JOÃO HENRIQUE BUENO DE GODOY FILHO

O PRINCÍPIO DA INCLUSÃO E EXCLUSÃO E SUAS APLICAÇÕES

Dourados - MS

2016

JOÃO HENRIQUE BUENO DE GODOY FILHO

O PRINCÍPIO DA INCLUSÃO E EXCLUSÃO E SUAS APLICAÇÕES

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática Profissional, do Centro de Tecnologia da Universidade Federal da Grande Dourados, como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Matemática. Área de concentração: Matemática

Universidade Federal da Grande Dourados - UFGD

Faculdade de Ciências Exatas e Tecnologia

Orientador: Prof. Dr. Lino Sanabria

Dourados - MS

2016

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
FUNDAÇÃO UNIVERSIDADE FEDERAL DA GRANDE DOURADOS
FACULDADE DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLOGIA
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL - PROFMAT

Termo de Aprovação

Após a apresentação, arguição e apreciação pela banca examinadora foi emitido o parecer APROVADO, para a dissertação intitulada: **"O PRINCÍPIO DA INCLUSÃO E EXCLUSÃO E SUAS APLICAÇÕES"**, de autoria de **JOÃO HENRIQUE BUENO DE GODOY FILHO**, apresentada ao Programa de Mestrado em Matemática da Universidade Federal da Grande Dourados.

Prof. Dr. Lino Sanabria (Orientador-UFGD)
Presidente da Banca Examinadora

Prof. Dr. Sérgio Rodrigues
Membro Examinador (UFGD)

Prof. Dr. Vando Narciso
Membro Examinador (UEMS)

Dourados/MS, 12 de julho de 2016

Este trabalho é dedicado a Jusara Maria Araujo Reinaldo Araujo e João Lucas Rogoski Godoy.

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a minha mãe pelo amor, pela criação, pelo exemplo de cidadã e pela valiosa educação que tive.

Ao meu pai, pelo exemplo de um cidadão honesto e trabalhador que sempre foi.

Ao meu filho João Lucas, pelo carinho e amor.

A minha noiva Joyce Dalvi, pelo incentivo, paciência nos momentos ausentes e amor incondicional a mim dispensado.

As minhas irmãs Thaisa e Tatiana pelo apoio e modelo ao qual posso me espelhar.

A todos os professores do corpo docente, pela dedicação, paciência e sabedoria. Em especial ao meu orientador e professor Dr. Lino Sanabria pela qualidade na orientação deste trabalho, pessoa esta pela qual tenho admiração e respeito.

A meus amigos do curso, em especial a Lin Ming Feng, um amigo indescritível.

Ao meu padrasto Alvacir Luziano Araujo que em 2004 plantou uma semente, financiando um curso preparatório pré-vestibular, e hoje colhe este frutos.

A Capes pela bolsa de estudos concedida.

"Conhecer os homens é ser inteligente; conhecer a si mesmo é ser iluminado.
Ultrapassar os outros é ter força; ultrapassar a si mesmo é ser forte.
Saber contentar-se é ser rico. Agir firmemente é ter propósito". (Lao Zi)

Resumo

O presente trabalho tem como objetivo o estudo do Princípio da Inclusão e Exclusão e algumas de suas aplicações, resolvemos importantes problemas da análise combinatória, tratamos das permutações caóticas, das funções sobrejetivas, da função phi de Euler e por fim o problema de Lucas. As principais fontes desta pesquisa são livros clássicos de combinatória, porém as releituras deixam a escrita com uma característica simples e motivadora.

Palavras-chaves: Contagem, Princípio da Inclusão-Exclusão, Permutações Caóticas

Abstract

This work aims to study the Inclusion and Exclusion Principle and some of its applications , solve important problems in combinatorics , treat the chaotic permutations of sobrejetivas functions phi function Euler and finally Luke's problem. The main sources of this research are classic combinatorial books, but the readings leave writing with a simple and motivating feature .

Key-words: Counting, Principle of Inclusion and Exclusion, Permutations Chaotic

Lista de ilustrações

Lista de tabelas

Sumário

Introdução

.

A combinatória é um ramo da matemática que estuda estruturas e relações discretas. A principal área estudada é a contagem de objetos de coleções finitas que satisfazem certos critérios. Os principiais princípios na análise combinatória é o princípio da adição, o princípio da multiplicação, o princípio da complementação, o princípio injetivo e o princípio bijetivo. Neste trabalho daremos a principal importância ao Princípio da Inclusão e Exclusão e algumas importantes aplicações.

A área com grande interesse pelos estudantes e pesquisadores em matemática, com crescimento explosivo nas últimas décadas, pela necessidade na teoria dos grafos, em análise de algoritmos etc. Aparece com grande frequência em questões de Olimpíadas de Matemática como OBMEP (Olimpíadas Brasileira de Matemática das Escolas Públicas), OBM (Olimpíadas Brasileira de Matemática) e principalmente a IMO (Internacional Mathematical Olympiad), esta foi a motivação para a escolha da área, bem como do tema e a beleza das demonstrações dos teoremas aqui apresentados.

Uma técnica significativa para resolver problemas de combinatória é contar o número de elementos que não pertencem a união de vários conjuntos, não necessariamente disjuntos, o Princípio da Inclusão e exclusão é um importante método da teoria dos conjuntos e da combinatória, foi enunciado por Daniel Augusto da Silva (1814-1878) em 1852, à academia de Ciências de Lisboa e publicada em 1854, mais tarde em um trabalho de James Joseph Sylvester em 1883. Por esta razão a equação 1.1 e equações semelhantes são chamadas fórmula de “Da Silva", ou “Sylvester"ou também utilizado muitas vezes é a “fórmula peneira". Esta história, assim como o conteúdo desenvolvido neste trabalho está contada em (LINT; WILSON, 2001) que é o principal referencial.

Iniciaremos apresentando o princípio da inclusão e exclusão em 1.3 a fórmula é realmente um exemplo de um princípio que é usado extensivamente na teoria dos números, no que se refere como “métodos de peneira". Fórmula como esta nos permite encontrar o número de primos $\leq n^2$, também chamado crivo de Eratóstenes.

Em seguida, o capítulo 2 é destinado às permutações caóticas, também conhecido como desarranjo. Faremos a demonstração do termo geral usando o Princípio da Inclusão e Exclusão, fazemos também da probabilidade da ocorrência de uma permutação caótica como também um meio de determinar o termo geral por inversão e por fim teremos será resolvido o famoso problema do amigo oculto.

No capítulo 3 serão feitas inicialmente as contagens de funções injetivas e bijetivas.

Em seguida, o destaque do capítulo está na resolução do problema de contar o número de funções sobrejetivas.

No capítulo 4, apesar de curto, trataremos da função de phi de Euler, que é uma importante aplicação do Principio da Inclusão e Exclusão.

E por fim, no capítulo 5, faremos a resolução do problema de Lucas e, para esta resolução, estudaremos o primeiro e o segundo Lema de Kaplansky.

1 O Princípio Da Inclusão e Exclusão

A utilização de linguagem dos conjuntos nos permite resolver diversos problemas de contagem cuja resolução por outros meios seria bastante trabalhoso. Para ilustrar nosso ponto de vista consideremos o problema de contar quantos são os inteiros, entre 1 e 1000, que são divisíveis por 5 ou 7.

Para a solução deste problema, denotemos por A o conjunto dos inteiros entre 1 e 1000 que são divisíveis por 5 e B o conjunto dos inteiros entre 1 e 1000 que são divisíveis por 7. Não é difícil determinar $|A|$ e $|B|$ (usaremos a notação |A| para indicar o número de elementos do conjunto A).

A solução do nosso problema é a contagem dos elementos que estejam em A ou estejam em B. Em símbolos, queremos $|A \cup B|$. Não podemos simplesmente somar $|A| + |B|$ pois alguns elementos serão somados duas vezes, a saber, aqueles que são simultaneamente múltiplos de 5 e de 7, ou melhor, os elementos de $A \cap B$ o conjunto dos inteiros entre 1 e 1000 que são divisíveis por 35. Em suma, a partir das observações feitas tem que, a solução do problema é dado por:

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

A fórmula acima é a versão mais simples do problema que vamos tratar neste trabalho e recebe o nome de Princípio da Inclusão e Exclusão.

Observe que ainda não respondemos a questão proposta, mas ela já foi traduzida para a linguagem dos conjuntos.

1.1 Cardinalidade da união de dois conjuntos

Investigaremos inicialmente a cardinalidade da união de dois conjuntos, resultado bastante utilizado na resolução de certos problemas, porém o foco do nosso trabalho está na cardinalidade do complementar da união de conjuntos.

