UNIVERSIDADE FEDERAL DA GRANDE DOURADOS
FACULDADE DE CIÊNCIAS HUMANAS
CURSO DE PÓS GRADUAÇÃO EM PSICOLOGIA

VINÍCIUS CABRAL GONÇALVES

ANÁLISE DO PAPEL DA POSIÇÃO DA INCÓGNITA NA RESOLUÇÃO DE TAREFAS DE ADIÇÃO

Dourados
2020

VINÍCIUS CABRAL GONÇALVES

ANÁLISE DO PAPEL DA POSIÇÃO DA INCÓGNITA NA RESOLUÇÃO DE TAREFAS DE ADIÇÃO

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação em Psicologia ao exame de qualificação como parte dos requisitos para obtenção do título de mestre em Psicologia.
Orientação: Prof. Dr. Paulo Roberto Santos Ferreira

Dourados

2020

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP).

G635a Goncalves, Vinicius Cabral

ANÁLISE DO PAPEL DA POSIÇÃO DA INCÓGNITA NA RESOLUÇÃO DE TAREFAS

DE ADIÇÃO [recurso eletrônico] / Vinicius Cabral Goncalves. -- 2020.

Arquivo em formato pdf.

Orientador: Paulo Roberto dos Santos Ferreira. Coorientador: Vinícius Cabral Gonçalves.

Dissertação (Mestrado em Psicologia)-Universidade Federal da Grande Dourados, 2020. Disponível no Repositório Institucional da UFGD em:

https://portal.ufgd.edu.br/setor/biblioteca/repositorio

Ficha catalográfica elaborada automaticamente de acordo com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).

ATA DA DEFESA DE DISSERTAÇÃO DE MESTRADO APRESENTADA POR **VINÍCIUS CABRAL GONÇALVES**, ALUNO DO PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO *STRICTO SENSU* EM PSICOLOGIA, ÁREA DE CONCENTRAÇÃO "PSICOLOGIA".

Aos dezoito dias do mês de março de dois mil e vinte, às quatorze horas, em sessão pública, realizou-se na Faculdade de Ciências Humanas da Universidade Federal da Grande Dourados, a Defesa de Dissertação de Mestrado intitulada "**ANÁLISE DO PAPEL DA POSIÇÃO DA INCÓGNITA NA RESOLUÇÃO DE TAREFAS DE ADIÇÃO**" apresentada pelo mestrando **Vinícius Cabral Gonçalves**, do Programa de Pós-Graduação em Psicologia, à Banca Examinadora constituída pelos membros: Prof. Dr. Paulo Roberto dos Santos Ferreira/UFGD (presidente/orientador), Prof. Dr. Felipe Maciel dos Santos Souza/UFGD (membro titular) e Prof. Dr. Lucas Ferraz Córdova/UFMS (membro titular). Iniciados os trabalhos, a presidência deu a conhecer ao candidato e aos integrantes da Banca as normas a serem observadas na apresentação da Dissertação. Após o candidato ter apresentado a sua Dissertação, os componentes da Banca Examinadora fizeram suas arguições. Terminada a Defesa, a Banca Examinadora, em sessão secreta, passou aos trabalhos de julgamento, tendo sido o candidato considerado Aprovado, fazendo *jus* ao título de **MESTRE EM PSICOLOGIA**. Nada mais havendo a tratar, lavrou-se a presente ata, que vai assinada pelos membros da Comissão Examinadora.

Dourados, 18 de março de 2020.

Prof. Dr. Paulo Roberto dos Santos Ferreira/UFGD ____________

Prof. Dr. Felipe Maciel dos Santos Souza/UFGD ____________

Prof. Dr. Lucas Ferraz Córdova/UFMS ____________

(PARA USO EXCLUSIVO DA PROPP)

ATA HOMOLOGADA EM: __/__/____, PELA PROPP/ UFGD.

Pró-Reitoria de Ensino de Pós-Graduação e Pesquisa
Assinatura e Carimbo

AGRADECIMENTOS

Dedico esse trabalho a todos que, direta ou indiretamente, me ajudaram a realizar e finalizar com o êxito esta dissertação. Meus eternos agradecimentos aos meus pais, Rogério e Mariluza, pelo amor e carinho que me sempre me deram, dos aprendizados e orientações que levarei para a vida, e pela paciência que sempre tiveram comigo.

Agradeço também ao meu orientador Paulo, que com sua resiliência e sabedoria me instigou a buscar o melhor de mim, desde o começo da faculdade até os dias atuais.

A meu amigos, Mayara e Rivail, que juntos me ajudaram a passar da melhor forma possível pelo tortuoso caminho da pós-graduação.

E por fim, a todos os meus amigos e amigas, que me acolheram nos momentos difíceis, me ajudando a continuar a seguir em frente.

Um agradecimento especial à coordenadora Tânia e a todo corpo docente que a acompanha, pelo acolhimento e boa receptividade que tiveram desde o primeiro dia, frente ao meu projeto.

Gonçalves, V. C. (2019). *Análise do papel da incógnita na resolução de tarefas de adição*. Dissertação de mestrado, Programa de Pós-graduação em Psicologia, Dourados, MS.

Resumo

A posição da incógnita vem sendo considerada como uma variável essencial para a facilitação ou complexificação dos exercícios em matemática, a depender de onde ela se estabelece no exercício básico de matemática (A+B=C). A literatura apresenta como sendo de menor dificuldade a posição C em relação as outras duas.A presente investigação tem como foco discutir acerca da veracidade científica dos dados obtidos por pesquisas acerca da posição da incógnita. Foi realizado um experimento com 11 crianças de 6 a 9 anos, P1 e P2 cursando o primeiro ano e P3, P4, P5, P6, P6, P7, P8, P9, P10 e P11 o 3 ano. Foram programados 108 exercícios aritméticos de soma simples (com 3 elementos), divididos em 3 blocos cada um contendo 36 questões. Cada bloco tinha a incógnita em um local diferente. Primeiro foi realizada a linha de base, seguida de um treino e novamente teste para averiguar aprendizagem. Os resultados demonstraram que houve um aumento no número de acertos pelos indivíduos após os treinos propostos. O aumento se apresentou como bem significativo para os participantes P1,, P2 e P9. Apesar dos resultados não serem suficientemente sólidos para firmar uma validação clara das hipóteses elencadas, é visível que o estudo obteve resultados que colocam em questionamento os pressupostos vigentes ate o momento na literatura da área de “posição da incógnita”.

Palavras-chave: Matemática; Resolução de problemas; Ensino Fundamental; Adição; Posição da incógnita.

Gonçalves, V. C. (2019). Analysis of the role of unknowns in solving addition tasks.Master's thesis, Graduate Program in Psychology, Dourados, MS.

Abstract

The position of the unknown has been considered as an essential variable to facilitate or complex exercises in mathematics, depending on where it is established in the basic exercise of mathematics (A + B = C). The literature presents position C as having less difficulty in relation to the other two. The present investigation focuses on discussing the scientific veracity of the data obtained by research on the position of the unknown. An experiment was carried out with 11 children from 6 to 9 years old, P1 and P2 attending the first year and P3, P4, P5, P6, P6, P7, P8, P9, P10 and P11 the third year. 108 simple sum arithmetic exercises (with 3 elements) were programmed, divided into 3 blocks each containing 36 questions. Each block had the unknown in a different location. First, the baseline was carried out, followed by training and again testing to verify learning. The results showed that there was an increase in the number of responses by the individuals after the proposed training. The increase was shown to be very significant for participants P1, P2 and P9. Although, the results are not sufficiently solid to establish a lear validation of the listed hypotheses, it’s visible that the experiment has obtained results that call into question the assumptions prevailing so far in the literature in the area of “position of the unknown set”.

Keyword: Mathematics; Problem solving; Addition; Elementary School; Position of the unknowing set.

Sumário

Introdução

O estudo do comportamento aritmético tem levado a importantes *insights* a respeito do papel que processos comportamentais básicos desempenham no estabelecimento do repertório exibido na resolução de cálculos complexos, elaboração de estimativas, porcentagens e outras tarefas matemáticas comuns no meio acadêmico e fora dele (Drachenberg, 1973; Green, 1993; Assis, Miccione, Nunes, 2010; Iéga e Haydu, 2015; Lorena, Castro-Caneguim & Carmo, 2013). E, dentre os comportamentos aritméticos que ainda apresentam variáveis que precisam ser investigadas, destaca-se a resolução de equações com incógnitas, em especial a se considerar a sua aplicabilidade em tarefas de grande importância para o futuro profissional dos aprendizes.

No ensino da matemática, criaram-se diversas linhas de investigação, com uma quantidade considerável de estudos que trataram de importantes temas incluídos na área, tais como: comportamento conceitual numérico (Carmo, 2004); contagem (Prado, 2008); ordenação (Henklain & Carmo, 2013); conceito de quantidade (Prado & de Rose, 1999); soma e subtração (Haydu, Costa & Pullin, 2006); ensino de relações entre fração e decimal de numéricos racionais (Lynch & Curvo, 1995) e; habilidades monetárias (Mendes, 2012; Rossit & Ferreira, 2003).

No desenvolvimento dessas habilidades, a utilização de técnicas e metodologias de ensino para o aprimoramento da aprendizagem em matemática é o foco de diversas pesquisas (Drachenberg, 1973; Melo, Hana & Carmo, 2014, Iégas & Haydu, 2015; Araújo & Ferreira, 2008), com o objetivo de potencializar a obtenção e enriquecimento desse tipo de repertório.

E dentre os vários pontos de enfoque dessas pesquisas, a posição da incógnita vem sendo uma delas. Com pesquisadores como Rosenthal e Resnick (1974), Hiebert (1982), Carpenter e Moser (1983), que estudaram o efeito que determinadas variações de exercícios tem sobre a probabilidade dos aprendizes solucionarem adequadamente os problemas de aritmética básica, ou exercícios comumente usados para ensino das quatro operações básicas (A*B=?; A*?=C; ?*B=C).

Porém, a questão do histórico de reforço focalizada geralmente apenas uma forma de ensino (no caso A+B=?, sendo "?"a incógnita) coloca em cheque a fidedignidade da afirmação de que a posição da incógnita na primeira posição e na segunda seja mais difícil de resolver do que a terceira posição (Hiebert, 1982; Rosenthal &Resnick, 1974; Skemp, 1971; Haydu, Et. All, 1997).

Essa proposição pode ser vista na discussão em Sá e Fossa (2008). Estes, após articularem sobre o que a literatura apresentava acerca dos estudos de controle das características que aumentavam a probabilidade dos indivíduos de acertarem mais exercícios algébricos e aritméticos, argumentam que algumas destas características, em especial a posição da incógnita, "são apresentadas, normalmente, após o ensino de cada uma das operações fundamentais" ou seja, apenas após um ensino anterior, e "que essas são apresentadas com grande apelo ao seu significado semântico, não destacando as relações entre as operações" (p.269), no caso, voltando-se a estrutura do exercício ao invés da relação dele com o que já tinha sido ensinado anteriormente. Ou seja, esse efeito pode ser justificado através de um histórico padronizado de hierarquia de exercícios.

Essa análise corrobora com a visão analítico comportamental, segundo a qual uma vez eu a origem do comportamento aprendido não advém de origem filogenética atraves da seleção natural, os quais nosso antepassados passaram, este existe por uma historia de contingências reforçadoras. Assim, todo repertório matemático de um indivíduo tem sua origem ou ontogenética ou cultural (Skinner, 1969).

Rosenhal e Resnick (1974) e Hielbert (1982) já buscam explicar esse evento (crianças nos primeiros anos de treino em matemática, acertarem mais na posição C do que na posição A e B) através das possíveis estratégias de resolução de problemas que são mais comuns entre as crianças nos primeiros anos de alfabetização.

Muitas destas estratégias são voltadas para resolução de exercícios aritméticos simples (Sá & Fossa 2008), como exemplo, o uso de objetos físicos para representar o problema (Hielbert, 1982). Estes tipos de estratégias muitas vezes não levam à solução correta quando utilizadas par resolver exercícios cujas incógnitas estão no começo ou no meio da equação (p.347).

Mas essa análise se mostra questionável quando novamente pensamos no histórico das crianças que participaram desses experimentos. A crítica pesa ainda mais quando, em experimentos posteriores (Skemp, 1971; Capovilla Et al., 1997; Haydu Et. al., 2001; Iégas, 2003; Haydu, Costa &Pullin, 2006), modifica-se topograficamente exercícios através do uso da imagem de uma balança, ao invés de números ou orações escritas, e os resultados apresentam um maior acerto de questões com a incógnita em A e B.

