

UNIVERSIDADE FEDERAL DA GRANDE DOURADOS - UFGD
FACULDADE DE ENGENHARIA - FAEN
ENGENHARIA MECÂNICA

FERNANDO TAKESHI FUKUOKA

INTRODUÇÃO AO MÉTODO DOS ELEMENTOS
ESPECTRAIS

Dourados-MS
2018

FERNANDO TAKESHI FUKUOKA

INTRODUÇÃO AO MÉTODO DOS ELEMENTOS ESPECTRAIS

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à Faculdade de Engenharia da Universidade Federal da Grande Dourados. Área de conhecimento: Acústica e Vibrações.

Prof. Dr. Sanderson Manoel da
Conceição
Orientador

Dourados-MS
2018

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP).

F961i Fukuoka, Fernando Takeshi

Introdução ao Método dos Elementos Espectrais / Fernando Takeshi
Fukuoka -- Dourados: UFGD, 2018.

79f. : il. ; 30 cm.

Orientador: Sanderson Manoel da Conceição

TCC (Graduação em Engenharia Mecânica)-Universidade Federal da
Grande Dourados

Inclui bibliografia

1. Elemento Espectral. 2. Barra Periódica. 3. Modelagem Matemática. I.
Título.

Ficha catalográfica elaborada automaticamente de acordo com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).

©Direitos reservados. Permitido a reprodução parcial desde que citada a fonte.

ERRATA

Fukuoka, Fernando Takeshi. **INTRODUÇÃO AO MÉTODO DOS ELEMENTOS ESPECTRAIS**. Monografia - Curso de Engenharia Mecânica, Universidade Federal da Grande Dourados, Dourados, 2018.



ANEXO D - AVALIAÇÃO FINAL DO TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO

Aluno: **FERNANDO TAKESHI FUKUOKA**

Título do trabalho: **Introdução ao método de elementos espectrais**
BANCA EXAMINADORA

1. Presidente (orientador):

Prof. Dr. Sanderson Manoel da Conceição, Universidade Federal da Grande Dourados - UFGD

2. Membro:

Prof. Dr. Rodrigo Borges Santos, Universidade Federal da Grande Dourados – UFGD

3. Membro:

Prof. Dr. Clivaldo de Oliveira, Universidade Federal da Grande Dourados - UFGD

De acordo com o grau final obtido pelo aluno, nós da banca examinadora, declaramos Aprovado (Aprovado/Reprovado) o aluno acima identificado, na componente curricular Trabalho de Conclusão de Curso (TCC-II) de Graduação no Curso de Engenharia Mecânica da Universidade Federal da Grande Dourados.

Dourados, 13 de dezembro de 2018.


Prof. Dr. Sanderson Manoel da Conceição


Prof. Dr. Clivaldo de Oliveira


Prof. Dr. Rodrigo Borges Santos

Dedico ao Curso, e às pessoas com quem convivi nesses espaços ao longo desses anos. A experiência de uma produção compartilhada na comunhão com meus amigos e professores, foram a melhor vivência de minha formação acadêmica.

AGRADECIMENTOS

Agradeço à Universidade, por me proporcionar um ambiente criativo e amigável para os estudos. Sou grato à cada membro do corpo docente. Agradeço também à direção e a administração da Faculdade de Engenharia pela oportunidade estendida a nós alunos.

"Minha energia é o desafio, minha motivação é o impossível, e é por isso que eu preciso ser, à força e a esmo, inabalável."

Augusto Branco

RESUMO

Com o objetivo de superar as limitações atuais na análise dinâmica de estruturas, foram desenvolvidos métodos elaborados a partir do método de elementos finitos, visto que este demonstra imprecisão em sistemas que apresentam altas frequências. Assim o estudo do método de elementos espectrais se mostra um tanto quanto pertinente, pois este apresenta vantagens como a precisão em altas frequências e baixo custo computacional durante a solução do problema. Para o trabalho presente será apresentado inicialmente o Método dos Elementos Finitos, pois assim é possível explicar o Método dos Elementos Espectrais de maneira mais simples. Os estudos se deram na forma de comparação entre os métodos apresentados, aplicando-os em uma barra periódica, estrutura estudada em uma tese de doutorado em que foi obtido resultados experimentais. Então, a validação do método é realizada pela comparação entre os dados reais e simulados. Inicialmente foi necessário um estudo aprofundado das equações que regem o método, para que então gerasse um *script* em Scilab para a obtenção da matriz espectral, que com ela se tornasse possível encontrar os gráficos de transmissibilidade da estrutura. Os resultados simulados foram semelhantes aos experimentais. O estudo na obtenção das FRFs se mostra importante, pois a variação nas frequências naturais pode indicar trincas e falhas na estrutura.

Palavras-chave: Elemento espectral. Barra periódica. Modelagem Matemática.