Dados dois conjuntos A e B, sendo ambos subconjunto de um conjunto S, que suporem os disjuntos, isto é, $A \cap B = \emptyset$. Neste caso é fácil ver que $|A \cup B| = |A| + |B|$. O mesmo não se verifica quando $A \cap B \neq \emptyset$. De fato, quando $A \cap B \neq \emptyset$, os elementos que são comum, são contados duas vezes. Assim,

Afirmação: Dados A e B, subconjuntos de S, o número de elementos de $A \cup B$ é dado por:

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

justificativa:

Suponhamos que o número de elementos comuns a A e B seja n_2 e que além disso haja n_1 elementos que pertençam a A e não a B e n_3 elementos que pertençam a B mas não a A. Vejamos a figura Figura 1.1.(MORGADO et al., 2001)

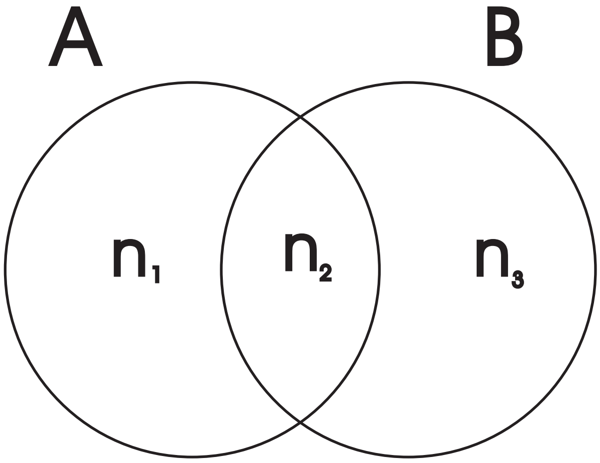


Figura 1.1 – Diagrama da relação de dois conjuntos

Fonte: O Autor.

$$\begin{aligned}
|A \cup B| &= n_1 + n_2 + n_3 \\
|A| + |B| - |A \cap B| &= (n_1 + n_2) + (n_2 + n_3) - n_2 \\
&= n_1 + n_2 + n_3 \\
&= |A \cup B|
\end{aligned}$$

Exemplo 1.1 *Quantos inteiros entre* 1 *e* 1000 *são divisíveis por 5 ou 7?*

Para a solução deste problema, usaremos a notação $\lfloor x \rfloor$ para representar o maior dentre os inteiros $\leq x$, ou seja, $\lfloor 1,2 \rfloor = 1$, $\lfloor 5,9 \rfloor = 5$.

Solução:

Sejam:

A o conjunto dos inteiros entre 1 e 1000 que são divisíveis por 5 e B o conjunto dos inteiros entre 1 e 1000 que são divisíveis por 7.

Queremos calcular $|A \cup B|$. Temos:

$$\begin{aligned}|A| &= \left\lfloor\frac{1000}{5}\right\rfloor = 200;\\ |B| &= \left\lfloor\frac{1000}{7}\right\rfloor = 142;\\ |A\cap B| &= \left\lfloor\frac{1000}{35}\right\rfloor = 28,\end{aligned}$$

Pelo Princípio da Inclusão e Exclusão, temos:

$$|A\cup B| = |A| + |B| - |A\cap B| = 200 + 142 - 28 = 314$$

$\square$

Podemos também representar o número de inteiros entre 1 e 1000 que não são divisíveis nem por 5, nem por 7. Neste caso, temos 1000 números entre 1 e 1000 e vimos que existem 314 números que são divisíveis por 5 ou 7, é fácil ver que a resposta do problema é $1000 - 314 = 686$, visto que o problema trata de contar o complementar do conjunto, ou seja, $|A\cup B|^c$ segue abaixo uma solução formal para o problema.

Exemplo 1.2 *Quantos inteiros entre* 1 *e* 1000 *não são divisíveis nem por 5, nem por 7?*

Solução:

Como $A\cup B$ são subconjuntos de S. Então:

$$\begin{aligned}|S\backslash\{A\cup B\}| &= |S| - |A\cup B|\\ &= |S| - (|A| + |B| - |A\cap B|)\\ &= |S| - |A| - |B| + |A\cap B|\\ &= 1000 - 200 - 142 + 28\\ &= 686\end{aligned}$$

$\square$

Conforme veremos mais adiante, esta formulação melhor se adapta às aplicações que serão apresentadas.

1.2 Cardinalidade da união de três conjuntos

Sejam os conjuntos A, B e C, subconjuntos de um conjunto S. A cardinalidade da união de três conjuntos é:

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$$

Justificativa.

$$\begin{aligned}
|A \cup B \cup C| &= |(A \cup B) \cup C| \\
&= |A \cup B| + |C| - |(A \cup B) \cap C| \\
&= |A| + |B| - |A \cap B| + |C| - |(A \cap C) \cup (B \cap C)| \\
&= |A| + |B| - |A \cap B| + |C| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap C \cap B \cap C| \\
&= |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|
\end{aligned}$$

Exemplo 1.3 *Quantos são os anagramas da palavra ESCOLA que têm E em 1º lugar, ou S em 2º lugar, ou C em 3º lugar?*

Solução:

Defina:

A o conjunto dos anagramas de ESCOLA que têm E em 1º lugar;

B o conjunto dos anagramas de ESCOLA que têm S em 2º lugar;

C o conjunto dos anagramas de ESCOLA que têm C em 3º lugar;

Fixando a letra E no 1º lugar, vemos que restam 5 possibilidades para alocar uma letra no 2º lugar, 4 possibilidades para alocar uma letra no 3º lugar, e assim sucessivamente, logo $|A| = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 5! = 120$. De modo análogo temos que $|B| = |C| = 120$

Agora fixando as letras E e S no 1º lugar e 2º lugar respectivamente, vemos que restam 4 possibilidades para alocar uma letra no 3º lugar, 4 possibilidades para alocar uma letra no 4º lugar, e assim sucessivamente, logo $|A \cap B| = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 4! = 24$. De modo análogo temos que $|A \cap C| = |B \cap C| = 4! = 24$

Por fim, fixando as letras E, S e C no 1º lugar, 2º lugar e 3º lugar respectivamente, vemos que restam 3 possibilidades para alocar uma letra no 4º lugar, 2 possibilidades para alocar uma letra no 5º lugar e 1 possibilidade para alocar a última letra do 6º lugar, logo $|A \cap B \cap C| = 3! = 6$.

Portanto, pelo princípio da inclusão e exclusão, $|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C| = 3 \cdot 120 - 3 \cdot 24 + 6 = 360 - 72 + 6 = 294$.

□

Como o foco é a cardinalidade do complementar da união de objetos, segue agora o mesmo exemplo com este foco.

Exemplo 1.4 *Quantos são os anagramas da palavra ESCOLA, onde a letra E não figura em primeiro lugar, ou S em segundo lugar, ou C em terceiro lugar.*

A resposta é

$$\begin{aligned} |S\backslash\{A \cup B \cup C\}| &= |S| - |A \cup B \cup C| \\ &= 720 - 294 \\ &= 426 \end{aligned}$$

1.3 Princípio da Inclusão e Exclusão - P.I.E.

Seja S um conjunto com N elementos; $E_1, \ldots, E_r$ subconjuntos não necessariamente distintos de S. Para qualquer subconjunto de $M = \{1, \ldots, r\}$, definimos $N(M)$ o número de elementos de S em $\bigcap_{i \in M} E_i$ e para $0 \leq j \leq r$, definimos $N_j := \sum_{|m|=j} N(M)$.(LINT; WILSON, 2001)

Teorema 1.1 *O número de elementos de S que não pertence a algum dos E_i, $1 \leq i \leq r$, é:*

$$N - N_1 + N_2 - N_3 + \cdots + (-1)^r N_r \tag{1.1}$$

Demonstração: (i) Se $x \in S$ e x não é elemento de algum dos E_i, então x contribui 1 para a expressão 1.1.

(ii) Se $x \in S$ e x pertence a exatamente k conjunto dos subconjuntos E_i, então a contribuição dele para a equação 1.1 é

$$1 - \binom{k}{1} + \binom{k}{2} - \cdots + (-1)^k \binom{k}{k} = (1-1)^k = 0$$

□

Comentário:

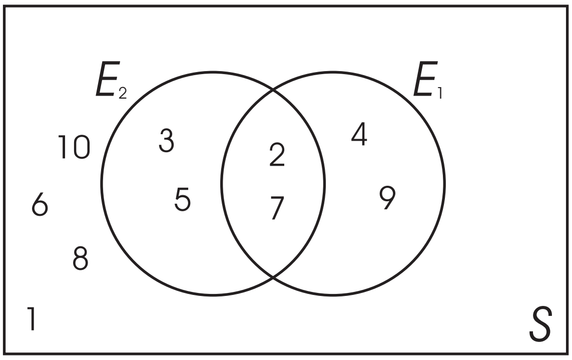
Quando um elemento x pertence a nenhum dos E_i, ele não é contado nas interseções, logo não contribui para os N_i, $0 \leq i \leq r$.

Assim, ele é contado 1 única vez em N.

Se por outro lado x pertence a exatamente k dos subconjunto E_i, então sua contribuição ao número N_j é $\binom{k}{j}$, pois é o número de vezes que ele será contado. De fato, quando escolhemos j subconjuntos dentre os E_i, se x não pertence a algum deles não fará parte da interseção e portanto não será contado, logo para que x seja contado é necessário tomar apenas subconjuntos que tenham x como elemento, e $\binom{k}{j}$ é o número de modos de escolher j subconjuntos dentre aqueles têm x como elemento.

Exemplo 1.5 *Seja $S = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$ e $E_1 = \{2,3,5,7\}$, $E_2 = \{2,4,7,9\}$ subconjuntos de S. Determine quantos elementos de S que não são elementos de $E_1 \cup E_2$.*

Figura 1.2 – Representação dos conjuntos através de diagrama



Fonte: O Autor.

