UNIVERSIDADE FEDERAL DA GRANDE DOURADOS - UFGD
FACULDADE DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLOGIA - FACET

Aline Grassi Couto

Frações Contínuas e Números Reais

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA

DOURADOS - MS
DEZEMBRO - 2017

Aline Grassi Couto

Frações Contínuas e Números Reais

ORIENTADOR: PROFESSOR Dr. ROBERT JESÚS RODRÍGUEZ REYES

Dissertação apresentada ao final do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT da Universidade Federal da Grande Dourados (UFGD) como exigência parcial para obtênção do título de Mestre em Matemática

DOURADOS - MS
2017

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP).

C871f Couto, Aline Grassi

Frações contínuas e números reais / Aline Grassi Couto -- Dourados: UFGD, 2017.

63f. : il. ; 30 cm.

Orientador: Robert Jesús Rodríguez Reyes

Dissertação (Mestrado em Matemática) - Faculdade de Ciências Exatas e Tecnologia, Universidade Federal da Grande Dourados.

Inclui bibliografia

1. Frações contínuas. 2. Convergentes. 3. Determinantes. 4. Equações diofantinas. 5. Logaritmos. I. Título.

Ficha catalográfica elaborada automaticamente de acordo com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
FUNDAÇÃO UNIVERSIDADE FEDERAL DA GRANDE DOURADOS
FACULDADE DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLOGIA
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL - PROFMAT

Termo de Aprovação

Após a apresentação, arguição e apreciação pela banca examinadora, foi emitido o parecer APROVADO, para a dissertação intitulada: **"Frações Contínuas e Números Reais"**, de autoria de **Aline Grassi Couto**, apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática da Universidade Federal da Grande Dourados.

Prof. Dr. Robert Jesús Rodriguez Reyes (Orientador-UFGD)
Presidente da Banca Examinadora

Profa. Dra. Renata Viviane Raffa Rodrigues
Membro Examinador (UFGD)

Prof. Dr. Alberny Alves Ferreira
Membro Examinador (UEMS)

Dourados/MS, 05 de dezembro de 2017

Deus me deu saúde, me capacitou diante das minhas dificuldades, colocou pessoas que me ajudassem nos momentos difíceis e, nas horas em que não havia mais força alguma, simplesmente me fortaleceu. Sei que, por diversos motivos, Ele me confiou uma caminhada longa de estudos e me confiou essa profissão, sempre permitindo que eu alcançasse objetivos e evoluísse no processo. Reconheço a todo momento que só consegui concluí-lo, por Deus. Por isso dedico esse trabalho à Ele.

Agradecimentos

Agradeço à Deus por ter me dado saúde, por ter me confiado esta profissão, por ter me capacitado e fortalecido durante a caminhada de estudos, para que eu pudesse me aperfeiçoar.

Agradeço à minha tia e madrinha Maria Aparecida Grassi, que assumiu o papel de mãe todas as vezes que precisei de apoio.

Agradeço ao meu pai José Francisco, aos meus irmãos Érica, Adriano e às minhas sobrinhas Natali e Clara pelo elo de família, que me fortaleceu durante o processo.

Agradeço as amigas Sandra Ribeiro, Fabiane Alves, Maria Fernanda e Ana Lúcia por compartilharem tantos momentos comigo e por fazerem parte das minhas lutas e conquistas.

Agradeço ao Professor Dr. Robert Jesús Rodríguez Reyes, pela confiança, disponibilidade e comprometimento com este trabalho. Pela preocupação presente em suas falas sobre a forma de repassarmos os conceitos aos nossos alunos, reforçando em mim os valores da profissão.

Agradeço as amigas Mariana, Graciele, Renata e Adriana pelas trocas de experiências e contribuições no processo de aprendizagem em nosso grupo de estudos.

Agradeço à CAPES, coordenação de aperfeiçoamento de pessoal de nível superior, pela contribuição financeira, através da bolsa de estudos.

Agradeço aos professores do programa de pós – graduação, Mestrado Profissional em Matemática da Universidade Federal da Grande Dourados – UFGD.

Agradeço a todos que direta ou indiretamente colaboraram para a concretização deste trabalho.

O processo seletivo da vida ensina ao homem a capacidade de torná-lo mais humano. Durante sua caminhada, no adquirir de conhecimentos, ele pode escolher entre ser um homem grande ou um grande homem. O que importa realmente é o que ele carrega dentro de si, suas bagagens, sonhos e a capacidade de, mesmo ensinando, aprender.
Aline Grassi Couto.

Resumo

O presente trabalho apresenta um estudo dos números racionais e irracionais associado ao estudo de frações contínuas e tem como objetivo principal, possibilitar ao leitor uma melhor compreensão dos números reais, através de um aprofundamento sobre o estudo de frações e de alguns exemplos e aplicações. Tais aplicações, desde que adaptadas, são apresentadas como proposta de ensino para a educação básica, pois estabelecem conexões com alguns conteúdos matemáticos presentes em sua grade curricular, tais como: equações diofantinas lineares, geometria, logaritmos e equações quadráticas.

Palavras-chave: frações contínuas, convergentes, determinantes, equações diofantinas, logaritmos.

Abstract

The present work presents a study about rational and irrational numbers associated to the study of continuous fractions and its main objective is enable to the reader a better understanding of the real numbers through a deep studying of fractions and some examples and applications. Such applications, when adapted, are presented as a teaching proposal for basic education, because they establish connections with some mathematical contents present in its curricular grid, such as: linear diophantine equations, geometry, logarithms and quadratic equations.

Keywords: continued fractions, convergents, determinantes,, Diophantine equations, logarithms.

Sumário

1 Introdução

No ensino básico, em geral, aprendemos que uma solução, por meio da fórmula quadrática, da equação

$$x^2 - 2x - 1 = 0 \tag{1.1}$$

é dada por $x = 1 + \sqrt{2}$ e, portanto, tem uma representação decimal, não repetida e infinita $2,4142155\ldots$.

É possível também resolver a equação (1.1) da seguinte maneira: Dividindo por x em ambos os lados de (1.1), conseguimos

$$x = 2 + \frac{1}{x}. \tag{1.2}$$

Se no lado direito x for novamente substituído por $x = 2 + \frac{1}{x}$, isto produzira a expressão

$$x = 2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{x}}.$$

Continuando este processo indefinidamente, obtemos

$$x = 2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \ddots}}$$

ou escrita de forma compacta $x = [2; 2, 2, 2, \ldots]$.

Assim,

$$x = 1 + \sqrt{2} = [2; 2, 2, 2, \ldots]$$

Essa representação para o número $1 + \sqrt{2}$ é chamada de fração contínua.

Historicamente, a palavra *fração contínua* apareceu, pela primeira vez, nos trabalhos do matemático inglês John Wallis $(1616 - 1703)$ depois de Willian Brouncker (1602-1684) ter apresentado a ele o desenvolvimento de $\frac{4}{\pi} = [1; 3, 1, 1, 15, 2, \ldots]$ em fração contínua. Porém, encontramos em toda escrita da antiga matemática grega, árabe e hindu exemplos e vestígios de frações contínuas desde a formulação do algoritmo de Euclides (325 a.C. - 265 a.C.), que teve grande influência para o estudo de frações contínuas, passando por estudos realizados por matemáticos do século V. Em particular, o matemático hindu Aryabhata (477 d.C) teria usado um método semelhante para resolver equações lineares diofantinas (encontrar as soluções inteiras de equações com uma ou mais variáveis). Também podemos encontrar, já no século XVI, um precursor das frações continuas a partir das ideias dos matemáticos italianos Rafael Bombelli $(1526 - 1573)$ e Pietro Cataldi $(1548 - 1626)$. Bombelli usou esse tipo de representação para calcular aproximadamente $\sqrt{13}$. Cataldi fez o mesmo para $\sqrt{18}$. Já o matemático e astrónomo holandês Christian Huygens $(1629 - 1695)$ foi o primeiro a apresentar uma aplicação prática das frações contínuas. Ele as usou no cálculo da razão entre rodas dentadas para a construção de um planetário mecânico.

No entanto, a teoria moderna de tais frações, como a conhecemos hoje, foi desenvolvida, principalmente, pelas contribuições dos matemáticos Leonhard Euler $(1707 - 1783)$, Johan Heinrich Lambert $(1728 - 1777)$ e Joseph Louis Lagrange $(1736 - 1813)$, dentre outros. Por exemplo, Euler, considerado o primeiro matemático a sistematizar a teoria, representou os números e, $\frac{e+1}{e-1}$ e $\frac{e-1}{2}$ em fração contínua. Também é devido a ele a demonstração dos seguintes resultados:

- Todo número racional pode ser representado por uma fração contínua finita
- Todo número irracional pode ser representado por uma fração contínua infinita
- Uma fração contínua periódica (tem termos que se repetem) é o zero de uma equação quadrática

Anos mais tarde, Lagrange desenvolveu as propriedades das frações contínuas periódicas. Em 1728 Lambert provou a irracionalidade de π. As ideias e os resultados de Lambert foram baseados em frações contínuas. Ele também obteve expressões em frações contínuas para $\frac{e^x-1}{e^x+1}$, $\text{tg}(x)$ e π.

O século XIX, segundo Brezinski [1], é provavelmente o século do auge das frações contínuas. As pesquisas sobre o assunto cresceram e aprofundaram-se. A consideração de certos problemas conduziu, por exemplo, a necessidade de tratar com frações contínuas complexas. Neste século deram valiosas contribuições matemáticos como Jacobi, Perron, Hermite, Gauss, Cauchy e Stieljes.

Durante o século XX, as frações contínuas apareceram em vários ramos da matemática. Por exemplo, Robert em [2] examinou a relação entre a teoria do caos e as frações contínuas. Já Niederreiter em [3], estudou sua aplicação em criptografia. Na teoria de nós, temos o trabalho de Conway [4].

No âmbito educacional, apesar de a representação decimal ser parte do currículo previsto para o ensino básico, a representação por frações contínuas não é abordada nos currículos da educação básica. No entanto, as operações matemáticas envolvidas nesse estudo, são aplicadas, e isso sugere que, por reflexões e adaptações, esse estudo possa contribuir para a educação básica de maneira geral, e também para o ensino superior.

O objetivo do presente trabalho é possibilitar ao leitor uma melhor compreensão dos números reais, através de um aprofundamento sobre o estudo de frações e de alguns exemplos e aplicações, estabelecendo conexões entre alguns conteúdos matemáticos.

Este trabalho será dividido em 4 capítulos, que se distribuem como segue:

O capítulo 1 refere-se à introdução.

No capítulo 2, introduzimos algumas terminologias básicas, bem como definições e exemplos sobre matrizes e determinantes.

O capítulo 3 é o foco principal do trabalho. Apresentaremos a representação dos números racionais e irracionais em frações contínuas. Discutiremos uma relação interessante entre frações contínuas, determinantes e a constante π.

No capítulo 4 aplicaremos as frações contínuas em diversas situações tais como: resolução de equações diofantinas lineares; no cálculo de logaritmos; demonstração da irracionalidade de $\sqrt{2}$ e na resolução de uma equação quadrática especial.

2 Noções Preliminares

Neste capítulo, serão abordadas algumas definições, teoremas e propriedades básicas dos determinantes. As demonstrações dos teoremas listados estão fora do escopo do presente trabalho; porém, podem ser vistos com detalhes em [5], [6] e [7].

2.1 A definição de matriz

Definição 2.1. Matriz. *Dados m e n em $\mathbb{N}$, define-se uma matriz real de ordem m por n ou simplesmente uma matriz m por n (escreve-se $m \times n$), como uma tabela formada por elementos de $\mathbb{R}$ distribuídos em m linhas e n colunas. Estes elementos de $\mathbb{R}$ são chamados entradas da matriz.*

Exemplo 2.1. A matriz $[-5]$ é uma matriz 1×1, ao passo que

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 1 & 5 & 0 \end{bmatrix}$$

é uma matriz 2×3. As entradas da primeira linha da matriz são dadas pelos números reais $1, 3$ e 5, e as entradas da segunda linha da matriz são dadas pelos números reais $1, 5$ e 0.

É usual indicar as entradas de uma matriz arbitrária A pelos símbolos A_{ij}, ou ainda a_{ij}, onde os índices indicam, nessa ordem, a linha e a coluna onde o elemento se encontra. Assim, uma matriz $m \times n$ é usualmente representada por

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

ou por $A = [a_{ij}]_{m \times n}$, ou simplesmente por $A = [a_{ij}]$, quando a ordem da matriz estiver sub entendida.

Definição 2.2. Matriz quadrada. *Uma matriz $n \times n$ é chamada de matriz quadrada de ordem n.*

Exemplo 2.2. As matrizes

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{bmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -9 \end{bmatrix}$$

são matrizes quadradas de ordem 2 e 3 respectivamente.

Definição 2.3. Transposta de uma matriz. *Dada uma matriz* $A = [a_{ij}]_{m\times n}$*, chama-se transposta de* A*, e denota-se por* A^t*, a matriz* $[b_{ij}]_{n\times m}$*, onde*

$$a_{ij} = b_{ij}$$

para todo $1 \leq i \leq n$ *e para todo* $1 \leq j \leq m$.