ABSTRACT

In order to overcome the current limitations in the dynamic analysis of structures, methods have been developed using the finite element method, since it shows imprecision in systems with high frequencies. Thus, the study of the method of spectral elements is shown as relevant, since it presents advantages such as the high frequency precision and the low computational cost during the solution of the problem. For the present work the Finite Element Method will be presented initially, because this way it is possible to explain the Method of the Spectral Elements in a simpler way. The studies were carried out in the form of a comparison between the presented methods, applying them in a periodic bar, structure studied in a doctoral thesis in which experimental results were obtained. Then, the validation of the method is performed by comparing the actual and simulated data. Initially, a detailed study of the equations governed the method was necessary, so that it would generate a *script* in Scilab to obtain the spectral matrix, so that it would be possible to find the transmissibility graphs of the structure. The simulated results were similar to the experimental results. The study in obtaining the FRFs is important because the variation in the natural frequencies can indicate cracks and faults in the structure.

Key words: Spectral element. Periodic bar. Mathematical Modeling.

LISTA DE FIGURAS

1	Um modelo bidimensional de um dente de engrenagem	34
2	Exemplificação para elementos finitos	38
3	Placa retangular do tipo Levy	44
4	Vibração de um duto uniforme inclinado	45
5	Corda axialmente móvel	46
6	Modelo para uma barra de Timoshenko como um eixo do rotor	47
7	Feixe de duas camadas elástico-elástico	48
8	Um elemento de ramificação binária - veias	49
9	Representação uniforme de dano local em um elemento de estrutura	50
10	Desenho esquemático da barra e as convenções de sinais tomadas	55
11	Desenho esquemático da barra periódica e suas dimensões	57
12	Foto da barra periódica	58
13	Desenho esquemático do procedimento experimental	58
14	Transmissibilidade: Experimental ((SANTOS, 2018)), SEM(6) e FEM(6)	63
15	Transmissibilidade: Experimental ((SANTOS, 2018)), SEM(6) e FEM(12)	64
16	Transmissibilidade: Experimental ((SANTOS, 2018)), SEM(6) e FEM(18)	65
17	Transmissibilidade: Experimental ((SANTOS, 2018)), SEM(6) e FEM(24)	66
18	Transmissibilidade: Experimental ((SANTOS, 2018)), SEM(6) e FEM(30)	67
19	Transmissibilidade: Experimental ((SANTOS, 2018)), SEM(6) e FEM(42)	68
20	Transmissibilidade: SEM(6) e FEM(30)	69
21	Transmissibilidade: SEM(6) e FEM(120)	70

LISTA DE TABELAS

1	Frequência natural para cada método	61
2	Tempo de CPU gasto para executar cada método	62

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

Acrônimos

FEM	Finite Element Method
SEM	Spectral Element Method
MEF	Método dos Elementos Finitos
MEE	Método do Elemento Espectral
FEA	Finite Element Analysis
DOF	Degrees of Freedom

Siglas

FRF	Função de Resposta em Frequência
FFT	Fast Fourier Transform
IFFT	Inverse Fast Fourier Transform
DFT	Discrete Fourier Transform
DTFT	Discrete-Time Fourier Transform
CPU	Computer Processing Unit

LISTA DE SÍMBOLOS

SÍMBOLO	Descrição
M	Matriz global de massa
C	Matriz global de amortecimento
K	Matriz global de rigidez
\ddot{u}	Vetor de aceleração
\dot{u}	Vetor de velocidade
u	Vetor de deslocamento na direção x
v	Vetor de deslocamento na direção y
α	Fator de rigidez
β	Fator de massa
f_i	Graus de liberdade nodal
t	tempo
T	Período
a_0	Coefficientes de Fourier
a_n	Coefficientes de Fourier
b_n	Coefficientes de Fourier
i	Unidade imaginária - $\sqrt{-1}$
ω_n	Frequência natural
p	Vetor de forças externas
k	Número de onda
$S(\omega)$	Matriz do elemento espectral
E	Módulo de Young
A	Área da seção transversal
ρ	Densidade de massa
L	Comprimento da barra
f_c	Forças nodais
d	Deslocamentos nodais

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	29
1.1	OBJETIVOS DO TRABALHO	31
1.2	REVISÃO BIBLIOGRÁFICA	31
2	TEORIA DO MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS E ESPECTRAIS	33
2.1	MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS	33
2.2	MÉTODO DE ELEMENTOS ESPECTRAIS	39
2.3	ANÁLISE ESPECTRAL DE SINAIS	41
2.3.1	Séries de Fourier	42
2.3.2	Transformada Discreta de Fourier	43
2.3.3	Transformada Rápida de Fourier	43
2.4	APLICAÇÕES	44
2.4.1	Dinâmica de Barras e Placas	44
2.4.2	Vibrações Induzidas por Fluxo de Dutos	45
2.4.3	Dinâmica de Estruturas de Movimento Axial	46
2.4.4	Dinâmica dos Sistemas de Rotor	47
2.4.5	Dinâmica de Estruturas de Camadas Múltiplas	48
2.4.6	Biomecânica: Análise do Fluxo Sanguíneo	49
2.4.7	Identificação de Danos Estruturais	50
3	MODELAGEM VIA ELEMENTOS ESPECTRAIS	51
3.1	MÉTODO DA RELAÇÃO FORÇA-DESLOCAMENTO	51
3.2	ELEMENTOS DE BARRA	54
3.3	AJUSTE DO MÉTODO PARA UM PROBLEMA REAL	56
3.3.1	Estudo Experimental	56
3.3.2	Discretização do Método de Elemento Espectral	58
4	RESULTADOS E DISCUSSÕES	61
5	CONSIDERAÇÕES FINAIS	71
6	SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS	73
7	PUBLICAÇÕES ORIGINADAS DESTE TRABALHO	75
	REFERÊNCIAS	77