Com essa crítica colocada em análise, podemos observar o histórico das pesquisas voltadas a analisar esse tipo de controle de estímulos. Para isso, realizou-se uma pesquisa de cunho bibliográfico na literatura da área. Buscou-se artigos nos periódicos de pesquisas, e após elencar os quais continham o tema “posição da incógnita”, “repertório matemático” e “aprendizagem em matemática”, foram selecionados os artigos e autores mais citados. Assim, os artigos foram analisados e filtrados para aqueles que mais se aproximavam do debate acerca de “posição da incógnita”.

O sistema de busca utilizado foi a Plataforma Sciello e o portal.periódicos. CAPES. A pesquisa foi realizada com as palavras-chave “posição da incógnita”, “resolução de problemas”, “repertório matemático”, “aprendizagem em matemática” e “problemas de soma e subtração”. Foram encontrados dois artigos.

Destes foram analisadas as referências bibliográficas, em que foram elencados os artigos que mais condiziam com o tema proposto. O resultado foi de 40 artigos sobre o tema. Filtraram-se os que mais apareciam como referência na área para a produção da análise. Esta foi dividida em dois blocos: Variáveis no âmbito da pré-escolaridade e posição da incógnita. A primeira foi criada com o objetivo de apresentar o histórico de aprendizagem anterior ao ensino formal escolar de aritmética.

Variáveis no âmbito da pré-escolaridade

Nessa análise, os exercícios básicos de soma, subtração, multiplicação e divisão empregadas no ensino de matemática para as crianças nas séries do fundamental e pré, utilizam um modelo de três elementos ligados por um símbolo, que define a operação, e o sinal de igual nos espaçamentos entre eles. Os elementos se constituem de números e um deles é a incógnita a ser estudada.

Qualquer um dos três elementos pode ser a incógnita, seja no começo da operação (?+B=C), no meio (A+?=C) ou no final (A+B=?). A literatura encontrada (Rosenthal & Resnick, 1974; Carpenter, 1984; Heinklain, 2012) descreve que os exercícios cuja incógnita se apresenta no final tendem a ser mais facilmente resolvidos pelas crianças.

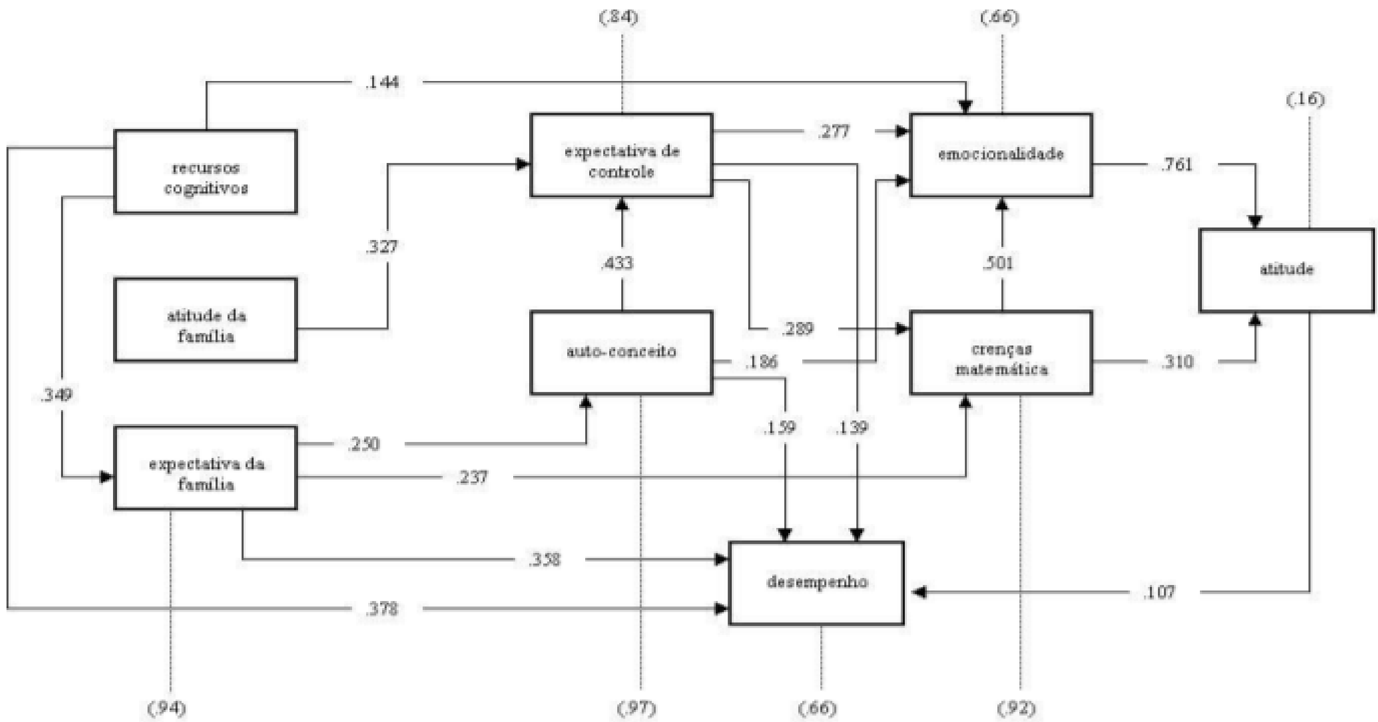
Refinando a crítica feita em Sá e Fossa (2008), o que se propõe é entender o estudo das variáveis que influenciam a aquisição do repertório matemático desde antes do treino escolar, como modo de nos deixar sensíveis à ideia de que, não só a história pré-escolar do individuo é relevante, como os primeiros contatos que este terá com a matemática, por meio de treinos e exercícios, e isso determinará muito do que ele terá mais chances de tem uma boa media de acertos.

Esse processo se inicia desde muito cedo, no próprio ambiente familiar. Loos-Santa’ana e De Brito (2017) estudou o papel dos aspectos cognitivos, familiares e sociais como determinantes da potencialidade da aprendizagem. No estudo, foram aplicadas seis escalas em 94 alunos de 3ª, 5ª, e 7ª séries do Ensino Fundamental, com idades variando entre nove e quatorze anos, e em 144 pais (77 mães e 67 pais) destes mesmos alunos, totalizando 238 participantes. Quatro escalas foram destinadas aos alunos e as outras duas para os pais. Os dados coletados foram explorados separadamente, em análises univariadas, antes de serem transformados em *input* para o mapeamento acerca dos estímulos e respostas investigados e suas correlações estatísticas: o *pathanalysis* (p.599).

Criado o diagrama, analisam-se as variáveis nomeadas e as relações entre elas, demonstradas pelas linhas que as conectam, e o número seria a relevância da relação entre as mesmas. Uma correlação relevante em especial seria aquela entre "expectativa da família" e "recursos cognitivos" para com o desempenho (3.78 e 3.58 respectivamente) (Figura 1).

Figura 1

Diagrama representativo da relação estrutural entre as principais variáveis do estudo, com path-coeficientes.



Nota: Fonte recuperado de "*Atitude e Desempenho em Matemática, Crenças Autorreferenciadas e Família: uma path-analysis*" de Loos-sant'ana, H.; de Brito, M. R. F.2017.

Sperafico (2015) buscou uma relação entre a competência cognitiva e o desempenho na resolução de problemas com equações algébricas do 1° grau. O autor do experimento define a competência cognitiva como a "capacidade de um indivíduo de se envolver em processamento cognitivo para compreender e resolver problemas em que um método de solução não é imediatamente disponível” (p. 336).

O estudo correlacional envolveu 38 estudantes brasileiros, 16 meninos e 22 meninas do 8º ano de uma escola pública que tiveram a frequência inferior a 75% e percentual interior abaixo de 20 no teste não verbal de inteligência (R-1).

Foram aplicados dois testes: WASI e TRPEA, o primeiro para medir a competência cognitiva, e o segundo para identificar domínio do indivíduo sobre o conteúdo de equações de 1º grau (y=ax+b). Os resultados dos dois testes apresentam correlação positiva. O primeiro sendo usado para separar os participantes em dois grupos: os com alta competência cognitiva (Grupo 1), o outro, os de baixa competência cognitiva (Grupo2). Esta divisão feita de acordo com a média de acertos.

Na análise dos resultados de cada grupo, na questão de diferença de desempenho entre os dois testes, verificou-se que o Grupo 1 teve um desempenho mais predominantemente homogêneo, enquanto o Grupo 2 teve um desempenho heterogêneo. De uma média de três pontos de um grupo para o outro, os dados corroboram com a hipótese de relação de capacidade de resolução de problemas com desempenho cognitivo (Sperafico, 2015).

Outros experimentos que demonstram a relevância dos fatores cognitivos da criança como importantes para a resolução de problemas se apresentam em estudos acerca do ensino para indivíduos com desenvolvimento atípico. Em Garcia, Arnte e Royos (2017), foram estudados: o ensino do conceito de número, utilizando procedimento de treino gradual, e estímulos de um grupo de três numerais, em tarefas de escolha de acordo com o modelo (do inglês *match-to-sample*, MTS) computadorizado para a formação das classes de 'numeral' e 'quantidade', relacionadas entre si.

Os resultados mostraram que o procedimento foi eficaz para o ensino a todos os três alunos com Transtorno de Espectro Autista (TEA) de oito a doze anos de idade. Esses estudos veem como os primeiros anos ou o desenvolvimento pré-escolar das crianças podem influenciar na eficácia do aprendizado em matemática quanto na maneira como o individuo irá adquirir esse aprendizado.

Na busca por operacionalizar esses termos, diversas pesquisas foram realizadas. Baterias de testes já são utilizadas para avaliar as “habilidades numéricas básicas”, essenciais para a aquisição de um repertório básico de matemática (bateria Fioraneli, Castro-Caneguim e Carmo, 2011; Henklain, Gualberto e Carmo, 2018).

Posição da incógnita

Estudos da área se iniciaram na década de 60 e 70, buscando compreender a natureza das resoluções algébricas (Suppes, Hyman, & Jerman, 1967; Suppes & Groen, 1967; Hively, Patterson & Page, 1968; Huttenlocher & Weiner, 1971; Peterson, & Aller, 1971; Groen, & Parkman 1972; Groen & Poll, 1973), e com o foco em facilitar o ensino.

Nos estudos de controle de estímulos na composição dos enunciados de problemas matemáticos, surgiu a área de estudos sobre a posição da incógnita, esta sendo o aumento ou a diminuição do numero de acertos a depender da posição da incógnita do problema, ou seja, quais estruturas de exercícios obteriam mais acertos pelos indivíduos.

Um dês estudos famosos acerca do tema foi Rosenthal e Resnick (1974). Este verificou quatro hipóteses: 1- existem mais erros na ordem inversa de menção do que em ordem antecipada de menção (perguntas em ordem cronológicas inversas são mais complicadas); 2- para problemas resolvidos corretamente, os problemas de ordem inversa são mais douradoras na solução do que problemas de ordem futura; 3- problemas de sentença linguística em que o conjunto desconhecido é o conjunto inicial são mais difíceis de resolver do que problemas de sentença linguística em que o conjunto desconhecido está no final; 4- nos problemas resolvidos corretamente, os problemas cuja incógnita se apresenta no começo da sentença têm tempos de solução mais longos do que os com incógnita no final (p. 818-819).

Participaram do experimento 63 crianças, sendo este realizado em duas replicações, uma com 29 crianças e a outra com 34. O procedimento se baseou nos participantes responderem cinco blocos randomizados de 20 problemas aritméticos de formato de texto, para se familiarizarem com o experimento. No teste, os participantes responderam 32 perguntas da mesma natureza do pré-teste.

Rosenthal e Resnick (1974) aplicaram três tipos de exercícios, com variações em: a ordem das menções (*order of mention*), a posição da incógnita (*identity of the unknown set*); e o tipo de verbo (type of verb). O objetivo era averiguar se os dados corroborariam com as hipóteses assinaladas. Uma observação interessante é que nesse experimento, não se propõe a possibilidade da incógnita ser no meio da sentença, apenas a dividindo em começo e fim.

Os resultados apresentam evidências que validam três das quatro hipóteses levantadas: a 1, 3 e 4. Os dados não apresentaram relação significativamente relevante para que a hipótese número 2 (para problemas resolvidos corretamente, os problemas de ordem inversa tempos mais longos de solução do que problemas de ordem futura) se sustentasse.