Exemplo 2.3. Algumas matrizes e suas transpostas.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 6 & 1 \\ 1 & 4 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$$

$$A^t = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 6 \\ 3 & 7 \\ 4 & 8 \end{bmatrix}, \qquad B^t = \begin{bmatrix} 6 & 1 & 3 \\ 1 & 4 & 5 \end{bmatrix}$$

2.2 Determinante de uma matriz

A definição de determinante de uma matriz quadrada A, denotada por $\det(A)$ ou $|A|$, pode ser dada de diversas maneiras. Neste trabalho, adota-se a definição recursiva de determinante. Esta definição permite calcular o determinante através de determinante de matrizes de menor ordem.

Se $A = [a]$ é uma matriz 1×1, então $\det(A) = a$; se A é uma matriz 2×2

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix},$$

então

$$\det(A) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}. \tag{2.1}$$

Para definir o determinante para matrizes 3×3, usa-se a definição de determinantes 2×2. Assim, se A é uma matriz 3×3

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix},$$

então,

$$\det(A) = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

De forma resumida, pode-se escrever:

$$\det(A) = a_{11}|A_{11}| - a_{12}|A_{12}| + a_{13}|A_{13}| \tag{2.2}$$

onde, A_{11}, A_{12} e A_{13} são obtidas de A eliminando a primeira linha e uma das três colunas.

Observação 2.1. A expressão do determinante em (2.2) também pode ser reescrita como

$$\det(A) = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

Exemplo 2.4. Da expressão (2.2), segue que o determinante da matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 10 \\ 1 & 0 & 5 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

é dado por

$$\det(A) = 0 - 5 + 30 - 0 - 15 + 2 = 12.$$

Agora, pode-se obter uma definição recursiva para o determinante. Quando $n = 3$, $\det(A)$ é definido usando os determinantes das matrizes 2×2, A_{1j}, como em (2.2) acima. Quando $n = 4$, $\det(A)$ faz uso dos determinantes das matrizes 3×3, A_{1j}. De modo geral, um determinante $n \times n$ é definido através de determinantes de matrizes $(n-1) \times (n-1)$.

Definição 2.4. Determinante de uma matriz. *Para $n \geq 2$, o determinante da matriz $A = [a_{ij}]_{n\times m}$ é definida pela expressão:*

$$\det(A) = a_{11}\det(A_{11}) - a_{12}\det(A_{12}) + \cdots + (-1)^{1+n}a_{1n}\det(A_{1n})$$

onde, os elementos $a_{11}, a_{12}, a_{13}, \ldots, a_{1n}$ são da primeira linha de A e A_{1j}, $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$, representa a matriz obtida eliminando, em A a primeira linha e a j-ésima coluna.

Exemplo 2.5. Para calcular o determinante da matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 10 & 1 \\ 1 & 5 & 0 \\ 1 & 2 & 9 \end{bmatrix},$$

segue da definição 2.4:

$$\begin{aligned}
\det(A) &= a_{11}|A_{11}| - a_{12}|A_{12}| + a_{13}|A_{13}| \\
&= 1|A_{11}| - 10|A_{12}| + 1|A_{13}| \\
&= 1\begin{vmatrix} 5 & 0 \\ 2 & 9 \end{vmatrix} - 10\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 9 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \\
&= 1(45 - 0) - 10(9 - 0) + 1(2 - 5) \\
&= -48
\end{aligned}$$

2.3 Expansão em cofatores

Para enunciar o próximo teorema, seria conveniente escrever a definição 2.4 de uma forma ligeiramente diferente. Dada a matriz $A = [a_{ij}]$, o cofator (i, j) de A é o número c_{ij} dado por

$$c_{ij} = (-1)^{i+j} \det(A_{ij}). \tag{2.3}$$

Então,

$$\det(A) = a_{11}c_{11} + a_{12}c_{12} + \cdots + a_{1n}c_{1n}.$$

Essa fórmula é chamada de expansão de cofator com respeito à primeira linha de A.

Teorema 2.1. Expansão em cofatores. *O determinante da matriz $A = [a_{ij}]_{n\times n}$, pode ser calculado pela expansão do cofator com respeito a qualquer linha ou coluna. A expansão com respeito à i-ésima linha, usando os cofatores em* (2.3)*, é dada por*

$$\det(A) = a_{i1}c_{i1} + a_{i2}c_{i2} + \cdots + a_{in}c_{in}$$

A expansão do cofator em respeito à j-ésima coluna é dada por

$$\det(A) = a_{1j}c_{1j} + a_{2j}c_{2j} + \cdots + a_{nj}c_{nj}$$

Exemplo 2.6. O teorema 2.1 nos permite escrever o determinante da matriz

$$A = \begin{bmatrix} 10 & -1 & 1 \\ 5 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 9 \end{bmatrix}$$

como

$$\begin{aligned}
\det(A) &= a_{21}c_{21} + a_{22}c_{22} + a_{23}c_{23} \\
&= a_{21}(-1)^{2+1}|A_{21}| + a_{22}(-1)^{2+2}|A_{22}| + a_{23}(-1)^{2+3}|A_{23}| \\
&= -5\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 3 & 9 \end{vmatrix} + 0\begin{vmatrix} 10 & 1 \\ 2 & 9 \end{vmatrix} - 0\begin{vmatrix} 10 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} \\
&= -5(-9-3) + 0 + 0 = 60.
\end{aligned}$$

Observação 2.2. Em geral, a melhor estratégia para calcular o determinante usando o teorema 2.1 é expandindo ao longo da linha ou coluna que apresenta o maior número de zeros.

Exemplo 2.7. Calcular o $\det(A)$, onde:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -7 & 8 & 9 & -6 \\ 0 & 2 & -5 & 7 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \end{bmatrix}.$$

A expansão do cofator ao longo da primeira coluna de A tem todos os termos iguais à zero, exceto o primeiro. Assim,

$$\det(A) = 3\begin{vmatrix} 2 & -5 & 7 & 3 \\ 0 & 1 & 5 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \end{vmatrix}$$

Em seguida, expande-se esse determinante 4×4 com respeito à primeira coluna, de modo a tirar vantagem dos zeros contidos nessa coluna. Tem-se:

$$\det(A) = 3(2)\begin{vmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 2 & 4 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \end{vmatrix}$$

Agora, expande-se esse determinante 3×3 com respeito à terceira linha,

$$\det(A) = 3(2)(-1)(-2)\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}$$

Calculando-se o determinante 2×2, acima, obtém-se

$$\det(A) = -12.$$

2.4 Propriedades dos determinantes

A seguir, serão enunciadas algumas das conhecidas propriedades elementares dos determinantes.

Teorema 2.2. Operações de linhas. *Seja uma matriz $A = [a_{ij}]_{n\times n}$.*

(i) Se um múltiplo de uma linha de A for somada à outra linha formando uma matriz B, então

$$\det(A) = \det(B).$$

(ii) Se duas linhas de A forem trocadas entre si, formando a matriz B, então

$$\det(B) = -\det(A).$$

(ii) Se uma linha de A for multiplicada por um escalar k formando uma matriz B, então

$$\det(B) = k\det(A).$$

A expansão em cofatores (teorema 2.1) e as propriedades dos determinantes (teorema 2.2) podem, as vezes, serem usados em conjunto para fornecer um meio efetivo de calcular determinantes. Os cálculos do próximo exemplo ilustram esta ideia.

Exemplo 2.8. Calcular $\det(A)$, onde:

$$A = \begin{bmatrix} -3 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 9 \end{bmatrix}.$$

Têm-se os seguintes passos:

Passo 1 Soma-se à linha 2 a linha 3,

$$\det(A) = \begin{vmatrix} -3 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -3 & -1 & 1 \\ 0 & 4 & 10 \\ 1 & 3 & 9 \end{vmatrix}$$

Passo 2 Soma-se à linha 1 a linha 3 multiplicada por 3,

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 0 & 8 & 28 \\ 0 & 4 & 10 \\ 8 & 3 & 9 \end{vmatrix}$$

Passo 3 Expansão do cofator ao longo da primeira coluna:

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 8 & 28 \\ 4 & 10 \end{vmatrix} = -32.$$

O teorema 2.2 nos permite realizar operações com linhas de uma matriz. O próximo teorema mostra que se podem realizar operações análogas com as colunas de uma matriz.

Teorema 2.3. Operações com colunas. *Se A é uma matriz $n \times n$, então*

$$\det(A^t) = \det(A).$$

Portanto, por causa do teorema 2.3, cada afirmação do teorema 2.2 é verdadeira se substituir a palavra “linha” por “coluna”.

Exemplo 2.9. Determinar $\det(A)$, onde

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -3 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}.$$

Soma-se à coluna 2 a coluna 1, obtém-se:

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -3 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 4 & 1 \end{vmatrix}$$

Seguidamente, soma-se à coluna 3 a coluna 1 multiplicada por 3,

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 4 & 4 \end{vmatrix}$$

Utilizando a expansão em cofatores ao longo da linha 1, finalmente obtém-se,

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 4 \end{vmatrix} = 0$$

Exemplo 2.10. Calcular $\det(A)$ para a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{bmatrix},$$

onde a, b e c são números reais não nulos e distintos.

Quando soma-se (-1) vez a primeira coluna à segunda e terceira colunas, obtém-se:

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & b-a & c-a \\ a^3 & b^3-a^3 & c^3-a^3 \end{vmatrix}$$

Utilizando-se da expansão em cofatores ao longo da linha 1, obtém-se:

$$\det(A) == \begin{vmatrix} b-a & c-a \\ b^3-a^3 & c^3-a^3 \end{vmatrix}$$

Finalmente, e depois de manipulações algébricas, obtém-se

$$\det(A) = (b-a)(c-a)(c-b)(a+b+c).$$

3 Frações Contínuas

Neste capítulo, após apresentar as definições e notações sobre frações contínuas, estudamos uma outra maneira de representar números reais por meio das frações contínuas. Além disso, discutimos a relação entres as frações contínuas, determinantes e a constante π.

3.1 Definições e notações

Definição 3.1. *Uma fração contínua generalizada ou simplesmente fração contínua é uma expressão da forma*

$$a_1 + \cfrac{b_1}{a_2 + \cfrac{b_2}{a_3 + \cfrac{b_3}{a_4 + \ddots}}}$$

onde $a_1, a_2, a_3, \ldots$ e $b_1, b_2, b_3, \ldots$ podem ser números reais ou complexos, ou funções de variáveis reais ou complexas. O número de termos pode ser finito ou infinito.

As seguintes expressões

$$2 + \cfrac{2}{2 + \cfrac{3}{3 + \cfrac{4}{4 + \ddots}}}, \qquad 1 + \cfrac{12x}{x - 2 + \cfrac{x^2}{6x + \cfrac{x^2}{10 + \ddots}}}$$

são exemplos de frações contínuas.

Definição 3.2. *Uma fração contínua simples ou regular é uma fração continua da forma*

$$a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \ddots}}$$

onde $a_2, a_3, a_4 \ldots$ são números inteiros positivos e a_1 um número inteiro qualquer. Os termos $a_1, a_2, a_2, \ldots$ são chamados de quocientes parciais da fração contínua.

Observação 3.1. Em alguns casos, por simplicidade, usa-se a seguinte notação

$$a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \ddots}} = [a_1; a_2, a_3, \dots]$$

3.2 Frações contínuas e números racionais

Nesta seção, discutimos a representação dos números racionais por meio de frações contínuas. Veremos que essa representação é dada por frações contínuas simples finitas.

Sabe-se que um número racional pode ser representado por $\frac{a}{b}$ onde a e b são inteiros com $b \neq 0$. Nos exemplos que seguem, e através de simples manipulações como o algoritmo da divisão, pode-se expressar um número racional como uma fração contínua simples finita.

Exemplo 3.1. Para representar a fração $\frac{10}{7}$ na forma de fração contínua, primeiro dividimos 10 por 7 e obtemos

$$10 = 7 \cdot 1 + 3.$$

ou equivalentemente

$$\frac{10}{7} = \frac{7 \cdot 1 + 3}{7} = 1 + \frac{3}{7} = 1 + \frac{1}{\frac{7}{3}}.$$

Agora, dividindo 7 por 3, obtemos

$$7 = 3 \cdot 2 + 1.$$

Daí, encontramos

$$\frac{10}{7} = 1 + \frac{1}{\frac{7}{3}} = 1 + \cfrac{1}{\cfrac{3 \cdot 2 + 1}{3}} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{3}}$$

Como 3 dividido po 1 da resto zero, paramos o processo e portanto

$$\frac{10}{7} = [1; 2, 3].$$

Se o numerador da fração é menor do que o denominador, então $a_1 = 0$. Vejamos o exemplo.

Exemplo 3.2. Expressar a fração $\frac{3}{7}$ na forma de fração contínua.

$$\frac{3}{7} = \frac{0}{7} + \frac{3}{7} = 0 + \frac{3}{7} = 0 + \frac{1}{\frac{7}{3}} = 0 + \cfrac{1}{\cfrac{6}{3} + \cfrac{1}{3}} = 0 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{3}}$$

Logo,

$$\frac{3}{7} = [0; 2, 3].$$

Se o numero racional é negativo, procede-se como o seguinte exemplo.

