gravidade dos primeiros k cartões, ou seja:

$$d_{k+1} = \frac{(d_1+1)+(\mathrm{d}_2+1)+\cdots+(\mathrm{d}_k+1)}{k} \quad \text{para } 1 \le k \le n .$$

Podemos reescrever esta recorrência da seguinte forma:

$$k\, d_{k+1} = k + d_1 + \cdots + d_{k-1} + d_k, \ \text{para } k \ge 0 \qquad 4.1$$

$$(k-1)\, d_k = k - 1 + d_1 + \cdots + d_{k-1}, \ \text{para } k \ge 1 \qquad 4.2$$

Subtraindo, 4.2 de 4.1, temos;

$$k\, d_{k+1} - (k-1)\, d_k = 1 + d_k, \ \text{para } k \ge 1 .$$

Daí $d_{k+1} = d_k + \dfrac{1}{k}$. Assim o segundo cartão será definido meio da unidade do terceiro, que é um terço de uma unidade após o quarto, e assim por diante. Obtemos a seguinte fórmula geral:

$$d_{k+1} = H_k \ . \qquad 4.3$$

Segue por indução, e se definimos $n = k$, obtemos $d_{n+1} = H_n$ quando n cartões são empilhados como descrito.

Os números harmônicos aparecem como aplicações em outras ciências, um exemplo é na música, para isso veja [14]. A seguir enunciaremos e provaremos uma propriedade para os números harmônicos.

Proposição 4.1: Seja *n* um número natural, tal que $n \geq 1$, temos que:

$$\sum_{k=1}^{n-1} H_k = nH_n - n + 1$$

Demonstração: Temos que $\sum_{k=1}^{n-1} H_k = H_1 + H_2 + H_3 + \cdots + H_{n-1}$, ou seja;

$$\sum_{k=1}^{n-1} H_k = 1 + 1 + \frac{1}{2} + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n-1} =$$

$$= (n-1).1 + (n-2).\frac{1}{2} + \cdots + (n-3).\frac{1}{3} + \cdots + (n-(n-1)).\frac{1}{n-1} \ .$$

Assim temos:

$$\sum_{k=1}^{n-1} H_k = (n-1).1 + (n-2).\frac{1}{2} + \cdots + (n-3).\frac{1}{3} + \cdots + (n-(n-1)).\frac{1}{n-1};$$

ou seja,

$$\sum_{k=1}^{n-1} H_k = n + \frac{n}{2} + \frac{n}{3} + \cdots + \frac{n}{n-1} \underbrace{-1-1-1-\cdots-1}_{n-1}, \text{ isto é,}$$

$$\sum_{k=1}^{n-1} H_k = n + \frac{n}{2} + \frac{n}{3} + \cdots + \frac{n}{n-1} - n + 1$$

$$\sum_{k=1}^{n-1} H_k = n + \frac{n}{2} + \frac{n}{3} + \cdots + \frac{n}{n-1} - n + \frac{n}{n}$$

$$\sum_{k=1}^{n-1} H_k = n\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n}\right) - n$$

$$\sum_{k=1}^{n-1} H_k = nH_{n-1} - n \,.\blacksquare$$

4.2 RELAÇÃO ENTRE NÚMEROS HARMÔNICOS E NÚMEROS DE STIRLING DO PRIMERIO TIPO

Embora H_n nunca seja um número inteiro para $n > 1$, ele pode ser expresso como um número racional, ou seja:

$$H_n = \frac{p_n}{n!}, \tag{4.4}$$

onde p_n é um número inteiro não negativo e definimos que $p_0 = H_0 = 0$. Para $n \geq 1$, temos $H_n = H_{n-1} + \frac{1}{n}$, esse observação implica que:

$$\frac{p_n}{n!} = \frac{p_{n-1}}{(n-1)!} + \frac{1}{n} = \frac{n\ p_{n-1} + (n-1)!}{n!}$$, assim para $n \geq 1$ temos que:

$$p_n = n\ p_{n-1} + (n-1)!. \tag{4.5}$$

Segue do teorema 1.1 que para $k = 2$, temos que:

$$\begin{bmatrix} n+1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n \\ 1 \end{bmatrix} + n \begin{bmatrix} n \\ 2 \end{bmatrix}. \tag{4.6}$$

Segue de 4.6 e da proposição 1.2 que:

$$\begin{bmatrix} n+1 \\ 2 \end{bmatrix} = n \begin{bmatrix} n \\ 2 \end{bmatrix} + (n-1)!\ ,$$

que é equivalente a recorrência 4.5, com $p_n = \begin{bmatrix} n+1 \\ 2 \end{bmatrix}$, como $p_1 = 1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$, desssa forma, segue que para todos $n \geq 1$, $p_n = \begin{bmatrix} n+1 \\ 2 \end{bmatrix}$. Combinando com a definição de p_n em 4.4 temos o resultado o seguinte resultado $H_n = \frac{1}{n!}\begin{bmatrix} n+1 \\ 2 \end{bmatrix}$, que iremos enunciar no Teorema 4.1, entretanto faremos outra prova que consiste de manipulações algébricas.

Teorema 4.1: Seja *n* natural, $n \geq 1$, temos que:

$$H_n = \frac{1}{n!}\begin{bmatrix} n+1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Demonstração: Temos que

$$\frac{1}{n!}\begin{bmatrix} n+1 \\ 2 \end{bmatrix} = \frac{\begin{bmatrix} n+1 \\ 2 \end{bmatrix}}{n!} = \frac{\begin{bmatrix} n \\ 1 \end{bmatrix} + n\begin{bmatrix} n \\ 2 \end{bmatrix}}{n!} = \frac{\begin{bmatrix} n \\ 1 \end{bmatrix}}{n!} + \frac{n\begin{bmatrix} n \\ 2 \end{bmatrix}}{n!}$$

$$= \frac{(n-1)!}{n!} + \frac{\begin{bmatrix} n \\ 2 \end{bmatrix}}{(n-1)!} = \frac{1}{n} + \frac{\begin{bmatrix} n \\ 2 \end{bmatrix}}{(n-1)!} \ . \qquad 4.7$$

Segue de (4.7)

$$\frac{\begin{bmatrix} n \\ 2 \end{bmatrix}}{(n-1)!} = \frac{1}{(n-1)} + \frac{\begin{bmatrix} n-1 \\ 2 \end{bmatrix}}{(n-2)!} \ . \qquad 4.8$$

Substituindo 4.8 em 4.7 temos: $\frac{1}{n!}\begin{bmatrix} n+1 \\ 2 \end{bmatrix} = \frac{1}{n} + \frac{1}{(n-1)} + \frac{\begin{bmatrix} n-1 \\ 2 \end{bmatrix}}{(n-2)!}$.