Apesar de a sessão de discussão do artigo descrever o controle de uma multiplicidade de importantes variáveis, como a latência da resposta dos participantes a cada exercício, além de um rigoroso controle experimental nos equipamentos usados, em nenhum momento o histórico dos participantes foi mencionado, apenas que eram estudantes da terceira série de escolas públicas americanas "predominantemente de famílias de classe trabalhadoras" (p.819).

Hiebert (1982) é outro experimento no qual os dados históricos dos participantes não são mencionados, exceto que são da primeira série. Este focou mais precisamente em analisar o efeito da ordem da posição da incógnita (*identity of the unknown set*). 47 crianças do ensino fundamental foram selecionadas para realizar tarefas com numerais menores de 10, de subtração e adição, com seis problemas verbais com estrutura semântica parecida (três de subtração e três de adição), com variações nas posições da incógnita. Na parte dos testes, as crianças podiam usar cubos para ajudar a pensar e resolver o problema.

Na análise dos resultados, foram elencadas diversas estratégias que as crianças apresentaram, utilizando ou não os materiais (cubos) disponibilizados. Mais da metade das crianças utilizaram os cubos para resolver quando a incógnita estava na última posição. Esse número caiu para 40% na posição do meio e para 18% na primeira posição. Isso sugere que o local onde está a incógnita é importante para a criança modelar uma resolução de problemas.

O trabalho de Carpenter (1984) reafirma essa proposta. Sua pesquisa consistiu em um experimento de *followup* de três anos com 88 crianças do fundamental de três escolas diferentes, o qual o experimento buscava analisar as estratégias mais utilizadas por estas no desenvolvimento do seu repertório matemático. As estratégias analisadas foram dez: contagem por todos, contagem pelo primeiro, contagem pelo maior, relembrar, fatos derivados, por separação, por adição, modelo, contagem pelo menor, contado pela sequência dada, destas, cinco eram resoluções de problemas de adição e cinco de subtração. Os tipos de exercícios foram seis: junção, separação, combinação (combinação de adição e de subtração), comparação e juntar o aditivo faltante.

Seus resultados sugerem que, além de não haver uma evolução das estratégias mais simples para as mais complexas e muito menos uma consistência na utilização das mesmas, a maioria das crianças iniciou com estratégias mais complexas e terminaram utilizando a mais básicas.

Apesar de ao longo do experimento não ser analisado diretamente com a posição da incógnita, uma vez que os exercícios eram todos escritos ou vocais, e o foco era com relação às estratégias utilizadas, podemos perceber pela natureza dos tipos de exercícios que a posição da incógnita é utilizada, como nos exercícios de "juntar o aditivo faltante". Segundo a análise dos dados por Carpenter (1984), esse tipo de exercício exigia um repertório de resolução de problemas de adição (p.192-193).

E, mais tarde, no experimento em Carpenter, Moser e Bebout (1988), é sustentada a hipótese da dificuldade das crianças de transformarem questões aritméticas (utilização de números e símbolos matematicos) em problemas sintáticos (uso de palavras e sentenças escritas). Tendo 63 participantes, 22 da primeira série e 41 da segunda, a pesquisa dividiu-se randomicamente em dois grupos, configurando ambos em dois dias: o primeiro de treino e o segundo de aplicação. Cada um teve uma instrução diferente. O primeiro grupo teve o treino com todas as formas de incógnitas, e o segundo com apenas a incógnita na posição C.

Os resultados demonstraram que as crianças do grupo 1, tanto da primeira série como da segunda série, tiveram um maior acerto nos diferentes tipos de estruturas semânticas de questões escritas. Isso indica que o ensino de diferentes formas de posições da incógnita diversifica e torna mais fácil a resolução de problemas reais a se comparar em apenas ensinar o conteúdo pela posição C.

Todos esses experimentos anteriormente descritos são os mais citados nas referências bibliográficas dos artigos que foram pesquisados na revisão bibliográfica. São citados em quase todos os experimentos, de um certo modo guiando a metodologia adotada por muitos. E nenhum se preocupou em utilizar algum tipo de linha de base nos participantes dos experimentos (exceto de eles saberem compreender frases).

Também percebemos que apenas estes experimentos analisam se a posição da incógnita é uma variável importante. Experimentos posteriores tiveram o foco de analisar o quanto essa variável influencia na dificuldade de resolução dos problemas aritméticos, já considerando a mesma como um constructo a ser trabalhado (Haydu ET. al., 2001, 2010; Henkain, 2012).

Capovilla, Capovilla & Haydu (1997) avaliou o efeito das diferentes posições em incógnitas em problemas matemáticos. Buscou, para além das incógnitas, pesquisar a hipótese de Hayes (1986) segundo a qual a resolução de problemas teria natureza verbal, assim falar em voz alta sobre seus passos para resolver o problema poderia ajudar na resolução do processo (Skinner, 1969).

O experimento contou com a participação de trinta e três alunos de escola pública. O material utilizado foi um caderno de exercícios contendo 30 questões de matemática, todas na forma de balança (o desenho consistia em uma balança desnivelada no lado em que estava a incógnita, e o aluno deveria buscar “equilibrar a balança”). Para testar a hipótese da verbalização, os alunos foram divididos aleatoriamente em três grupos: o primeiro deveria dizer seus passos acerca da resolução que estava realizando para o experimentador ao seu lado (descrevendo os passos); o segundo grupo deveria cantar em voz alta a canção do “atirei o pau no gato”; o terceiro e ultimo, deveria permanecer em silêncio durante a realização das atividades. Essas medidas visaram ver se, além da verbalização ajudar, a mesma pode prejudicar quando não é compativel com o problema a ser resolvido.

Os resultados mostraram que não houve uma diferença significativa, dentro da análise fatorial entre os três grupos, no número de acertos. Porém, com relação ao tempo necessário para a realização da atividade, houve uma diferença significativa entre o grupo que permaneceu em silêncio e o grupo que verbalizou respostas incompatíveis com a resolução dos problemas. Já a análise feita entre os exercícios com diferentes incógnitas, estas não apresentaram efeito em nenhum dos dois campos (tempo e número de acertos).

Assim, buscando-se aperfeiçoar a análise dessa variável (posição da incógnita), Haydu Et All (1999), realizou um experimento com crianças da segunda série de uma escola pública. Dessa vez, os problemas variaram entre três: formato de balança, formato de equação e, por último, sentença verbal. Em cada exercício, foram nomeados três tipos diferentes de incógnitas (a+b=c) e utilizados os numerais “0”, “1”, “2”, e “3”.

Os resultados sugerem que, em relação aos exercícios de balança, a posição da incógnita não teve nenhum efeito sobre as respostas, conforme comparadas estatisticamente uma com as outras ($p > 0.01$). Em relação aos exercícios de equação e sentença, houve uma diferença significativa nas posições A e B, quando comparadas com os exercícios de balança. A posição C não apresentou mudança em nenhum dos três casos. Isso leva a rever a importância do formato do exercício para a facilitação, uma vez que o modelo de balança trouxe mais respostas corretas se comparadas com os outros dois tipos.

O estudo citado foi replicado (Haydu Et. Al., 2001). Nessa replicação, participaram 86 alunos da segunda série de um colégio público em Londrina, as idades variando entre sete e onze anos. Como pré-teste, os alunos passavam por um teste de leitura (10 frases contendo perguntas com termos comuns em problemas matemáticos), no qual deveriam acertar um montante de 50% para prosseguir realizando o experimento.

O procedimento baseou-se em distribuir todos os alunos aleatoriamente a um dos três grupos, e todos receberiam o mesmo material, porém em ordens diferentes, para assim poder controlar a variável “ordem das atividades”. Todos os grupos realizariam três distintos cadernos de exercícios, cada um contendo 30 questões, destas 10 de cada posição de incógnita (a, b e c). A distinção dos cadernos era acerca da estrutura do exercício, essa seguida como no experimento anterior (sentença, balança e equação), ou seja, um caderno contendo 30 exercícios de sentença, outro com 30 de balança e o último com a mesma quantia em exercícios de equação. Para cada começo de caderno, era apresentada uma instrução aos alunos acerca de como deveria ser feito cada exercício.

Os resultados consistiram na análise das variáveis “ordem das atividades”, “posição da incógnita”, “tipo de exercício” e “números de acertos”. Acerca da primeira variável, não foi observado nenhum efeito relevante sobre as outras variáveis, ou seja, a ordem dos exercícios não influenciou um maior ou menor acerto nos mesmos.

Acerca das posições da incógnita, no geral a posição C foi a que apresentou maior frequência de acertos na forma de equação e sentença. Porém, na forma de balança, demonstrou um número de acertos menor, comparado às outras duas incógnitas.

O tipo dos exercícios (sentença, aritmético e de balança) foi um fator relevante com relação à quantidade de acertos. Nove participantes acertaram menos que 50% do teste nos três testes, treze acertaram mais de 50% do teste e 23 acertaram mais que 50% em um tipo de teste e menos que 50% nos outros dois. A outra metade (41 participantes) tiveram desempenho abaixo de 50% em um tipo de teste e acima de 50% no desempenho nos outros dois. O teste que mais apresentou resultados positivos foi o de equação e o pior desempenho foi nos exercícios de sentença.

Na relação entre o tipo do teste e a posição da incógnita, pode-se observar que houve um acentuado baixo desempenho nos exercícios de sentença com as incógnitas nas posições A e B. Dos três testes, apenas o de balança demonstrou um desempenho na incógnita C inferior as outras duas. Os outros dois, a posição C foi a que teve mais acertos.

Porém, nas discussões dos dados, os pesquisadores argumentam que não se pode inferir que a melhor posição seja a incógnita C, visto que os professores, quando vão ensinar soma e subtração, quase sempre utilizam as incógnitas na posição C. Estes apenas apontam para uma importância que a posição da incógnita tem na resolução de problemas matemáticos.

Isso leva a uma discussão acerca da necessidade da criação de uma tecnologia para auxiliar nessa dificuldade apresentada pelas crianças nos primeiros anos de ensino da matemática. Haydu, Costa e Pullin (2006) e Heinklain (2012), buscaram verificar se a equivalência de estímulos entre diferentes tipos de problemas facilita a generalização destes para problemas novos.

Haydu, Costa e Pullin (2006), realizou-se um experimento com crianças do ensino fundamental. Sete crianças que tiveram um acerto maior do que 70% no teste de leitura (pré-requisito para participar do experimento) realizaram o experimento o qual se constituiu nas fases: coletada linha de base por um pré-teste, o treino preparatório,para entender a dinâmica do experimento, e o treino das relações condicionais, um teste para avaliar as relações emergentes e, por último, um pós-teste avaliando as relações criadas com diferentes estímulos (generalização).

As diferentes posições da incógnita são apresentadas já no pré-teste, para avaliar o conhecimento prévio do aluno e são desenvolvidas durante o resto dos treinos e testes. Os resultados demonstraram um perceptível aumento e generalização dos dados (de menos que 70%, para 100% de acertos para praticamente todos os testes dos sete participantes).

Porém, a linha de base realizada nesse experimento apenas consistiu em apresentar a dificuldade do aluno de realizar atividades nas quais a incógnita não estava na posição C. E após os treinos, todos tiveram um acerto de 100% para todos os tipos de posições. Apesar de a posição da incógnita aparecer como algo determinado e já pré-estabelecido, os resultados também podem ser interpretados no sentido de que, inicialmente os participantes tinham uma dificuldade nessa questão, e logo após um fase em que essas relações foram treinadas, tanto de maneira escrita, como em forma de balança e algarismo, essa dificuldade some, e até se generaliza, como os resultados do pós-teste apresentam.

E esse problema se estende a todos os experimentos mencionados anteriormente: todos analisam a linha de base dos participantes e, uma vez que se demonstrou que na linha de base eles têm maior dificuldade, isso se torna uma prova da validação da posição da incógnita como relevante para a dificuldade do exercício. Nenhum leva em consideração que esses participantes se encontram com um histórico de ensino muito mais voltado para a descoberta da soma de dois números, do que do número que, junto com outro, resulta em um novo.

A estrutura topográfica de um exercício influencia na sua dificuldade, uma vez que quanto mais variáveis se apresentarem como sendo relevantes para a resolução, mais complexo o exercício se tornará. Mas, mudar a posição da incógnita, por mais que possa mudar a possível estratégia utilizada para resolver o problema (Hielbert, 1982), não se relaciona com a complexidade que o exercício apresenta.