Exemplo 3.3. Dado o número racional $-\frac{18}{5}$, encontre a fração contínua associada.

$$-\frac{18}{5} = -4 + \frac{2}{5} = -4 + \frac{1}{\frac{5}{2}} = -4 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2}}$$

Assim, temos que

$$-\frac{18}{5} = [-4; 2, 2].$$

Utilizando-se operações elementares com frações, agora temos a situação contrária, isto é, dada uma fração contínua simples finita, procura-se obter um número racional.

Exemplo 3.4. Para determinar o numero racional associado a fração contínua simples $[1; 1, 2, 2, 3]$, sabe-se que

$$[1; 1, 2, 2, 3] = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{3}}}}$$

Efetuando-se as operações com frações, obtemos

$$\begin{aligned} 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{3}}}} &= 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{\frac{7}{3}}}} = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{3}{7}}} = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{\frac{17}{7}}} \\ &= 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{7}{17}} = 1 + \cfrac{1}{\frac{24}{17}} = 1 + \frac{17}{24} = \frac{41}{24} \end{aligned}$$

Portanto,

$$[1; 1, 2, 2, 3] = \frac{41}{24}.$$

Dos exemplos anteriores, a pergunta natural que surge é: qualquer número racional pode ser representado por uma fração contínua simples finita? A resposta a questão é dada pelo seguinte teorema.

Teorema 3.1. *Qualquer número racional pode ser representado por uma fração contínua simples finita. Reciprocamente, qualquer fração contínua simples finita representa um número racional.*

Demonstração. Ver [8] e [9]. □

Observe-se que a representação de um número racional por uma fração contínua simples e finita não é única. Por exemplo no caso do número $\frac{10}{7}$, temos do exemplo 3.1 que sua expansão é dada por

$$\frac{10}{7} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{3}}$$

No entanto, o último termo $a_3 = 3$ pode ser substituído por $3 - 1 + \frac{1}{1}$. Isso faz com que $\frac{10}{7}$ também possa ser expandido como

$$\frac{10}{7} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1}}},$$

isto é, $\frac{10}{7} = [1; 2, 3] = [1; 2, 2, 1]$.

Assim, podemos enunciar o seguinte teorema.

Teorema 3.2. *Qualquer número racional pode ser representado por uma fração contínua simples finita de apenas duas formas: uma com um número par de termos, e a outra, com um número ímpar. Uma com último termo igual a 1, e a outra, com esse termo maior de que 1.*

Demonstração. Ver [8] e [9]. □

Observe-se que o fato anterior também acontece na representação decimal dos números reais. Por exemplo, as expressões seguintes definem o mesmo número real

$$3,275999\ldots = 3,276000\ldots \quad \text{e} \quad 0,999\ldots = 1,000\ldots$$

3.3 Convergentes

Definição 3.3. *Dada a fração contínua*

$$[a_1; a_2, a_3, \ldots, a_n, a_{n+1}, a_{n+2}, \ldots].$$

O número

$$c_n = \frac{r_n}{s_n} = [a_1; a_2, \ldots, a_n],$$

obtido da fração contínua eliminando $a_{n+1}, a_{n+2}, \ldots$, é chamado de n-ésimo convergente ou convergente de ordem n.

Os seguintes exemplos ilustram melhor a definição de convergentes.

Exemplo 3.5. Determine os convergentes da seguinte fração contínua:

$$\frac{128}{37} = 3 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{5 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2}}}} = [3; 2, 5, 1, 2].$$

Da definição, os convergentes são:

$$c_1 = 3$$

$$c_2 = 3 + \frac{1}{2} = \frac{7}{2}$$

$$c_3 = 3 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{5}} = \frac{38}{11}$$

$$c_4 = 3 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{5 + \cfrac{1}{1}}} = \frac{45}{13}$$

$$c_5 = 3 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{5 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2}}}} = \frac{128}{37}$$

Observação 3.2. Desde que a fração contínua do número $\frac{128}{37}$ é finita, o último convergente é o próprio número.

Exemplo 3.6. Para a fração contínua $[2; 1, 1, 2, 2]$ seus convergentes estão dados por:

$$c_1 = 2$$

$$c_2 = 2 + \frac{1}{1} = 3$$

$$c_3 = 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1}} = \frac{5}{2}$$

$$c_4 = 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2}}} = \frac{13}{5}$$

$$c_5 = 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2}}}} = \frac{31}{12}$$

Existe uma fórmula de recorrência simples para determinar o n-ésimo convergente sem precisar efetuar longos cálculos. Essa fórmula é dada pelo teorema a seguir.

Teorema 3.3. *O numerador r_i e o denominador s_i do i-ésimo convergente c_i da fração contínua $[a_1; a_2, a_3, \ldots, a_n]$ satisfazem as equações,*

$$\begin{cases} r_i = a_i r_{i-1} + r_{i-2} \\ s_i = a_i s_{i-1} + s_{i-2} \end{cases}, \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

com as condições iniciais

$$\begin{cases} r_{-1} = 0 \\ s_{-1} = 1 \end{cases} \quad e \quad \begin{cases} r_0 = 1 \\ s_0 = 0 \end{cases}$$

Demonstração. Ver [8], [9] e [10]. □

Como uma aplicação do teorema anterior, consideremos o seguinte

Exemplo 3.7. Determine os convergentes da fração contínua

$$\frac{384}{157} = [2; 2, 4, 8, 2].$$

Uma forma prática de calcular os convergentes é usando a tabela 3.1. Nessa tabela, os valores de n ficam na primeira linha, os valores de a_n ficam na segunda linha, os valores de r_n na terceira linha e os de s_n na quarta.

n	-1	0	1	2	3	4	5
a_n			2	2	4	8	2
r_n							
s_n							

Tabela 3.1:

Seguidamente, colocamos os valores (condições iniciais)

$$\begin{cases} r_{-1} = 0 \\ s_{-1} = 1 \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} r_0 = 1 \\ s_0 = 0 \end{cases}$$

como segue

n	-1	0	1	2	3	4	5
a_n			2	2	4	8	2
r_n	0	1					
s_n	1	0					

Tabela 3.2:

Para completar o preenchimento da tabela 3.2, usa-se a fórmula de recorrência do teorema 3.3. Por exemplo, para calcular c_1 e c_2, temos que

$$c_1 = \frac{r_1}{s_1} = \frac{a_1 r_0 + r_{-1}}{a_1 s_0 + s_{-1}} = \frac{2(1) + 0}{2(0) + 1} = \frac{2}{1}$$

e

$$c_2 = \frac{r_2}{s_2} = \frac{a_2 r_1 + r_0}{a_2 s_1 + s_0} = \frac{2(2) + 1}{2(1) + 0} = \frac{5}{2}$$

Prosseguindo com os cálculos, chega-se a seguinte tabela

n	-1	0	1	2	3	4	5
a_n			2	2	4	8	2
r_n	0	1	2	5	22	181	384
s_n	1	0	1	2	9	74	157

Tabela 3.3:

Observe-se da tabela 3.3 que os convergentes c_3, c_4 e c_5 estão dados por

$$c_3 = \frac{22}{9}, \qquad c_4 = \frac{181}{74}, \qquad \text{e} \qquad c_5 = \frac{384}{157}$$

Uma observação mais atenta da tabela 3.3 revela outra propriedade interessante dos convergentes. Por exemplo, a partir da tabela 3.3, obtemos as expressões a seguir

$$\begin{aligned}
r_0s_{-1} - r_{-1}s_0 &= +1\\
r_1s_0 - r_0s_1 &= -1\\
r_2s_1 - r_1s_2 &= +1\\
r_3s_2 - r_2s_3 &= -1\\
r_4s_3 - r_3s_4 &= +1\\
r_5s_4 - r_4s_5 &= -1
\end{aligned}$$

Em geral, as relações anteriores são válidas para qualquer tabela de convergentes como mostra o seguinte resultado

Teorema 3.4. *Se $\frac{r_i}{s_i}$ é o i-ésimo convergente da fração contínua $[a_1; a_2 \ldots, a_n]$, então*

$$r_is_{i-1} - r_{i-1}s_i = (-1)^i \tag{3.1}$$

para todo $i \geq 0$.

Demonstração. A demonstração será por indução em i.

- Para $i = 0$,
$$r_0s_{-1} - r_{-1}s_0 = 1(1) - 0(0) = 1 = (-1)^0.$$
- Para $i = 1$,
$$r_1s_0 - r_0s_1 = a_1(0) - 1(1) = -1 = (-1)^1.$$
- Para $i = 2$,
$$r_2s_1 - r_1s_2 = (a_2a_1 + 1)1 - a_2a_1 = 1 = (-1)^2.$$

Agora, suponhamos que o teorema seja válido para um certo $i = k$, isto é,

$$r_ks_{k-1} - r_{k-1}s_k = (-1)^k,$$

vamos mostrar que para $i = k + 1$,

$$r_{k+1}s_k - r_ks_{k+1} = (-1)^{k+1}.$$

Do teorema 3.3 e da hipótese indutiva, segue-se que

$$\begin{aligned}
r_{k+1}s_k - r_ks_{k+1} &= (a_{k+1}r_k + r_{k-1})s_k - r_k(a_{k+1}s_k + s_{k-1})\\
&= (-1)(r_ks_{k-1} - r_{k-1}s_k)\\
&= (-1)(-1)^k = (-1)^{k+1},
\end{aligned}$$

o que conclui a demonstração. □

O teorema 3.4 é um resultado fundamental que nos levará a um procedimento para resolver equações diofantinas usando as frações contínuas.

Exemplo 3.8. Considere a tabela de convergentes

n	-1	0	1	2	3	4	5
a_n			2	3	4	5	6
r_n	0	1	2	7	30	157	972
s_n	1	0	1	3	13	68	421

Tabela 3.4:

Verifica-se que

$$r_i s_{i-1} - r_{i-1} s_i = (-1)^i \quad \text{para} \quad i = 1, \ldots, 5.$$

Observe-se também da tabela 3.4 que os convergentes

$$\frac{2}{1}, \quad \frac{7}{3}, \quad \frac{30}{13}, \quad \frac{157}{18} \quad \text{e} \quad \frac{972}{421}$$

são irredutíveis. Essa é outra propriedade importante dos convergentes e é dada pelo seguinte corolário do teorema 3.4.

Corolário 3.1. *Todo convergente $\frac{r_i}{s_i}$ de uma fração contínua simples finita é um número racional irredutível, isto é, $mdc(r_i, s_i) = 1$.*

3.4 Frações contínuas e determinantes

Quando é dada uma fórmula de recorrência como a do teorema 3.3, um problema importante é determinar o convergente c_n sem usar os convergentes precedentes. Mostra-se nesta seção que na resolução deste problema, encontra-se uma relação interessante entre frações contínuas e determinantes. O resultado principal que trata desta ralação, teorema 3.5, é demonstrado usando a teoria de determinantes.

Dada a fração contínua simples finita

$$\frac{r}{s} = [a_1; a_2, \ldots, a_n].$$

Sabe-se que os convergentes de $\frac{r}{s}$ estão dados pelas expressões seguintes

$$c_1 = a_1; \qquad c_2 = a_1 + \frac{1}{a_2}; \qquad c_3 = a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3}};$$

$$c_4 = a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cfrac{1}{a_4}}}; \quad \cdots \quad c_{n-1} = a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cfrac{\ddots}{\cfrac{1}{a_{n-2} + \cfrac{1}{a_{n-1}}}}}};$$

$$c_n = a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cfrac{\ddots}{\cfrac{1}{a_{n+1} + \cfrac{1}{a_n}}}}}$$

Observação 3.3. Cada convergente c_n obtém-se de c_{n-1} adicionando-se $\frac{1}{a_n}$ à a_{n-1}.

Po outro lado, cada convergente c_n pode ser reescrito usando-se a noção de determinante. Por exemplo, c_1 e c_2 podem ser reescritos como

$$c_1 = |a_1|$$
$$c_2 = \frac{a_1a_2+1}{a_2} = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & 1 \\ -1 & a_2 \end{vmatrix}}{a_2}$$

O convergente c_3 pode expressar-se como

$$c_3 = \frac{a_1a_2a_3 + a_1 + a_3}{a_2a_3+1} = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & 1 & 0 \\ -1 & a_2 & 1 \\ 0 & -1 & a_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_2 & 1 \\ -1 & a_3 \end{vmatrix}}$$

Analogamente, c_4 fica como

$$c_4 = \frac{a_1a_2a_3a_4 + a_1a_2 + a_1a_4 + a_3a_4 + 1}{a_2a_3a_4 + a_2 + a_4} = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & a_2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & a_3 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & a_4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_2 & 1 & 0 \\ -1 & a_3 & 1 \\ 0 & -1 & a_4 \end{vmatrix}}$$

Dos cálculos anteriores para c_1, c_2, c_3 e c_4, pode-se enunciar o teorema a seguir:

Teorema 3.5. *Dada a fração contínua simples e finita*

$$\frac{r}{s} = [a_1; a_2, a_3 \ldots, a_n],$$

tem-se que seu n-ésimo convergente é dado por

$$c_n = \frac{N_n}{D_{n-1}}$$

onde

$$N_n = \begin{vmatrix} a_1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -1 & a_2 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & a_3 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-1} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & a_n \end{vmatrix} \quad e \quad D_{n-1} = \begin{vmatrix} a_2 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -1 & a_3 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & a_4 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-1} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & a_n \end{vmatrix}$$

Demonstração. A demonstração será feita por indução sobre n.