De forma análoga $\frac{\begin{bmatrix} n-1 \\ 2 \end{bmatrix}}{(n-2)!} = \frac{1}{(n-2)} + \frac{\begin{bmatrix} n-2 \\ 2 \end{bmatrix}}{(n-3)!}$, repetindo esse processo temos que:

$$\frac{1}{n!}\begin{bmatrix} n+1 \\ 2 \end{bmatrix} = \frac{1}{n} + \frac{1}{(n-1)} + \ldots + \frac{1}{2} + \frac{1}{1} = H_n .$$

Portanto $H_n = \frac{1}{n!}\begin{bmatrix} n+1 \\ 2 \end{bmatrix}$. ■

Proposição 4.2: Sejam $n, k \in \mathbb{N}$. Os números harmônicos satisfazem a seguinte identidade:

$$H_n = \frac{\sum_{k=1}^{n} k \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}}{n!} .$$

Demonstração: Esse resultado segue direto da proposição 1.3 e do teorema 4.1. ■

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste trabalho exploramos diversas interpretações combinatórias para os números Stirling, que por sua vez possuem características de natureza combinatória e é de grande interesse em Teoria Aditiva dos Números e Combinatória. Além disso, relacionamos essa sequência de números com conteúdos de Combinatória que são ensinados no Ensino Médio, por exemplo, polinômios e técnicas de contagem.

Os problemas de combinatória trabalhados no Ensino Médio os métodos mais utilizados são o Princípio Multiplicativo, o Princípio Aditivo, os Arranjos e as Combinações. No entanto, quanto mais se impõe restrições ao problema mais difícil será chegar a sua solução. Diferentes técnicas podem ser aplicadas a um mesmo problema, sendo assim, quanto mais o aluno tiver conhecimentos destas, mais opção terá para aplicá-las, e uma sucessão muito maior de problemas pode ser resolvida. Dessa forma, este trabalho poderá possibilitar ao professor do Ensino Médio conhecer outras formas de abordar problemas de contagem. Além disso, é possível desenvolver outros conteúdos de Matemática juntamente com Combinatória.

APÊNDICE A- PERMUTAÇÕES

A elaboração desse apêndice esta fundamento em [15]. Do ponto de vista combinatório, uma permutação de n objetos é qualquer ordenação destes n objetos.

Definição A.1: Dado um conjunto não vazio X, uma bijeção $\sigma : X \to X$ é denominada uma permutação do conjunto X. Denotamos por $\mathrm{S}(\mathrm{X})$ o conjunto de todas as permutações do conjunto X.

Para o estudo que vamos desenvolver, estamos mais interessados no caso onde X é finito. Por brevidade, para todo $n \in \mathbb{N}$, denotamos o conjunto finito $X = \{1, 2, \ldots, n\}$ pelo símbolo $[n]$ e o conjunto das permutações de $[n]$ por $S_n = S([n]) = S(\{1,\ 2, \ldots, n\})$.

Aplicando o princípio multiplicativo temos que S_n tem $n!$ permutações, ou seja, $|S_n| = n!$.

Se $\sigma \in S_n$ e $j \in [n]$, $\sigma(j)$ denotará o valor da função bijetiva σ calculada no ponto j. Uma das representações importantes da permutação σ é a realizada pelo seguinte diagrama " de duas linhas"

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & \ldots & n \\ \sigma(1) & \ldots & \sigma(n) \end{pmatrix},$$

no qual é exibido a correspondência entre o domínio e a imagem da bijeção σ.

Podemos observar que na segunda linha não há elementos repetidos do conjunto $[n]$, sendo de fato um rearranjo da primeira linha.

Exemplo A.1: Seja $n = 3$. Então as $6 = 3!$ permutações de S_3 são dadas por:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exemplo A.2: Seja $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 5 & 2 & 4 & 6 & 3 & 8 & 7 \end{pmatrix} \in S_8$. Observe que os números 1 e 4 permaneceram fixo nesta permutação.

1.1 COMPOSIÇÕES DE PERMUTAÇÕES

Sendo as permutações funções com mesmo domínio e imagem, podemos também compô-las exatamente como fazemos com outros tipos de funções. Se σ e π são permutações de $S(X)$, denotamos a composta de σ e π por $\sigma \circ \pi$, onde entendemos que, para obter $(\sigma \circ \pi)(j)$, $j \in X$, primeiro calculamos $\pi(j)$ e depois σ em $\pi(j)$, obtendo $(\sigma \circ \pi)(j) = \sigma(\pi(j))$.

O teorema abaixo revela o quanto à composição de funções é uma operação natural no conjunto das permutações em X .

Teorema A.1: Seja X um conjunto não vazio e considere as permutações de $S(X)$. Então valem as seguintes afirmações:

(i) Se σ_1, $\sigma_2 \in S(X) \Rightarrow \sigma_1 \circ \sigma_2 \in S(X)$, isto é, $S(X)$ é fechado por composição de permutações;

(ii) A função identidade e pertence a $S(X)$;

(iii) Se $\sigma \in S(X)$ então a função inversa σ^{-1} pertence a $S(X)$ e $\sigma^{-1} \circ \sigma = e = \sigma \circ \sigma^{-1}$;

(iv) Se σ_1, σ_2, $\sigma_3 \in S(X) \Rightarrow \sigma_1 \circ (\sigma_2 \circ \sigma_3) = (\sigma_1 \circ \sigma_2) \circ \sigma_3$, isto é, a composição de permutações é associativa.

Demonstração: *(i)* Dados σ_1, $\sigma_2 \in S(X)$, mostramos que $\sigma_1 \circ \sigma_2$ é também uma bijeção de X em X e, portanto pertence a $S(X)$. $\sigma_1 \circ \sigma_2$ é injetiva, de fato, se tomarmos $x, y \in X$, $x \neq y$ como σ_2 é injetiva segue que $\sigma_2(x) \neq \sigma_2(y)$. Assim, como σ_1 é injetiva também, segue que $\sigma_1(\sigma_2(x)) \neq \sigma_1(\sigma_2(y))$ e, portanto $\sigma_1 \circ \sigma_2$ é também injetiva.