ANEXO A - Título do Anexo 79

1 INTRODUÇÃO

O comportamento dinâmico de uma estrutura é de grande importância na engenharia. Portanto é necessário prever com precisão, de forma eficiente e econômica. Como exemplo, o padrão de vibração de uma estrutura. Este comportamento depende da frequência de vibração, ou seja, em um trilho se houver alguma falha ou trinca na estrutura, sua frequência natural se altera. Com base nisso é possível prever danos antes mesmo que ocorra, por meio do monitoramento das frequências na estrutura.

Segundo (LEE, 2009), o método de elementos finitos (FEM - do inglês, Finite Element Method) é provavelmente um dos métodos de computação poderosos e populares que pode ser usado em muitas áreas de engenharia e ciência. Porém observa-se hoje que a tecnologia está evoluindo para que se obtenha maior número de resultados em um curto espaço de tempo, com a mesma eficiência ou superior. Para substituir o método de elementos finitos, no cálculo estrutural periódico, foram desenvolvidos métodos de elementos espectrais (SEM - do inglês, Spectral Element Method).

Método de Elementos Espectrais descreve o comportamento dinâmico de um modelo de barra elementar em relação aos deslocamentos nodais, no domínio da frequência (DOYLE, 1997). Devido a sua solução ser exata, a estrutura pode ser modelada por apenas um elemento desde que não apresente nenhuma descontinuidade ao longo da geometria e do material em consideração. O SEM é um método de elemento, assim como o FEM. Portanto, a refinação da malha também pode ser aplicada no SEM quando ocorrem quaisquer descontinuidades geométricas ou materiais no domínio espacial em estudo, e também quando existem forças externas aplicadas.

O método do elemento espectral é essencialmente um método de elementos finitos formulado no domínio da frequência. No entanto, seus métodos de implementação são bem diferentes. As diferenças básicas entre SEM e FEM são destacadas nos parágrafos seguintes encontrados em (GOPALAKRISHNAN; MAHAPATRA, 2018).

O FEM é baseado em um polinômio assumido para deslocamentos. Esses polinômios de deslocamento assumidos são forçados a satisfazer a forma fraca da equação diferencial governante, que produziria duas matrizes diferentes, a matriz de rigidez e a matriz de massa. Essas matrizes elementares são montadas para obter matrizes globais de rigidez e massa. O processo de montagem garante o equilíbrio de forças entre elementos adjacentes. Esse procedimento fornecerá a forma discreta da equação governante, dada por $[\mathbf{M}]\ddot{\mathbf{u}} + [\mathbf{C}]\dot{\mathbf{u}} + [\mathbf{K}]\mathbf{u} = \mathbf{F}(t)$, onde $[\mathbf{M}]$ e $[\mathbf{K}]$ são a matriz global de massa e rigidez e $\ddot{\mathbf{u}}, \dot{\mathbf{u}}$ e \mathbf{u} são o vetor de aceleração, velocidade e deslocamento, respectivamente. Matriz $[\mathbf{C}]$ é a matriz de amortecimento, que é normalmente obtida da rigidez e matriz de massa

como $[\mathbf{C}] = \alpha[\mathbf{K}] + \beta[\mathbf{M}]$, onde α e β são os fatores de rigidez e massa. Como mencionado anteriormente, o método de superposição de modo da solução não pode ser usado para análise de propagação de onda. O método de solução preferido é o esquema de marcha temporal, em que duas estratégias diferentes estão disponíveis, os métodos explícitos e os métodos implícitos. Para propagação de ondas e problemas dinâmicos altamente transitórios, os métodos explícitos são normalmente preferidos.

O SEM, por outro lado, usa na maioria dos casos a solução exata para a equação de onda como sua função de interpolação. Pode-se ver, ao contrário dos polinômios no caso do FEM, que precisamos lidar com exponenciais complexos como funções de interpolação. A solução exata terá coeficientes de onda correspondentes aos componentes de onda incidentes e refletidos. Se alguém quiser modelar um domínio infinito, os componentes refletidos podem ser removidos das funções de interpolação. Isso dá o que é chamado de elementos de eliminação. Esta é uma grande vantagem que o SEM tem sobre o FEM. Usando as funções de interpolação para o deslocamento, a matriz de rigidez do elemento dinâmico é formulada. Pode-se formular essa matriz de rigidez como no caso do FEM convencional, usando a forma fraca das equações governantes. Essa abordagem envolverá integração complexa. Alternativamente, pode-se formular a matriz de rigidez dinâmica usando expressões resultantes de tensão ou força. Este método é normalmente adequado, uma vez que não envolve integração complexa.