Vamos a outros exemplos. Capovilla, Capovilla e Haydu (1997) realizaram três experimentos, aos quais buscavam trabalhar o modelo de balança com o software balanca-Equilíbrio (software que simula a balança de Skemp (1971) no computador). Dois experimentos foram utilizados para validar seu uso. O primeiro teve o objetivo de verificar se a utilização de uma imagem metafórica de “bomba” nas imagens das balanças ajudaria os participantes a entenderem o conceito de número negativo.

No segundo experimento, Capovila e colaboradores (1997) buscou averiguar se a dificuldade de posição da incógnita do experimento Hiebert (1982) com sentenças escritas, também ocorreria em tarefas com o software. Nesse experimento, realizado com duas crianças, os resultados deram equivalentes para as três posições. Apesar da pequena coleta (apenas dois participantes), estes resultados acabam sendo um dado interessante para se questionar a veracidade da complexidade das estruturas de treino por posição de incógnita.

O último experimento foi uma replicação do segundo, este o mais importante para trabalharmos a crítica. A proposta do experimento é considerar o software um modelo não-verbal e analisar se a mudança da posição da incógnita, dentro dessa nova estrutura de treino, seria algo influente. Seis crianças de sete anos, três meninas e três meninos, todos cursando a 1ª série. Apresentaram-se 180 questões de adição e subtração, com números positivos e negativos, com revelação na posição da incógnita nas três posições, divididas em três fases (54 exercícios de soma, 36 exercícios de subtração e 90 exercícios de ambos os anteriores, respectivamente Fase 4).

Os resultados dos exercícios de soma mostraram que as porcentagens de erros nas posições A, B e C foram, respectivamente, 23,2%, 23,2% e 9,3%. Nas análises estatísticas, usando o teste de Friedmane o teste Wilcoxon (para comparar a porcentagem de erros entre as duas). Nos resultados finais, a relevância para a posição da incógnita se mostrou significante (qui-quadrado=26,9, $p < 0,001$).

Porém, novamente a dúvida sobre a possibilidade de a dificuldade apresentada nas posições A e B serem por uma falta de histórico de treino anterior. Essa era uma hipótese. Para isso, foi realizado um experimento para avaliar se, uma vez treinados exercícios de matemática de estrutura “$a + x = c$” e “$x + b = c$”, essa dificuldade não viria a cessar.

Após a análise dos dados dos experimentos, é possível formular a seguinte hipótese: inicialmente (experimentos da década de 70-80 como de Carpenter e Hielbert), a proposta de que a posição da incógnita se mostrou como uma variável fundamentamente relevante e evidente foi formalizado de uma forma que os estudos das décadas seguintes não consideravam criticar o método adotado e o controle do histórico de aprendizagem do sujeito. Assim, os experimentos seguintes já trabalharam como sendo algo postulado, criando hipóteses sobre o motivo de esse fenômeno ocorrer (Haydu, 2009; Bryant, 2011).

Para iniciar uma proposta crítica a esse método, o ideal seria inicialmente propor hipóteses alternativas às postuladas até o momento sobre o motivo pelo qual exercícios com a incógnita no resultado final se apresentam nos dados “maiores acertos” pelos indivíduos quando comparado à posição inicial e a de mudança. Para isso, um experimento é proposto para averiguar a veracidade do que até o momento foi trabalhado.

Encontramos uma proposta interessante de experimento em Henkain (2012). No experimento, a posição da incógnita é uma variável de dificuldade dentre uma cadeia de outros três fatores dificultadores. Seu estudo trabalhava com a eficiência do uso de equivalência de estímulos para a facilitação dos exercícios. A pesquisa consistiu em dois experimentos, com oito participantes cada. Ambos buscaram identificar se a criação de classes de equivalência ajudavam a solucionar problemas de adição.

Esse estudo apresentou dados que mais uma vez reforçam a hipótese, pois além de iniciar o experimento aplicando uma linha de base, no meio do experimento existiu um treino de exercícios com incógnita A e B, com a busca de identificar se isso melhoraria o desempenho dos participantes no testes. Os resultados mostraram um aumento de quase 100% dos acertos no pré-teste para o pós-teste 3 (p.33).

Assim, além de um treino prévio das outras posições terem contribuída para a melhora da aprendizagem do aluno no geral, também demonstrou que a dificuldade apresentada muito se relaciona com o histórico de treinos desse tipo. Assim, propõe-se a criação de um experimento ao qual buscasse analisar isso de uma maneira mais criteriosa.

Objetivo

O objetivo principal da pesquisa foi:

- Analisar se há uma diferença significativa de uma topografia para a outra, na dimensão de dificuldade nas resoluções dos problemas e;

- Analisar as diferentes topografias de exercícios algébricos de soma para o ensino básico de matemática

Método

Participantes

Os participantes foram ao todo sessenta crianças de seis a dez anos (37 meninos e 23 meninas), matriculadas em uma escola do ensino básico da rede municipal cidade de Dourados-MS. Trinta participantes (18 meninos e 12 meninas) cursavam o terceiro ano, 20 participantes (13 meninos e 7 meninas) cursavam o segundo ano e 10 participantes (6 meninos e 4 meninas) cursavam o primeiro ano do ensino fundamental.

Inicialmente, propôs-se que o experimento fosse realizado com as crianças do primeiro ano do ensino fundamental. Porém, a escola demandou que o experimento fosse realizado também pela turma do segundo e terceiro anos, e que a autorização para a realização com os alunos da escola e no espaço da escola só seria fornecida quando tal exigência fosse sanada.

Inicialmente, pediu-se a autorização dos pais para participar do experimento. Apenas os 60 tiveram a autorização Assim, eles realizaram o pré-teste de linha de base com critério de erro acima de 33% para prosseguimento nos treinos e pós-testes. 60 crianças receberam autorização dos responsáveis para realizar o experimento. Destas, 11 não atingiram um escore de acertos acima de 66%, e assim foram selecionadas para continuar o experimento, nove (P3, P4, P5, P6, P7, P8, P9, P10 e P11) delas do 3º ano do fundamental e duas (P1 e P2) do primeiro ano do fundamental. Destas 11, quatro são do sexo feminino, todas do terceiro ano, e sete do sexo masculino.

Local e material

Utilizaram-se um computador portátil e um mouse, além do programa *Superlab®* para rodar o experimento. Todos os testes foram realizados dentro da sala de tecnologia nas dependências, parcialmente isolada acusticamente, pois algumas janelas apresentaram buracos e ausência de fechadura, o que permitia o som adentrar. A sala era equipada com ar condicionado e ventilador, porém apenas o primeiro era ligado, pois o segundo fazia muito barulho. O ar condicionado ficava na temperatura já estabelecida de 20 graus celcius, por este não ter opção de mudança de temperatura por um fator de estrutura elétrica. As coletas foram feitas em período de aula, sob a autorização das professoras vigentes nos devidos períodos (assim como de suas devidas substitutas).

Estímulos

Figura 2

Estímulos utilizados para composição dos modelos da pesquisa

1+1=2 / 2+1=3 / 3+1=4 / 4+1=5 / 5+1=6 / 6+1=7 / 7+1=8 / 8+1=9

1+2=3 / 2+2=4 / 3+2=5 / 4+2=6 / 5+2=7 / 6+2=8 / 7+2=9

1+3=4 / 2+3=5 / 3+3=6 / 4+3=7 / 5+3=8 / 6+3=9

1+4=5 / 2+4=6 / 3+4=7 / 4+4=8 / 5+4=9

1+5=6 / 2+5=7 / 3+5=8 / 4+5=9

1+6=7 / 2+6=8 / 3+6=9

1+7=8 / 2+7=9

1+8=9

Estímulos XBC

_+1=2 / _+1=3 / _+1=4 / _+1=5 / _+1=6 / _+1=7 / _+1=8 / _+1=9

_+2=3 / _+2=4 / _+2=5 / _+2=6 / _+2=7 / _+2=8 / _+2=9

_+3=4 / _+3=5 / _+3=6 / _+3=7 / _+3=8 / _+3=9

_+4=5 / _+4=6 / _+4=7 / _+4=8 / _+4=9

_+5=6 / _+5=7 / _+5=8 / _+5=9

_+6=7 / _+6=8 / _+6=9

_+7=8 / _+7=9

_+8=9

Estímulos AXC

1+_=2 / 2+_=3 / 3+_=4 / 4+_=5 / 5+_=6 / 6+_=7 / 7+_=8 / 8+_=9

1+_=3 / 2+_=4 / 3+_=5 / 4+_=6 / 5+_=7 / 6+_=8 / 7+_=9

1+_=4 / 2+_=5 / 3+_=6 / 4+_=7 / 5+_=8 / 6+_=9

1+_=5 / 2+_=6 / 3+_=7 / 4+_=8 / 5+_=9

1+_=6 / 2+_=7 / 3+_=8 / 4+_=9

1+_=7 / 2+_=8 / 3+_=9

1+_=8 / 2+_=9

1+_=9

Estímulos ABX

1+1=_ / 2+1=_ / 3+1=_ / 4+1=_ / 5+1=_ / 6+1=_ / 7+1=_ / 8+1=_

1+2=_ / 2+2=_ / 3+2=_ / 4+2=_ / 5+2=_ / 6+2=_ / 7+2=_

1+3=_ / 2+3=_ / 3+3=_ / 4+3=_ / 5+3=_ / 6+3=_

1+4=_ / 2+4=_ / 3+4=_ / 4+4=_ / 5+4=_

1+5=_ / 2+5=_ / 3+5=_ / 4+5=_

1+6=_ / 2+6=_ / 3+6=_

1+7=_ / 2+7=_

1+8=_

A Figura 2 apresenta os estímulos utilizados para a composição dos exercícios. A primeira matriz mostra os estímulos que foram elencados segundo os pressupostos de apenas usar exercícios de soma, com números naturais e não utilizar decimais (acima de 10) e também o numero zero. As três matrizes seguintes seriam os exercícios com suas devidas incógnitas, sendo o grupo XBC a incógnita no começo, AXC a incógnita no meio e ABX a incógnita no final.

Ao todo foram 36 estímulos utilizados, cuja estrutura topográfica se apresentava como [A + B = C], na qual os números usados eram todos naturais, não passando do número nove e sem o zero. Assim, os estímulos usados foram 1, 2, 3, 4, 5,6, 7, 8 e 9. As alternativas apresentadas para o participante também foram estas, independente da estrutura do exercício.

Procedimento

O experimento foi conduzido de maneira individual. Após o sorteio dos nomes entre os alunos e a criação da ordem de chamada, as crianças eram levadas, durante o horário de aula designado pelas professoras, para a sala de tecnologia, onde continha o computador instalado com o software do *Superlab*®.

O experimento consistia na apresentação de um estímulo modelo (Figura 2) e, após a confirmação da observação deste (clicando na barra de espaço), este sumia (esquema de atraso zero) e apareciam as possíveis respostas ao estímulo modelo. Para as emissões das respostas, foi programada a utilização exclusiva do teclado, não precisando utilizar o mouse para as fases de resposta (o mouse foi utilizado apenas pelo pesquisador para introduzir as fases do experimento). Essa abordagem foi escolhida pela maior precisão que o teclado proporciona ao comparar com o mouse.

Para passar da tela de instruções e da tela no qual aparecia o exercício algébrico a ser solucionado, o participante deveria pressionar o botão da barra de espaço contida no teclado do computador. E, para passar da tela onde se apresentavam os estímulos modelos, ele precisava pressionar o botão do teclado correspondente ao número que se considerasse como a resposta correta. Eram indicados os números da parte lateral do teclado, porém os números da parte superior do teclado também funcionavam, conforme o funcionamento do *Superlab*®.

Antes do experimento, a criança recebia uma breve instrução sobre como seria o modo de responder a tais perguntas:

"E- Você irá fazer um exercício de matemática." "Você precisa responder com bastante atenção, porque o computador (aponta para o computador) irá salvar todas as suas respostas". "Você precisa buscar ao máximo acertar as questões". "Para você passar dessas fases, deve apertar esse botão (aponta para a barra de espaço)". "Pode tentar agora!" (após o participante apertar na barra de espaço). "Muito bem, agora você conhece esse tipo de conta?" (Aponta para a tarefa. Se o participante dissesse que não, era instruído a ele que aquilo era um exercício de soma, explicando cada signo que compõe o exercício. Caso assinalado afirmativamente ignorava-se essa parte). "Então, quando você souber qual número substituir pelo ponto de interrogação para a conta ficar certa, aperte espaço (aponta para o espaço) e, em seguida, aperte o botão aqui (aponta para o teclado, na parte dos números) condizente ao número que você acha que é". "Pode fazer (aguarda a primeira resposta do participante)."