Mostramos agora que $\sigma_1 \circ \sigma_2$ é sobrejetiva e para isso seja $z \in X$. Como σ_1 e σ_2 são sobrejetivas, $\exists y \in X$ com $\sigma_1(y) = z$, $\exists x \in X$ com $\sigma_2(x) = y$, Isto é, existe $x \in X$ tal que $\sigma_1(\sigma_2(x)) = z$ e, portanto $\sigma_1 \circ \sigma_2$ é sobrejetiva.

Assim concluímos que $\sigma_1 \circ \sigma_2 \in S(X)$ é fechado por composição de permutações.

(ii) e (iii) é imediato verificar que a função $e(x)$ identidade é uma permutação em $S(X)$. Como toda função bijetiva possui inversa, e esta inversa também é bijetiva, segue a existência dos inversos em $S(\mathrm{X})$. As identidades $\sigma^{-1}\circ\sigma=e=\sigma\circ\sigma^{-1}$ seguem pela definição de função inversa.

(iv) Seja $x\in X$, então

$(\sigma_1\circ(\sigma_2\circ\sigma_3))(x)=\sigma_1(\sigma_2(\sigma_3(\mathrm{x})))=(\sigma_1\circ\sigma_2)(\sigma_3(x))=((\sigma_1\circ\sigma_2)\circ\sigma_3)(\mathrm{x})$. ■

Há um método prático para calcular a composição de permutação que consiste em partir do diagrama da primeira permutação e observar onde cada número da primeira linha está sendo levado na segunda linha. Em seguida, observar onde a segunda permutação está levando em seu diagrama cada número da segunda linha da primeira permutação. Anotamos o resultado em um terceiro diagrama que será o diagrama correspondente da composta das permutações. Em tempo, abaixo colocamos um exemplo em símbolos para esclarecer bem o método! Para facilitar nosso trabalho, se uma permutação $\sigma\in S_n$ leva um número $j\in[n]$em um número $k\in[n]$, representamos esta propriedade de σ pelo diagrama de seta $j\underset{\sigma}{\rightarrow}k$.

Exemplo A.3: Sejam $\sigma=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&3&1&4\end{pmatrix}$ e $\pi=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&1&4&3\end{pmatrix}$ ambas em S_4. Vamos calcular $\sigma\circ\pi$:

Observamos que π leva o número 1 ao número 2, isto é $1\underset{\pi}{\rightarrow}2$. Agora σ leva o número 2 ao número 3, ou seja, $2\underset{\sigma}{\rightarrow}3$. Portanto $1\underset{\pi}{\rightarrow}2\underset{\sigma}{\rightarrow}3$ e então $1\underset{\sigma\circ\pi}{\rightarrow}3$. Para os demais números do conjunto $[4]$, temos;

$$2\underset{\pi}{\rightarrow}1\underset{\sigma}{\rightarrow}2\Rightarrow 2\underset{\sigma\circ\pi}{\rightarrow}2;$$

$$3\underset{\pi}{\rightarrow}4\underset{\sigma}{\rightarrow}4\Rightarrow 3\underset{\sigma\circ\pi}{\rightarrow}4;$$

$$4\underset{\pi}{\rightarrow}3\underset{\sigma}{\rightarrow}1\Rightarrow 4\underset{\sigma\circ\pi}{\rightarrow}1;$$

o que fornece

$$\sigma\circ\pi=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&2&4&1\end{pmatrix}.$$

Façamos o inverso agora, vamos calcular a composição $\pi\circ\sigma$. Neste caso valem os seguintes diagramas:

$$1\underset{\sigma}{\rightarrow}2\underset{\pi}{\rightarrow}1\Rightarrow 1\underset{\pi\circ\sigma}{\rightarrow}1;$$

$$2\underset{\sigma}{\rightarrow}3\underset{\pi}{\rightarrow}4\Rightarrow 2\underset{\pi\circ\sigma}{\rightarrow}4;$$

$$3\underset{\sigma}{\rightarrow}1\underset{\pi}{\rightarrow}2\Rightarrow 3\underset{\pi\circ\sigma}{\rightarrow}2;$$

$$4 \underset{\sigma}{\rightarrow} 4 \underset{\pi}{\rightarrow} 3 \Rightarrow 4 \underset{\pi\circ\sigma}{\rightarrow} 3.$$

que resultam na permutação composta:

$$\sigma \circ \pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

O exemplo acima deixou claro que a composição de permutação não é comutativa, ou seja, $\sigma \circ \pi \neq \pi \circ \sigma$.

Esta notação em duas linhas também muito útil no cálculo da inversa de uma permutação σ. Basta trocar a primeira linha com a segunda e reordenar as colunas da nova primeira linha para que fique com a ordenação crescente. Vejamos o exemplo a seguir.

Exemplo A.4: Seja $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ e vamos calcular sua inversa σ^{-1}. Inicialmente trocamos a primeira e segunda linha para obter $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ e em seguida reordenamos as colunas para que a primeira linha fique em ordem crescente. Isto resulta na inversa

$$\sigma^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Apenas como teste, observe que os diagramas de setas abaixo de ambas as composições resultam na identidade $e = \sigma \circ \sigma^{-1} = \sigma^{-1} \circ \sigma$.