Para $n = 2$ temos claramente que

$$c_2 = \frac{a_1a_2 + 1}{a_2} = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & 1 \\ -1 & a_2 \end{vmatrix}}{|a_2|}.$$

Agora, suponha-se que seja verdadeira a expressão

$$c_{n-1} = \frac{N_{n-1}}{D_{n-2}}.$$

Deseja-se mostrar que

$$c_n = \frac{N_n}{D_{n-1}}.$$

Para isso, da observação 3.3, tem-se que adicionando-se $\frac{1}{a_n}$ à a_{n-1}, obtém-se a expressão

$$c_n = \frac{P_{n-1}}{Q_{n-2}} \tag{3.2}$$

onde

$$P_{n-1} = \begin{vmatrix} a_1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -1 & a_2 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & a_3 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-2} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & a_{n-1} + \frac{1}{a_n} \end{vmatrix}$$

e

$$Q_{n-2} = \begin{vmatrix} a_2 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -1 & a_3 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & a_4 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-2} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & a_{n-1} + \frac{1}{a_n} \end{vmatrix}$$

Desde que $a_n \neq 0$, da expressão (3.2), temos

$$c_n = \frac{a_n P_{n-1}}{a_n Q_{n-2}} \tag{3.3}$$

Afirmamos que

$$a_n P_{n-1} = N_n \quad \text{e} \quad a_n Q_{n-2} = D_{n-1}.$$

De fato, pelo expansão do cofator ao longo da última linha (teorema 2.1), a expressão $a_n P_{n-1}$ pode-se reescrever como:

$$a_n P_{n-1} = a_n \begin{vmatrix} a_1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & a_2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & \ddots & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & a_{n-1} + \frac{1}{a_n} & \frac{1}{a_n} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Somando-se -1 vezes a n-ésima coluna à $(n-1)$-ésima coluna, obtém-se dos teoremas 2.2 e 2.3

$$a_n P_{n-1} = a_n \begin{vmatrix} a_1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & a_2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & \ddots & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & a_{n-1} & \frac{1}{a_n} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

Multiplicando-se a última coluna pelo termo a_n, segue do teorema 2.2 e 2.3,

$$a_n P_{n-1} = \begin{vmatrix} a_1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & a_2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & \ddots & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & a_{n-1} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & a_n \end{vmatrix} = N_n$$

De modo semelhante demonstra-se que $a_n Q_{n-2} = D_{n-1}$. Assim, temos que

$$c_n = \frac{P_{n-1}}{Q_{n-2}} = \frac{a_n P_{n-1}}{a_n Q_{n-2}} = \frac{N_n}{D_{n-1}},$$

o que completa a demonstração. $\square$

Vejamos a seguir alguns exemplos.

Exemplo 3.9. Usando determinantes, vamos neste exemplo, calcular o quarto convergente da fração contínua.

$$\frac{205}{74} = 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \frac{1}{5}}}}}$$

Do teorema 3.5, temos que o quarto convergente é dado por

$$c_4 = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & a_2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & a_3 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & a_4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_2 & 1 & 0 \\ -1 & a_3 & 1 \\ 0 & -1 & a_4 \end{vmatrix}}$$

Substituindo $a_1 = 2$, $a_2 = 1$, $a_3 = 3$ e $a_4 = 2$, nos determinantes, tem-se que

$$c_4 = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & a_2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & a_3 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & a_4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_2 & 1 & 0 \\ -1 & a_3 & 1 \\ 0 & -1 & a_4 \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{vmatrix}}$$

Das propriedades dos determinantes, obtemos

$$c_4 = \frac{2\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{25}{9}$$

Assim, temos que o quarto convergente é dado por $c_4 = \frac{25}{9}$, sem a necessidade de calcular os convergentes precedentes.

Da tabela de convergentes 3.5, pode-se conferir que o resultado é $c_4 = \frac{25}{9}$.

Exemplo 3.10. Determinar o número racional $\frac{r}{s}$ que representa a fração contínua simples

$$\frac{r}{s} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{3 + \frac{1}{4}}}.$$

n	-1	0	1	2	3	4	5	6
a_n			2	1	3	2	1	5
r_n	0	1	2	3	11	25	36	205
s_n	1	0	1	1	4	9	13	74

Tabela 3.5:

Para encontrar $\frac{r}{s}$, a partir do teorema 3.5, temos que:

$$\frac{r}{s}=\frac{\begin{vmatrix} a_1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & a_2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & a_3 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & a_4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_2 & 1 & 0 \\ -1 & a_3 & 1 \\ 0 & -1 & a_4 \end{vmatrix}}$$

Substituindo $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, $a_3 = 3$ e $a_4 = 4$, nos determinantes, tem-se que

$$\frac{r}{s}=\frac{\begin{vmatrix} a_1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & a_2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & a_3 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & a_4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_2 & 1 & 0 \\ -1 & a_3 & 1 \\ 0 & -1 & a_4 \end{vmatrix}}=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 4 \end{vmatrix}}$$

Das propriedades dos determinantes, obtemos finalmente

$$\frac{r}{s}=\frac{43}{30}.$$

Embora a tabela de convergentes é mais simples para calcular-se convergentes, o objetivo aqui é ilustrar a conexão entre diferentes conceitos matemáticos.

3.5 Frações contínuas e números irracionais

Se x é um número irracional, sabe-se do teorema 3.1 que x não pode ser expandido por uma fração contínua simples finita. A pergunta que se coloca é: como seria a expansão de um número irracional em frações contínuas? Nesta seção, vamos tratar de maneira introdutória a expansão em frações contínuas de alguns números irracionais.

No estudo das frações contínuas associadas aos números irracionais, tem-se duas questões teóricas fundamentais:

- Existe uma expansão em frações contínuas para um número irracional dado?
- Se existe uma expansão, ela é única?

As respostas a estas duas questões são fornecidas pelo seguinte teorema

Teorema 3.6. *Qualquer fração continua simples infinita representa um número irracional. Reciprocamente, qualquer número irracional x pode ser representado de forma única por uma fração contínua simples infinita $[a_1; a_2, a_3, \dots]$.*

Demonstração. Ver [8] e [11]. □

A seguir, apresentamos o procedimento para encontrar a expansão de um número irracional em fração contínua.

Dado x um número irracional qualquer. Calcule a parte inteira de x, $a_1 = \lfloor x \rfloor$, ou seja, a_1 é o maior inteiro menor que x. Podemos escrever x como

$$x = a_1 + \frac{1}{x_2}, \quad \text{em que} \quad 0 < \frac{1}{x_2} < 1,$$

de onde o número

$$x_2 = \frac{1}{x - a_1} > 1$$

é irracional.

De igual forma, calcula-se $a_2 = \lfloor x_2 \rfloor$ e expressamos x_2 como

$$x_2 = a_2 + \frac{1}{x_3}, \quad \text{com} \quad 0 < \frac{1}{x_3} < 1 \quad \text{e} \quad a_2 \geq 1$$

de onde, novamente o número

$$x_3 = \frac{1}{x_2 - a_2} > 1$$

é irracional.

Repetindo esse processo, conseguimos

$$\begin{aligned}
x &= a_1 + \frac{1}{x_2}, \quad x_2 > 1, \\
x_2 &= a_2 + \frac{1}{x_3}, \quad x_3 > 1, \quad a_2 \geq 1, \\
&\vdots \\
x_n &= a_n + \frac{1}{x_{n+1}}, \quad x_{n+1} > 1, \quad a_n \geq 1, \\
&\vdots
\end{aligned}$$

onde $a_1, a_2, a_3, \dots$ são inteiros e $x_1, x_2, x_3, \dots$ são irracionais.

Note-se que esse processo não termina, pois isso só aconteceria se $x_n = a_n$, para algum n, o que é absurdo, pois x_n é irracional.

Por fim, fazendo substituições apropriadas, obtemos a fração contínua simples infinita

$$x = a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \ddots}} \tag{3.4}$$

Vejamos, nos seguintes exemplos, como aplicar o procedimento anterior.

Exemplo 3.11. Devido à grande utilização de $\sqrt{2}$ no ensino básico, vamos expandir o número irracional $\sqrt{2}$ na forma de uma fração contínua simples infinita. Para isso, temos que o maior inteiro menor que $\sqrt{2} = 1,4142\ldots$ é $a_1 = 1$, deste modo

$$\sqrt{2} = a_1 + \frac{1}{x_2} = 1 + \frac{1}{x_2}.$$

Resolvendo a equação acima para x_2, obtemos

$$x_2 = \frac{1}{\sqrt{2}-1}\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}+1} = \sqrt{2}+1.$$

Por conseguinte,

$$\sqrt{2} = a_1 + \frac{1}{x_2} = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}+1}.$$

O maior inteiro menor que $x_2 = \sqrt{2}+1 = 2,4141\ldots$ é $a_2 = 2$, desta forma

$$x_2 = a_2 + \frac{1}{x_3} = 2 + \frac{1}{x_3}$$

na qual

$$\begin{aligned} x_3 &= \frac{1}{x_2 - 2} = \frac{1}{(\sqrt{2}+1)-2} = \frac{1}{\sqrt{2}-1} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}-1}\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}+1} = \sqrt{2}+1 \end{aligned}$$

Como resultado, $x_2 = x_3$. Por tanto, daqui para frente o processo se repete, isto é, $x_4 = x_3$, $x_5 = x_4$,...

Por fim, depois de simples substituições, obtemos

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{x_2} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{x_3}} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \ddots}}} = [1; 2, 2, 2, \ldots] = [1; \overline{2}]$$

A notação $\overline{2}$ significa que o número 2 apresenta repetição, ou seja, apresenta algum período. Ressalte-se, aqui, que isso não se revela quando se usa a representação decimal de $\sqrt{2}$.

Vamos agora realizar o processo inverso, isto é, dada a fração contínua simples infinita $[1; 2, 2, 2, \ldots] = [1; \overline{2}]$, procura-se obter o número irracional $\sqrt{2}$.

Seja

$$x = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \ddots}}} \tag{3.5}$$

ou

$$x - 1 = \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \ddots}}} \tag{3.6}$$

Por outro lado, a expressão (3.5) pode-se exprimir como

$$x = 1 + \cfrac{1}{2 + \left(\cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \ddots}} \right)} \tag{3.7}$$

Inserindo (3.6) em (3.7), obtemos

$$x = 1 + \frac{1}{2 + (x - 1)} = 1 + \frac{1}{x + 1},$$

isso se reduz a equação

$$(x - 1)(x + 1) = 1, \quad \text{ou} \quad x^2 = 2.$$

Assim,

$$x = [1; 2, 2, \dots] = \sqrt{2}.$$

Ainda em relação ao exemplo anterior, vamos comparar aproximações decimais de $\sqrt{2}$ com as aproximações obtidas via os convergentes da fração contínua $[1; \overline{2}]$ de $\sqrt{2}$. Para isso, considere a seguinte tabela de convergentes para $[1; \overline{2}]$.

n	-1	0	1	2	3	4	5
a_n			1	2	2	2	2
r_n	0	1	1	3	7	17	41
s_n	1	0	1	2	5	12	29

Tabela 3.6:

Observe que a tabela acima fornece-nos os primeiros cinco covergentes

$$c_1 = 1 \qquad c_3 = \frac{7}{5} = 1,4 \qquad c_5 = \frac{41}{29} \approx 1,4137931$$

$$c_2 = \frac{3}{2} = 1,5 \qquad c_4 = \frac{17}{12} = 1,41\overline{6}$$

Ao comparar estes valores com a aproximação decimal de $\sqrt{2} \approx 1,4142$ (até quatro casas decimais), verifica-se que à medida que a ordem do convergente aumenta, o seu valor se torna mais próximo de $\sqrt{2} \approx 1,4142$.

Lembre-se que no caso de um número racional, o último convergente é o próprio número. Já no caso de um número irracional, obtém-se valores cada vez mais próximos dele, a medida que tomamos convergentes de ordens superiores.

Exemplo 3.12. Expandir $\frac{1+\sqrt{35}}{2}$ como uma fração contínua.