Como $N = 10$, $N_1 = \sum_{|M|=1} N(M) = |E_1| + |E_2| = 4 + 4 = 8$ e $N_2 = \sum_{|M|=2} N(M) = |E_1 \cap E_2| = 2$ então, o número de elementos de S que não são elementos de $E_1 \cup E_2$ é $N - N_1 + N_2 = 10 - 8 + 2 = 4$

□

Exemplo 1.6 *(Crivo de Eratosthenes) Determine o número de primos $\leq n$.*

Seja $n \geq 2$ um inteiro, e seja S o conjunto dos inteiros de 1 a n. Sejam $p_1 < p_2 < \ldots < p_r$ os primos $\leq \sqrt{n}$. Indiquemos por E_i um subconjunto de S formado pelos inteiros que são divisíveis por p_i (incluindo o próprio p_i). Então $E_1 \cup E_2 \cup \ldots \cup E_r$ é o conjunto dos inteiros de 1 a n que são compostos e mais os primos acima. Lembrando que 1 não é primo, a quantidade de números primos de 1 a n é

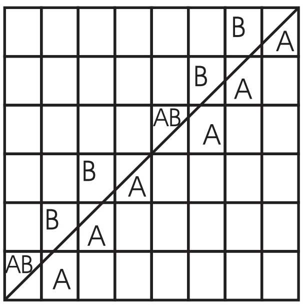
$$n + r - 1 - |E_1 \cup E_2 \cup \ldots \cup E_r| =$$
$$= n + r - 1 - N_1 + N_2 + \ldots + (-1)^r S_r =$$
$$= n + r - 1 - \sum_{i=1}^{r} \left\lfloor \frac{n}{p_i} \right\rfloor + \sum_{1 \leq i < j \leq r} \left\lfloor \frac{n}{p_i p_j} \right\rfloor - \sum_{1 \leq i < j < k \leq r} \left\lfloor \frac{n}{p_i p_j p_k} \right\rfloor + \ldots + (-1)^r \left\lfloor \frac{n}{p_1 p_2 \cdots p_r} \right\rfloor$$

Esta fórmula foi apresentada por Legendre em 1808 para determinar a quantidade de números primos $\leq n$ (PATERLINI, 2002)

Exemplo 1.7 *Um Retângulo $a \times b$ é feito de quadrados unitários. Por quantos quadrados unitários a diagonal do retângulo passa? (SHINE, 2015)*

Vamos analisar o que acontece com um retângulo 6×8, veja a figura abaixo

Figura 1.3 – Retângulo 6X8



Fonte: O Autor.

A letra **A** significa mudança na horizontal e a letra **B**, mudança na vertical.

Ao analisar o caso acima vemos que há duas repetições, uma no começo e outra na casa $(3,4)$. Vemos também que $mdc(6,8) = 2$ e $(6,8) = 2 \cdot (3,4)$. Como $mcd(a,b) = t$, ocorre repetições nas casas da forma $(k\frac{a}{t}, k\frac{b}{t})$, $k = 0, 1, \ldots, t-1$. Logo devemos subtrair $mdc(a,b)$ no caso bidimensional e a resposta é $a + b - mdc(a,b)$

□

Podemos enunciar o mesmo problema diante de um Paralelepípedo $m \times n \times p$. Denotemos de L, T e V os conjuntos dos cubos unitários cortados primeiramente na longitudinal, transversal e vertical, respectivamente, queremos.

$$\begin{aligned} |L \cup T \cup V| &= |L| + |T| + |V| - |L \cap T| - |L \cap V| - |T \cap V| + |L \cap T \cap V| \\ &= m + n + p - mdc(m,n) - mdc(m,p) - mdc(n,p) + mdc(m,n,p) \end{aligned}$$

Outro tipo de problema em que podemos facilmente ver como tal técnica é aplicável, é uma generalização do problema de enumerar soluções inteiras de equações. Vejamos abaixo um exemplo com esta aplicação.

Exemplo 1.8 *Encontre todas as soluções inteiras e não negativas da equação* $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 100$*, quando* $x_1 > 0$*,* $x_2 \geq 0$*,* $0 \leq x_3 \leq 7$ *e* $2 \leq x_4 \leq 10$*.(KELLER; TROTTER, 2015)*

Primeiramente, usaremos na solução deste problema, o número de soluções inteiras e não negativas de $x_1+x_2+\ldots+x_n = p$ que é $CR_n^p = P_{p+n-1}^{p,n-1} = \frac{(n+p-1)!}{p!(n-1)!} = C_{n+p-1}^p = \binom{n+p-1}{p}$. De acordo com (MORGADO et al., 2001) podemos observar com mais detalhes.

Vamos configurar o problema para que o limite inferior de cada variável é da forma $x_i \geq 0$.

Fazendo $x_1 = x_1' + 1$ e $x_4 = x_4' + 2$, temos:

- $x_1 > 0 \Leftrightarrow x_1 - 1 > 0 - 1 \Leftrightarrow x_1' > -1 \Leftrightarrow x_1' \geq 0$

- $2 \leq x_4 \leq 10 \Leftrightarrow 2 - 2 \leq x_4 - 2 \leq 10 - 2 \Leftrightarrow 0 \leq x_4' \leq 8$.

Isso nos leva ao problema revisto de enumerar as soluções inteiras e não negativas para $x_1' + x_2 + x_3 + x_4' = 97$ com $x_1',\ x_2,\ x_3,\ x_4' \geq 0$, $x_3 \leq 7$ e $x_4' \leq 8$.

Para contar o número de soluções inteiras e não negativas para esta equação com $x_3' \leq 7$ e $x_4' \leq 8$, devemos excluir qualquer solução em que $x_3 > 7$ ou $x_4' > 8$.

Temos $\binom{92}{3}$ soluções em $x_3 > 7$, pois:

Fazendo $x_3 = a + 8$ temos agora a seguinte equação $x_1' + x_2 + a + x_4' = 89$ com $x_1',\ x_2,\ a,\ x_4' \geq 0$ e o número de soluções desta equação é $\binom{89+4-1}{89} = \binom{92}{89} = \binom{92}{3}$.

E o número de soluções com $x_4' > 8$ é $\binom{91}{3}$, desta forma:

Fazendo $x_4' = b + 9$ temos a equação $x_1' + x_2 + x_3 + b = 88$ com $x_1',\ x_2,\ x_3,\ b \geq 0$ e o número de soluções desta equação é $\binom{88+4-1}{88} = \binom{91}{88} = \binom{91}{3}$.

Pode ser tentador que apenas subtraia $\binom{92}{3}$ e $\binom{91}{3}$ de $\binom{100}{3}$, o número total de soluções com todas as variáveis não negativas.

No entanto, é necessário cuidado. Se fizermos isso, teríamos que eliminar as soluções com ambos $x_3 > 7$ e $x_4' > 8$ duas vezes. Notamos também que existem $\binom{83}{3}$ soluções com ambos $x_3 > 7$ e $x_4' > 8$.

Este detalhe monstra que se trata do Princípio da Inclusão e Exclusão e de acordo com teorema 1.1, vemos que a resposta deste problema é:

Para dar conta disso, notamos que existem $\binom{83}{3}$ soluções com ambos $x_3 > 7$ e $x_4' > 8$.

$$N - N_1 + N_2\binom{100}{3} - \binom{92}{3} - \binom{91}{3} + \binom{83}{3} = 6516 \tag{1.2}$$

2 PERMUTAÇÕES CAÓTICAS

Neste capítulo iremos tratar de desarranjo, também conhecidos como permutação caótica ou *derangement* (do francês) é uma permutação em que nenhum elemento do conjunto permanece na sua posição de origem. Com essa interpretação desenvolveremos o termo geral das permutações caóticas e com isso resolveremos clássico problema do amigo oculto também conhecido como o problema das cartas mal endereçadas proposto por Nicolaus Bernoulli (1687-1759).

2.1 Termo geral

Seja a função $\pi : \{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, n\}$ uma bijeção que não possui pontos fixos, ou seja, nenhum elemento do conjunto permanece na sua posição de origem. Faremos um exemplo da função π para $n = 3$.

Exemplo 2.1 *Para a função* $\pi : \{1, 2, 3\} \to \{1, 2, 3\}$*, temos o seguinte conjunto imagem.* $Im_\pi = \{(1, 2, 3), (1, 3, 2), (3, 2, 1), (3, 1, 2), (2, 1, 3), (2, 3, 1)\}$

Seja $S_n = \{\pi : \{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, n\} : \pi \text{ é bijeção }\}$. Queremos saber quantos elementos possui o conjunto S_n, neste caso temos n modos de escolher a imagem do primeiro elemento, $n-1$ modos de escolher a imagem do segundo elemento, $\ldots$, 1 modo de escolher a imagem que ocupará o último elemento, lembrando que nesta contagem, basta a função ser injetiva (ou sobrejetiva). Portanto $|S_n| = n!$, ou seja, o número de elementos de S_n é $n!$.

Definição 2.1 *Uma permutação* d_n *de* $\{1, \ldots, n\}$ *é chamada caótica quando* $\pi(i) \neq i$ *para todo* i.

Defina o conjunto $E_i = \{\pi \in S_n : \pi(i) = i\}$ com $i \in \{1, \ldots, n\}$ como o conjunto das permutações onde i situa-se na sua posição original.

Exemplo 2.2 *Para* $n = 3$ *temos que* $E_1 = \{(1, 2, 3), (1, 3, 2)\}$*;* $E_2 = \{(1, 2, 3), (3, 2, 1)\}$*;* $E_3 = \{(1, 2, 3), (2, 1, 3)\}$.

Teorema 2.1 *Seja* $S = S_n$ *e ponha* E_i*, como sendo subconjuntos daquelas permutações* π *com* $\pi(i) = i$*. Então,*

$$d_n = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \binom{n}{i} (n-i)! = n! \sum_{i=0}^{n} \frac{(-1)^i}{i!} \tag{2.1}$$

Prova 1: De acordo com o capítulo anterior, basta calcularmos quantos elementos possui $N_j = \sum_{|M|=j} N(M)$, com isto temos $\binom{n}{j}$ subconjuntos de tamanho j e fixado M tal que $|M| = j$ sobram $n - j$ posições para permutar, logo $N(M) = (n - j)!$. Daí, $N_j = \binom{n}{j} \cdot (n-j)! = \frac{n!}{j!(n-j)!} \cdot (n-j)! = \frac{n!}{j!}$. Portando, de acordo com o teorema 1.1, temos.

$$\begin{aligned}
d_n &= N - N_1 + N_2 - \cdots + (-1)^n N_n \\
d_n &= n! - n! \cdot \frac{1}{1!} + n! \cdot \frac{1}{2!} - \cdots + n! \cdot \frac{(-1)^n}{n!} \\
d_n &= n!\left[1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \cdots + \frac{(-1)^j}{j!}\right] \\
d_n &= n! \sum_{j=0}^{n} \frac{(-1)^j}{j!}
\end{aligned}$$

□

Prova 2:

De acordo com (BRUALDI, 2009), faremos também o método recursivo para as permutações caóticas. Seja d_n o número de permutações caóticas com n elementos, podemos dividi-las em dois conjuntos, de acordo com o último elemento da permutação caótica.