Tabela A1: Diagramas de composições

$\sigma \circ \sigma^{-1}$	$\sigma^{-1} \circ \sigma$
$1 \underset{\sigma^{-1}}{\rightarrow} 3 \underset{\sigma}{\rightarrow} 1 \Rightarrow 1 \underset{\sigma\circ\sigma^{-1}}{\rightarrow} 1$	$1 \underset{\sigma}{\rightarrow} 2 \underset{\sigma^{-1}}{\rightarrow} 1 \Rightarrow 1 \underset{\sigma^{-1}\circ\sigma}{\rightarrow} 1$
$2 \underset{\sigma^{-1}}{\rightarrow} 1 \underset{\sigma}{\rightarrow} 2 \Rightarrow 2 \underset{\sigma\circ\sigma^{-1}}{\rightarrow} 2$	$2 \underset{\sigma}{\rightarrow} 3 \underset{\sigma^{-1}}{\rightarrow} 2 \Rightarrow 2 \underset{\sigma^{-1}\circ\sigma}{\rightarrow} 2$
$3 \underset{\sigma^{-1}}{\rightarrow} 2 \underset{\sigma}{\rightarrow} 3 \Rightarrow 3 \underset{\sigma\circ\sigma^{-1}}{\rightarrow} 3$	$3 \underset{\sigma}{\rightarrow} 1 \underset{\sigma^{-1}}{\rightarrow} 3 \Rightarrow 3 \underset{\sigma^{-1}\circ\sigma}{\rightarrow} 3$
$4 \underset{\sigma^{-1}}{\rightarrow} 4 \underset{\sigma}{\rightarrow} 4 \Rightarrow 4 \underset{\sigma\circ\sigma^{-1}}{\rightarrow} 4$	$4 \underset{\sigma}{\rightarrow} 4 \underset{\sigma^{-1}}{\rightarrow} 4 \Rightarrow 4 \underset{\sigma^{-1}\circ\sigma}{\rightarrow} 4$

Fonte: Autor

1.2 REPRESENTAÇÃO DE PERMUTAÇÕES POR CICLOS DISJUNTOS

Na seção anterior vimos à representação da permutação pelo diagrama de duas linhas e também utilizando os diagramas de setas para nos auxiliar na composição de permutação. Agora vamos estudar a importância representação por ciclos e antes de introduzi-la, é conveniente olharmos para mais um exemplo.

Exemplo A.5: Seja $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 5 & 6 & 4 & 1 & 3 & 8 & 7 \end{pmatrix} \in S_8$. Vamos analisar o efeito de repetirmos a composição de σ por ela mesma nos números do conjunto $[8]$. Iterando sucessivamente a composição por ela mesma, observamos os seguintes diagramas de setas, onde omitimos σ das setas por brevidade,

Tabela A2: Representação da composição de σ por ela mesma

$1 \to 2 \to 5 \to 1$	$1 \to 2 \to 5 \to 1$
$5 \to 1 \to 2 \to 5$	
$2 \to 5 \to 1 \to 2$	
$6 \to 3 \to 6$	$3 \to 6 \to 3$
$3 \to 6 \to 3$	
$7 \to 8 \to 7$	$7 \to 8 \to 7$
$8 \to 7 \to 8$	
$4 \to 4$	$4 \to 4$

Fonte: Autor

A coluna da direita na tabela A 2 representa uma maneira simplificado para as composições de σ.

Repare que precisamos de 3 iterações de σ para levarmos o número 1 nele mesmo, passando por 2 e por 5. Esta mesma análise vale para 2 e o 5 na mesma ordem, mas com partidas diferentes. O número 3 retornou a ele mesmo depois de 2 iterações, antes passando pelo número 6. Na primeira iteração o número 4 já foi fixado. Já o 7 retornou nele mesmo após duas iterações de σ e o 8 está no mesmo diagrama em que encontramos o 7.

Vamos denotar por σ^k a $(k-1)-ésima$ iteração da composição da permutação σ por ela mesma:

$\sigma^3(1)=\sigma(\sigma(\sigma(1)))=1$; $\sigma^3(2)=\sigma(\sigma(\sigma(2)))=2$; $\sigma^2(3)=\sigma(\sigma(3))=3$;

$\sigma(4)=4$; $\sigma^3(5)=\sigma(\sigma(\sigma(5)))=5$; $\sigma^2(6)=\sigma(\sigma(6))=6$; $\sigma^2(7)=\sigma(\sigma(7))=7$;

$\sigma^2(8)=\sigma(\sigma(2))=8$.

De maneira geral, se $\sigma \in S_n$, para todo $j \in [n]$ temos que deve existir $t_j \in [n]$ tal que: (i) $\sigma^{t_j}(\mathrm{j}) = \mathrm{j}$ e (ii) a sequência $(j, \sigma(\mathrm{j}), \sigma^2(\mathrm{j}), \ldots, \sigma^{t_j - 1}(\mathrm{j}))$ não possua elementos repetidos do conjunto $[n]$. Para $S_1 = \{e\}$ a verificação é imediata com $e^1(\mathrm{j}) = \mathrm{j}$ e podemos então considerar $n \geq 2$.

Com efeito, sendo $\sigma : [n] \to [n]$ uma bijeção, então σ^t é bijeção também, pois é composta de bijeções para todo $t \in \mathbb{N}$. Pela própria definição de composição de funções, σ^0 é a identidade e, portanto $\sigma^0(\mathrm{j})$ retorna o próprio ponto de partida $j \in [n]$. Sendo assim, $\sigma^t(\mathrm{j})$ toma sempre valores em $[n]$, um conjunto de n elementos, não importando o número t de iterações que façamos.

Isto significa que devemos ter repetições na sequência $(\mathrm{j}, \sigma(\mathrm{j}), \sigma^2(\mathrm{j}), \ldots, \sigma^t(\mathrm{j}))$ para um número suficientemente grande t, porém menor do que ou igual a n. Seja $t \in \mathbb{N}$ o menor número tal que a primeira repetição aconteça, e seja $t_1 \in \mathbb{N}$ tal que $0 < \mathrm{t}_1 < \mathrm{t}$ e $\sigma^t(\mathrm{j}) = \sigma^{t_1}(\mathrm{j}) = \sigma^{t_1}(\sigma^{t - t_1}(j))$. Como σ^{t_1} é em particular injetiva, segue que $\sigma^{t - t_1}(\mathrm{j}) = \mathrm{j}$. Tomamos então $\mathrm{t}_\mathrm{j} = \mathrm{t} - \mathrm{t}_1$ e concluímos a existência do número t_j da nossa afirmação acima.

Isto permite a seguinte definição do conceito de ciclo de uma permutação.

Definição A.2: Definimos a sequência $(j, \sigma(j), \sigma^2(j), \ldots, \sigma^{t_j - 1}(j))$ como um *ciclo* de σ de comprimento t_j. Denominamos um ciclo de comprimento t simplesmente de $\mathrm{t}-\mathrm{ciclo}$; se $\mathrm{t}=1$ dizemos que o ciclo é um ponto fixo, se $\mathrm{t}>1$ dizemos que é um ciclo não trivial e se $\mathrm{t}=2$ dizemos que o ciclo é uma *transposição*. Uma *involução* é uma permutação composta apenas por pontos fixos e transposições.