Após esta instrução, o participante iniciava o experimento. A linha de base, foi feita por todos os 60 alunos. Este consistia em 3 fases, cada uma com 36 exercícios randomizados, todos diferenciados pela posição ao qual a incógnita se apresentava (Figura 2). A cada término de uma fase, o pesquisador parava o experimento por um breve momento para introduzir a próxima fase (atividade de aproximadamente 15 segundos). Na fase seguinte, o pesquisador realizava uma pergunta: "Você percebe que mudou algo? O quê?" apenas para confirmar se a criança percebia a mudança que ocorrera.

O primeiro bloco, ou o bloco de linha de base, organizou-se em 108 exercícios randomizados, os quais foram divididos em três fases, cada um contendo 36 exercícios com os três tipos de posições de incógnitas. A primeira fase eram exercícios cuja incógnita se apresentava na posição B; a segunda fase, exercícios na posição A; e, a terceira fase com exercícios na posição C.

Acerca da escolha da ordem das estruturas semânticas na composição do experimento todo, no caso a escolha da posição B para o inicio dos treinose testes, foi escolhida dessa forma, uma vez que, apesar das análises estabelecerem a posição A e B como mais complicadas que a posição C (Hiebert, 1982; Rosenthal & Resnick, 1974; Skemp, 1971; Haydu, Et. All, 1997), as duas primeiras posições nunca foram claramente discernidas hierarquicamente a qual é a mais difícil.

Hiebert (1982) descreve a dificuldade de crianças no início do ensino do repertório matemático escolar ser maior, quando a incógnita está na última posição (no caso, C), por eles não terem uma estratégia predominante com essa posição de incógnita em exercícios em forma de sentença. Em Haydu e colaboradores (1999), na análise da porcentagem de erro na fase de exercícios de soma, os participantes tiveram uma porcentagem de erros na posição de incógnita A e B igual (23,2%); Haydu e colaboradores (2001) obteve resultados que sugerem que não houve diferenças significativas nos exercícios algébricos entre a posição A e B e Heinklain (2012) também não descreve uma clara diferença, apesar de a maioria dos participantes terem apresentado um maior acerto na posição B, além deste ter sido o utilizado nas instruções do experimento de Carpenter, Moser e Bebout (1988) (p.349).

Dado os resultados da literatura, buscou-se investigar o efeito das variáveis com a posição B, para se evitar o argumento de que, ensinando-se o mais difícil, a generalização para as duas posições "mais fáceis" seria algo esperado. Assim, a posição do meio, que apesar de não ter comprovações estatísticas de ser mais ou menos complexa, a análise feita dos dados das pesquisas (Carpenter, Moser & Bebout, 1988; Heinklain, 2012) sugere que seja uma variável intermediária, dentre as três posições possíveis em exercícios básicos de soma.

Após a finalização das três fases, o pesquisador agradecia a participação e levava a criança de volta para a sala. Após a realização da análise dos exercícios, foram selecionados para as próximas fases aqueles que apresentaram um desempenho inferior a 66% ou 1/3 do exercício. Uma vez selecionados, os participantes passavam para o bloco seguinte.

O segundo bloco continha exercícios da Fase 4 a 7. Na Fase 4, os participantes passariam pelo treino, que consistia em uma série de tarefas cuja incógnita se apresentava na posição B, em que o participante deveria responder corretamente a um conjunto sequencial de respostas. o critério era 36 acertos seguidos. Era orientado ao pesquisador que evitasse responder perguntas às quais os participantes fizessem durante o experimento.

As instruções passadas ao participante eram: "Agora o exercício vai mudar um pouco". "Agora o computador irá te indicar se você acertou ou errou o exercício". "Caso você acerte, irá aparecer uma tela azul escrito "CORRETO!" e, caso você erre, uma tela totalmente preta irá aparecer". "Você deve acertar o máximo que puder, pois o exercício vai terminar a medida que você acerta".

Na sequência do treino, as três fases seguintes eram apresentadas, sendo iguais às apresentadas na linha de base. Ou seja, primeiramente 36 exercícios com a incógnita em B, seguidos de 36 exercícios com incógnita em A e, por fim, 36 exercícios com a incógnita em

C. Após o fim da Fase 7, novamente se agradecido a participação do participante e ele era levado de volta para a sala de aula.

Antes da continuação do exercício, novamente analisavam-se os acertos feitos na fase de testes, o conjunto delas nomeado de “linha de base”, pois, se o participante acertasse acima do critério estabelecido na primeira linha de base (acima de 2/3 nas três posições), ele não retornava a realizar as atividades. O terceiro bloco teria a mesma estrutura do segundo bloco (Fase 4, 5, 6 e 7), ou seja, estruturalmente uma cópia do segundo. A diferença era que o treino dessa vez seria constituído de exercícios cuja incógnita se apresentava em A, ou no começo da sentença. O quarto e último bloco seriam novamente uma cópia do segundo, porém o treino sendo a incógnita na posição C.

Em todo fim de bloco (Bloco Linha de Base, Bloco 1, 2 e 3) os participantes retornavam à sala de aula. Eles apenas retornavam quando o critério de acerto de mais de 2/3 não fosse alcançado. O procedimento se seguiu por 15 fases, sendo organizadas em quatro blocos diferentes:

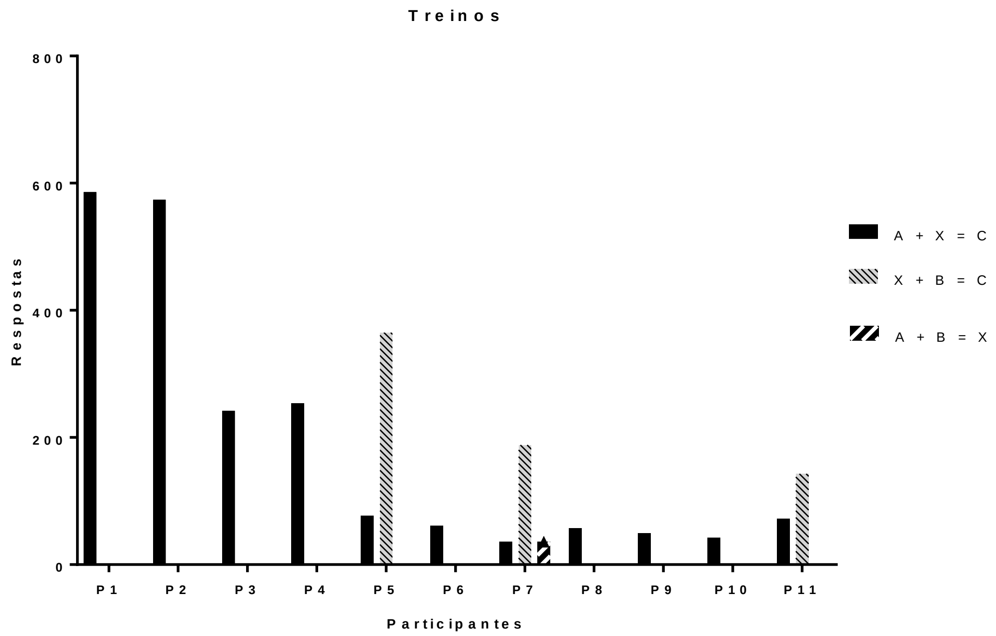
1- teste AXC
2- teste XBC
3- teste ABX
4- treino AXC
5- teste AXC
6- teste XBC
7- teste ABX
8- treino XBC
9- teste AXC
10- teste XBC
11- teste ABX
12- treino ABX
13- teste AXC
14- teste XBC
15- teste ABX

Resultados

No experimento, analisou-se se um treino de discriminação condicional para resolução de exercícios matemáticos de soma simples utilizando a incógnita na posição B teria os mesmos efeitos de um treino tradicional, no qual a variável manipulada é na posição C.

Figura 3

Número de respostas nos treinos para que os participantes atingissem o critério nos testes de Linha de Base



Na Figura 3 podemos observar o número de respostas que cada um dos participantes emitiu até atingirem o critério de acerto nos treinos (36 respostas corretas consecutivas). Podemos observar uma grande diferença do número de respostas dos participantes P1 e P2 em relação aos demais. Esta diferença pode ser relacionada ao fato de eles serem do 1º ano do fundamental e o restante do 3º ano.

O treino 1 foi realizado por todos os participantes, e ele seria o primeiro treino, no qual a incógnita se apresenta na posição B (AXC). A maioria dos participantes chegou ao critério de acertos para terminar o experimento nessa sessão, ou seja, o treino 2, no qual a incógnita se apresenta na posição A (XBC), presente apenas nos participantes P5, P7 e P11, por apenas eles terem apresentado a necessidade e um novo treino foi realizado para atingir o objetivo. Pelo mesmo motivo, apenas o participante P7 apresenta o treino três.

Uma diferença significativa pode ser observada também nos resultados de P3 e P4, que estiveram em uma média de 250 respostas. Para o restante dos participantes, houve uma média de 60 respostas antes de alcançarem o critério. Assim, podemos dividir os participantes de acordo com as respostas aos treinos, em três grupos: os de média 580, os com média 250 e os com média 60. Este último podemos dividir em dois subgrupos: os que finalizaram durante o primeiro treino (P6, P8, P9 e P10) e os que necessitaram dos treinos seguintes para concluir o trabalho (P5, P7 e P11).

Com relação ao tempo dispensado para realização das atividades, motrou-se entre os participantes uma diferença significativa: os participantes P6, P8, P9 e P10 tiveram um tempo de experimento bem curto, variando de 40 minutos a 60 minutos. Já os participantes P3 e P4 tiveram uma duração um pouco maior, variando entre 60 minutos a 80 minutos.

Os participantes P5, P7 e P11 tiveram um tempo de duração de experimento relativamente grande, porém quando diluído nos dias em que o realizaram acaba não sendo algo quantitativamente relevante. Todos os três demoraram aproximadamente 120 a 150 minutos, variando de 40 a 70 minutos por dia.

Por fim, os participantes P1 e P2 mostraram um resultado diferente de todos os outros, pois o resultado de ambos se apresentou bem parecido (574 e 586), já que tiveram participação no experimento em aproximadamente cinco horas, distribuídos em dois dias. O participante P1, no primeiro dia, após três horas de exercícios, relatou fadiga e pediu para continuar no dia seguinte. Igualmente, o participante P2 relatou cansaço após duas horas de realização do experimento. Para alcançar o critério de 36 acertos consecutivos, ambos tiveram uma média de quatro horas de treino.

É importante também salientar que, dos resultados de melhora pós-teste que ocorreram, os mais evidente são dos dois participantes do primeiro ano. Isso pode se dar tanto ao fato de que no mesmo ano tivessem estudado conteúdo de soma e subtração, ao contrário do terceiro ano que já estavam em multiplicação e divisão.

Durante a realização do teste, a maioria dos participantes buscava verbalizar suas estratégias para solucionar os problemas, muitas condizentes com os analisados por Hiebert (1982). Exceto por P9 e P11, os quais não descreveram o que utilizaram para realizar o treino. Todos os outros participantes revelaram utilizar os dedos para resolver as contas. P1 e P2, ao longo da fase de treino, descreviam diversas estratégias de resolução da tarefa proposta.