O maior inteiro menor que $\frac{1+\sqrt{35}}{2}$ é $a_1 = 3$, deste modo

$$\frac{1+\sqrt{35}}{2} = a_1 + \frac{1}{x_2} = 3 + \frac{1}{x_2}.$$

Resolvendo essa última equação para x_2, obtemos

$$\begin{aligned} x_2 &= \frac{1}{\frac{1+\sqrt{35}}{2} - 3} = \frac{2}{-5+\sqrt{35}} \frac{-5-\sqrt{35}}{-5-\sqrt{35}} \\ x_2 &= \frac{5+\sqrt{35}}{5} \end{aligned}$$

Logo,

$$\frac{1+\sqrt{35}}{2} = a_1 + \frac{1}{x_2} = 3 + \frac{1}{\frac{5+\sqrt{35}}{5}}.$$

O maior inteiro menor que $x_2 = \frac{5+\sqrt{35}}{5}$ é $a_2 = 2$, por conseguinte, somos levados a reescrever x_2 como

$$x_2 = a_2 + \frac{1}{x_3} = 2 + \frac{1}{x_3}$$

em que

$$\begin{aligned} x_3 &= \frac{1}{\frac{5+\sqrt{35}}{5} - 2} = \frac{5}{-5+\sqrt{35}} \\ &= \frac{5}{-5+\sqrt{35}} \frac{-5-\sqrt{35}}{-5-\sqrt{35}} \\ &= \frac{5+\sqrt{35}}{2} \end{aligned}$$

Assim,

$$\frac{1+\sqrt{35}}{2} = 3 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{\cfrac{5+\sqrt{35}}{2}}}$$

Novamente, o maior inteiro menor que $x_3 = \frac{5+\sqrt{35}}{2}$ é $a_3 = 5$, logo podemos reescrever x_3 como

$$x_3 = a_3 + \frac{1}{x_4} = 5 + \frac{1}{x_4}$$

Resolvendo a equação acima para x_4, obtemos

$$x_4 = \frac{1}{\frac{5+\sqrt{35}}{2} - 5} = \frac{2}{-5+\sqrt{35}}$$

ou equivalentemente

$$x_4 = \frac{2}{-5+\sqrt{35}} \frac{-5-\sqrt{35}}{-5-\sqrt{35}} = \frac{5+\sqrt{35}}{5}$$

Mas a expressão $\dfrac{5+\sqrt{35}}{5}$ já foi desenvolvida anteriormente, de modo que o processo se repete.

Finalmente, e depois de fazer substituições, a expansão em fração contínua é dada como segue

$$\frac{1+\sqrt{35}}{2} = 3+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{5+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{5+\ddots}}}} = [3;2,5,2,5,\dots] = [3;\overline{2,5}]$$

Vamos considerar, agora, o problema inverso, isto é, encontrar o número irracional que representa a fração contínua $[3;\overline{2,5}]$. Para isso, suponha que

$$x = 3+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{5+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{5+\ddots}}}}$$

Somando 2 a ambos lados da expressão anterior, conseguimos

$$x+2 = 5+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{5+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{5+\ddots}}}}$$

Podemos reescrever a equação como

$$x+2 = 5+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{x+2}}$$

Segue então daí que

$$2x^2-2x-17=0$$

cuja raiz positiva é $\frac{1+\sqrt{35}}{2}$.

Portanto

$$\frac{1+\sqrt{35}}{2} = [3;\overline{2,5}]$$

Vamos, agora, comparar as aproximações decimais de $\frac{1+\sqrt{35}}{2}$ com as aproximações obtidas via os convergentes da fração contínua $[3;\overline{2,5}]$ de $\frac{1+\sqrt{35}}{2}$. Para isso, considere a tabela de convergentes para a fração contínua $[3;\overline{2,5}]$:

n	-1	0	1	2	3	4
a_n			3	2	5	2
r_n	0	1	3	7	38	83
s_n	1	0	1	2	11	24

Tabela 3.7:

Da tabela acima, obtemos os primeiros quatro covergentes

$$c_1 = 3 \qquad c_3 = \frac{38}{11} = 3,\overline{45}$$

$$c_2 = \frac{7}{2} = 3,5 \qquad c_4 = \frac{83}{24} = 3,458\overline{3}$$

Ao comparar estes valores com a aproximação decimal de $\frac{1+\sqrt{35}}{2} \approx 3,458$ (até três casas decimais), verifica-se que

$$\frac{1+\sqrt{35}}{2} \approx c_4 = 3,458\overline{3}.$$

3.6 Frações contínuas e a constante π

Neste seção, apresentamos e demonstramos relações interessantes entre as frações contínuas generalizadas e a constante π.

Ao longo da história encontraram-se muitas expressões matemáticas para a famosa constante π. Por exemplo, o matemático britânico John Wallis $(1616-1703)$, que foi um membro fundador da Royal Society e contribuiu nas origens do cálculo, em seu livro Arithmetica Infinitorum; veja em [12], apresenta uma representação de π como o produto infinito

$$\frac{2}{\pi} = \frac{1\cdot 3}{2\cdot 2}\cdot\frac{3\cdot 5}{4\cdot 4}\cdot\frac{5\cdot 7}{6\cdot 6}\cdot\frac{7\cdot 9}{8\cdot 8}\cdots$$

O matemático inglês Willian Brouncker, por sua vez, transformou essa expressão (sem prova e aproximadamente em 1659) na seguinte lista de frações contínuas generalizadas [13]

$$(1)\ \ 1 + \cfrac{1^2}{2 + \cfrac{3^2}{2 + \cfrac{5^2}{2 + \ddots}}} = \frac{4}{\pi}$$

$$(2)\ \ 3 + \cfrac{1^2}{6 + \cfrac{3^2}{6 + \cfrac{5^2}{6 + \ddots}}} = \pi$$

$$(3)\quad 5+\cfrac{1^2}{10+\cfrac{3^2}{10+\cfrac{5^2}{10+\ddots}}}=\frac{16}{\pi}$$

$$(4)\quad 7+\cfrac{1^2}{14+\cfrac{3^2}{14+\cfrac{5^2}{14+\ddots}}}=\frac{9}{4}\pi$$

$$(5)\quad 9+\cfrac{1^2}{18+\cfrac{3^2}{18+\cfrac{5^2}{18+\ddots}}}=\frac{256}{9\pi}$$

$$(6)\quad 11+\cfrac{1^2}{22+\cfrac{3^2}{22+\cfrac{5^2}{22+\ddots}}}=\frac{225}{64}\pi$$

$$(7)\quad 13+\cfrac{1^2}{26+\cfrac{3^2}{26+\cfrac{5^2}{26+\ddots}}}=\frac{1024}{25\pi}$$

$$(8)\quad 15+\cfrac{1^2}{30+\cfrac{3^2}{30+\cfrac{5^2}{30+\ddots}}}=\frac{11025}{2304}\pi$$

$$\vdots$$

Olhando-se para a lista de frações contínuas acima, nota-se sua simplicidade e sua facilidade para descrever-las e decorá-las. A seguir, apresenta-se os detalhes da demonstração dessas expressões seguindo a ideia proposta em [14]. Para isso, precisamos conhecer algumas propriedades da função gama.

3.6.1 Função gama

A função gama, introduzida por Leonhard Euler em 1930, generaliza o conceito de fatorial, originalmente definido para números inteiros. Existem diversas maneiras de se definir a função gama. Nesta trabalho, vamos defini-la a partir de uma integral imprópria.

Definição 3.4. *A função gama é definida por*

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1} dt, \qquad \forall x > 0$$

A seguir apresentamos algumas propriedades relacionadas á função gama

Teorema 3.7.

$$\Gamma(1) = 1.$$

Demonstração. Pela definição da função gama, temos que

$$\begin{aligned} \Gamma(1) &= \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{1-1} dt \\ &= \int_0^{+\infty} e^{-t} dt \\ &= \lim_{b\to\infty} (-e^{-b})\Big|_0^{\infty} \\ &= 1 \end{aligned}$$

□

Teorema 3.8.

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x), \qquad x > 0$$

Demonstração. Da definição de função gama,

$$\Gamma(x+1) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{(x+1)-1} dt = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x} dt$$

Integrando por partes,

$$\Gamma(x+1) = \left[-t^x e^{-t}\right]_0^{+\infty} + x \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1} dt$$

Assim, pela definição da função gama,

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x).$$

□

O próximo resultado é a razão pela qual a função gama é frequentemente chamada de fatorial generalizado.

Teorema 3.9. *Se x é um inteiro não negativo, então*

$$\Gamma(x+1) = x!$$

Demonstração. Pelo teorema 3.8, encontra-se que:

$$\begin{aligned}\Gamma(x+1) &= x\Gamma(x)\\ &= x(x-1)\Gamma(x-1)\end{aligned}$$

Novamente do teorema 3.8

$$\begin{aligned}\Gamma(x+1) &= x\Gamma(x)\\ &= x(x-1)\Gamma(x-1)\\ &= x(x-1)(x-2)\Gamma(x-2)\end{aligned}$$

Desde que x é inteiro e aplicando o teorema 3.8 inúmeras vezes, teremos

$$\Gamma(x+1) = x(x-1)(x-2)(x-3)\ldots 3.2.1.\Gamma(1)$$

Finalmente, do teorema 3.7, obtém-se

$$\Gamma(x+1) = x!$$

□

Outra propriedade interessante da função gama é dada pelo seguinte resultado.

Teorema 3.10.

$$\Gamma\left(\tfrac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$$

Demonstração. Da definição de função gama, temos

$$\Gamma\left(\tfrac{1}{2}\right) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{\frac{1}{2}-1} dt \tag{3.8}$$

Quando substituímos $t = u^2$, (3.8) pode ser reescrita como

$$\Gamma\left(\tfrac{1}{2}\right) = 2\int_0^{+\infty} e^{-u^2} du$$

De onde

$$\begin{aligned}\Gamma\left(\tfrac{1}{2}\right) &= 2\int_0^{+\infty} e^{-u^2} du\\ &= 2\frac{\sqrt{\pi}}{2}\\ &= \sqrt{\pi}\end{aligned}$$

□

O próximo teorema será muito útil na demonstração das frações contínuas acima $(1)-(8)$.

Teorema 3.11.

$$\Gamma\left(n+\tfrac{1}{2}\right)=\frac{1.3.5.7\ldots(2n-1)}{2^n}\sqrt{\pi},\qquad n=1,2,3,\ldots$$

Demonstração. A demonstração será feita por indução sobre n. Para $n=1$, segue diretamente dos teoremas 3.8 e 3.10 que

$$\Gamma\left(\tfrac{1}{2}+1\right)=\tfrac{1}{2}\Gamma\left(\tfrac{1}{2}\right)=\tfrac{1}{2}\sqrt{\pi}$$

Suponha-se, agora, que o resultado é válido para um dado $n=k$, isto é,

$$\Gamma\left(k+\tfrac{1}{2}\right)=\frac{1.3.5.7\ldots(2k-1)}{2^k}\sqrt{\pi}$$

Deve-se mostrar que é válido para $n=k+1$. De fato, do teorema 3.8

$$\Gamma\left(k+1+\tfrac{1}{2}\right)=\left(k+\tfrac{1}{2}\right)\Gamma\left(k+\tfrac{1}{2}\right)\tag{3.9}$$

Aplicando a hipótese de indução em (3.9), vem que

$$\begin{aligned}\Gamma\left(k+1+\tfrac{1}{2}\right)&=\left(k+\tfrac{1}{2}\right)\frac{1.3.5.7\ldots(2k-1)}{2^k}\sqrt{\pi}\\&=\frac{(2k+1)}{2}\,\frac{1.3.5.7\ldots(2k-1)}{2^k}\sqrt{\pi}\\&=\frac{1.3.5.7\ldots(2k-1)(2k+1)\sqrt{\pi}}{2^{k+1}}\end{aligned}$$

o que estabelece, desse modo, o resultado para todo n. □

3.6.2 O teorema principal

O teorema seguinte, que é o resultado principal desta seção, estabelece uma relação entre frações contínuas generalizadas e a constante π.

Teorema 3.12. *As seguintes relações são válidas:*

$$1+\cfrac{1^2}{2+\cfrac{3^2}{2+\cfrac{5^2}{2+\ddots}}}=\frac{4}{\pi}$$

$$3+\cfrac{1^2}{6+\cfrac{3^2}{6+\cfrac{5^2}{6+\ddots}}}=\pi$$

$$5+\cfrac{1^2}{10+\cfrac{3^2}{10+\cfrac{5^2}{10+\ddots}}}=\frac{16}{\pi}$$

$$7+\cfrac{1^2}{14+\cfrac{3^2}{14+\cfrac{5^2}{14+\ddots}}}=\frac{9}{4}\pi$$

$$9+\cfrac{1^2}{18+\cfrac{3^2}{18+\cfrac{5^2}{18+\ddots}}}=\frac{256}{9\pi}$$

$$11+\cfrac{1^2}{22+\cfrac{3^2}{22+\cfrac{5^2}{22+\ddots}}}=\frac{225}{64}\pi$$

$$13+\cfrac{1^2}{26+\cfrac{3^2}{26+\cfrac{5^2}{26+\ddots}}}=\frac{1024}{25\pi}$$

$$15+\cfrac{1^2}{30+\cfrac{3^2}{30+\cfrac{5^2}{30+\ddots}}}=\frac{11025}{2304}\pi$$

$$\vdots$$

Demonstração. O lado direito das expressões podem ser reescritas como

$$1+\cfrac{1^2}{2+\cfrac{3^2}{2+\cfrac{5^2}{2+\ddots}}}=\frac{4}{\pi}$$

$$3+\cfrac{1^2}{6+\cfrac{3^2}{6+\cfrac{5^2}{6+\ddots}}}=\pi$$

$$5+\cfrac{1^2}{10+\cfrac{3^2}{10+\cfrac{5^2}{10+\ddots}}}=3\cdot\frac{2\cdot 2}{1\cdot 3}\cdot\frac{4}{\pi}$$

$$7+\cfrac{1^2}{14+\cfrac{3^2}{14+\cfrac{5^2}{14+\ddots}}}=3\cdot\frac{1\cdot 3}{2\cdot 2}\pi$$

$$9+\cfrac{1^2}{18+\cfrac{3^2}{18+\cfrac{5^2}{18+\ddots}}}=5\cdot\frac{2\cdot 2}{1\cdot 3}\cdot\frac{4\cdot 4}{3\cdot 5}\cdot\frac{4}{\pi}$$

$$11+\cfrac{1^2}{22+\cfrac{3^2}{22+\cfrac{5^2}{22+\ddots}}}=5\cdot\frac{1\cdot 3}{2\cdot 2}\cdot\frac{3\cdot 5}{4\cdot 4}\pi$$

$$13 + \cfrac{1^2}{26 + \cfrac{3^2}{26 + \cfrac{5^2}{26 + \ddots}}} = 7 \cdot \frac{2\cdot 2}{1\cdot 3} \cdot \frac{4\cdot 4}{3\cdot 5} \cdot \frac{6\cdot 6}{5\cdot 5} \cdot \frac{4}{\pi}$$

$$15 + \cfrac{1^2}{30 + \cfrac{3^2}{30 + \cfrac{5^2}{30 + \ddots}}} = 7 \cdot \frac{1\cdot 3}{2\cdot 2} \cdot \frac{3\cdot 5}{4\cdot 4} \cdot \frac{5\cdot 7}{6\cdot 6}\pi$$