- Se o último elemento é k e o k-ésimo elemento é n, hà $n-1$ escolhas para k e d_{n-2} escolhas para as posições dos outros $n-2$ elementos. Total: $(n-1)d_{n-2}$.
- Se o último elemento é k é o k-ésimo elemento não é n, hà $n-1$ escolhas para k e d_{n-1} escolhas para as posições dos outros $n-1$ elementos (em que tratamos n como se fosse k). Total: $(n-1)d_{n-1}$.

Então somando os dois casos temos $d_n = (n-1)(d_{n-2} + d_{n-1})$, com $d_1 = 0$ e $d_2 = 1$.

Neste caso podemos reescrever a fórmula acima:

$$\begin{aligned}
d_n &= (n-1)d_{n-2} + (n-1)d_{n-1} \\
d_n &= nd_{n-1} - d_{n-1} + (n-1)d_{n-2} \\
d_n - nd_{n-1} &= -[d_{n-1} - (n-1)d_{n-2}].\ (n \geq 3)
\end{aligned}$$

Veja que o lado direito da expressão, é o mesmo que no lado esquerdo sendo n substituído por $n-1$. Assim podemos aplicar o método de recurssão.

$$\begin{aligned} d_n - nd_{n-1} &= -[d_{n-1} - (n-1)d_{n-2}] \\ &= (-1)^2[d_{n-2} - (n-2)d_{n-3}] \\ &= (-1)^3[d_{n-3} - (n-3)d_{n-4}] \\ &\vdots \\ &= (-1)^{n-2}(d_2 - 2d_1). \end{aligned}$$

Desde que que $d_2 = 1$ e $d_1 = 0$, obtemos a simples recurssão.

$$d_n = nd_{n-1} + (-1)^{n-2}$$

O número de permutações caóticas é equivalente a,

$$d_n = nd_{n-1} + (-1)^n \quad \text{para} \quad n = 2, 3, 4, \ldots \tag{2.2}$$

De acordo com a fórmula encontrada recursivamente, observe que:

$$\begin{aligned} d_3 &= 3d_2 - 1 = 3 - 1 = 3!\left(\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!}\right) \\ d_4 &= 4d_3 + 1 = 4(3d_2 - 1) + 1 = 4 \cdot 3d_2 - 4 + 1 = 4 \cdot 3 - 4 + 1 = 4!\left(\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!}\right) \\ d_5 &= 5d_4 - 1 = 5(4 \cdot 3 - 4 - 1) - 1 = 5 \cdot 4 \cdot 3 - 5 \cdot 4 + 5 - 1 = \left(\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \frac{1}{5!}\right) \\ d_n &= n!\left(\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \frac{1}{5!} + \ldots + (-1)^n\frac{1}{n!}\right). \quad \forall n \geq 2 \end{aligned} \tag{2.3}$$

Usando a Princípio da Indução Finita, faremos a validade de que (2.2)$\Rightarrow$(2.3) para todo n natural e $n \geq 2$.

De fato, para $n = 2$, temo que $d_2 = 2!(1/2!) = 1$.

Suponha, a hipótese da indução, que d_n seja verdadeira para algum $n - 1$, ou seja:

$$d_{n-1} = (n-1)!\left(\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{1}{(n-1)!}\right)$$

Multiplicando ambos membros da igualdade por n, temos:

$$d_{n-1} = n(n-1)!\left(\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{1}{(n-1)!}\right)$$

Substituindo nd_{n-1} por $d_n - (-1)^n$.

$$\begin{aligned}
d_n - (-1)^n &= n(n-1)!\left(\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{1}{(n-1)!}\right) \\
d_n &= n!\left(\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{1}{(n-1)!}\right) + (-1)^n \\
d_n &= n!\left(\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \ldots + (-1)^{n}\frac{1}{n!}\right)
\end{aligned}$$

Portanto, pelo princípio da indução finita temos que d_n é valido para todo $n \in \mathbb{N}$.

□

O teorema 2.1 pode ser formulado de modo recursivo a partir de n e $n-1$. Segue abaixo o desenvolvimento,

$$\begin{aligned}
d_n &= n!\left(\frac{1}{0!} - \frac{1}{1!} - \cdots + \frac{(-1)^n}{n!}\right) \\
&= n!\left(\frac{1}{0!} - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!} + \frac{(-1)^n}{n!}\right) \\
&= n(n-1)!\left(\frac{1}{0!} - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!}\right) + (-1)^n \\
&= n \cdot d_{(n-1)} + (-1)^n \qquad (2.4)
\end{aligned}$$

2.2 Probabilidade de permutação caótica

Veremos a seguir que, à partir desta fórmula, para grandes valores de n, a probabilidade de uma permutação caótica é próximo de e^{-1}. Para tal mostração enunciaremos primeiro a Série de Taylor.

Série de taylor Seja $f : I \to \mathbb{R}$, derivável tantas vezes quantas de deseje, em todos os pontos do intervalo I. Se a é interior ao intervalo I e $a + h \in I$, então podemos escrever, para todo $n \in \mathbb{N}$:

$$f(a+h) = f(a) + f'(a) \cdot h + \frac{f''(a)}{2!} \cdot h^2 + \cdots + \frac{f^{(n-1)(a)}}{(n-1)!} \cdot h^{(n-1)} + r_n(h),$$

onde $r_n(h) = \frac{f^{(n)}(a+\theta_n h)}{n!} \cdot h^n$, para algum $0 < \theta_n < 1$.

A série $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} \cdot h^n$ chama-se a *série de Taylor* da função f em torno do ponto a.

Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a função exponencial: $f(x) = e^x$. Então suas derivadas sucessivas são todas iguais a e^x , isto é, $f^n(x) = e^x$, para todo $n \in \mathbb{N}$ e todo $x \in \mathbb{R}$. A fórmula de Taylor em torno do 0 tem o aspecto:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \frac{e^{c_n}}{(n+1)!} \cdot x^{n+1}$$

com $|c_n| < |x|$. Evidentemente, para todo $x \in \mathbb{R}$ fixo, o resto $r_{n+1}(x) = \frac{e^{c_n}}{(n+1)!} \cdot x^{n+1}$ tende para 0 quando $n \to \infty$. A série de Taylor converge para a e^x e

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots$$

Fazendo $x = -x$ temos

$$\begin{aligned} e^{-x} &= 1 + (-x) + \frac{(-x)^2}{2!} + \frac{(-x)^3}{3!} \cdots + \frac{(-x)^n}{n!} + \cdots \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{j!} (x)^j \end{aligned} \tag{2.5}$$

Tomando arbitrariamente uma permutação, a probabilidade de que ela seja uma permutação caótica é:

$$p(n) = \frac{n! \sum_{j=0}^{n} \frac{(-1)^j}{j!}}{n!} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{j!}$$

Usaremos a notação p_n para a probabilidade de uma permutação caótica, onde $p_{(n)} = P(\pi \in d_n)$ tal que $d(n) = \{\pi \in S_n : \pi \quad \text{é desarranjo}\}$.

Logo, $\lim_{n\to\infty} p(d_n) = \frac{1}{e} = e^{-1}$

2.3 A permutação caótica por inversão

Nesta seção veremos que podemos obter a equação 2.1 por meio por meio de inversão.

Considere a série de potência $D(x) := \sum_{n=0}^{\infty} d_n \frac{x^n}{n!}$ $(d_0 = 1)$ e defina $F(x) := e^x \cdot D(x)$, logo:

$$\begin{aligned} F(x) &= \left(\sum_{j=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}\right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} d_n \frac{x^n}{n!}\right) \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} A_m\, x^m \quad ,\text{com} \qquad (2.6) \\ A_m &= \sum_{r=0}^{m} \frac{1}{r!} \cdot \frac{d_{m-r}}{(m-r)!} \\ &= \sum_{r=0}^{m} \frac{1}{m!} \cdot \frac{m!}{(m-r)!r!} d_{m-r} \\ &= \frac{1}{m!} \sum_{r=0}^{m} \binom{m}{r} d_{m-r} \qquad (2.7) \end{aligned}$$

Substituindo a equação 2.7 em 2.6 temos:

$$F(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \left(\sum_{r=0}^{m} \binom{m}{r} d_{m-r} \right) \frac{x^m}{m!}$$

O número de permutações de $1, 2, \cdots, m$ que têm exatamente r elementos no seu lugar original é $\binom{m}{r} \cdot d_{m-r}$. Como toda permutação tem $0, 1, 2, \cdots$ ou m elementos no lugar original, $\sum_{r=0}^{m} \binom{m}{r} d_{m-r}$ é igual ao total de permutações, isto é, $\sum_{r=0}^{m} \binom{m}{r} d_{m-r} = m!$

Com isto

$$\begin{aligned} F(x) &= \sum_{m=0}^{\infty} \left(\sum_{r=0}^{m} \binom{m}{r} d_{m-r} \right) \frac{x^m}{m!} \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} (m!) \frac{x^m}{m!} \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} x^m \\ &= (1-x)^{-1} \end{aligned}$$