Outra de suas vantagens é que a quantidade de elementos necessários para representar uma estrutura é igual ao número de descontinuidades contidas nelas. Isto se deve ao fato de que a função de interpolação do elemento é a solução exata da sua equação diferencial.

Em virtude das vantagens aparentes da matriz de rigidez dinâmica exata, as principais vantagens do SEM são, alta precisão, menor tamanho do problema e dos graus de liberdade, custo de computação baixa, eficaz para lidar com problemas de domínio na frequência e para lidar com as condições de contorno. Apesar das vantagens mencionadas, existem também algumas desvantagens como, não pode ser aplicado diretamente em sistemas não-lineares variáveis no tempo.

1.1 OBJETIVOS DO TRABALHO

O presente trabalho tem como objetivo principal formular o método do elemento espectral e validá-lo com dados obtidos experimentalmente retirados de uma dissertação. Também é utilizado o Método dos Elementos Finitos para a comparação.

Os objetivos secundários são:

- Discutir sobre a formulação dos Elementos Finitos e suas vantagens e desvantagens.
- Exemplificar as áreas de aplicação que a análise espectral pode ser inserido.
- Formular através do método da barra, a aplicação em barras periódicas com elementos espectrais e finitos por meio da discretização.

1.2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

Este capítulo tem como objetivo apresentar as contribuições científicas publicados recentemente que envolve o tema deste trabalho. Com este é possível visualizar as áreas que o Método dos Elementos Espectrais estão envolvido. Será apresentado alguns trabalhos com seus respectivos autores.

Novos métodos espaciais espectrais e de elementos espectrais estruturados para problemas de alta ordem. Segundo (ZHANG HANFENG YAO, 2018), novos métodos espaciais espectrais e de elementos espectrais são estruturados para problemas de alta ordem. Por decomposição matricial, introduzimos uma família de novas funções de base que leva a um sistema diagonal para problemas de quarta ordem com coeficientes constantes. Com base em novas funções básicas no espaço e uma formulação dual-Petrov-Galerkin no tempo, propomos um novo método espectral espaço-temporal para um problema dependente do tempo, e provamos sua precisão espectral tanto no espaço quanto no tempo. Os resultados numéricos demonstram sua alta eficiência e coincidem bem com a análise teórica. Além disso, para promover o desempenho numérico e a eficiência, nós exploramos a ideia de diagonalização localmente simultânea para fornecer novos métodos de elementos espectrais estruturados para problemas de alta ordem. Além disso, para aumentar a flexibilidade, C_1 . Em conformidade com o método espectral retangular em analogia a Argyris ou elementos triangulares de Bell são propostos para equações de quarta ordem, que serve como um trabalho preparativo para a conformidade de elementos espectrais quadrilaterais para equações de alta ordem.

Método do elemento espectral para problemas de interface parabólica . Para (KHANA CHANDRA SHEKHAR UPADHYAYB, 2018), o resultado de regularidade do problema da interface parabólica é comprovado para dados de interface não homogêneos. As estimativas de diferenciabilidade e o teorema da estimativa de estabilidade principal,

usando funções de elementos espectrais não conformes, são comprovados. Estimativas de erro são derivadas para as versões do método proposto. Exemplos numéricos específicos são dados para validar a teoria.

Impacto e importância da hiperdifusão no método do elemento espectral: uma análise de dispersão linear. Atualmente ([ULLRICH DANIEL R. REYNOLDS, 2018](#)), o método do elemento espectral (MEE) é um método de elementos finitos miméticos com várias propriedades que o tornam uma escolha desejável para a modelagem numérica. Embora as propriedades de dispersão linear deste método tenham sido analisadas extensivamente para o caso da equação de advecção 1D invíscida, implementações práticas do SEM frequentemente empregam hiperdifusão para estabilização. Como discutido neste artigo, a hiperdifusão tem um impacto pronunciado na precisão dos modos de ondas discretas e nas propriedades dispersivas do MEV. Quando aplicada com um coeficiente apropriadamente grande, a hiperdifusão é eficaz na remoção da lacuna espectral e na melhoria da estabilidade da equação de advecção 1D. Este estudo também considera o MEE aplicado às equações de águas rasas linearizadas 2D, onde a hiperdifusão na forma de difusão escalar, amortecimento de divergência, e o amortecimento da vorticidade são analisados. Na medida do possível, é fornecida orientação sobre a escolha dos coeficientes de hiperdifusão. Uma breve discussão sobre o impacto comparativo da filtragem de elementos locais está incluída.