Por outro lado, observe-se que as frações contínuas são da forma

$$FC(x) = x + \cfrac{1^2}{2x + \cfrac{3^2}{2x + \cfrac{5^2}{2x + \ddots}}}$$

onde x é um número ímpar. Note-se ainda que π aparece no lado direito, no denominador quando $x = 1, 5, 9, \dots$ e, no numerador quando $x = 3, 7, 11, 15, \dots$ Assim, é conveniente expressar a lista anterior em duas expressões. Para isso, usa-se o produto de Wallis

$$W(n) = \frac{1\cdot 3}{2\cdot 2} \cdot \frac{3\cdot 5}{4\cdot 4} \cdot \frac{5\cdot 7}{6\cdot 6} \cdots \frac{(2n-1)(2n+1)}{2n\cdot 2n}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Com isso, a lista de expressões podem ser reescritas como

$$(4n+1) + \cfrac{1^2}{2(4n+1) + \cfrac{3^2}{2(4n+1) + \cfrac{5^2}{2(4n+1) + \ddots}}} = (2n+1)\,\frac{1}{W(n)}\,\frac{4}{\pi} \tag{3.10}$$

e

$$(4n+3) + \cfrac{1^2}{2(4n+3) + \cfrac{3^2}{2(4n+3) + \cfrac{5^2}{2(4n+3) + \ddots}}} = (2n+1)\,W(n)\,\pi \tag{3.11}$$

As expressões (3.10) e (3.11) são casos especiais da fórmula [15, p. 35]

$$\frac{4\Gamma\left(\frac{x+y+3}{4}\right)\Gamma\left(\frac{x-y+3}{4}\right)}{\Gamma\left(\frac{x+y+1}{4}\right)\Gamma\left(\frac{x-y+1}{4}\right)} = x + \cfrac{1^2-y^2}{2x+\cfrac{3^2-y^2}{2x+\cfrac{5^2-y^2}{2x+\ddots}}} \tag{3.12}$$

que é válida para y inteiro ímpar e x qualquer complexo ou y qualquer complexo e $Re(x) > 0$. De acordo com [16, p.140] esse resultado também é atribuído a Euler, Stieltjes e Ramanujan.

Observe-se que quando $y = 0$ e $x = 4n + 1$ da expressão (3.12), obtemos

$$\frac{4\Gamma\left(\frac{4n+1+3}{4}\right)\Gamma\left(\frac{4n+1+3}{4}\right)}{\Gamma\left(\frac{4n+1+1}{4}\right)\Gamma\left(\frac{4N+1+1}{4}\right)} = (4n+1) + \cfrac{1^2}{2(4n+1)+\cfrac{3^2}{2(4n+1)+\cfrac{5^2}{2(4n+1)+\ddots}}}$$

ou

$$4\left[\frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)}\right]^2 = (4n+1) + \cfrac{1^2}{2(4n+1)+\cfrac{3^2}{2(4n+1)+\cfrac{5^2}{2(4n+1)+\ddots}}}$$

Daí, segue diretamente dos teoremas 3.9 e 3.11 que

$$\frac{4(n!)^2}{\left[\frac{1.3.5.7\ldots(2n-1)}{2^n}\sqrt{\pi}\right]^2} = (4n+1) + \cfrac{1^2}{2(4n+1)+\cfrac{3^2}{2(4n+1)+\cfrac{5^2}{2(4n+1)+\ddots}}}$$

Afirma-se que

$$\frac{4(n!)^2}{\left[\frac{1.3.5.7\ldots(2n-1)\sqrt{\pi}}{2^n}\right]^2} = (2n+1)\frac{1}{W(n)}\frac{4}{\pi}$$

De fato,

$$\frac{4(n!)^2}{\left[\frac{1.3.5.7...(2n-1)\sqrt{\pi}}{2^n}\right]^2} = \frac{(n!)^2 4}{\frac{1^2.3^2.5^2.7^2...(2n-1)^2\pi}{2^{2n}}} = \frac{(n!)^2}{\frac{1.3.3.5.5.7...(2n-1)(2n-1)}{2^{2n}}}\frac{4}{\pi}$$

$$= \frac{1}{\frac{1.3.3.5.5.7...(2n-1)(2n-1)}{[2^n n!]^2}}\frac{4}{\pi} = \frac{1}{\frac{1.3.3.5.5.7...(2n-1)(2n-1)}{[2^n.1.2.3.4.5...n]^2}}\frac{4}{\pi}$$

$$= \frac{1}{\frac{1.3.3.5.5.7...(2n-1)(2n-1)}{[2.1.2.2.2.3.2.4.2.5...2n]^2}}\frac{4}{\pi} = (2n+1)\frac{1}{\frac{1.3.3.5.5.7...(2n-1)(2n-1)(2n+1)}{[2.4.6.8...2n]^2}}\frac{4}{\pi}$$

$$= (2n+1)\frac{1}{\frac{1.3}{2.2}\frac{3.5}{4.4}\frac{5.7}{6.6}\cdots\frac{(2n-1)(2n+1)}{2n2n}}\frac{4}{\pi}$$

$$= (2n+1)\frac{1}{W(n)}\frac{4}{\pi}$$

Observe-se ainda que para $y = 0$ e $x = 4n+3$ da expressão (3.12), temos

$$\frac{4\Gamma\left(\frac{4n+3+3}{4}\right)\Gamma\left(\frac{4n+3+3}{4}\right)}{\Gamma\left(\frac{4n+3+1}{4}\right)\Gamma\left(\frac{4N+3+1}{4}\right)} = (4n+3) + \cfrac{1}{2(4n+3) + \cfrac{3^2}{2(4n+3) + \cfrac{5^2}{2(4n+3) + \ddots}}}$$

ou

$$\frac{4\Gamma\left(n+\frac{3}{2}\right)\Gamma\left(n+\frac{3}{2}\right)}{\Gamma(n+1)\Gamma(n+1)} = (4n+3) + \cfrac{1}{2(4n+3) + \cfrac{3^2}{2(4n+3) + \cfrac{5^2}{2(4n+3) + \ddots}}}$$

Esse resultado pode ser expresso como

$$\frac{4\left[\Gamma\left(n+\frac{1}{2}+1\right)\right]^2}{[\Gamma(n+1)]^2} = (4n+3) + \cfrac{1}{2(4n+3) + \cfrac{3^2}{2(4n+3) + \cfrac{5^2}{2(4n+3) + \ddots}}}$$

Daí, pelos teoremas 3.8, 3.9 e 3.11, vem que

$$\frac{4\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{1.3.5.7\ldots(2n-1)}{2^n}\sqrt{\pi}\right]^2}{(n!)^2} = (4n+3) + \cfrac{1}{2(4n+3) + \cfrac{3^2}{2(4n+3) + \cfrac{5^2}{2(4n+3) + \ddots}}}$$

Afirma-se que

$$\frac{4\pi\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{1.3.5.7\ldots(2n-1)}{2^n}\right]^2}{(n!)^2} = (2n+1)W(n)\pi$$

De fato,

$$\begin{aligned}
\frac{4\pi\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{1.3.5.7\ldots(2n-1)}{2^n}\right]^2}{(n!)^2} &= \frac{4\pi\left(\frac{2n+1}{2}\right)^2\frac{1.3.3.5.5.7\ldots(2n-1)(2n-1)}{2^{2n}}}{(n!)^2} \\
&= \frac{\pi(2n+1)^2 1.3.3.5.5.7\ldots(2n-1)(2n-1)}{2^{2n}(n!)^2} \\
&= (2n+1)\frac{1.3.3.5.5.7\ldots(2n-1)(2n+1)}{[2^n.1.2.3\ldots n]^2}\pi \\
&= (2n+1)\frac{1.3.3.5.5.7\ldots(2n-1)(2n+1)}{[1.2.2.2.2.3\ldots 2n]^2}\pi \\
&= (2n+1)\frac{1.3}{2.2}\,\frac{3.5}{4.4}\,\frac{5.7}{6.6}\cdots\frac{(2n-1)(2n+1)}{2n.2n}\pi \\
&= (2n+1)W(n)\pi
\end{aligned}$$

o que conclui a demonstração do teorema. $\square$

4 Aplicações das Frações Contínuas

Neste capítulo, discutimos algumas aplicações simples das frações contínuas.

4.1 Equações diofantinas lineares

A resolução de vários problemas de aritmética recai na resolução, em números inteiros, de equações do tipo

$$ax + by = c$$

com $a, b, c \in \mathbb{Z}$.

Tais equações são chamadas equações diofantinas lineares em homenagem ao matemático e filósofo Diofanto de Alexandria (aprox. 300 d.C.)

Em algumas situações as equações diofantinas lineares podem ser resolvidas por inspeção. Vejamos a seguir um exemplo.

Vamos determinar as soluções positivas inteiras da equação

$$11x + 7y = 58 \tag{4.1}$$

Isolando a variável y, tem-se

$$y = \frac{58 - 11x}{7}$$

Por inspeção, $x_0 = 4$ torna o número $58 - 11x$ divisível por 7. Logo, a solução é dada por $x_0 = 4$ e $y_0 = 2$.

O método de inspeção ou tentativa usado em (4.1) foi viável pois o número 7 é suficientemente pequeno. Em geral, se $|a|$, $|b|$ e $|c|$ são números pequenos, uma solução pode ser encontrada por inspeção. Nesta seção descreve-se um método que usa frações contínuas que sempre permitirá achar uma solução das equações diofantinas lineares.

Definição 4.1. *Uma equação diofantina linear em duas variáveis é uma expressão da forma*

$$ax + by = c, \tag{4.2}$$

na qual a, b, c são inteiros e cujas soluções são números inteiros.

O teorema a seguir nos fornece uma condição necessaria e suficiente para a existência de soluções de uma equação diofantina linear. Denota-se por $mdc(a, b)$ o máximo divisor comum dos números a e b.

Teorema 4.1. *Sejam $a, b, c \in \mathbb{Z}$ com d=$mdc(a, b)$. A equação $ax + by = c$ admite a solução em números inteiros se, e somente se, d divide c.*

Demonstração. Ver [8] □

Exemplo 4.1. A equação diofantina linear $2x + 4y = 3$ não possui soluções inteiras, pois pelo teorema 4.1 $mdc(2, 4) = 2$ não divide 3.

É imediato verificar que a equação $ax+by = c$, com $a \neq 0$ ou $b \neq 0$ e $d = mdc(a, b)$ divide c, é equivalente à equação

$$a_1x + b_1y = c_1,$$

onde

$$a_1 = \frac{a}{d}, \qquad b_1 = \frac{b}{d}, \qquad \text{e} \qquad c_1 = \frac{c}{d}.$$

Portanto, podemos nos restringir à equações do tipo

$$ax + by = c, \qquad \text{com} \qquad mdc(a, b) = 1,$$

que sempre têm soluções.

O teorema a seguir mostra como as soluções de uma equação diofantina como acima podem ser determinadas a partir de uma solução particular qualquer x_0, y_0.

Teorema 4.2. *Seja x_0, y_0 uma solução da equação $ax + by = c$, onde $mdc(a, b) = 1$. Então as soluções x, y em $\mathbb{Z}$ da equação são*

$$x = x_0 + tb, \quad y = y_0 - ta; \quad t \in \mathbb{Z}.$$

Demonstração. Ver [7] □

Segue-se do teorema acima que a equação diofantina $ax+by = c$, com $mdc(a, b) = 1$, admite infinitas soluções em $\mathbb{Z}$.

Note também que as soluções da equação diofantina $ax + by = c$ podem ser escritas na forma

$$x = x_0 - tb, \quad y = y_0 + ta; \quad t \in \mathbb{Z}.$$

bastando para isso trocar no teorema t por $-t$.

Para aplicar o teorema anterior é necessário conhecer ou determinar uma solução particular. Para isso existem vários métodos, dentre esses podemos citar o método que usa o algoritmo da divisão; o método baseado nas congruências numéricas e o método que usa as frações contínuas. Aqui apresentamos o método que usa as frações contínuas.