Tabela 2.1 – À guisa de justificativa

a) $(1 + x + x^2 + x^3 + \ldots)(1 - x) = (1 - x) + (x - x^2) + (x^2 - x^3) + \ldots = 1$
Logo $1 + x + x^2 + \ldots = \frac{1}{1-x}$
b) Soma de Progressão Geométrica (P.G.)
$1 + x + x^2 + \ldots + x^n = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$
Se $\lvert x \rvert < 1$, então $\lim_{n\to\infty} x^{n+1} = 0$, logo
$1 + x + \ldots + x^n + \ldots = \frac{1}{1-x}$

Vejamos que $F(x) = e^x \cdot D(x) = \sum_{m=0}^{\infty} x^m$. Multiplicando e^{-x} em ambos os lados da igualdade, temos:

$$\begin{aligned}
F(x) &= e^x \cdot D(x) \\
e^{-x} \cdot F(x) &= D(x) \quad \text{substituindo a equação 2.5} \\
D(x) &= \left(\sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{j!} x^j\right) \cdot \left(\sum_{m=0}^{\infty} x^m\right) \\
&= \sum_{m=0}^{\infty} \widehat{A}_m \, x^m \quad ,\text{com} \\
\widehat{A}_m &= \sum_{i=0}^{m} \frac{(-1)^i}{i!}
\end{aligned}$$

Contudo,

$$\begin{aligned}
D(x) &= \sum_{m=0}^{\infty} \left(\sum_{i=0}^{m} \frac{(-1)^i}{i!}\right) x^m \\
&= \sum_{m=0}^{\infty} \left(m! \sum_{i=0}^{m} \frac{(-1)^i}{i!}\right) \frac{x^m}{m!} \\
&= \sum_{m=0}^{\infty} d_m \frac{x^m}{m!}
\end{aligned}$$

Portanto:

$$d_m = m! \sum_{j=0}^{m} \frac{(-1)^i}{i!}$$

2.4 Uma outra contagem de posição

Nesta seção vamos considerar um problema de contagem de permutações em que exige certas posições proibidas. Iremos usar o Princípio da Inclusão e Exclusão para contar o número destas permutações.

Vamos introduzir o problema da seguinte maneira: suponha que uma classe de oito meninos caminham todos os dias. Os estudantes caminham em linha, de modo que cada menino exceto o primeiro é precedido por outro, ou seja, em fila única. Para que a mesma criança não veja a mesma pessoa na frente dele, no segundo dia, os alunos decidem alternar posições para que nenhum menino é precedido pelo mesmo rapaz que o procederam no primeiro dia. De quantas maneiras elas podem alternar posições?

Uma possibilidade é inverter a ordem dos meninos, para que o primeiro rapaz seja agora o último, e assim por diante, porém existe ainda outras possibilidades. Se atribuirmos aos rapazes os números $1, 2, \ldots, 8$, então nós determinamos o número de permutações do conjunto $\{1, 2, \ldots, 8\}$ em que os padrões $12,\ 23,\ \ldots,\ 78$ não ocorram. Assim, 31542876 é uma permutação admissível, mas 84312657 não é. De modo geral, para cada inteiro positivo n, nós deixamos Q_n como o número de permutações de $\{1, 2, \ldots, n\}$ em que nenhum dos padrões $12,\ 23, \ldots,\ (n-1)n$, ocorra. Usaremos o Princípio da Inclusão Exclusão para calcular Q_n.

Vejamos que se $n = 1$, então 1 é uma permutação permissível. Se $n = 2$, então 21 é uma permutação permissível. Se $n = 3$, então $213,\ 321,\ 132$ são permutações permissíveis. Vejamos a solução da prova dada por (BRUALDI, 2009) do teorema.

Teorema 2.2 *Para* $n \geq 1$*,*

$$Q_n = n! - \binom{n-1}{1}(n-1)! + \binom{n-1}{2}(n-2)! - \ldots + (-1)^{n-1}\binom{n-1}{n-1}1! \tag{2.8}$$

Prova: Seja N o conjunto de todas as $n!$ permutações de $\{1,\ 2, \ldots, n\}$, Logo $N = n!$. Seja P_j a propriedade de que, em uma permutação, o padrão $j(j+1)$ não ocorre, $j \in \{1,\ 2, \ldots, n-1\}$. Assim, a permutação $(1,\ 2, \ldots, n)$ é contada no número Q_n se, e apenas se, não tem nenhuma das propriedades, $P_1,\ P_2, \ldots, P_{(n-1)}$. Seja E_i o conjunto de permutações de $\{1,\ 2 \ldots, n\}$ que satisfaz a propriedade P_i, com $j \in \{1,\ 2, \ldots, n-1\}$. Então, usando o teorema 1.1

$$Q_n = N - N_1 + N_2 - N_3 + \cdots + (-1)^{n-1}N_{n-1}$$

Calculemos o número de permutações de E_1. Sabemos que uma permutação de E_1 ocorre se, e apenas se, o padrão 12 ocorre. Assim, uma permutação em E_1 pode ser considerada como uma permutação dos símbolos $\{12,\ 3,\ 4, \ldots, n\}$. Concluímos que $|E_i| = (n-1)!$ e em geral temos:

$$N_1 = \sum_{|M|=1} N(M) = \binom{n-1}{1}(n-1)!$$

Permutações que estão em dois dos conjuntos de $E_1,\ E_2, \ldots, E_{n-1}$, contem dois padrões. Esses padrões podem ser do tipo 12 e 23, ou do tipo 12 e 34, onde não possuem elementos em comum. A permutação que contém dois padrões 12 e 23 contém o padrão 123 e a permutação contém $n-2$ elementos, ou seja, $\{123, 4, \ldots, n\}$, logo $|E_1 \cap E_2| = (n-2)!$ e a permutação que contém dois padrões 12 e 34, a permutação contém $(n-2)!$ elementos $\{12,\ 34,\ 5, \ldots, n\}$, logo $|A_1 \cap A_3| = (n-2)!$. Em geral:

$$N_2 = \sum_{|M|=2} N(M) = \sum_{1 \leq i \leq j \leq n} |E_i \cap E_j| = \binom{n-1}{2}(n-2)!$$

Geralmente, vemos que uma permutação que contém k padrões especificados na lista $12,\ 23,\dots,(n-1)n$ pode ser considerados como uma permutação de $(n-k)$ elementos e portanto:

$$|\bigcap_{i_k\in M}| = (n-k)! \quad \text{para cada k subconjunto } \{i_1,\ i_2, \quad ,i_k\} \text{ de } \{1,\ 2,\dots,n-1\}.$$

desde que $k\in\{1,\ 2,\dots,n-1\}$.

Logo $N_k=\sum_{|M|=k}N(M)=\sum_{1\leq i_k\leq n-1}\bigcap_{i_k\in M}=\binom{n-1}{k}(n-k)!$

portanto:

$$\begin{aligned} Q_n &= N-N_1+N_2-N_3+\cdots+(-1)^{n-1}N_{n-1} \\ Q_n &= n!-\binom{n-1}{1}(n-1)!+\binom{n-1}{2}(n-2)!-\ldots+(-1)^{n-1}\binom{n-1}{n-1}1! \end{aligned}$$

O número $Q_1,\ Q_2,\ Q_3,\dots$ estão intimamente relacionados com os números de desarranjo. Com efeito, temos $Q_n=d_n+d_{n-1}$, $(n\geq 2)$

2.5 O problema do amigo oculto

Seja uma brincadeira de "amigo oculto", na qual n pessoas escrevem seu nome num pedaço de papel e o depositam num recipiente, de onde cada um pega aleatoriamente um dos pedaços de papel. Qual a probabilidade de ninguém pegar seu próprio nome?

Foi publicada a solução deste clássico problema pelo professor Carlos Gustavo Tamm de Araujo Moreira, na revista do professor de matemática número 15, sabendo também que Leonhard Euler no século XVIII empenhou-se em solucionar o problema conhecido como 'o problema das cartas mal endereçadas" (consiste em descobrir de quantas formas distintas pode-se colocar n cartas em n envelopes, endereçados a n destinatários diferentes, de modo que nenhuma das cartas seja colocada no envelope correto).

Vemos que o número total de maneiras dos n itens serem permutados sem que nenhum volte a sua posição de origem é $d(n)$ e o número total de permutações dos n itens é $n!$. Portanto a probabilidade procurada é:

$$p(n)=\frac{n!\sum_{j=0}^{n}\frac{(-1)^j}{j!}}{n!}\approx\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(-1)^j}{j!}=e^{-1}\cong 0,37$$

□

3 CONTAGEM E FUNÇÕES

O estudo de funções nos trazem problemas de contagem muito interessantes. Iniciaremos o capítulo com as contagens mais simples, como a de funções. Trataremos também a contagem das funções injetivas e bijetivas, porém a ordem de importância das seções será com relação à dificuldade em sua contagem, com isso fica explicito ao leitor que trataremos primeiramente de funções injetivas e bijetivas e por fim das funções sobrejetivas, pois estas possuem um maior grau de dificuldade.

3.1 Funções

Iniciaremos a seção com a definição de função, assim, temos condições de contar quantas são as funções $f : A \to B$, sabendo que A possui n elementos e B possui m elementos.

Definição 3.1 *Dados dois conjuntos A, B, uma função $f : A \to B$ (lê-se "uma função de A em B") é uma regra que permite associar a cada elemento $x \in A$, um único elemento $f(x) \in B$.*

O conjunto A chama-se o domínio e B é o contra-domínio da função f. Para cada $x \in A$, o elemento $f(x) \in B$ chama-se a imagem de x pela função f, ou o valor assumido pela função f no ponto $x \in A$. Escreve-se $x \mapsto f(x)$ para indicar que f transforma x em $f(x)$.