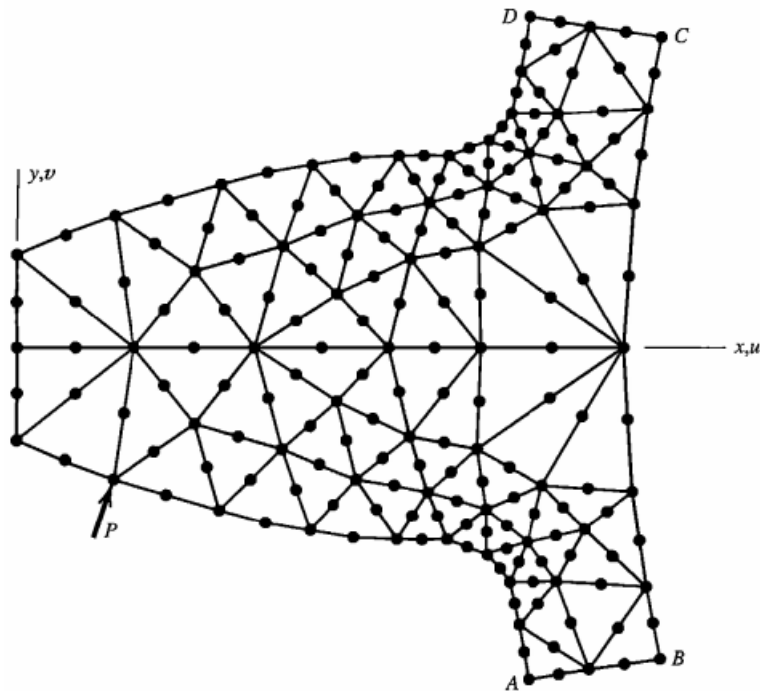
2 TEORIA DO MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS E ESPECTRAIS

Neste capítulo discorreremos sobre o desenvolvimento do trabalho. O desenvolvimento é, por assim dizer, a parte essencial do trabalho. Ele engloba todo o conhecimento inicial utilizado para o andamento do trabalho. Inicialmente é apresentado o conceito do Método dos Elementos Finitos e dos Elementos Espectrais. Assim sendo, é realizado um levantamento da formulação de cada método, vantagens e desvantagens e a aplicação destes.

2.1 MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS

A análise de elementos finitos (FEA - do inglês, *Finite Element Analysis*), também chamado de método de elementos finitos (FEM - do inglês, *Finite Element Method*), é um método para solução numérica de problemas de campo. Um problema de campo requer que determinemos a distribuição espacial de uma ou mais variáveis dependentes. Assim, podemos buscar a distribuição de temperatura no pistão de um motor, ou podemos buscar a distribuição de deslocamentos e tensões em uma laje de pavimentação. Matematicamente, um problema de campo é descrito por equações diferenciais ou por uma expressão integral. Qualquer descrição pode ser usada para formular elementos finitos (COOK R. D. AND MALKUS; PLESHA; WITT, 2002). As formulações de elementos finitos, prontas para uso, estão contidas em programas FEA de uso geral, como por exemplo ANSYS, SolidWorks entre outros. É possível usar os programas de FEA com pouco conhecimento do método de análise e do problema ao qual ele é aplicado, devido aos programas serem intuitivos na resolução do problema, porém sem o mínimo de conhecimento pode gerar resultados inconclusivos.

Figura 1 – Um modelo bidimensional de um dente de engrenagem



Fonte: Retirado do livro (COOK R. D. AND MALKUS; PLESHA; WITT, 2002).

Elementos finitos podem ser visualizados como pequenos pedaços de uma estrutura. A palavra "finito" distingue essas peças dos elementos infinitesimais usados no cálculo. Em cada elemento finito, uma quantidade de campo pode ter apenas uma variação espacial simples, talvez descrita por termos polinomiais. A variação real na região abrangida por um elemento é quase certamente mais complicada, portanto, a FEA fornece uma solução aproximada. Elementos são conectados em pontos chamados nós (Fig. 1). O conjunto de elementos é chamado de estrutura de elementos finitos, sendo a palavra "estrutura" usada em um sentido geral para significar um corpo ou região definida. O arranjo particular dos elementos é chamado de malha. Numericamente, uma malha de elementos finitos é representada por um sistema de equações algébricas a serem resolvidas para incógnitas nos nós. As incógnitas nodais são valores da quantidade de campo e depende do seu tipo de elemento. A solução para grandezas nodais, quando combinada com o campo assumido em qualquer dado elemento, determina completamente a variação espacial do campo naquele elemento. Assim, a quantidade de campo em toda a estrutura é aproximada elemento por elemento, de forma por partes. Embora uma solução FEA não seja exata (a menos que o problema seja tão simples) a solução pode ser melhorada usando mais elementos para representar a estrutura.