Considere-se a equação diofantina linear

$$ax + by = c, \qquad \text{com} \qquad mdc(a, b) = 1,$$

Pelo teorema 3.1, o número racional $\frac{a}{b}$ (ou $\frac{b}{a}$) pode-se expressar como uma fração contínua simples e finita

$$\frac{a}{b} = [a_1, a_1, \ldots, a_n].$$

Os dois últimos convergentes $\frac{r_{n-1}}{s_{n-1}}$ e $\frac{r_n}{s_n}$ satisfazem a relação (teorema 3.4)

$$r_n s_{n-1} - s_n r_{n-1} = (-1)^n. \tag{4.3}$$

Entretanto,

$$\frac{r_n}{s_n} = \frac{a}{b}. \tag{4.4}$$

Substituindo (4.4) em (4.3), obtém-se

$$as_{n-1} - br_{n-1} = (-1)^n. \tag{4.5}$$

Se n é par, então

$$as_{n-1} + b(-r_{n-1}) = 1 \tag{4.6}$$

e $x_0 = s_{n-1}, y_0 = -r_{n-1}$ é uma solução particular da equação (4.6). Se n é ímpar, multiplica-se ambos os lados de (4.5) por -1.

Finalmente, multiplicando-se a equação (4.6) por c, obtém-se

$$a(cs_{n-1}) + b(-cr_{n-1}) = c,$$

mostrando que

$$x_0 = cs_{n-1} \quad \text{e} \quad y_0 = -cr_{n-1}$$

é uma solução particular de $ax + by = c$.

Exemplo 4.2. Resolvamos a equação 31x+11y=2.

A equação possui soluções, pois $mdc(31, 11) = 1$ divide 2. Para determiná-las, vamos, em seguida, achar uma solução particular x_0, y_0.

A fração contínua associada ao número racional $\frac{31}{11}$ é dada por

$$\frac{31}{11} = 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{2}}},$$

isto é, $\frac{31}{11} = [2; 1, 4, 2] = \frac{r_4}{s_4}$. Desde que $n = 4$, segue-se do teorema 3.4, que

$$31s_3 - 11r_3 = 1.$$

Precisamos calcular o convergente $\frac{r_3}{s_3}$. Para isso, sabe-se que

$$\frac{r_3}{s_3} = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & 1 & 0 \\ -1 & a_2 & 1 \\ 0 & -1 & a_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_2 & 1 \\ -1 & a_3 \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 4 \end{vmatrix}},$$

de onde, obtém-se $\frac{r_3}{s_3} = \frac{14}{5}$. Outra forma possível de calcular o convergente $\frac{r_3}{s_3}$ é elaborando a tabela de convergentes

n	-1	0	1	2	3	4
a_n			2	1	4	2
r_n	0	1	2	3	14	31
s_n	1	0	1	1	5	11

Tabela 4.1:

Observa-se da tabela 4.1 que $\frac{r_3}{s_3} = \frac{14}{5}$. Logo, $x_0 = s_3 = 5$ e $y_0 = -r_3 = -14$ é uma solução particular de $31s_3 - 11r_3 = 1$. Multiplicando-se esta última expressão por 2, consegue-se

$$31(10) + 11(-28) = 2,$$

mostrando que $x_0 = 10$ e $y_0 = -28$ é uma solução particular de $31x + 11y = 2$. Finalmente, decorre do teorema 4.2 que a solução geral é dada por

$$x = 10 + 11t \quad \text{e} \quad y = -28 - 31t; \quad t \in \mathbb{Z}.$$

O próximo exemplo nos mostra como proceder quando o número de quocientes parciais é ímpar.

Exemplo 4.3. Resolvamos a equação 33x+19y=100.

A equação tem solução, pois $mdc(33, 19) = 1$ divide 100. A fração contínua correspondente ao número racional $\frac{33}{19}$ é dada por

$$\frac{33}{19} = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{4}}}} = [1; 1, 2, 1, 4] = \frac{r_5}{s_5}$$

Desde que $n = 5$, segue-se do teorema 3.4, que

$$33s_4 - 19r_4 = -1.$$

ou equivalentemente

$$33(-s_4) + 19(r_4) = 1.$$

Calculando o convergente $\frac{r_4}{s_4}$:

- Usando determinantes

$$\frac{r_4}{s_4} = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & a_2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & a_3 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & a_4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_2 & 1 & 0 \\ -1 & a_3 & 1 \\ 0 & -1 & a_4 \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{7}{4}$$

- Usando tabela de convergentes vemos que $\frac{r_4}{s_4} = \frac{7}{4}$

n	-1	0	1	2	3	4	5
a_n			1	1	2	1	4
r_n	0	1	1	2	5	7	33
s_n	1	0	1	1	3	4	19

Tabela 4.2:

Logo, $x_0 = -s_4 = -4$ e $y_0 = r_4 = 7$ é uma solução particular de $33(-s_4)+19r_4 = 1$. Multiplicando-se esta última expressão por 100, consegue-se

$$33(-400) + 19(700) = 100,$$

mostrando que $x_0 = -400$ e $y_0 = 700$ é uma solução particular de $33x + 19y = 100$. Finalmente, decorre do teorema 4.2 que a solução geral é dada por

$$x = -400 + 19t \quad \text{e} \quad y = 700 - 33t; \quad t \in \mathbb{Z}.$$

Exemplo 4.4. Um fazendeiro deseja comprar coelhos e galinhas, gastando um total de R\$ $1.770,00$. Cada coelho custa R\$ $31,00$ e cada galinha custa R\$ $21,00$. Quantos coelhos e galinhas o fazendeiro poderá comprar?

Seja C o número de coelhos e G o número de galinhas a serem comprados. Deste modo a equação diofantina para o problema é dada pela equação

$$31C + 21G = 1770.$$

Desde que $mdc(31, 21) = 1$ divide 1770, segue que a equação tem solução. A representação em fração contínua de $\frac{31}{21}$ é dada por

$$\frac{31}{21} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{10}} = [1; 2, 10] = \frac{r_3}{s_3}$$

Desde que $n = 3$, segue-se do teorema 3.4, que

$$31s_2 - 21r_2 = -1.$$

ou equivalentemente

$$33(-s_2) + 21(r_2) = 1.$$

Calculando o convergente $\frac{r_2}{s_2}$ usando-se determinantes

$$\frac{r_2}{s_2} = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & 1 \\ -1 & a_2 \end{vmatrix}}{a_2} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}}{2} = \frac{3}{2}$$

Logo, $C_0 = -s_2 = -2$ e $G_0 = r_2 = 3$ é uma solução particular de $31(-s_2) + 21r_2 = 1$. Multiplicando-se esta última expressão por 1770, obtém-se

$$31(-3540) + 21(5310) = 1770,$$

mostrando que $C_0 = -3540$ e $G_0 = 5310$ é uma solução particular de $31C+21G = 1770$. Decorre do teorema 4.2 que a solução geral é dada por

$$C = -3540 + 21t \quad \text{e} \quad G = 5310 - 31t; \quad t \in \mathbb{Z}.$$

Observe que como $C > 0$ e $G > 0$, então

$$-3540 + 21t > 0 \quad \text{e} \quad 5310 - 31t > 0.$$

Consequentemente,

$$168,57 < t < 171,29.$$

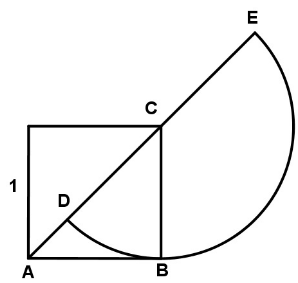
Desse modo, as soluções são

$$\begin{array}{lll} C = -3540 + 21(170) = 30 & \text{e} & G = 5310 - 31(170) = 40, \quad \text{ou} \\ C = -3540 + 21(169) = 9 & \text{e} & G = 5310 - 31(169) = 71, \quad \text{ou} \\ C = -3540 + 21(171) = 51 & \text{e} & G = 5310 - 31(171) = 9. \end{array}$$

Assim, as opções de compra do fazendeiro são 9 coelhos e 71 galinhas ou 30 coelhos e 40 galinhas ou 51 coelhos e 9 galinhas.

4.2 Frações contínuas e geometria

Nesta seção considera-se a relação entre frações contínuas e geometria. Usa-se as frações contínuas para demonstrar a irracionalidade de $\sqrt{2}$. A prova se apoia no seguinte desenho, no qual temos um quadrado de lado 1 e uma semicircunferência com centro em um dos vértices do quadrado.



O Teorema de Pitágoras aplicado ao triângulo retângulo ABC da figura acima, nos mostra imediatamente que

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 = 1^2 + 1^2 = 2,$$

ou seja,

$$AC = \sqrt{2}.$$

Da relação

$$\frac{AC}{BC} = \frac{\sqrt{2}}{1},$$

segue-se que

$$\sqrt{2} = \frac{AC}{BC} = \frac{AD + DC}{BC} = \frac{AD}{BC} + \frac{DC}{BC} = 1 + \frac{AD}{BC} = 1 + \frac{1}{\frac{BC}{AD}} \tag{4.7}$$

Agora, precisamos obter uma expressão equivalente para $\frac{BC}{AD}$ de tal forma que nos permita transformar (4.7) em uma fração contínua . O ponto de partida para isso é um resultado de geometria plana que estabelece uma relação entre os segmentos AB, AE e AD ([17, p.189])

$$AB^2 = AE.AD.$$

Daí resulta

$$\frac{AB}{AD} = \frac{AE}{AB} \tag{4.8}$$

Mas,

$$\begin{aligned} AE &= AD + DE = AD + 2BC \\ AB &= BC \end{aligned}$$

Substituindo essas expressões para AE e AB em (4.8), conseguimos

$$\frac{BC}{AD} = \frac{AB}{AD} = \frac{AE}{AB} = \frac{AD + 2BC}{AB} = \frac{AD + 2AB}{AB} = 2 + \frac{AD}{AB} \tag{4.9}$$

Voltando em (4.7), de (4.9) segue-se que

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{\frac{BC}{AD}} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{AD}{AB}} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{\frac{AB}{AD}}}$$

Novamente, de (4.9) obtemos

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{\frac{BC}{AD}} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{AD}{AB}} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{\frac{AB}{AD}}} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{AD}{AB}}}$$

Continuando esse processo indefinidamente, obtemos

$$\sqrt{2} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \ddots}}} = [1; 2, 2, 2, \dots]$$

Assim, a fração contínua simples é infinita e o teorema 3.6 nos diz que o número $\sqrt{2}$ é irracional.

4.3 Cálculo do logaritmo com frações contínuas

Nesta seção, abordaremos um procedimento de cálculo de logaritmos por meio de frações contínuas.

O método foi publicado no livro *Eléments d'Algèbre*, de Louis Pierre Marie Bourdon, em 1817. Esse método não é mais usado atualmente, pois qualquer computador com algum software cientifico calcula logaritmos com qualquer precisão aritmética desejada. No entanto, o desenvolvimento do método proporciona uma visão e um entendimento mais profundo das conexões entre diferentes conceitos matemáticos.

Sabe-se que o logaritmo de um número real R ($R > 0$) na base b ($b > 0$ e $b \neq 1$) é o expoente x tal que $b^x = R$, ou seja,

$$\log_b R = x \Leftrightarrow b^x = R.$$

Essa equivalência nos informa que calcular $\log_b R$ é o mesmo que calcular o valor de x tal que $b^x = R$. Assim, estabelecemos a seguir o método geral para encontrar x na equação $b^x = R$.

Inicialmente, deve-se procurar um inteiro n tal que

$$b^n < R < b^{n+1},$$

então x está entre n e $n+1$, e pode ser escrito como

$$x = n + \frac{1}{x'}, \quad \text{onde} \quad x' > 1.$$

Substituindo-se este valor de x na equação $b^x = R$ temos

$$b^{n+\frac{1}{x'}} = R.$$

Decorre da equação acima que

$$c^{x'} = b, \quad \text{onde } c = \frac{R}{b^n}$$

Procedendo novamente nesta equação como na equação proposta $b^x = R$, obteremos que x' está entre n' e $n'+1$, logo

$$x' = n' + \frac{1}{x''}, \quad \text{onde} \quad x'' > 1.$$

Substituindo-se este valor de x' na equação $c^{x'} = b$ temos

$$c^{n'+\frac{1}{x''}} = b.$$

Pondo $d = \dfrac{b}{c^{n'}}$, decorre da equação acima que

$$d^{x''} = c.$$

Repetindo o processo teremos

$$x'' = n'' + \frac{1}{x'''}, \quad x''' = n''' + \frac{1}{x^{iv}}$$

e assim por diante.

Dessa maneira,

$$x = n + \frac{1}{x'}, \quad x' = n' + \frac{1}{x''}, \quad x'' = n'' + \frac{1}{x'''}, \quad x''' = n''' + \frac{1}{x^{iv}}, \ldots$$

Agora se substituir $x', x'', x''', \ldots$ pelos seus respectivos valores, obteremos para o valor de x a fração contínua

$$x = n + \cfrac{1}{n' + \cfrac{1}{n'' + \cfrac{1}{n''' + \ddots}}}$$

Os exemplos a seguir ilustram o método apresentado acima.

Exemplo 4.5. Usando as frações contínuas calcular $\log_2 6$.