Iremos contar as funções $f : A \to B$ quando A possui n elementos e B possui m elementos. De acordo com a definição dada, para cada elemento de A, devemos escolher um elemento qualquer da imagem em B, ou seja, temos m para a escolha da imagem do primeiro elemento de A, m modos para a escolha segundo elemento, m modos de escolher a imagem do terceiro elemento e assim sucessivamente. Concluímos então que o número de funções $f : A \to B$ é $\underbrace{m \times m \times m \times \ldots \times m}_{n \quad \text{elementos}} = m^n$

Exemplo 3.1 *O conjunto A possui 5 elementos e o conjunto B possui 8 elementos. Quantas são as funções $f : A \to B$?*

A resposta para este problema é $8^5 = 32768$ funções.

3.2 Função injetiva

Uma função $f : A \to B$ chama-se injetiva quando elementos diferentes em A são transformados por f em elementos diferentes em B. Ou seja, f é injetiva quando:

$$x \neq x' \quad \text{em} \quad X \Rightarrow f(x) \neq f(x')$$

Seja A um conjunto com n elementos e B com m elementos. Quantas são as funções injetivas $f : A \to B$ $(m \geq n)$?

Como elementos diferentes devem ter imagens diferentes, há m modos de escolher a imagem do primeiro elemento de A, $(m-1)$ modos de escolher a imagem do segundo elemento de A, e assim sucessivamente. Portanto, a resposta é $m \cdot (m-1) \cdot (m-2) \cdots (m-n+1)$.

Exemplo 3.2 *O conjunto A possui 8 elementos e o conjunto B possui 10 elementos. Quantas são as funções injetoras $f : A \to B$?*

A resposta é $10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 = 1814400$

3.3 Função bijetiva

Uma função $f : A \to B$ chama-se bijetiva quando é injetiva e sobrejetiva ao mesmo tempo.

Para contar o número de funções bijetivas $f : A \to B$, devemos primeiramente notar que o número de elementos do conjunto A deve ser igual ao número de elementos do conjunto B, ou seja, $|A| = |B|$, e neste caso, seja $|A| = |B| = n$. O valor de $f(a_1)$ pode ser escolhido de n modos, o valor de $f(a_2)$ de $n-1$ modos e assim sucessivamente. Portanto, o número de funções bijetivas é $n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots (1) = n!$. A demonstração rigorosa para este caso, se dá pelo princípio da indução finita

Exemplo 3.3 *Se A é um conjunto com 5 elementos, quantas são as funções $f : A \to A$ bijetoras?*

A resposta é $5! = 120$ funções bijetivas.

3.4 Função sobrejetiva

Uma função $f : A \to B$ chama-se sobrejetiva quando, para qualquer elemento $y \in B$, pode-se encontrar um elemento $x \in A$ tal que $f(x) = y$.

Mais geralmente, chama-se imagem do subconjunto $X \subset A$ pela função $f : A \to B$ ao subconjunto $f(X) \subset B$ formado pelos elementos $f(x)$, com $x \in X$. A função $f : A \to B$ é sobrejetiva quando $f(A) = B$. O conjunto $f(A)$, imagem do domínio A pela função f, chama-se também a imagem da função f.

Mostraremos agora quantas são as funções $f : A \to B$ sobrejetivas quando $|A| = n$ e $|B| = p$.

Primeiramente contamos quantas são as funções $f : A \to B$, temos então p^n funções $f : A \to B$, pois para cada um dos n elementos de A há p modos de escolher sua imagem.

Chamaremos os elementos de B de $b_1, b_2, \ldots, b_p$, vejamos que as funções que não são sobrejetivas são aquelas em que b_1, ou b_2, ..., ou b_p não fazem parte do conjunto imagem da função. Chamando, para $j = 1, 2, \ldots, p$ de A_j o conjunto das funções $f : A \to B$ em que b_j não pertence ao conjunto imagem, as funções que não são sobrejetivas são as que pertencem a $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_p$.

Portanto, o número de funções sobrejetivas é:

$$\begin{gathered} N - N_1 + N_2 - N_3 + \ldots + (-1)^p N_p = \\ = p^n - \tbinom{p}{1}(p-1)^n + \tbinom{p}{2}(p-2)^n + \ldots + (-1)\tbinom{p}{p}(p-p)^n = \\ = \textstyle\sum_{k=0}^{p} (-1)^k \tbinom{p}{k}(p-k)^n \end{gathered}$$

Quando $n = p$, teremos o conjunto A com mesmo número de elementos de B e como f é sobrejetiva, então cada elemento $y \in B$ possui um único correspondente $x \in A$ tal que $f(x) = y$, logo f é injetora, ou seja, f é bijetora e neste caso, o número de sobrejeções é n!, conforme na seção 3.3.

Por outro lado, se $p > n$, a definição 3.1 diz que, cada elemento $x \in A$ possui um único correspondente $y \in B$ tal que $f(x) = y$, pelo princípio das Gavetas de Dirichlet, chamamos cada elemento $x \in A$ em objetos e $y \in B$ em gavetas, como temos mais gavetas que objetos, o princípio assegura que haverá gavetas sem objetos, logo o número de sobrejeções é 0.

Portanto:

$$\sum_{k=0}^{p} (-1)^k \binom{p}{k} (p-k)^n = \begin{cases} n! & \text{se} \quad p = n \\ 0 & \text{se} \quad p > n \end{cases} \tag{3.1}$$

Existem muitas fórmulas análogas a esta que geralmente são difíceis de provar de modo direto. A ocorrência de $(-1)^i$ é, em geral, um sinal de que a contagem de certo objeto utilizando o P.I.E. pode produzir a prova, como neste exemplo. Entretanto, neste caso é bastante útil ver outra demonstração.

Seja $P(x)$ um polinômio de grau n. com maior coeficiente a_n, ou seja, $P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_{n-1}x^{n-1} + a_nx^n$. Denotamos a sequência de valores $P(0), P(1), \ldots$ de P. Consideramos agora a sequência de diferenças $P(1) - P(0)$, $P(2) - P(1)$, $\ldots$.

Fazendo $Q_1(x) := P(x+1) - P(x)$ temos :

$$\begin{aligned}
Q_1(x) : &= P(x+1) - P(x) \\
&= a_0 + a_1(x+1) + a_2(x+1)^2 + \ldots + a_n(x+1)^n - a_0 - a_1x - a_2x^2 - \ldots + a_nx^n \\
&= a_1(x+1-x) + a_2((x+1)^2 - x^2) + \ldots + a_n((x+1)^n - x^n) \\
&= a_1 + a_2(2x+1) + \ldots + a_n\left(\binom{n}{n-1}x^{n-1} + \ldots + \binom{n}{1}x + \binom{n}{0}\right)
\end{aligned}$$

Vemos que $Q_1(x)$ é um polinômio de grau $(n-1)$ com maior coeficiente na_n. Repetindo este procedimento várias vezes encontramos uma sequência Q_p cujos termos são $\sum_{k=0}^{p}(-1)^k\binom{p}{k}P(x+p-k)$, correspondente ao polinômio $Q_p(x)$ de grau $n-p$ com maior coeficiente $n(n-1)\ldots(n-p+1)a_n$. Se $p = n$, então todos os termos de Q_p são $n!a_n$ e se $p > n$, então são todos 0. Tome $P(x) = x^n$. Encontraremos novamente 3.1

4 A FUNÇÃO DE EULER

A função tociente, ou função phi (lê-se fi), também conhecida como função phi de Euler, em homenagem ao matemático Leonhard Euler (1707-1783), tem muitas conexões com a teoria dos números, porém este trabalho está em definir a função e mostrar uma aplicação do princípio da inclusão e exclusão, como veremos neste capítulo. Definida para um número inteiro x como sendo igual a quantidade de números menores ou igual a x coprimos com respeito a ele.

Denotamos $\varphi(n)$ o número de inteiros k com $1 \leq k \leq n$ onde $m.d.c.(n,k) = 1$ ($m.d.c.$ - máximo divisor comum). Isto define uma importante função

$$\varphi : \mathbb{Z}_+^* \to \mathbb{Z}_+,$$
$$\varphi_{(n)} \to |\{k \in \mathbb{Z}_+/1 \leq k \leq n,\ m.d.c.(n,k) = 1\}|$$

chamada *função phi de Euler*

Assim, para $n = 12$, temos, $\varphi(12) = 4$ pois os inteiros positivos que não superam 12 e são primos com 12 são 1, 5, 7, e 11 e para $n = 9$, $\varphi(9) = 6$ pois os inteiros positivos que não superam 9 e são primos com 9 são 1, 2, 4, 5, 7, 8.

Calcular $\varphi(2016)$ acaba se tornando uma tarefa bastante trabalhosa, neste caso, teremos que analisar todos os número entre 1 e 2016 que são primos com 2016, vejamos abaixo um teorema que facilita esta contagem.

Teorema 4.1 *Se $n = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \cdots p_r^{a_r}$ é a decomposição de n em fatores primos, então*

$$\varphi(n) = n - \sum_{i=1}^{r} \frac{n}{p_i} + \sum_{1 \leq i < j \leq r} \frac{n}{p_i p_j} - \cdots = n \prod_{i=1}^{r} (1 - \frac{1}{p_i}) \tag{4.1}$$

Prova: Usando o Princípio da Inclusão-exclusão e fazendo:

$E_i = \{k \in \mathbb{N} \ / \ k \leq n,\ p_i | k\}$, onde $1 \leq i \leq r$.