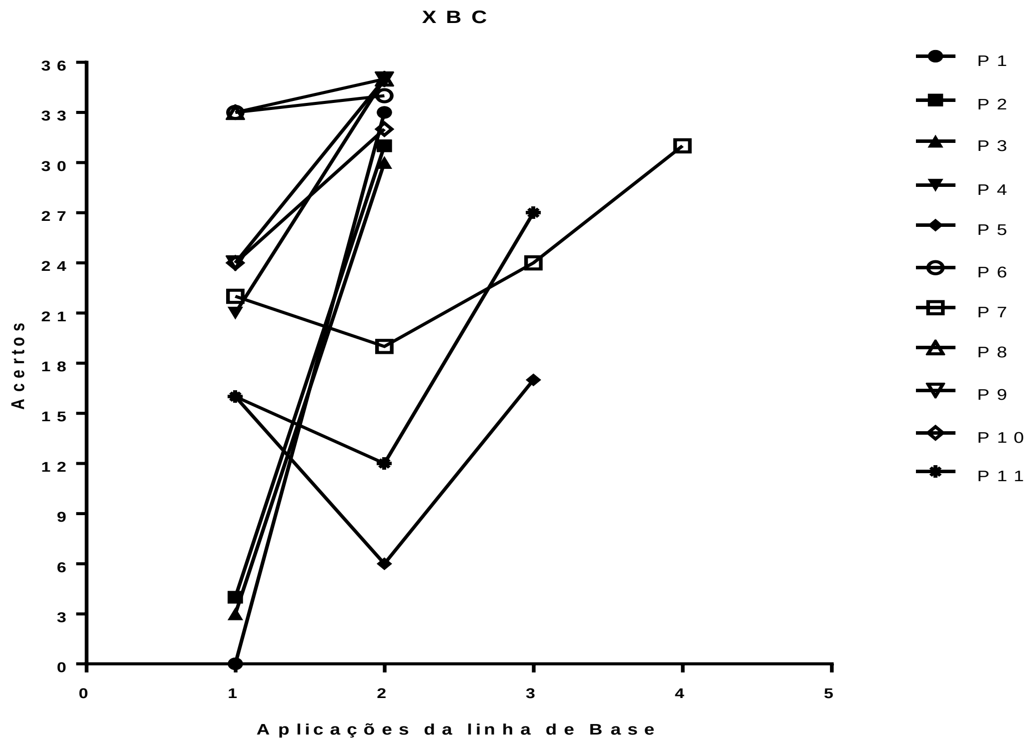


Figura 4: Gráfico referente ao número de acertos de cada participante nos exercicios de incógnita no começo (posição A) de cada aplicação de linha de base.

Na Figura 4, que representa o desempenho dos participantes antes do treino e depois do treino na estrutura XBC, é possível observar que os participantes p5, p7 e p11, ao contrário dos outros, tiveram uma perda de desempenho após o primeiro treino, em aproximadamente 60%, 15% e 25%, respectivamente. O resto do participantes tiveram um aumento de acertos. P7 foi o único a ir até o último bloco, e em sua curva podemos observar que apos primeiro treino, ela acertou menos que a sua linha de base, mas após o segundo treino acabou por aumentar seu desempenho, esse aumento se atenuando no terceiro treino.

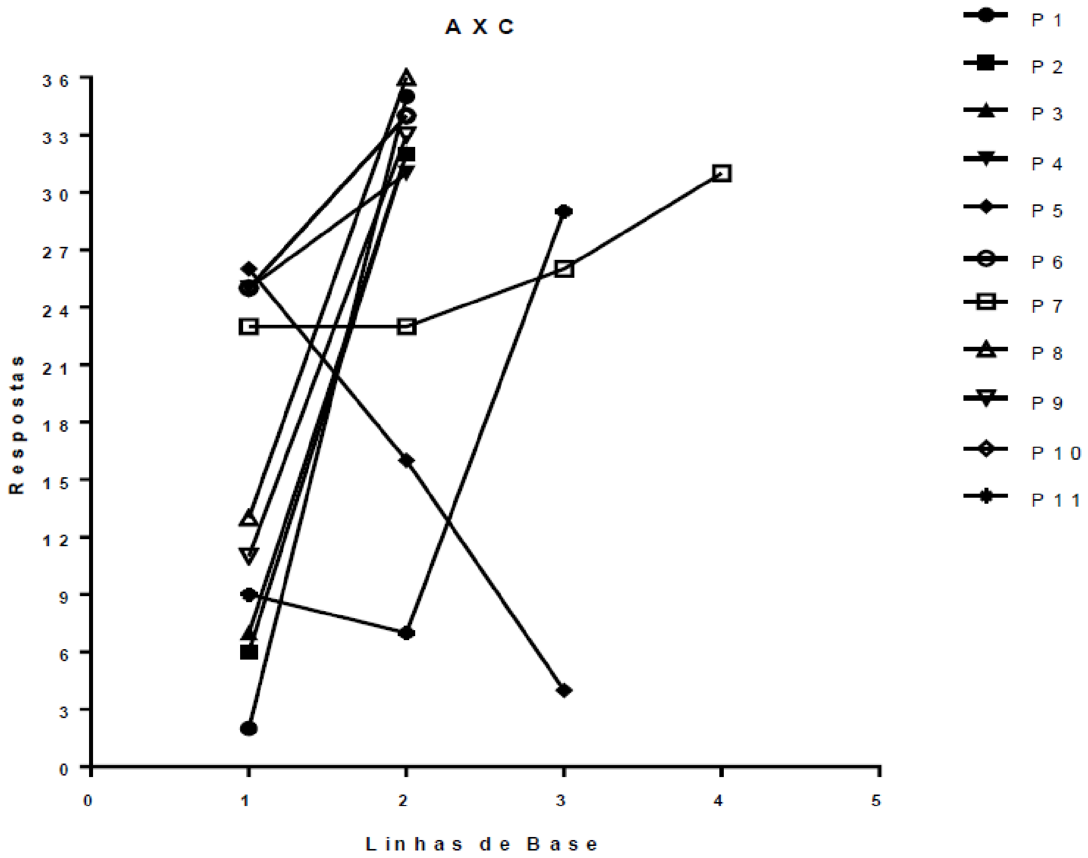


Figura 5: Gráfico referente ao número de acertos de cada participante nos exercicios de incógnita no meio (posição B) de cada aplicação de linha de base.

Na figura 5, que representa o numero de acertos que os participantes tiveram da estrutura AXC, foi a que mais teve aumento significativo dentre os participantes. P5 e P11 apresentam uma decaída de desempenho da linha de base para a segunda. O restante dos participantes tiveram um avanço significativo no número de acertos.

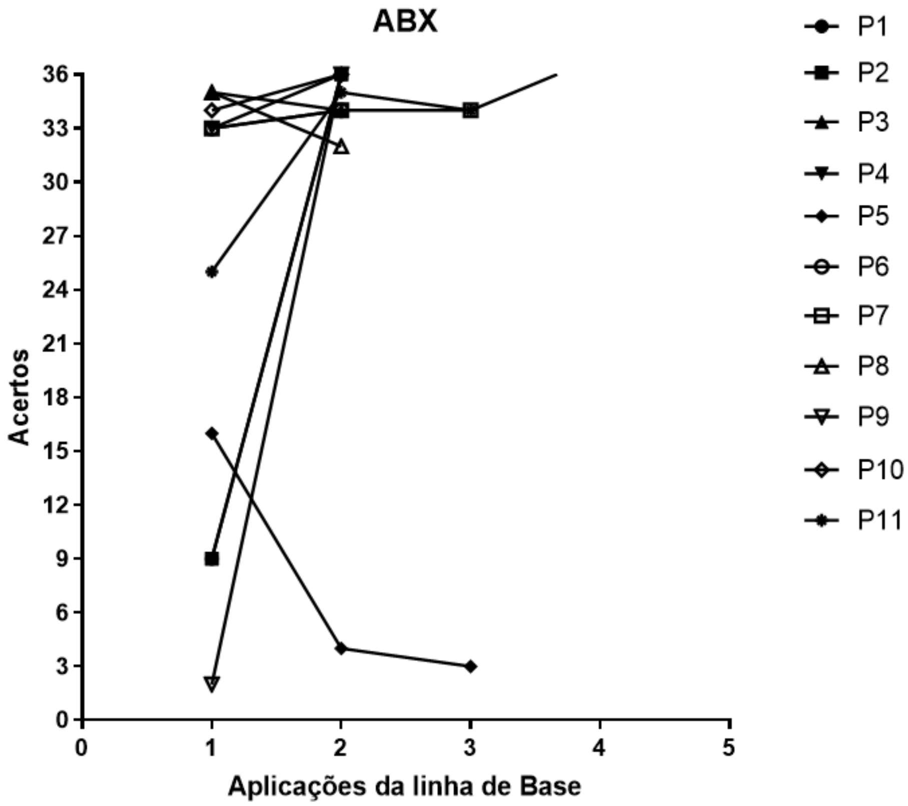


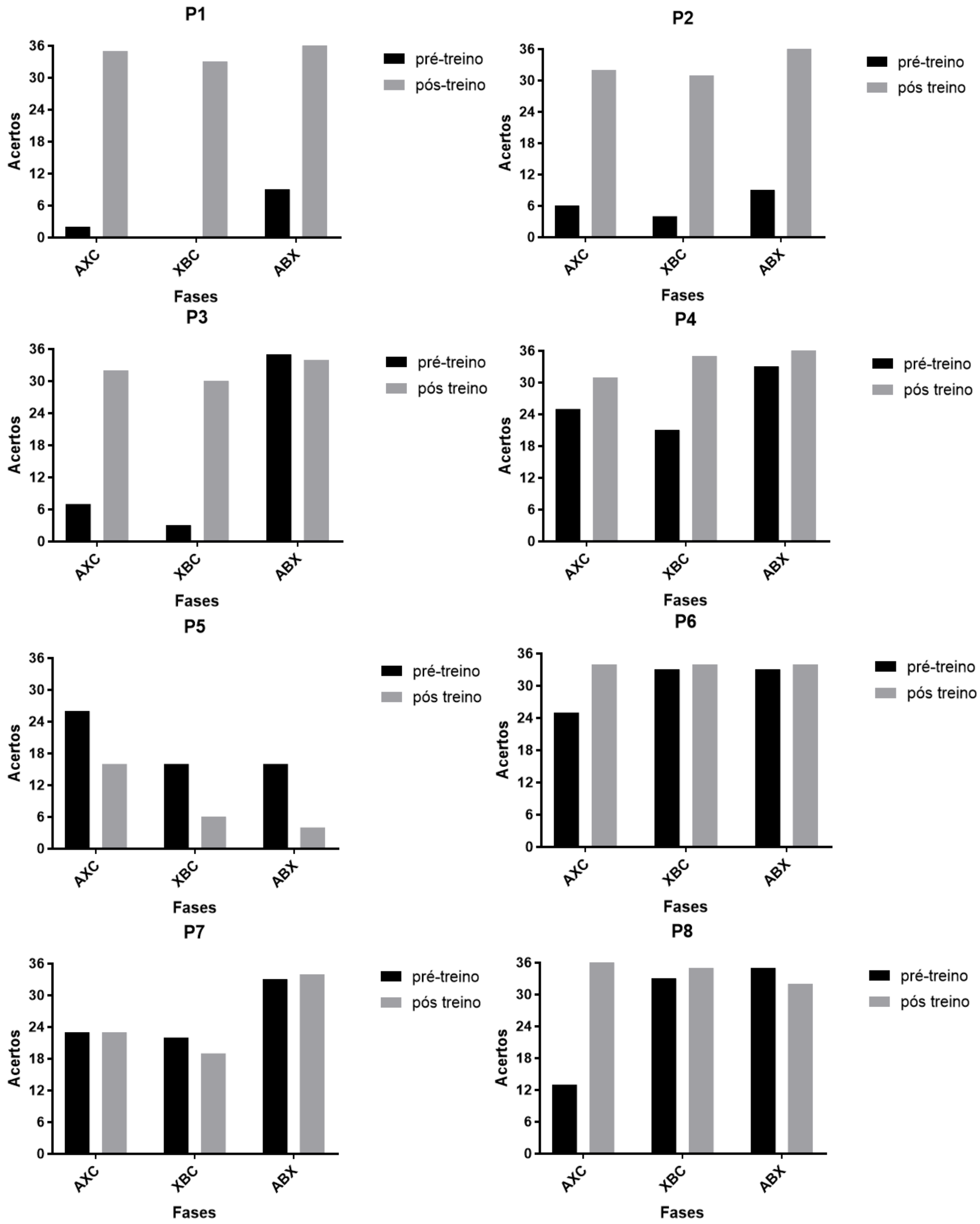
Figura 6: Gráfico referente ao número de acertos de cada participante nos exercicios de incógnita no fim (posição C) de cada aplicação de linha de base.