Definição A.3: Dado $n \in \mathbb{N}$ e um conjunto finito e não vazio $X = [n]$. Uma $n -$ *partição* de X é uma família $\overline{X} = \{X_t;\ X_t \subset [n]\}$ de subconjuntos de X, tais que:

(i) Cada X_t é não vazio;

(ii) Os subconjuntos são disjuntos dois a dois. Isto é, $t_1 \neq t_2 \Rightarrow X_{t_1} \cap X_{t_2} = \varnothing$;

(iii) A união dos subconjuntos da $n-$ *partição*, $\overline{X} = \{X_t : t \in [n]\}$ é igual a X. Em símbolos, $\bigcup X_t = X$.

Chamamos $\overline{X}$ de uma partição de X e X_t chamamos de *classe* ou *bloco* da partição $\overline{X}$. De posse do conceito de partição de conjuntos, sumarizamos os resultados que desenvolvemos acima como um teorema.

Teorema A.2: Seja $\sigma \in S_n$. Então vale a seguinte representação de σ por k ciclos disjuntos,

$$\sigma = \left(j_1^{(1)} j_2^{(1)} \ldots j_{t_1}^{(1)} \right) \left(j_1^{(2)} j_2^{(2)} \ldots j_{t_2}^{(2)} \right) \cdots \left(j_1^{(k)} j_2^{(k)} \ldots j_{t_k}^{(k)} \right) \qquad (1.1)$$

com $k \in \mathbb{N}$ e

$$[n] = \{1, 2, \ldots, n\} = \bigcup_{i=1}^{k} \left\{ j_1^{(i)}, \ldots, j_{t_i}^{(i)} \right\}.$$

Particionando em k blocos de tamanha t_i, onde t_i é o comprimento do ciclo i para $i = 1, \ldots, k$.

Retornamos então ao exemplo anterior para exibir a representação por ciclos disjuntos e fornecemos mais um exemplo.

Exemplo A.6: $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 5 & 6 & 4 & 1 & 3 & 8 & 7 \end{pmatrix} = (125)\,(36)\,(4)\,(78)$.

Exemplo A.7: Seja $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ 1 & 12 & 7 & 4 & 3 & 2 & 5 & 9 & 8 & 11 & 6 & 10 \end{pmatrix}$, temos que:

$$\begin{gathered} 1 \to 1 \\ 2 \to 12 \to 10 \to 11 \to 6 \to 2 \\ 3 \to 7 \to 5 \to 3 \\ 4 \to 4 \\ 8 \to 9 \to 8 \end{gathered} ,$$

portanto $\sigma = (1)\,(2\ \ 12\ \ 10\ \ 11\ \ 6)\,(3\ \ 7\ \ 5)\,(4)\,(8\ \ 9)$.

Observe que na representação (1.1) podemos ter ciclos disjuntos de mesmo comprimento. Assim os números $t_1, \ldots, t_k$ podem não serem todos distintos. Suponha, sem perda de generalidade, que no conjunto $\{t_1, \ldots, t_k\}$ tenhamos apenas $s \leq k$ números distintos, e os renomearemos na ordem crescente $l_1 < l_2 < \ldots < l_s$. Consequentemente, podemos afirmar que existem k_{l_1} ciclos de comprimento l_1, k_{l_2} ciclos de comprimento l_s; onde $k_{l_j}, l_j \in [n]$ para $j = 1, 2, \ldots, s$. Desta forma podemos concluir que toda $\sigma \in S_n$ fixada, temos a unicidade dos números $s = s(\sigma)$, $l_j = l_j(\sigma)$ e $k_{l_s} = k_{l_s}(\sigma)$, onde $\mathrm{j} = 1, 2, \ldots, \mathrm{s}$.

APÊNDICE B - SÉRIES DE POTÊNCIAS

A elaboração desse apêndice esta fundamentada em [17] e [18]. Algumas vezes se faz necessário representar funções por séries, mais especificamente série de potências. Entretanto, é preciso definir série de potência, estudar as principais propriedades e estabelecer para quais valores de x a série de funções converge, ou seja, seu raio de convergência.

Definição B.1: Uma série de potências é uma série de funções:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots \qquad 1.1$$

na qual x é variável e os termos a_n são chamados coeficientes da série.

Para cada x fixado, a série 1.1 é uma série de constantes que podemos testar para a convergência ou divergência. Uma série de potências pode convergir para alguns valores de x e divergir para outros.

Por exemplo, considerando $a_n = 1$ para todo n, a série de potências se torna a série geométrica:

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots$$

que converge quando $-1 < x < 1$ e diverge quando $|x| \geq 1$.

Definição B.2: De maneira geral, uma expressão da forma:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n = a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + \cdots + a_n(x-a)^n + \cdots$$

é uma série de potências centrada em $x = a$. O termo $a_n(x-a)^n$ é o *n*-ésimo termo e o número *a* é o centro.

Proposição B.1: (Estudo da convergência para Séries de Potências centradas em $x = a$) Para uma série de potências $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n$, existem apenas três possibilidade com relação à convergência.

1. A série converge apenas quando $x = a$.
2. A série converge para todo *x*.
3. Existe um número positivo *R* tal que a série converge se $|x-a| < R$ e diverge se $|x-a| > R$.

O número *R* é o raio de convergência e o conjunto de todos os valores de x para os quais a série converge é chamado intervalo de convergência da série de potencias.

1.1 REPRESENTAÇÃO DE FUNÇÃO POR SÉRIES DE POTÊNCIAS

Uma série de potências $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, define uma função f cujo domínio é o intervalo de convergência da série.