Como um exemplo ilustrativo, o padrão de vibração de uma estrutura certamente varia dependendo da frequência de vibração, e seu comprimento de onda em alta frequência é muito baixo. Uma vez que uma resposta dinâmica suficientemente precisa só pode ser

obtida através da captura de todos os modos de onda de alta frequência necessários. O tamanho da malha usado na modelagem de elementos finitos deve ser suficientemente pequeno, comparável ao menor comprimento de onda da estrutura vibratória.

No entanto, como os modelos de elementos finitos convencionais são formulados usando funções de forma polinomial (interpolação) dependentes de frequência (estáticas ou fixas), o FEM não pode capturar todos os modos de onda de alta frequência necessários. Assim, as soluções FEM se tornam significativamente imprecisas, especialmente em altas frequências, onde os comprimentos de onda associados são muito curtos. O chamado método h é uma das abordagens bem conhecidas para melhorar a precisão da FEM ao refinar as malhas. Infelizmente, esta abordagem tornará o tamanho do sistema extremamente grande e, portanto, do aspecto computacional, o FEM convencional geralmente se torna proibitivo para estruturas flexíveis e complexas. Sabe-se que, como um guia aproximado, o tamanho de malha deve ser 10-20 vezes menor do que o comprimento do modo de onda mais alta de interesse ([ALFORD R.M.; BOORE, 1974](#)).

Uma abordagem alternativa para melhorar a precisão da solução é usar as funções de forma, que podem variar de acordo com a frequência de vibração. Conseqüentemente, as funções de forma da estrutura dependerão da frequência e são conhecidas como funções de forma dinâmica na literatura. Como as funções de forma dinâmica podem capturar facilmente todos os modos de onda de alta frequência necessários, podem ser obtidas soluções extremamente precisas e a necessidade de refinar as malhas não é mais necessária. Este conceito levou ao chamado método de rigidez dinâmica ([BANERJEE, 1997](#)).

A FEA tem vantagens incluindo versatilidade e atratividade física ([COOK R. D.AND MALKUS; PLESHA; WITT, 2002](#)).

- FEA é aplicável a qualquer problema de campo: transferência de calor, análise de tensão, campos magnéticos e assim por diante.
- Não há restrição geométrica. O corpo ou região analisada pode ter qualquer forma.
- As condições de limite e o carregamento não são restritos. Por exemplo, na análise de tensão, qualquer porção de um corpo pode ser suportada, enquanto forças distribuídas ou concentradas podem ser aplicadas a qualquer outra porção.
- As propriedades do material não estão restritas à isotropia e podem mudar de um elemento para outro ou mesmo dentro de um elemento.
- Componentes que têm diferentes comportamentos e diferentes descrições matemáticas podem ser combinados: Assim, um único modelo de elementos finitos pode conter elementos de barra, viga, placa, cabo e atrito.

- Uma estrutura de elementos finitos se assemelha ao corpo ou região real a ser analisada.
- A aproximação é facilmente melhorada pela graduação da malha, de modo que mais elementos apareçam onde os gradientes de campo são altos e mais resolução é necessária.

Algumas análises serão necessárias para representar com maior exatidão a estrutura a ser estudada: os graus de liberdade e condições de contorno (PEPPER; HEINRICH, 2006).

- **Graus de Liberdade, DOF (do inglês, *Degrees Of Freedom*).** Graus de liberdade são quantidades independentes que governam a variação espacial de um campo. Por exemplo, Equação 2.1 define um campo $f_i = f_i(x, y)$ que tem seis DOF, ou seja, os seis a_i . Seis DOF nodais f_{i_i} pode ser usado para definir o mesmo campo. Cada elemento na Figura 1 possui 12 DOF, seis deslocamentos nodais u_i que governam o campo de deslocamento da direção x, $u = u(x, y)$ e seis deslocamentos nodais v_i que governam o campo de deslocamento na direção y, $v = v(x, y)$. Os u_i e v_i são deslocamentos de elementos específicos.

$$\phi = a_1 + a_2x + a_3y + a_4x^2 + a_5xy + a_6y^2 \quad (2.1)$$

- **Condições de contorno.** Condições de contorno modificam o resultado final. Quando aplicado elimina uma parte da resposta. Por exemplo, quando considerado que o sistema possui suas extremidades fixas, ou seja, não possui deslocamento nos nós das extremidades, é necessário que seja eliminado as respostas de deslocamento nestes nós, tornando os iguais a zero.

Segundo o (COOK R. D.AND MALKUS; PLESHA; WITT, 2002), existem três passos para a resolução de um problema por método dos elementos finitos: classificação, modelagem e discretização.

Classificação: O primeiro passo para resolver um problema é identificá-lo. Quais são os fenômenos físicos mais importantes envolvidos? O problema é independente ou dependente do tempo? (Na terminologia de análise de tensão, perguntamos se o problema é estático ou dinâmico.) A não linearidade está envolvida, de modo que a solução iterativa é necessária? Quais resultados são buscados na análise? Que precisão é necessária? As respostas a essas questões influenciam a quantidade de informações que devem ser coletadas para realizar uma análise, como o problema é modelado e qual método de solução é adotado.