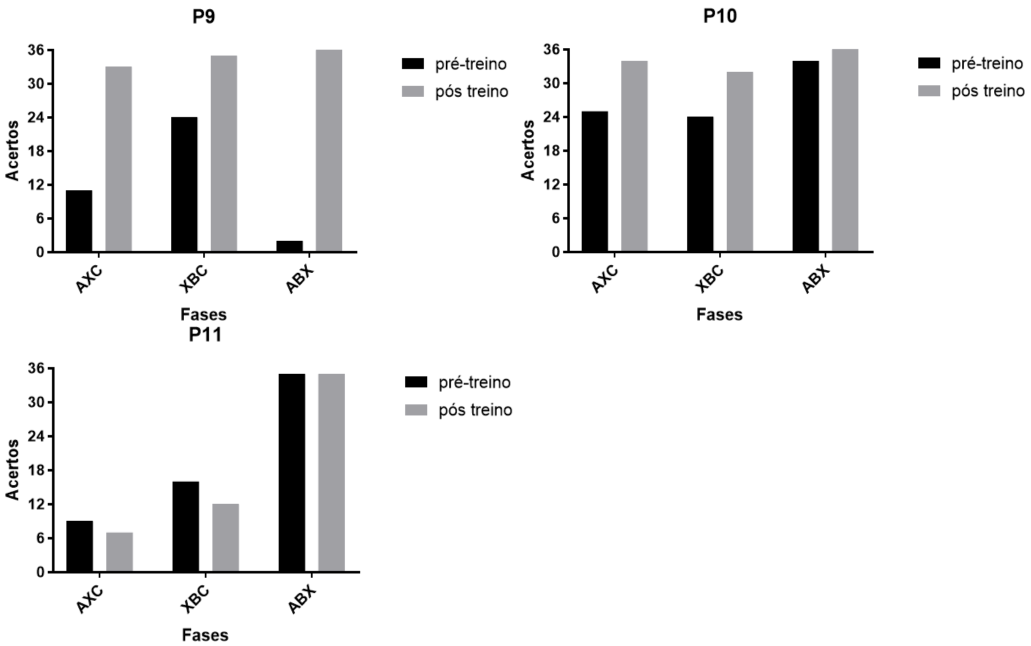
Na Figura 6, que representa o numero de acertos dos participantes na estrutura ABX, P1, P3, P4, P6, P7, P8 e P10 já demonstravam um numero elevado de acertos em sua linha de base, os quais se mentiveram, a excessão de P8, que teve uma decaida de 35 para 32 acertos. Com relação ao P2, P5, P9 e P11, eles iniciaram com um desempenho baixo e tiveram um significativo aumento após o treino. Apenas P5 mostrou uma queda nos números de acertos após o treino.

O restante dos participantes, com exceção do P5, apresentaram um aumento significativo no número de acertos após o treino. Isso ocorreu nas três posições, sugerindo uma generalização dos exercícios de uma posição para as outras. P4, P7 e P10 tiveram um aumento pequeno, se comparado a P3, P6, P8, P9 e P11.

Tabela 1

Desempenho dos participantes na primeira sessão de pré-treino, treino e pós-treino realizado, Fases 1, 2, 3, 4, 5, 6 e 7





Na Tabela 1, podemos observar os resultados das Figuras 4, 5 e 6 de maneira mais individual.

Tabela 2

Desempenho dos participantes na segunda sessão de pré-treino, treino e pós-treino realizado, Fases 5, 6, 7, 8, 9, 10 e 11

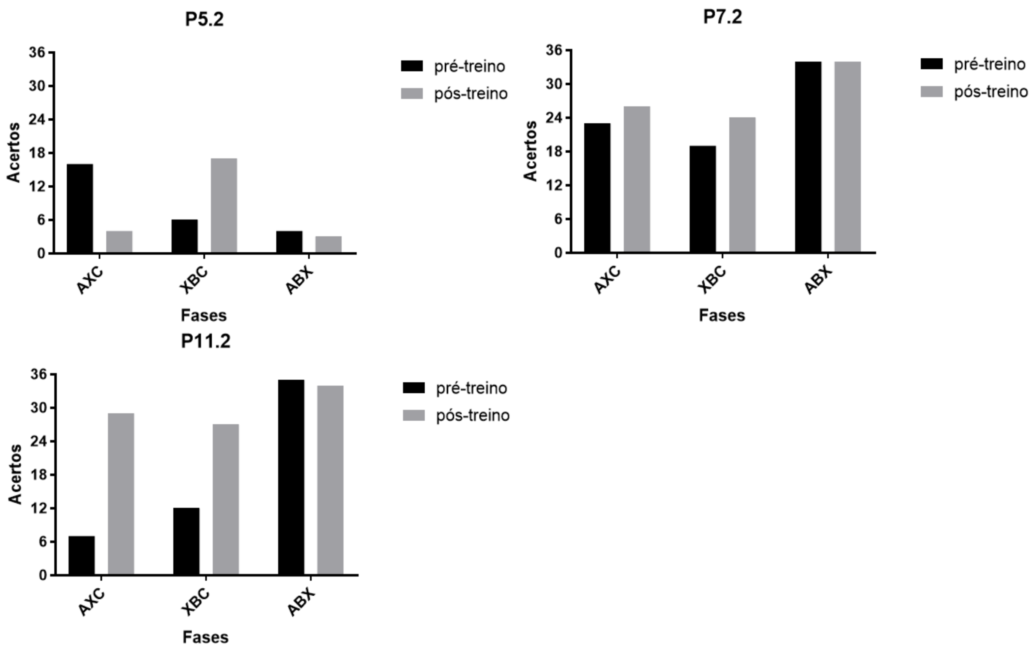
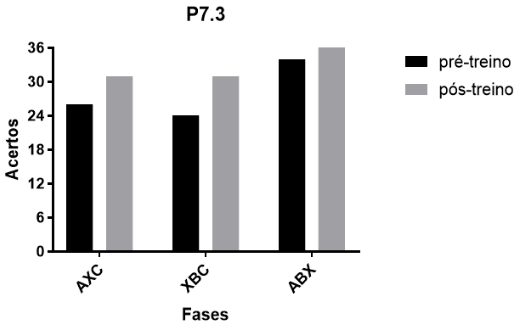


Tabela 3

Desempenho dos participantes na terceira sessão de pré-treino, treino e pós-treino realizado, Fases , 9, 10, 11, 12, 13, 14 e 15



O Participante P5 não desejou continuar o experimento, assim ele não chegou a ir pra a terceira parte, tendo assim apenass os dados referentes ao participante P7, que como pode ser observado na Tabela 3, obteve um aumento nas tres fases pos-teste.

Discussão

Essa investigação trabalhou em cima de dois objetivos: 1- Analisar se há uma diferença significativa de uma topografia para a outra, na dimensão de dificuldade nas resoluções dos problemas e; 2- Analisar as diferentes topografias de exercícios algébricos de soma para o ensino básico de matemática.

Para tornar esses objetivos mais operacionais, foi elencado tres hipóteses, estass diretamente relacionadas aos objetivos. A partir delas, verificaremos se os dados coletados sustentam os objetivo propostos. As hipóteses são:

a) As posições das incógnitas em exercícios algébricos de adição não são fundamentalmente diferentes umas das outras no que diz respeito ao treino necessário para o domínio da tarefa;

b) Treinos de exercícios algébricos simples ensinados com variações de posição da incógnita facilitariam ou tornaria igual a quantidade media de acertos em exercícicos com a incógnita em diferentes posições (A, B e C);

c) O treino em estruturas do tipo “X + B = C” ou “A + X = C” podem levar ao mesmo tipo de resultado geralmente obtido com o treino em estrutura do tipo “A + B = X”.

Na introdução, aprofundamo-nos nas variáveis que influenciam no ensino do repertório em matemática, em especial na literatura sobre o tema da posição da incógnita no controle de estímulos. Descrevemos os principais experimentos que expõem a análise de dados que sustentavam essa hipótese e propomos um diferente modo de ver esses dados.

Com relação à primeira hipótese, não há uma clara evidência para sustentar, uma vez que quase todos os participantes apresentaram melhora de desempenho na primeira bateria de treino (AXC). Os participantes P2, P5 e P9 foram os que apresentaram desempenho insatisfatório em exercícios de incógnita na posição C. P5 e P9 tiveram um desempenho igual ou menor em ABX do que nos outros tipos de exercícios (Tabela 1). Esse dado é muito interessante, uma vez que era esperado que estes apresentassem desempenho superior.

Os dados colocam em discussão a primeira hipótese, corroborando com os dados do Experimento 1 de Capovilla, Capovill e Haydu (1997), em que os resultados distinguiram-se daquilo que até então foi obtido por estudos anteriores (Hiebert, 1982; Carpenter, 1983; 1984; Rosenthal & Resnick, 1974), levando-os a acertar mais em tarefas com incógnita na posição A do que em tarefas com a incógnita na posição C. Pode-se argumentar que a maior facilidade em tarefas com a incógnita na posição C não é um dado tão generalizado a respeito do fenômeno como poderia parecer a partir de alguns dos estudos (Heinklain, 2012; Iégas & Haydu, 2015). Evidência disso são as variações identificadas, em (Haydu et. al., 2001; Capovilla, Capovilla & Haydu, 1997; Haydu, Costa & Pullin, 2006) e no presente estudo. Caberá a esse tipo de investigação, portanto, buscar as variáveis que, compondo os currículos do ensino de matemática, podem facilitar ou dificultar o aprendizado de determinados tipos de estruturas de resolução de tarefas de adição.

Tabela 4

Número de respostas corretas antes e depois do Treino 1 dos participantes P2, P5 e P9

	Pré-teste			Pós-teste		
	XBC	AXC	ABX	XBC	AXC	ABX
P2	4	6	9	31	32	36
P5	16	26	16	6	16	4
P9	24	11	2	35	33	36

Seguindo para a segunda hipótese, os dados do experimento não foram conclusivos. A idéia de apresentar um controle de linha de base (Fases 1, 2 e 3) depois a apresentação de um histórico de treino (Fase 4) e de resultados de melhora no desempenho em todas as posições, a princípio nos leva a pensar se um treino adequado para outras posições aumentaria o numero de questões corretas dos participantes. O aumento de respostas corretas ocorreu (Tabela 4).

Porém, uma critica a ser feita seria que o treino realizado após averiguação da linha de base não foi um exercício de treino para aprendizagem de um repertório novo, mas sim apenas um conjunto de estímulos que aumentaram a probabilidade dos participantes de lembrarem-se dos antigos ensinos que tiveram acerca daquele conteúdo. Mais precisamente, quando os participantes realizaram os primeiros exercícios, toda dinâmica circunscrita na realização do exercício, (olhar para o estímulo modelo, responder clicando na barra de espaço, e clicar no botão correspondente à resposta correta) era diferente do modo como eles aprenderam anteriormente no histórico escolar (professora escreve, eles copiam escrevendo no caderno). Assim, na primeira linha de base, o aluno ainda não teve a estimulação adequada para lembrar, e após o treino, a generalização aconteceu. Ou seja, nada foi efetivamente ensinado na fase de treino.

A crítica ganha maior sustentação ao verificarmos que muitos participantes realizaram poucas tentativas nas fases de treino, desproporcional ao quanto melhoraram de um momento ao outro. Da primeira linha de base para a segunda, quase todos os participantes tiveram uma melhora significativa (de 50 a 300%), em um espaço de tempo de 40 minutos para, após 60 tentativas feitas, para se chegar a uma sequência de 36 acertos).

Tabela 5

Número de respostas antes e depois do Treino 1 dos participantes P1 e P2

	Pré-teste			Pós-teste		
	XBC	AXC	ABX	XBC	ZXC	ABX
P1	0	2	9	33	35	36
P2	4	6	9	31	32	36

Apesar dos dados obtidos nesse experimento não serem suficientes para sustentar essa segunda hipótese, também não a anula, apenas deixa em evidência uma demanda maior de investigação para poder se sustentar. Experimentos como Capovilla (1999) Haydu, Costa & Pullin, (2006) e Heinklain (2012) sugerem que um ensino diferenciado, por meio de softwares de balanças, treinos em procedimentos de MTS, aumentam a eficácia do desempenho nas três posições da incógnita.

A terceira e última hipótese averiguada foi a de que, ensinando-se um tipo especifico de treino, como AXC, os exercícios dessa estrutura teriam mais acertos que os mesmos que não apresentassem essa estrutura. Os resultados não sugerem esse efeito em nenhum dos 11 participantes. Essa hipótese também tem em sua análise a configuração das críticas das duas anteriores a ela. Porém, é importante considerar que, dadas a velocidade e a pouca necessidade de treino, possivelmente os nove participantes do estudo (terceiro ano do ensino fundamental), excluídos P1 e P2, já dominavam a tarefa. E os dados dos dois participantes do primeiro ano não demonstraram esse efeito (Tabela 5).

Apesar das hipóteses propostas não terem sido validadas, é possível observar nos dados uma consistência na ideia que a historia verbal do individuo, assim como a relação desta com o controle de estímulos feito na construção dos exercícios em matemática, são variáveis essenciais para pensarmos em um desenvolvimento mais promissor de técnicas para a potencialização do aprendizado, estas talvez mais relevantes que a posição da incógnita nos exercícios.