Tomemos como exemplo a série geométrica com $a_n = 1$ e $r = x$. Pelo exemplo 2.2, a série converge para a soma $\frac{1}{1-x}$, se $|x| < 1$. Isto é,

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots = \frac{1}{1-x} \qquad |x| < 1 . \qquad (1.2)$$

A figura B 1 apresenta os gráficos de $f(x) = \frac{1}{1-x}$ e de algumas somas parciais das séries (1.2). Como a soma de uma série é o limite da sequência de somas parciais, temos que:

$$\frac{1}{1-x} = \lim_{x \to \infty} s_n(x),$$

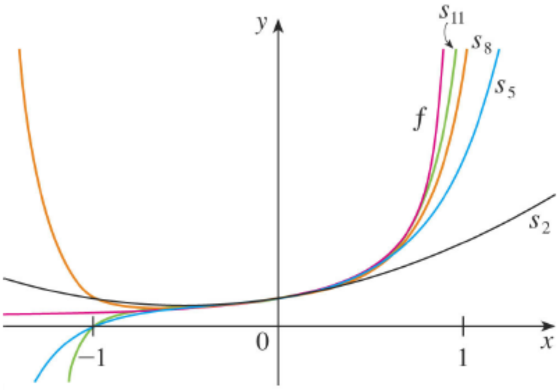
onde

$$S_n(x) = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n$$

é a soma parcial da série.

Podemos notar que, conforme n aumenta, $S_n(x)$ se torna uma melhor aproximação de $f(x)$ no intervalo $(-1,1)$. Portanto, a série $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ representa a função f, tal que $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$ se $|x| < 1$.

Figura B 1: Gráfico de f e algumas aproximações polinomiais



Fonte: STEWART ,2006

A partir da série (1.2) podemos obter outras séries de potências, cujas somas podem ser determinadas e que representam a função f intervalo de convergência da série.

Se, em (1.2), substituirmos x por $-x$, obtemos;

$$1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + (-1)^n x^n + \cdots = \frac{1}{1+x} \qquad \text{com } |x| < 1.$$

Se $x = -x^2$ na série (1.2), obtemos;

$$1 - x^2 + x^4 - x^6 + \cdots + (-1)^n x^{2n} + \cdots = \frac{1}{1+x^2} \quad \text{com } |x| < 1.$$

Assim, dizemos que se uma função f é representada por uma série de potências de x, então:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n ,$$

para todo x no intervalo de convergência da série

Proposição B.2: Seja $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ uma séria de potência cujo raio de convergência é $R > 0$, e seja f definida por

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots$$

para todo x no intervalo de convergência. Então:

1. f é diferenciável (e portanto contínua) para todo x no intervalo aberto $(-R, R)$ e

$$f'(x) = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + \cdots + na_nx^{n-1} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} n\,a_n x^{n-1}.$$

2. f é integrável em todo subintervalo fechado de $(-R, R)$ e

$$\int_0^x f(t)\,dt = a_0x + a_1\frac{x^2}{2} + a_2\frac{x^3}{3} + \cdots + a_n\frac{x^{n+1}}{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$$

Exemplo B.1: Utilizando a diferenciação termo a termo, podemos mostrar que a série $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ representa $f(x) = e^x$ em toda a reta real.

Denotamos por f a função definida por:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots \tag{1.3}$$

O domínio de f será o conjunto de todos os números reais, pois o intervalo de convergência da série é $(-\infty, +\infty)$. Segue pela parte 1 da proposição B.1 que para todo x real,

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx^{n-1}}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots$$

Isto é, $f'(x) = f(x)$ para todo x.

Assim, a função f satisfaz a equação diferencial

$$\frac{dy}{dx} = y$$

a qual tem como solução geral $y = Ce^x$. Logo, para alguma constante C, $f(x) = Ce^x$. De (1.3), $f(0) = 1$, portanto $C = 1$.

Assim, concluímos que:

$$f(x) = e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

1.2 SÉRIES DE TAYLOR E DE MACLAURIN

Considerando sucessivas aplicações da proposição B.1, dentro de seu intervalo de convergência, uma série de potências representa uma função contínua com derivadas de todas as ordens. Agora, verificaremos que condições são suficientes para que uma função f admita uma representação em série de potencias e como encontrar tal representação. Consideremos inicialmente que f seja uma função que possa ser representada por uma série de potências

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-a)^n = a_0 + a_1(x-a)+a_2(x-a)^2+\cdots+a_nx^n+\cdots \qquad |x-a|<R$$

com raio de convergência $R>0$. Aplicando repetidamente a derivação termo a termo dentro do intervalo de convergência, obtemos:

$$f^{'}(x)=a_1+2a_2(x-a)+3a_3(x-a)^2+\cdots+na_n(x-a)^{n-1}+\cdots$$

$$f^{''}(x)=2a_2+2.3a_3(x-a)+3.4a_4(x-a)^2+\cdots+(n-1)na_n(x-a)^{n-2}+\cdots$$

$$f^{'''}(x)=2.3a_3+2.3.4a_4(x-a)+3.4.5a_5(x-a)^2+\cdots+(n-2)(n-1)na_n(x-a)^{n-3}+\cdots$$

$$f^{(iv)}(x)=2.3.4a_4+2.3.4.5a_5(x-a)+\cdots+(n-3)(n-2)(n-1)na_n(x-a)^{n-4}+\cdots$$

$\vdots$

Substituindo $x=a$ nas equações acima, temos:

$$f^{'}(a)=a_1$$

$$f^{''}(a)=2a_2$$

$$f^{'''}(a)=3!a_3$$

$$f^{(iv)}(a)=4!a_4$$

e, em geral,

$$f^{(n)}(a)=n!a_n$$

Isso nos revela um padrão para os coeficientes de qualquer série de potências $\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-a)^n$ que convirja para os valores de f no intervalo de convergência. Portanto, se existir essa série, ela será única e seus coeficientes serão da forma,

$$a_n=\frac{f^{(n)}(a)}{n!}.$$

Assim, a representação de f em série de potências será,

$$f(x)=f(a)+f^{'}(a)(x-a)+\frac{f^{''}(a)}{2!}(x-a)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+\cdots$$

Definição B.3: (Série de Taylor) Seja f uma função com derivadas de todas as ordens em algum intervalo contendo *a* como um ponto interior. Então, a série de Taylor gerada por f em $x = a$ é

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n = f(a) + f^{'}(a)(x-a) + \frac{f^{''}(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \cdots.$$

A série de Taylor recebeu este nome em homenagem ao matemático inglês Brook Taylor (1685-1731), que publicou suas descobertas sobre séries em 1715 no livro *Metodus incrementorum directa et inversa*, embora esse estudo tenho sido realizado anteriormente por outros matemáticos como Newton, Gregory e Bernoulli. Para o caso especial $a = 0$, a série de Taylor se torna a chamada Série de Maclaurin.