Um problema complicado pode não estar inteiramente em uma categoria. Um exemplo é um problema de interação fluido-estrutura, como a excitação sísmica de um

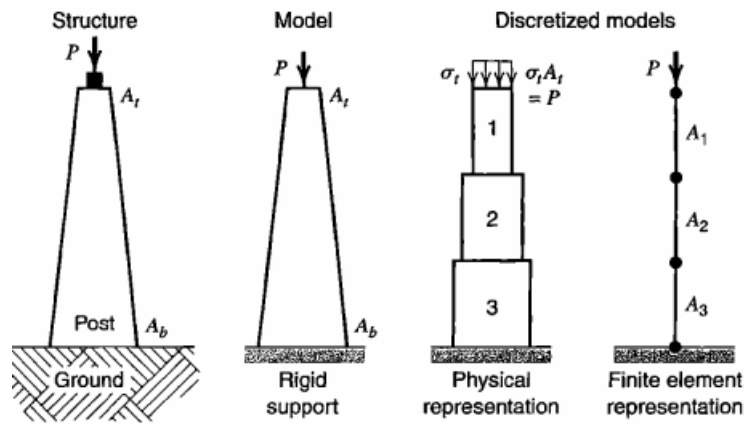
tanque de armazenamento que contém líquido. O movimento do líquido faz com que um tanque de paredes finas se desvie, e a deflexão modifica o movimento do líquido. Portanto, os campos de deslocamento estrutural e movimento de fluido não podem ser considerados separadamente; os cálculos devem levar em conta sua interação. Este exemplo envolve o que pode ser chamado de acoplamento direto ou mútuo, no qual cada campo influencia o outro. Há também o que pode ser chamado de acoplamento indireto ou sequencial, em que apenas um campo influencia o outro. Um exemplo é a análise ordinária de tensões térmicas, onde a temperatura influencia tensões, mas tensões têm influência desprezível na temperatura.

Modelagem: Um método analítico é aplicado a um problema de modelo e não a um problema físico real. Até mesmo experimentos de laboratório usam modelos, a menos que a estrutura física real seja testada. Um modelo para análise pode ser elaborado após a natureza física do problema ter sido entendida. Na modelagem, o analista procura excluir detalhes supérfluos, mas inclui todos os recursos essenciais, para que a análise do modelo não seja desnecessariamente complicada, mas fornece resultados que descrevem o problema real com precisão suficiente. Um modelo geométrico torna-se um modelo matemático quando seu comportamento é descrito, ou aproximado, por equações diferenciais e condições de contorno selecionadas. As equações, dependendo de suas formas particulares, podem incorporar restrições como homogeneidade, isotropia, constância das propriedades do material, deformações e rotações.

É importante reconhecer que FEA é simulação, não realidade. A FEA é aplicada ao modelo matemático. Mesmo a FEA muito precisa pode estar em desacordo com a realidade física, se o modelo matemático for inadequado.

Um modelo matemático é uma idealização, na qual a geometria, as propriedades do material, as cargas e / ou as condições de contorno são simplificadas com base na compreensão do analista sobre quais recursos são importantes ou não importantes para obter os resultados necessários. Como exemplos na análise de tensão, o material pode ser considerado como homogêneo, isotrópico e linearmente elástico (embora materiais comuns sejam de outra forma); uma carga distribuída sobre uma pequena área pode ser considerada como concentrada em um ponto (o que não é fisicamente possível); um suporte pode ser designado como fixo (embora nenhum suporte seja completamente rígido); um canto reentrante pode ser introduzido, mas altas tensões são ignoradas (se forem procuradas outras áreas); e uma estrutura quase plana pode ser modelada como bidimensional (se a variação de tensão na direção da espessura for considerada praticamente zero, ou considerada linear, como geralmente é para flexão). O comportamento de um vaso pressurizado axissimétrico pode ser descrito por equações de elasticidade ou equações de conchas axissimétricas, dependendo se a espessura da parede é considerada espessa ou relativamente fina. Decisões de modelagem como estas precedem a FEA.

Figura 2 – Exemplificação para elementos finitos



Fonte: Retirado do livro (COOK R. D. AND MALKUS; PLESHA; WITT, 2002).

Discretização: Um modelo matemático é discretizado dividindo-o em uma malha de elementos finitos. Assim, um campo totalmente contínuo é representado por um campo contínuo por partes, definido por um número finito de grandezas nodais e interpolação simples, dentro de cada elemento. Claramente, a discretização introduz outra aproximação. Em relação à realidade, duas fontes de erro são introduzidas: erro de modelagem e erro de discretização. O erro de modelagem pode ser reduzido melhorando o modelo; erro de discretização pode ser reduzido usando mais elementos. Mesmo que o erro de discretização possa ser reduzido a zero, a realidade não é representada com perfeição porque o erro de modelagem permanece. Além disso, como um computador faz aritmética, ele introduz erros numéricos usando números de precisão finita para representar dados e os resultados da manipulação. O erro numérico é geralmente pequeno, mas pode ser ampliado por algumas situações físicas e por pouca discretização.