Elencando as dificuldades apresentadas aqui, podemos mensurar que se necessita de um maior controle sobre o conhecimento prévio que o participante tem acerca de resolução de tarefas de adição. Para isso, propõe-se como sugestão para o prosseguimento da investigação, um aumento na dificuldade, através da mudança de um grupo de participantes com um histórico de ensino matemático menor, no caso de 1º ano, uma mudança de exercícios de soma para de subtração e multiplicação e o uso de números quantitativamente maiores nas três posições.

Conclusão

O experimento consistiu no treino sequencial de comportamentos matemáticos de adição em diferentes tipos de estruturas (X + B = C; A + X = C e A + B = X) e testes intercalados envolvendo todos os tipos de estruturas. A proposta consistiu em verificar, dentre os três tipos de estruturas, quais seriam as que melhor representam maior demanda de treino ou maior frequência de erros em testes de Linha de Base. Como resultado preliminar, contudo, constatou-se que os participantes do estudo (estudantes do terceiro período do Fundamental) já apresentavam em seu repertório o desempenho que o estudo se propôs ensinar. Sendo assim, os resultados não apresentam de forma clara os efeitos deste procedimento de ensino.

Como prosseguimento da investigação, propõe-se que o procedimento seja com alunos do primeiro período. Outras modificações na investigação incluíram o acréscimo de tarefas de subtração e o acréscimo de elementos a tarefas de adição, com o objetivo de tornar mais complexaa tarefa, buscando eliminar ou averiguar a hipótese de que a tarefa anteriormente empregada teria sido muito simples.

Referências

Assis, G. J. A. (2010) Aprendizagem de Relações Ordinais por meio de Treino de uma única Sequência de Estímulos, Psicologia: Teoria e Pesquisa Vol. 26 n. 4, p. 675-685.

Assis, G. J. A.; Motta, C. M.; Prado, P. S. T. (2015) Efeito de reforçadores condicionados específicos em classes ordinais em humanos. *Temas em Psicologia*, *23*, p. 211-224.

Amaral, N.; Carreia. S. (2017) A Criatividade Matemática nas Respostas de Alunos Participantes de uma Competição de Resolução de Problemas, *Bolema: Boletim de educação matemática*.

Andrade, P. E.; Do Prado, P. S. T.; Carmo, J. (2015) Das representações numéricas inatas à matemática culturalmente construída, *temas em psicologia*, 23(1), 225-242.

Assis, G. J. A. ; Miccione, M. M. ; Nunes, A. L. M. (2010) Da produção de sequências comportamentais à equivalência de estímulos sequenciais. Relações simbólicas e aprendizagem da matemática. 1ed.Santo André: ESETec, v. 1, p. 69-87.

Brito, J.; Campos, J. A. P. P.; Romanatto, M. C. (2014) Ensino da matemática a alunos com deficiência intelectual na educação de jovens e adultos *Revisa Brasileira de Educação Especial*. 20(4), 525-540.

Bryant, P. (2011) Children`s understanding and use of inversion in arithmetic. In *XIII Conferencia Interamericana de Educación Matemática*, Recife, Anais do XIII Conferencia Interamericana de Educación Matemática (pp. 1-7).

Capovilla, F. C., Capovilla, A. G. S., Haydu, V. B. (1997) Equação-equilibrio: o modelo da balança e a análise da resolução de problemas aritméticos em escolares do ensino fundamental, *Torre de Babel*, londrina, v. 4, n. 2, p. 189-215, set, 1997.

Carpenter, T. P., Moser, J. M., & Bebout, H. C. (1988). Representation of addition and subtraction word problems.*Journal for Research in Mathematics Education, 19*(4), 345-357.

Carpenter, T. P., & Moser, J. M. (1983). The acquisition of addition and subtraction concepts. In R. Lesh & M. Landau (Eds.), *The acquisition of mathematical concepts and processes* (pp. 7–44). New York: Academic Press.

Carpenter, T. P., Hiebert, J., Moser, J. M. (1983) The effect of instruction on children's solutions of addition and subtraction word problems, *educational Studies in Mathematis.*

Da Cunha, C. L., Laudares, J. B. (2017) Resolução de Problemas na Matemática Financeira para Tratamento de Questões da Educação Financeira no Ensino Médio, *Bolema: Boletim de educação matemática*.

Dalto, J. O., Haydu, V. B.(2015) Equivalência de estímulos no ensino de funções matemáticas de primeiro grau no Ensino Fundamental. *Perspectivas,* vol.6, n.2.

De Bona, A. S.; De Souza, M. T. C. C. (2015) Aulas investigativas e a construção de conceitos de matemática: um estudo a partir da teoria de Piaget, *Psicologia USP.*

De Rose, J.C., Bortoloti, R. (2007) A equivalência de estímulos como modelo do significado, Acta comportamentalia, v.15 Guadalajara.

Escobal, G., Rossit, R. A. S., Goyos, C. (2010) Aquisição de conceito de número por pessoas com deficiência intelectual. *Psicologia em Estudo, vol.15,* p. 467-475.

Fayol, M. (1992). From number to numbers in use: Solving arithmetic problems. In J. Bideaud, C. Meljac, & J. P. Fischer (Eds.), *Pathways to number: Children's developing numerical abilities* (pp. 283-306). New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.

Fossa, J. A., & Sá, P. F. (2008). Uma distinção entre problemas aritméticos e algébricos. *Revista Educação em Questão, 33*(19), 253-278.

Groen, G. J., & Parkman, J. M. (1972) A chronometrie analysis of simple addition. Psychological Review, 79, 329-343.

Groen, G. J., & Poll, M. (1973) Subtraction and the solution of open sentence problems. Journal of Experimental Child Psychology, 16, 292- 302.

Haydu, V. B. (2009). Contribuições da análise experimental do comportamento ao ensino de resolução de problemas aritméticos. In I. L. Batista, & R. F. Salvi (Orgs.), *Pós-graduação em ensino de ciências e educação matemática: Um perfil de pesquisas* (pp. 199-216). Londrina, PR: EDUEL.

Haydu, V. B., Paranzini, A. C. S., Isquierdo, G. R., Ausec, H. O., Mazzo, I. M. B., Pires, I. T. M., Souza, J., Tini, J. R., Miura, P. O. & Pimentel, N. S. (2001). Dificuldades e facilidades produzidas pela forma de apresentação de problemas aritméticos com a incógnita em diferentes posições. In M. C. Marquezine, M. A. Almeida, & E. D. O. Tanaka (Orgs.), *Perspectivas Multidisciplinares em Educação Especial II* (pp. 593-601). Londrina, PR: EDUEL.

Haydu, V. B., Pullin, E. M. M. P., Iégas, A. L. F., & Costa, L. P. (2010). Solucionar problemas aritméticos: Contribuições da análise do comportamento. In J. dos S. Carmo, & P. S. T. do Prado (Orgs.), *Relações simbólicas e aprendizagem da matemática* (pp. 159-172). Santo André, SP: ESETec.

Hayes, S. C. (1989) Rule-governed Behavior: Cognition, contingencies and instructional control. New York, NY, *PlenumPress.*

Henklain, M. H. O. (2012) Efeitos da formação de classes de equivalência sobre a solução de problemas de adição e subtração. Dissertação de mestrado, Programa de Pós-graduação em Psicologia, São Carlos, SP, 118pp

Henklain, M. H. O., Carmo, J. S. (2013) Equivalência de estímulos e redução de dificuldades na solução de problemas de adição e subtração. *Psicologia: Teoria e Pesquisa, vol.29*, p. 341-350.

Hiebert, J. (1982). The position of the unknown set and children's solutions of verbal arithmetic. *Journal for Research in MathematicsEducation*, *13*,341-349.

Hively, W. II, Patterson, H. L., & Page, S. H. (1968) A "universe-defined" system of arithmetic achievement tests. Journal of Educational Measurement, 5, 275-290

Huttenlocher, J., & Weiner, S. L. (1971) Comprehension of instructions in varying contexts. Cognitive Psychology 2, 369-385.

Iégas, A. L. F.; Haydu, V. B. (2015) Resolução de problemas aritméticos: efeitos de ensino com uma balança virtual*, temas em psicologia, 23(1, 83-96.)*.

Lorena, A. B.; Castro-caneguim, F. J.; Carmo, J. S. (2013) Habilidades numéricas básicas: Algumas contribuições da análise do comportamento, Estudos de Psicologia, vol.18, p. 439-446.1

Loos-sant'ana, H.; De Brito, M. R. F.*(*2017) Atitude e Desempenho em Matemática, Crenças Autorreferenciadas e Família: uma path-analysis, *Bolema: Boletim de educação matemática.*

Magina, S. M. P.; Spinillo, A. G.; Melo, L. M. S. (2018) A resolução de problema de produto cartesiano por alunos do ensino médio, *Educação& Realidade*, porto alegre.

Melo, R. M.; Carmo, J. S.; Hanna, E. S. (2014) Ensino Sem Erro e Aprendizagem de Discriminação, Trends in Psychology / Temas em Psicologia, Vol. 22, nº 1,p. 207-222.

Peterson, M. J., & Aller, S. (1971) Arithmetic problem solving. Journal oj Experimental Psychology, 91, 93-97.

Prado, P. S. T.; De Rose, J. C. (1999) Conceito de número: Uma contribuição da análise comportamental da cognição. *Psicologia: Teoria e Pesquisa*, *15*, p. 227-235.

Ramos, W. R.; Manrique, A. L. (2015) Comunidade de Prática de Professores que Ensinam Matemática como Espaço de Negociações de Significados sobre a Resolução de Problemas, *Bolema: Boletim de educação matemática*.

Rosenthal, D. J. A, Resnick, L. B. (1974) *Children solution processes in arithmetic word problem. Journal of educational psychology.*

Sampaio, A. A. S.; Azevedo, F. H. B., Cardoso, L. R. D., Lima, C., Pereira, M. B. R., Anderry, M. A. P. A. Uma introdução aos delineamentos experimentais de sujeito único. *Interação em psicologia 12(1): 151-164, jan.-jun. 2008.*

Santos, A. C. G.; Cameschi, C. E. (2009) Ensino de frações baseado no paradigma de equivalência de estímulos.*Revista Brasileira de Análise do Comportamento / BrazilianJournalofBehaviorAnalysis*, Vol. 5, Nº 1, p. 19-41.

Santos, A. C. G. et. Al, (2015) Equivalência De Estímulos E Instrução Programada: Formação De Classes Com Estímulos Fracionários, *itinerarius reflexionis,* vol11, n.1.

Sidman M.;Tailby W. (1982) Conditional discrimination vs. matching to sample: an expansion of the testing paradigm.*Journal of the Experimental Analysis of Behavior*, vol.37, p. 5–22.

Sidman, M. (2000) Equivalence relations and the reinforcement contingency. *Journal of the Experimental Analysis of Behavior, vol. 74*, p. 127-146.

Sidman, M.;Tailby, W. (1982) Conditional discrimination vs. matching to sample: an expansion of the testing paradigm. *Journal of the Experimental Analysis of Behavior*., vol.37,p. 5–22.

Spinillo, A. G.;Et. All. (2016) Como Professores e Futuros Professores Interpretam Erros de Alunos ao Resolverem Problemas de Estrutura Multiplicativa?*Bolema: Boletim de educação matemática*.

Sperafico, Y. L. S.; Dorneles, B. V.; Golbeert, C. S. *(*2015) Competência Cognitiva e Resolução de Problemas com Equações Algébricas do 1° Grau *Bolema: Boletim de educação matemática,.*

Silva, J. B. L. Et. All. (2015) Processamento fonológico e desempenho em aritmética: uma revisão da relevância para as dificuldades de aprendizagem *temas em psicologia*.

Suppes, P., Hyman, L., & Jerman, M. (1967) Linear structural models for response latency performance in arithmetic on computer-controlled terminals. In J. P. Hill (Ed.), Minnesota symposia on child psychology, Vol. 1. Minneapolis: University of Minnesota Press.

Suppes, P., & Groen, G. (1967) Some counting models for first grade performance on simple addition facts. In J. M. Scandura (Ed.), Research in mathematics education. Washington, D. C.: Council of Teachers of Mathematics.

Verdu, A. C. M. A.; De Souza, D. G.; Lopes J. R. (2006) Formação de classes ordinais após a aprendizagem de sequências independentes. *Estudos de Psicologia, vol.11*,p. 87-99.

Vieira, G.; Paulo, R. M.; Allevato, N. S. G. (2013) Simetria no ensino fundamental através da resolução de problemas: possibilidades para um trabalho em sala de aula, *Bolema: Boletim de educação matemática*.