Em outras palavras, deseja-se calcular x tal que

$$2^x = 6. \tag{4.10}$$

O primeiro passo consiste em considerar que, se $2^2 = 4$ e $2^3 = 8$, então x está entre 2 e 3, e pode ser escrito como

$$x = 2 + \frac{1}{x'}, \qquad \text{onde } x' > 0.$$

Atribuindo-se este valor de x na equação (4.10), temos

$$\begin{aligned} 2^{2+\frac{1}{x'}} = 6 \ &\Leftrightarrow\ 2^2.2^{\frac{1}{x'}} = 6 \\ &\Leftrightarrow\ 2^{\frac{1}{x'}} = \frac{6}{4} \\ &\Leftrightarrow\ 2 = \left(\frac{3}{2}\right)^{x'} \end{aligned} \tag{4.11}$$

Desde que

$$\left(\frac{3}{2}\right)^1 = 1,5 \quad \text{e} \quad \left(\frac{3}{2}\right)^2 = 2,25,$$

então

$$\left(\frac{3}{2}\right)^1 < \left(\frac{3}{2}\right)^{x'} < \left(\frac{3}{2}\right)^2,$$

ou seja, x' tem um valor compreendido entre 1 e 2, logo

$$x' = 1 + \frac{1}{x''}, \quad \text{onde} \quad x'' > 1 \tag{4.12}$$

Substituindo a expressão (4.12) na equação (4.11), temos

$$2 = \left(\frac{3}{2}\right)^{1+\frac{1}{x''}}$$

ou, de modo equivalentemente

$$\frac{3}{2} = \left(\frac{4}{3}\right)^{x''} \tag{4.13}$$

Como

$$\left(\frac{4}{3}\right)^1 \approx 1,33 \quad \text{e} \quad \left(\frac{4}{3}\right)^2 \approx 1,78,$$

estamos diante a desigualdade

$$\left(\frac{4}{3}\right)^1 < \left(\frac{4}{3}\right)^{x''} < \left(\frac{4}{3}\right)^2,$$

de onde conseguimos que $x'' \in (1,2)$, e assim

$$x'' = 1 + \frac{1}{x'''}, \quad \text{com} \quad x''' > 1 \tag{4.14}$$

Substituindo a expressão (4.14) na equação (4.13), conseguimos

$$\frac{3}{2} = \left(\frac{4}{3}\right)^{1+\frac{1}{x'''}}$$

que pode ser reescrito como

$$\frac{4}{3} = \left(\frac{9}{8}\right)^{x'''}.$$

Considerando os valores $x''' = 2$ e $x''' = 3$, encontramos a seguinte desigualdade

$$\left(\frac{9}{8}\right)^{2} < \left(\frac{9}{8}\right)^{x'''} < \left(\frac{9}{8}\right)^{3},$$

da qual consegue-se $x''' \in (2,3)$, daí temos que

$$x''' = 2 + \frac{1}{x^{iv}}, \qquad \text{com} \qquad x^{iv} > 1$$

Continuando dessa maneira, obtemos

$$x = 2 + \frac{1}{x'},\ x' = 1 + \frac{1}{x''},\ x'' = 1 + \frac{1}{x'''},\ x''' = 2 + \frac{1}{x^{iv}}, x^{iv} = 2 + \frac{1}{x^{v}},\ x^{v} = 3 + \frac{1}{x^{vi}}, \ldots$$

Agora, fazendo as substituições sucessivas de $x', x'', x''', \ldots$ pelos seus respectivos valores, encontramos

$$\log_2 6 = x = [2; 1, 1, 2, 2, 3, \ldots] = 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \ddots}}}$$

Para encontrar os convergentes geramos a seguinte tabela (4.3)

n	-1	0	1	2	3	4	5	6
a_n			2	1	1	2	2	3
r_n	0	1	2	3	5	13	31	106
s_n	1	0	1	1	2	5	12	41

Tabela 4.3:

Da tabela acima obtemos os primeiros convergentes dados por

$$c_1 = 2,\ \ c_2 = 3,\ \ c_3 = \frac{5}{2},\ \ c_4 = \frac{13}{5},\ \ c_5 = \frac{31}{12},\ \ c_6 = \frac{106}{41}$$

Assim, o convergente $c_6 = 2,5853658\ldots$ fornece uma boa aproximação de $\log_2 6$. Para comparação, o valor exato de $\log_2 6$ é $2,58496\ldots$. Pode-se mostrar que (ver [8]) quanto maior for o convergente, mais próximo ele estará de $\log_2 6$.

Exemplo 4.6. Usando frações contínuas calcular $\log_5\left(\dfrac{2}{3}\right)$.

Em outras palavras isso se reduz à resolver a equação

$$5^x = \frac{2}{3}. \tag{4.15}$$

Desde que $5^x < 1$, isso sugere que escolhamos $x = -y$, para algum $y \in \mathbb{R}$ e $y > 0$. Com essa escolha para x, a equação (4.15) torna-se

$$5^y = \frac{3}{2}. \tag{4.16}$$

Observe-se que, para $y = 0$ e $y = 1$, conseguimos a desigualdade

$$5^0 < 5^y < 5^1$$

logo, y está compreendido entre 0 e 1, isto é,

$$y = 0 + \frac{1}{y'} \quad \text{com} \quad y' > 1 \tag{4.17}$$

Fazendo a substituição de (4.17) na equação (4.16), chegamos a expressão

$$\left(\frac{3}{2}\right)^{y'} = 5 \tag{4.18}$$

É fácil verificar que se

$$\left(\frac{3}{2}\right)^3 = 3,375 \quad \text{e} \quad \left(\frac{3}{2}\right)^4 = 5,0625, \quad \text{então} \quad y' \in (3,4).$$

Logo, y' é escolhido como sendo

$$y' = 3 + \frac{1}{y''}, \quad \text{com} \quad y'' > 1. \tag{4.19}$$

Inserindo (4.19) na equação (4.18) e depois de um pouco de álgebra, obtemos

$$\left(\frac{40}{27}\right)^{y''} = \frac{3}{2} \tag{4.20}$$

Decorre da equação acima que $y'' \in (1,2)$, pois

$$\left(\frac{40}{27}\right)^1 < \left(\frac{40}{27}\right)^{y''} < \left(\frac{40}{27}\right)^2$$

Portanto, y'' pode ser escrito como

$$y'' = 1 + \frac{1}{y'''}, \quad \text{com} \quad y''' > 1 \tag{4.21}$$

Continuando dessa maneira, obtemos

$$y = 0 + \frac{1}{y'},\ y' = 3 + \frac{1}{y''},\ y'' = 1 + \frac{1}{y'''}, \ldots$$

Substituindo sucessivamente y', y'', $y'''\ldots$, conforme dado em (4.19) e (4.21), obtemos

$$y = 0 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{1 + \ddots}}$$

A aproximação de y pelo terceiro convergente é dado por

$$y \approx 0 + \frac{1}{3+1} = 0 + \frac{1}{4} = 0,25$$

Portanto,

$$x = -y \approx -0,25, \qquad \text{ou seja} \qquad \log_5 \frac{2}{3} \approx -0,25$$

Para comparação, o valor exato de $\log_5(2/3)$ é $-0,251929\ldots$.

4.4 Solução da equação $x^2 - ax - 1 = 0$

Um número importante de problemas retratados nos livros didáticos de nível fundamental e médio envolvem uma equação quadrática. Isto é, uma equação da forma

$$ax^2 + bx + c = 0 \tag{4.22}$$

onde a, b e c são números reais, com $a \neq 0$.

Embora a fórmula quadrática

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \tag{4.23}$$

seja muito cômoda para resolver (4.22), existem outras técnicas algébricas, como por exemplo:

- Fatoração
- Extração de raízes quadradas
- Procedimento de completar o quadrado.

Nesta seção, apresentamos uma técnica alternativa que consiste em usar frações contínuas para encontrar aproximadamente uma raiz. O procedimento será ilustrado na equação quadrática

$$x^2 - ax - 1 = 0 \tag{4.24}$$

onde $a \in \mathbb{Z}$ e $a > 0$. Esta equação, em particular, será discutida por se constituir numa aplicação simples da técnica.

Começamos por multiplicar a equação (4.24) pelo fator $\frac{1}{x}$, logo, isolando x, temos

$$x = a + \frac{1}{x},$$

de modo que

$$x = a + \cfrac{1}{a + \cfrac{1}{x}} = a + \cfrac{1}{a + \cfrac{1}{a + \ddots}}$$

Assim, a raiz positiva de qualquer equação quadrática da forma (4.24) tem expansão em fração contínua dada por

$$x = a + \cfrac{1}{a + \cfrac{1}{a + \ddots}} = [a; a, a, a, \dots]$$

Exemplo 4.7. Se $a = 1$, a raiz positiva da equação

$$x^2 - x - 1 = 0$$

tem expansão em fração contínua dada por

$$x = [1, 1, 1, \dots].$$

A sequência de convergentes de essa fração contínua

$$\frac{1}{1}, \quad \frac{2}{1}, \quad \frac{3}{2}, \quad \frac{5}{3}, \quad \frac{8}{5}, \quad \frac{13}{8}, \dots$$

aproxima-se da solução positiva $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1,6180339\dots$, obtida através de (4.23). Este número (tradicionalmente representado pele letra grega ϕ) é também conhecido como número de ouro ou proporção áurea. Ele tem varias propriedades matemáticas notáveis (ver [18]).

Exemplo 4.8. Analogamente, para $a = 2$, a equação quadrática $x^2 - 2x - 1 = 0$ tem como raiz positiva

$$x = [2, 2, 2, \dots]$$

ou equivalentemente de (4.23),

$$1 + \sqrt{2} = [2, 2, 2, \dots].$$

Os anteriores exemplos são casos especiais de um resultado geral que enuncia que as raízes reais de equações quadráticas com coeficientes inteiros têm representação em frações contínuas periódicas, do mesmo modo que os números racionais têm representação em dízimas periódicas.

5 Considerações finais

Neste trabalho, apresentou-se uma proposta de ensino dos números reais: o estudo de números racionais e irracionais associado ao estudo de frações contínuas. Essa proposta de ensino pode ser aplicada para a educação básica, com exercícios adaptados ao currículo escolar, uma vez que os cálculos utilizados em frações contínuas já estão incluídos no currículo.

Foram apresentadas aplicações ligadas as equações diofantinas lineares, logaritmos, resolução de equações quadráticas e demonstração da irracionalidade de $\sqrt{2}$. As aplicações apresentadas podem contribuir para estimular o aluno à aprendizagem matemática, promovendo reflexões sobre a importância e sua estruturação dos conteúdos.

Já as conexões entre os diversos conteúdos apresentados ampliam conceitos de maneira que o aluno possa associar um conteúdo à outros. Também foi apresentada uma relação importante entre os determinantes, frações contínuas e a constante π, que foi conduzida para uma generalização mais aplicada ao ensino superior.

Referências

[1] BREZINSKI, C. *History of Continued Fractions and Pade Approximants.* New York: Springer Verlag, 1980.

[2] CORLESS, R. Continued fractions and chaos. *Amer. Math. Monthly*, v. 99, n. 31, p. 323–334, March 1992.

[3] NIEDERREITER, H. Continued fractions for formal power series, pseudorandom numbers, and linear complexity of sequences. *Contributions to General Algebra*, n. 5, p. 221–233, 1987.

[4] CONWAY, J. H. An enumeration of knots and links. In: LEECH, J. (Ed.). *Computational problems in Abstract Algebra.* Oxford: Pergamon Press, 1967. p. 329–358.

[5] ANTOM, H.; RORRES, C. *Álgebra Linear com Aplicações.* 10. ed. Porto Alegre: Bookman, 2012.

[6] LAY, D. C. *Algebra Linear e sus Aplicações.* 4. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2013.

[7] HEFEZ, A.; FERNANDEZ, C. S. *Introdução á Álgebra Linear.* 1. ed. Rio de Janeiro: Coleção PROFMAT SBM, 2012.

[8] OLDS, C. D. *Continued Fractions.* New York: Random House, 1963.

[9] MOORE, C. G. *An introduction to continued fractions.* Washington D.C.: The National Council of Teachers of Mathematics, 1964.

[10] KHINCHIN, A. Y. *Continued Fractions.* Mineola, New York: Dover Publications, 1977.

[11] NIVEN, I.; ZUCKERMAN, H. S. *An Introduction to the Theory of Numbers.* 4. ed. New York: Wiley, 1980.

[12] WALLIS, J. *The Arithmetic of Infinitesimals (translated from Latin by J. A. Stedall).* New York: Springer-Verlag, 2004.

[13] STEDALL, J. A. Catching proteus: The collaborations of wallis and brouncker. *Notes and Records of the Royal Society of London*, v. 54, n. 3, p. 293–316, September 2000.

[14] OSLER, T. J. Lord brouncker's forgotten sequence of continued fractions for pi. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, v. 41, 2010.

[15] PERRON, O. *Die Lehre von den kettenbruchen, Band II.* Stuttgart: Teubner, 1957.

[16] BERNDT, B. *Ramanujan's Notebooks, Part II.* New York: Springer-Verlag, 1989.

[17] NETO, A. C. M. *Geometria.* Rio de Jeneiro: Coleção PROFMAT SBM, 2013.

[18] MARKOWSKY, G. Misconceptions about the golden ratio. *College Mathematics Journal*, v. 23, n. 1, p. 2–19, 1992.