Definição B.4: (Série de Maclaurin) A série de Taylor gerada por f em $a = 0$ é

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = f(0) + f^{'}(0)x + \frac{f^{''}(a)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \cdots,$$

conhecida como série de Maclaurin gerada por f.

Apesar de ser um caso particular da série de Taylor, a série de Maclaurin recebeu essa denominação em referencia ao matemático escocês Colin Maclaurin (1698-1746).

APÊNDICE C - SÉRIES FORMAIS: FUNÇÕES GERADORAS

As séries formais podem ser adotadas como ferramenta para enumerar estruturas ou configurações discretas. O expoente de x na série quantifica algumas propriedades em que estamos interessados, como por exemplo, o comprimento de uma sequência, uma solução inteira de uma determinada equação, com coeficientes inteiros, cuja soma é igual a n, etc. Se para cada situação exemplificada associarmos tal potência de x e somarmos estas potências, o coeficiente de x^n será, respectivamente, o termo da sequência na posição *n,* ou seja*,* o número de soluções inteiras de uma determinada equação. A ideia dessa abordagem de série de funções nesse contexto é resolver problemas de combinatória. Dessa forma, não estaremos interessados em estabelecer para quais valores x a série é convergente, ou seja, o raio de convergência da série.

Um polinômio é uma expressão na forma

$$p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n ,$$

e uma *série formal* é uma expressão da forma

$$p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \ldots,$$

onde, $a_{i,}\ \forall_i \geq 0$,com $i \in \mathbb{N}$ são chamados de coeficientes das potências de x^i.

Definição C.1: Séries de potências são séries formais do tipo

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n ,$$

e se $x_0 = 0$, temos

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x)^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots$$

sendo a_n um número real e *x* uma variável.

Pela definição acima, qualquer polinômio em *x* é uma série de potências. Por exemplo: o polinômio $5x + 8x^3 + 9x^5$ pode ser escrito como $0 + 5x + 0x^2 + 8x^3 + 0x^4 + 9x^5 + 0x^6 + \ldots$.

Definição C.2: Sejam $a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots$ e $b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + b_3 x^3 + \ldots$, séries de potências, então a soma das duas é a série de potências na qual o coeficiente de x^r é $a_r + b_r$ e o produto das duas é a série de potências na qual o coeficiente de x^r é $a_0 b_r + a_1 b_{r-1} + a_2 b_{r-2} + \ldots + a_r b_0$, para todo $r \in \mathbb{N}$.

Definição C.3: Seja a sequência (a_r) de números reais. Se a_r para $r = 1,2, \cdots$ é o número de soluções de um problema combinatório, a *função geradora ordinária* para este problema é a série de potências

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots.$$

Os exemplos a seguir foram retirados de [16].

Por exemplo, consideremos a seguinte situação: queremos encontrar o número de soluções inteiras da equação $x_1 + x_2 + x_3 = 12$, onde as variáveis x_1 e x_2 pertencem ao conjunto $\{2,3,4\}$ e a variável x_3 pertencem ao conjunto $\{5,6,7\}$.

Consideremos o seguinte polinômio:

$$\begin{cases} p_1(x) = (x^2 + x^3 + x^4) \\ p_2(x) = (x^2 + x^3 + x^4) \\ p_3(x) = (x^5 + x^6 + x^7). \end{cases}$$

Fazendo o produto desses polinômios podemos observar que:

$$p_1(x).p_2(x).p_3(x) = \begin{cases} x^{2+2+5} + x^{2+2+6} + x^{2+2+7} \\ x^{2+3+5} + x^{2+3+6} + x^{\mathbf{2+3+7}} \\ x^{2+4+5} + x^{\mathbf{2+4+6}} + x^{2+4+7} \\ x^{3+2+5} + x^{3+2+6} + x^{\mathbf{3+2+7}} \\ x^{3+3+5} + x^{\mathbf{3+3+6}} + x^{3+3+7} \\ x^{\mathbf{3+4+5}} + x^{3+4+6} + x^{3+4+7} \\ x^{4+2+5} + x^{\mathbf{4+2+6}} + x^{4+2+7} \\ x^{\mathbf{4+3+5}} + x^{4+3+6} + x^{4+3+7} \\ x^{4+4+5} + x^{4+4+6} + x^{4+4+7} \end{cases}$$

Observemos que no expoente de x aparecem exatamente os valores que as variáveis x_1, x_2 e x_3 podem assumir. Os valores em negrito que aparecem no expoente de x são as soluções para o problema. De acordo com o problema queremos os valores, tais que a soma dê 12, dessa forma a resposta do problema é o coeficiente de x^{12} .

Temos que:

$$p_1(x)p_2(x)p_3(x) = (x^2 + x^3 + x^4)^2(x^5 + x^6 + x^7) = x^9 + 3x^{10} + 6x^{11} + 7x^{12} + 6x^{13} + 3x^{14} + x^{15}$$

Portanto a equação possui 7 soluções inteiras com as restrições dadas.

Nesse caso, a função geradora para esse problema é:

$$f(x) = p_1(x)p_2(x)p_3(x) = 0 + 0x + 0x^2 + 0x^3 + 0x^4 + x^5 + 0x^6 + 0x^7 + 0x^8 + x^9 + 3x^{10} + 6x^{11} + 7x^{12} + 6x^{13} + x^{15} + 0x^{16} + 0x^{17} + \ldots.$$

Exemplo C.1: Encontrar a função geradora ordinária para $a_r = (1,1,1,1,1,1,\ldots)$.

Temos que a série de potências procurada é igual a:

$$f(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + \ldots,$$

como $f(x)$ representa uma progressão geométrica, calcularemos a soma de seus termos, assim temos:

$$f(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + \ldots = \left(\frac{1}{1-x}\right).$$

Logo a função geradora ordinária da sequencia a_r é $f(x)=\left(\frac{1}{1-x}\right)$.