Com isto temos que $|E_i| = \frac{n}{p_i}$ e para s interseções temos:

$A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_s} = \{k \in \mathbb{N} / \ k \leq n,\ p_{i_1} | k,\ \cdots,\ p_{i_s} | k\}$, logo $|A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_s}| = \frac{n}{p_{i_1} \cdots p_{i_s}}$

Portanto:

$$
\begin{aligned}
\varphi(n) &= N - N_1 + N_2 - N_3 + \cdots + (-1)^r N_r \\
&= n - \left(\sum_{i=1}^{r} \frac{n}{p_i}\right) + \left(\sum_{1\leq i<j\leq r} \frac{n}{p_i p_j}\right) - \cdots + (-1)^r \frac{n}{p_1 p_2 \ldots p_s} \\
&= n\left(1 - \frac{1}{p_1}\right)\cdots\left(1 - \frac{1}{p_r}\right) \\
&= n\prod_{i=1}^{r}(1 - \frac{1}{p_i})
\end{aligned}
$$

□

Exemplo 4.1 *Usando o desenvolvimento do teorema acima, desenvolta o valor de* $\varphi(120)$.

Sabendo que a decomposição de 120 em fatores primos é $120 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5$

Fazendo $E_1 = \{k \in \mathbb{N}/\ k \leq 12,\ 2|k\} = \{2, 4, 6, 8, \ldots, 120\}$, logo $|E_1| = \frac{120}{2} = 60$. $E_2 = \{k \in \mathbb{N}/\ k \leq 12,\ 3|k\} = \{3, 6, 9, 12, \ldots, 120\}$, logo $|E_2| = \frac{120}{3} = 40$. $E_3 = \{k \in \mathbb{N}/\ k \leq 12,\ 5|k\} = \{5, 10, 15, 20, 25, \ldots, 120\}$, logo $|E_3| = \frac{120}{5} = 24$.

Tomando as interseções dois a dois, temos $E_1 \cap E_2 = \{k \in \mathbb{N}/\ k \leq 12,\ 6|k\} = \{6, 12, 18, 24, \ldots, 120\}$, logo $|E_1 \cap E_2| = \frac{120}{6} = 20$. $E_1 \cap E_3 = \{k \in \mathbb{N}/\ k \leq 12,\ 10|k\} = \{10, 20, 30, 40, \ldots, 120\}$, logo $|E_1 \cap E_3| = \frac{120}{10} = 12$. $E_2 \cap E_3 = \{k \in \mathbb{N}/\ k \leq 12,\ 15|k\} = \{15, 30, 45, 60, \ldots, 120\}$, logo $|E_2 \cap E_3| = \frac{120}{15} = 8$.

Tomando as interseções três a três, temos $E_1 \cap E_2 \cap E_3 = \{k \in \mathbb{N}/\ k \leq 12,\ 30|k\} = \{30, 60, 90, 120\}$, logo $|E_1 \cap E_2 \cap E_3| = \frac{120}{30} = 4$

Portanto, usando o princípio da inclusão-exclusão temos:

$$
\begin{aligned}
\varphi(120) &= N - N_1 + N_2 - N_3 \\
&= 120 - (|E_1| + |E_2| + |E_3|) + (|E_1 \cap E_2| + |E_1 \cap E_3| + |E_2 \cap E_3| \\
&= 120 - (60 + 40 + 24) + (20 + 12 + 8) - 4 \\
&= 120 - 124 + 40 - 4 \\
&= 32
\end{aligned}
$$

Assim, usando o teorema acima temos: $\varphi(120) = 120(1 - \frac{1}{2})(1 - \frac{1}{3})(1 - \frac{1}{5}) = 32$, ou seja, no conjunto $\{1, 2, 3, \cdots, 120\}$ há 32 números primos com 120. (MORGADO et al., 2001)

5 O PROBLEMA DE LUCAS

O problema seguinte, introduzido por Lucas em 1891, é conhecido como o "problème des ménages" (em francês"ménages" significa casais).

Queremos sentar n casais ($n \geq 3$) em uma mesa circular, de modo que pessoas de mesmo sexo não se sentem juntas e nenhum marido vai sentar-se em ambos os lados de sua esposa. De quantos modo isso pode ser feito?

Este famoso problema foi criado e popularizado por François Édouard Anatole Lucas (1842-1891) em seu livro (LUCAS, 1891) e publicado em 1891. Na verdade, um problema equivalente foi proposto pela primeira vez por P. G. Tait, muito mais cedo, em 1876 e foi colonizada por A. Cayley e T. Muir de forma independente em 1877.(CHEN; KOH, 1992)

Neste capítulo, vamos aplicar o Teorema 1.1 para resolver o problema acima de um modo mais geral. Antes de fazer isso, vamos apresentar os lemas de Kaplansky, conforme referência (KAPLANSKY, 1943).

5.1 Os Lemas de Kaplansky

Teorema 5.1 ***Primeiro Lema de Kaplansky:*** *O número de maneiras de selecionar p objetos, dois não consecutivos, de n objetos dispostos em uma linha é* $\binom{n-k+1}{k}$

Seja $f(n,k)$ o número desejado. Nós dividimos as seleções em dois subconjuntos: aqueles que incluem o último dos objetos n e aqueles que não. Logo, selecionando o último objeto para a contagem o número $f(n-2,k-1)$ é o total de escolha sem o último objeto (uma vez que o penúltimo objeto é proibido) e para o segundo caso o número $f(n-1,k)$.

$$f(n,k) = f(n-1,k) + f(n-2,k-1) \tag{5.1}$$

com $f(n,1) = n$, basta provar por indução que $f(n,k) = \binom{n-k+1}{k}$

Prova: Como $n > k > 1$, temos que $f(3,2) = 1 = \binom{3-2+1}{2}$.

Por hipótese de indução,

$$f(n-1,k) = \binom{k-k}{k} \quad \text{e} \quad f(n-2,k-1) = \binom{n-k}{k-1}$$

Substituindo em 5.1, vem que

$$
\begin{aligned}
f(n,k) &= \binom{n-k}{k} + \binom{n-k}{k-1} \quad \text{aplicando o Teorema da Diagonais} \\
&= \binom{n-k+1}{k}
\end{aligned}
$$

Portanto pelo Princípio da Indução Finita, temos que a relação $f(n,k) = \binom{n-k+1}{k}$ é verdadeiro para todo $n \in \mathbb{N}$.

$\square$

Exemplo 5.1 *Seja o conjunto* $\{1,2,3,4,5,6\}$*, quantos subconjuntos com 3 elementos podemos formar sem que haja números consecutivos?*

Vamos dividir em dois casos, conforme visto acima:

$f(6-1,3)$=1, é o conjunto $\{1,3,5\}$ cujo o elemento 6 não figura.

$f(6-2,3-1)$=3, são os conjuntos $\{1,3,6\}$, $\{1,4,6\}$, $\{2,4,6\}$ cujo o elemento 6 figura.

Portanto $f(n,k) = f(n-1,k) + f(n-2,k-1) = 1+3 = 4$

$\square$

Teorema 5.2 ***Segundo Lema de Kaplansky:*** *O número de maneiras de selecionar k objetos, sem que haja dois consecutivos, de n objetos dispostos em um círculo é* $g(n,k) = \frac{n}{n-k}\binom{n-p}{p}$

Prova: O segundo Lema de Kaplansky difere do primeiro só na imposição de a restrição adicional onde nenhuma seleção de incluir tanto o primeiro quanto o último objeto, o número de tais opções é $f(n-4,k-2)$. Por isso o resultado desejado é:

$$
\begin{aligned}
g(n,k) &= f(n,k) - f(n-4,k-2) \\
&= \binom{n-k+1}{k} - \binom{n-4-(k-2)+1}{k-2} \\
&= \frac{(n-k+1)!}{k!(n-2k+1)!} - \frac{(n-k-1)!}{(k-2)!(n-2k+1)!} \\
&= \frac{(n-k+1)!(k-2)! - k!(n-k-1)!}{k!(k-2)!(n-2k+1)!} \\
&= \frac{(n-k-1)!(k-2)!n(n-2k+1)}{k!(n-2)!(n-2k+1)(n-2k)!} \\
&= \frac{n(n-k-1)!}{k!(n-2k)!} \\
&= \frac{n(n-k)!}{(n-k)k!(n-2k)!} \\
&= \frac{n}{n-k}\binom{n-k}{k}
\end{aligned}
$$

□

5.2 A solução de Kaplansky

Iremos apresentar nesta sessão a solução dada por Kaplansky (KAPLANSKY, 1943). De acordo com (MORGADO et al., 2001) e (NUNES, 2015), veremos o desenvolvimento.

Numeremos os lugares de 1 a $2n$. A exigência de pessoas de mesmo sexo não se sentarem juntas exige que os homens ocupem os lugares pares e as mulheres os ímpares ou vice-versa. Escolhido qual o sexo que ocupará os lugares ímpares (2 modos), devemos colocar os homens nos lugares a eles reservados ($n!$ modos). Só falta colocar as n mulheres nos n lugares restantes, sendo vedada a colocação de alguma mulher ao lado de seu marido.U_n.

A resposta do problema de Lucas é $2(n!)U_n$ onde U_n é o número de modos de colocar as n mulheres nos lugares vazios, sendo vedada a colocação de alguma mulher ao lado de seu marido.

Para facilitar a visualização do problema, de acordo com (MORGADO et al., 2001), a figura 5.1 ilustra o caso para 5 casais, ou seja ($n = 5$).