Exemplo C.2: Encontrar a função geradora para sequência $a_r=(0, 0, 1, 1, 1, 1, \ldots)$

Temos que a série de potências procurada é igual a:

$$f(x)=0+0x+x^2+x^3+x^4+x^5+\ldots.$$

Mas sempre que estivermos procurando a função geradora (ordinária) estamos interessados numa expressão simples, ou seja;

$$f(x)=x^2+x^3+x^4+x^5+\ldots=x^2\left(\frac{1}{1-x}\right).$$

Logo a função geradora ordinária da sequencia a_r é $f(x)=x^2\left(\frac{1}{1-x}\right)$.

Definição C.4: Seja (a_r) uma sequência de números reais. A série de potências

$$a_0+a_1\frac{x}{1!}+a_2\frac{x^2}{2!}+a_3\frac{x^3}{3!}+\cdots+a_r\frac{x^r}{r!}+\cdots$$

é chamada *função geradora exponencial* da sequência a_r.

Exemplo C.3: Encontrar a função geradora exponencial para a sequência $(1, 1, 1, 1, \ldots)$.

Como;

$$e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots+\frac{x^r}{r!}+\cdots,$$

e nesta expansão o coeficiente de $\frac{x^r}{r!}$ é igual a 1, esta é a função geradora exponencial da sequência $a_r=1$, para $r=0, 1, 2, 3, \ldots$.

Exemplo C.4: Existem 10 caixas idênticas de presentes. Cada uma deve ser embrulhada com uma única cor e dispõe-se de papéis de cor vermelha azul, verde e amarela. O papel vermelho permite que se embrulhe no máximo duas caixas e com o azul se pode embrulhar no máximo 3. Escreva a função geradora ordinária associada com o problema de encontrar o número de maneiras de se embrulhar dez caixas.

Observemos que o problema não impõe restrições para os papéis verde e amarelo, enquanto para o papel vermelho e que se embrulho no máximo duas caixas e o azul permite que se embrulhe no máximo 3 caixas, dessa forma a função geradora para esse problema é:

$$f(x)=(1+x+x^2)(1+x+x^2+x^3).\frac{1}{(1-x)^2}=\frac{1-x^3}{1-x}.\frac{1-x^4}{1-x}.\frac{1}{(1-x)^2}=\frac{(1-x^3)(1-x^4)}{(1-x)^4}$$

A resposta para o problema é o coeficiente de x^{10}.

As funções geradoras também podem ser utilizadas para determinar a solução de recorrências, ou seja, dada uma sucessão (a_n), $n=0,1,2,\dots$. Seja

$$f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n+\cdots,$$

a função geradora associada a recorrência. Esta função geradora $f(x)$ contém toda a informação relativa à recorrência $(a_n), n=0,1,2,\dots,$ sendo muitas vezes mais fácil manipular do que a própria sucessão.

O termo geral da recorrência a_n pode ser determinado a partir do coeficiente de x^n no desenvolvimento em série de potências de $f(x)$.

Exemplo C.5: Dado a_0 número real. Determinar a solução da recorrência $a_n=2a_{n-1}$.

A solução dessa recorrência é o coeficiente de x^n. Fazendo $f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots$.

Multiplicando os dois termos da igualdade $a_n=2a_{n-1}$ pelas potências sucessivas de x^n e somando, obtém-se:

$$a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n+\cdots=2(a_0x+a_1x^2+\cdots+a_{n-1}x^n+\cdots)$$

$$-a_0+(a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n+\cdots)=2x(a_0+a_1x^1+\cdots+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots)$$

$$-a_0+f(x)=2x\,f(x)$$

$$f(x)=a_0(1+2x+2^2x^2+\cdots+2^nx^n+\cdots)$$

Ou seja, o coeficiente de x^n é $a_0\,2^n$, portanto a solução da recorrência é $a_n=a_0 2^n$.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

[1] https://www.maa.org/sites/default/files/pdf/upload_library/2/Boyadzhiev-2013.pdf. Acessado em 20/10/2017.

[2] TROVÃO, MARCELO HENRIQUE - **Métodos de Contagem**/ Marcelo Henrique Trovão; orientador Hermano de Souza Ribeiro. Dissertação – São Carlos, 2005.

[3] MARINHO, JULIO CESAR DE SOUSA - **Demonstrações Combinatórias 2**; orientador Michel Spira. Monografia – UFMG, 2006.

[4] GRAHAM, RONALD LEWIS - **Concrete mathematics : a foundation for computer science** ; Ronald L. Graham, Donald E. Knuth, Oren Patashnik. -- 2nd ed. ,1935.

[5] SANTOS, J. P. O, MELLO M. P., MURARI I. T.C. **Introdução à análise combinatória** -3ª ed.- Campinas, SP: Editora da Unicamp, 2002.

[6] http://www.bitman.name/math/_article/168/. Acesso em 09/11/2017.

[7] https://www.normaculta.com.br/classificacao-de-rimas/. Acesso em 20/10/2017

[8] https://www.math.hmc.edu/~benjamin/papers/harmonic.pdf. Acesso em 08/10/2017.

[9] http://www.dirsom.com.br/index_htm_files/Serie%20Harmonica.pdf. Acessado em 12/11/2017.

[10] http://mathworld.wolfram.com/BookStackingProblem.html. Acessado em 17/11/2017.

[11] http://mathforum.org/advanced/robertd/harmonic.html. Acessado em 17/11/2017.

[12] http://www.youtube.com/watch?v=WOFORkL_n3g. Acessado em 17/11/2017.

[13] http://wrean.ca/cazelais/block_problem.pdf. Acessado em 17/11/2017.

[14] http://www.fap.com.br/forum_2012/forum/pdf/Exatas/Comunicacao_Oral/ResExaCO18.pdf. Acessado em 17/11/2017.

[15] http://www.bienasbm.ufba.br/M37.pdf. Acessado em 14/11/2017

[16] SILVA, MYRIAN PASTORE DA. – **Uma extensão para o coeficiente binomial: o coeficiente trinomial**./ Myrian Pastore da Silva. – Dourados, MS: UFGD. 2016.

[17] STEWART, James. **Cálculo: Volume 2**. 5 ed. Sao Paulo: Pioneira Thomson Learning, 2006.

[18] LIMA, Valeria Muniz. **Séries de Potências: Aspectos Teóricos e Aplicações**. 66 f. Monografia – Programa de Pós-graduação em Matemática, Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Campo Mourão, 2011.