5.2.1 Determinando U_5

Devemos colocar as cinco senhoras $M_1,\ M_2,\ M_3,\ M_4,\ M_5$ nos lugares agora numerados $1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5$ de modo que M_1 não pode ocupar os lugares 5 e 1, M_2 não pode ocupar 1 e 2, M_3 não pode ocupar 2 e 3, M_4 não pode ocupar 3 e 4 e M_5 não pode ocupar 4 e 5.

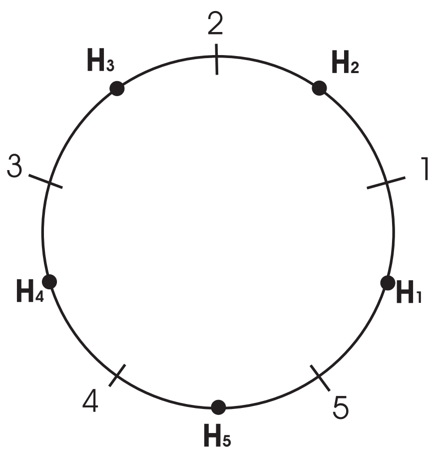
Definamos, para $1 \leq i \leq 5$,

$A =$ conjunto das permutações das mulheres;

$A_i =$ conjunto das permutações das mulheres em que M_i ocupa o i-ésimo lugar;

$A_i' =$ Conjunto das permutações das mulheres em que M_i ocupa o $(i-1)-$ ésimo lugar. (obs:$1-1=5$)

Figura 5.1 – Falta Nome da Figura



Fonte: O Autor.

Para o calculo de U_5, iremos aplicar o Princípio da Inclusão e Exclusão. De acordo com o teorema 1.1 temos que:

$$U_5 = N - N_1 + N_2 - N_3 + N_4 - N_5$$

Notemos que $N = |A| = 5! = 120$.

Cálculo de N_1

Como $1 \leq i \leq 5$, vejamos que,

$$N_1 = \sum_{|M|=1} N(M) = \sum_{1 \leq i \leq 5} |A_i| + \sum_{1 \leq i \leq 5} |A_i'| = 10(5-1)! = 240$$

já que, fixando um dos elementos temos que $|A_i| = |A_i'| = (5-1)!$

Cálculo de N_2

Vamos de agora em diante obter a cardinalidade dos conjuntos envolvidos tomados dois a dois, três a três, quatro a quatro e cinco a cinco. Para melhor compreensão, vamos discriminar os conjuntos A_i' e A_i, onde $1 \leq i \leq 5$, como segue abaixo.

Conjunto	Mulher cuja posição está definida	Posição definida
A_1'	M_1	5
A_1	M_1	1
A_2'	M_2	1
A_2	M_2	2
A_3'	M_3	2
A_3	M_3	3
A_4'	M_4	3
A_4	M_4	4
A_5'	M_5	4
A_5	M_5	5

Diante da tabela acima, vemos duas situações:

- A mesma mulher não pode ocupar duas posições diferentes ao mesmo tempo, logo:

$$|A_1' \cap A_1| = |A_2' \cap A_2| = |A_3' \cap A_3| = |A_4' \cap A_4| = |A_5' \cap A_5| = 0$$

- Duas mulheres diferentes não podem ocupar a mesma posição ao mesmo tempo, logo:

$$|A_1 \cap A_2'| = |A_2 \cap A_3'| = |A_3 \cap A_4'| = |A_4 \cap A_5'| = |A_5 \cap A_1'| = 0$$

Desta forma chegamos a conclusão que a interseção de dois conjuntos consecutivos é sempre vazia e diante do fato, podemos aplicar o segundo lema de Kaplansky para a contagem de tais conjuntos.

Aplicando o segundo lema de Kaplansky, onde $n = 10$ e $k = 2$ temos:

$$g(10,2) = \frac{10}{10-2}\binom{10-2}{2} = 35$$

Fixados os dois elementos, a cardinalidade de sua interseção será $(5-2)!$

Portanto $N_2 = \sum_{|M|=2} N(M) = g(10,2)(5-2)! = 35.6 = 210$

Cálculo de N_3

$N_3 = \sum_{|M|=3} N(M) = g(10,3)(5-3)! = 50.2 = 100.$

Cálculo de N_4

$N_4 = \sum_{|M|=4} N(M) = g(10,4)(5-4)! = 25.1 = 25.$

Cálculo de N_5

$N_5 = \sum_{|M|=5} N(M) = g(10,5)(5-5)! = 2.1 = 2.$

Por fim:

$$\begin{aligned} U_5 &= N - N_1 + N_2 - N_3 + N_4 - N_5 \\ &= 102 - 240 + 210 - 100 + 25 - 2 \\ &= 13 \end{aligned}$$

e a resposta do problema para 5 casais é $2(n!)U_n = 2 \cdot (5!) \cdot 13 = 3120$ modos.

□

5.2.2 Determinando U_n

Renumere os espaços vazios disponíveis as mulheres por $1,\ 2,\ 3, \ldots,\ n$

Definamos, para $1 \leq i \leq n$, os conjuntos

$A =$ conjunto das permutações das mulheres;

$A_i =$ conjunto das permutações das mulheres em que M_i ocupa o i-ésimo lugar;

$A'_i =$ Conjunto das permutações das mulheres em que M_i ocupa o $(i-1)-$ésimo lugar. (obs:$1 - 1 = n$)

Aplicando o Teorema 1.1 temos que:

$$U_n = N - N_1 + N_2 - N_3 + \ldots + N_{n-1} - N_n$$

Vejamos as cardinalidades:

Assim temos $N = |A| = n!$

Por outro lado, $|A_i| = |A'_i| = (n-1)!$, assim,

$$N_1 = \sum_{|M|=1} N(M) = \sum_{1 \leq i \leq n} |A_i| + \sum_{1 \leq i \leq n} |A'_i| = 2n(n-1)!$$

Agora, vamos dispor os $2n$ conjuntos da seguinte maneira: $A'_1,\ A_1,\ A'_2,\ A_2, \ldots, A'_n,\ A_n$

Em relação as interseções de k desses conjuntos, elas podem ser de dois tipos:

- A mesma mulher não pode ocupar duas posições diferentes ao mesmo tempo, logo:

$$|A'_i \cap A_i| = 0$$

- Duas mulheres diferentes não podem ocupar a mesma posição ao mesmo tempo, logo:
$$|A_i \cap A'_{i+1}| = 0$$

Considerando a condição que nenhum dos conjuntos considerados na interseção sejam consecutivos, então usaremos para a contagem o Segundo Lema de Kaplansky, temos que o número de interseções a serem consideradas é dada por

$$g(2n,k) = \frac{2n}{2n-k}\binom{2n-k}{k}, \quad k = 2,3,\ldots,n.$$

e a cardinalidade da interseção de k conjuntos é dada por $(n-k)!$, $k = 2,\ldots,n$.

Portanto a soma das cardinalidades da interseção de k conjuntos escolhidos dentre $A'_1,\ A_1,\ A'_2,\ A_2,\ldots,A'_n,\ A_n$ é dada por:

$$N_k = g(2n,k)\cdot(n-k)! = \frac{2n}{2n-k}\binom{2n-k}{k}\cdot(n-k)!, \quad k = 2,3,\ldots,n.$$

Logo,

$$\begin{aligned} U_n &= N - N_1 + N_2 - N_3 + \ldots + N_{n-1} - N_n \\ &= n! - 2n(n-1)! + \frac{2n}{2n-2}\binom{2n-2}{2}(n-2)! - \ldots + (-1)^n\frac{2n}{2n-n}\binom{2n-n}{n}(n-n)! \\ &= \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{2n}{2n-k}\binom{2n-k}{k}\cdot(n-k)! \end{aligned}$$

Portanto, a solução do Problema de Lucas é dada por:

$$2n!U_n = 2n!\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{2n}{2n-k}\binom{2n-k}{k}\cdot(n-k)!$$

Referências

BRUALDI, R. A. *Introductory Combinatorics*: Fifth edition. China: China Machine Press, 2009. Citado 2 vezes nas páginas 23 e 29.

CHEN, C.-C.; KOH, K.-M. *Principles and Techniques in Combinactorics*. Singapore: Word Scientific, 1992. Citado na página 37.

KAPLANSKY, I. Solution of the "problème des ménages". *Bull. Amer. Math. Soc.*, American Mathematical Society, v. 49, n. 10, p. 784–785, 10 1943. Disponível em: <http://projecteuclid.org/euclid.bams/1183505432>. Citado 2 vezes nas páginas 37 e 39.

KELLER, M. T.; TROTTER, W. T. *Applied Combinatorics*: Preliminary edition. Lexington, Virginia and Atlanta, Georgia: CreativeCommons Attribution-NonCommercial, 2015. Citado na página 20.

LINT, J. H. V.; WILSON, R. M. *A Course in Combinactorics*. Cambridge: Cambridge University Press, 2001. Citado 2 vezes nas páginas 11 e 17.

LUCAS, F. E. A. *Théorié de nombres*. Paris: Reprinted by Blanchard, 1891. Citado na página 37.

MORGADO, A. C. et al. *Análise Combinatória e Probabilidade*. Rio de Janeiro: Sociedade Brasiliera de Matemática, 2001. Citado 4 vezes nas páginas 14, 20, 36 e 39.

NUNES, S. *As Permutações Caóticas, O Problema de Lucas e a Teoria dos Permanentes*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, 2015. Citado na página 39.

PATERLINI, R. Uma fórmula de legendre. *Hipertexto Pitágoras*, p. 1, 2002. Citado na página 19.

SHINE, C. Princípio da inclusão-exclusão. contagem de pólya. *Polo Olímpico de Treinamento*, v. 05, p. 1–2, 2015. Citado na página 19.