Como um exemplo muito simples de modelagem e discretização, considere um poste de suporte cônico, como na Figura 2. Sua área de seção transversal varia de A_b , na parte inferior até A_t no topo. Na modelagem, optamos por mostrar o solo como um suporte rígido. Uma vez que omitimos a deformação do solo do modelo, a deflexão no topo é devida inteiramente ao encurtamento do poste, e as tensões na parte inferior diferem em magnitude e distribuição das tensões no poste real. Podemos presumir que o estado de estresse é uniaxial em cada seção transversal, o que é uma aproximação aceitável se o cone for pequeno. No modelo matemático de tensão uniaxial, a coordenada axial é a única variável independente. Essa representação é consistente com o estresse uniforme na parte inferior. Da mesma forma, neste modelo, a maneira de distribuição de carga no topo não importa, apenas sua magnitude P é importante. A carga distribuída do próprio peso da postagem geralmente pode ser negligenciada. Podemos também assumir que o material do modelo é homogêneo e linearmente elástico. Assim, se o material é concreto,

ignoramos sua estrutura de partículas cimentadas e as conseqüentes variações de tensão locais, e ignoramos a não-linearidade em sua relação tensão-deformação.

Para tensão uniaxial e elasticidade linear, podemos obter um modelo discretizado válido representando o modelo cônico por uma pilha de membros uniformes, cada um com módulo de elasticidade E , mas área de seção transversal A diferente, como mostrado na Figura 2. O erro de discretização pode ser reduzido aumentando o número de elementos.

2.2 MÉTODO DE ELEMENTOS ESPECTRAIS

Porém observa-se hoje que a tecnologia está evoluindo para que se obtenha maior número de resultados em um curto espaço de tempo, com a mesma eficiência ou superior. Para substituir o método de elementos finitos, no cálculo estrutural periódico, foram desenvolvidos métodos de elementos espectrais (SEM - do inglês, *Spectral Element Method*).

No SEM as matrizes de rigidez dinâmica exata são usadas como matrizes de rigidez do elemento para os elementos finitos em uma estrutura. Para formular uma matriz de rigidez dinâmica exata para o SEM as respostas dinâmicas são assumidas como a superposição de um número finito de modos de onda de diferentes frequências discretas com base na teoria da transformada discreta de Fourier. Conseqüentemente, o cálculo da matriz de rigidez dinâmica exata deve ser repetido em todas as frequências discretas até a maior frequência de interesse. Em virtude da exatidão da matriz de rigidez dinâmica formulada espectralmente, a modelagem de um elemento será suficiente para um membro da estrutura regular. O SEM é um método de elemento, assim como o FEM convencional. Assim, a refinação de malha, ou seja, a discretização também pode ser aplicada no SEM quando ocorrem quaisquer descontinuidades geométricas ou materiais no domínio espacial de preocupação, e também quando existem forças externas aplicadas. Os detalhes do procedimento de formulação do elemento espectral serão desenvolvidos mais adiante (DOYLE, 1997).

O SEM é a rigidez formulada. Assim, os elementos espectrais podem ser montados para formar uma equação global da matriz do sistema para todo o domínio do problema, usando exatamente as mesmas técnicas de montagem usadas no FEM convencional. A equação da matriz do sistema global é então resolvida para os DOF nodais espectrais globais, repetidamente em todas as frequências discretas. Finalmente, usamos o algoritmo inverso-FFT (IFFT - do inglês, *Inverse Fast Fourier Transform*) para calcular as histórias de tempo de respostas dinâmicas (soluções de domínio do tempo).

Em virtude das vantagens aparentes da matriz de rigidez dinâmica exata, as principais vantagens do SEM podem ser resumidos como segue:

1. Precisão extremamente alta. Em teoria, o SEM fornece soluções exatas de domínio de frequência, como as frequências e modos naturais e as funções de resposta de

frequência (funções de transferência de sistema). O SEM também pode fornecer soluções de domínio do tempo extremamente precisas, levando em consideração de forma eficiente muitos modos de onda de alta frequência, conforme exigido pelo uso do algoritmo FFT. Consequentemente, os problemas resolvidos usando o modelo de elemento espectral podem ser utilizados como problemas de referência para avaliar a precisão e o desempenho de um método de solução recentemente desenvolvido.

2. Menor tamanho do problema e DOFs. Isso é verdade porque a modelagem de um elemento é suficiente para a representação de um membro de estrutura regular de qualquer tamanho, sem qualquer descontinuidades estruturais e materiais dentro.

3. Custo de computação baixo. A rápida cotação das respostas do domínio do tempo também nos permite tratar a simulação de propagação de onda de forma mais realista. No entanto, vale a pena mencionar que a parte mais importante do consumo de tempo no SEM é para computar as frequências próprias usando um método de iteração de busca por raiz.

4. Eficaz para lidar com problemas de domínio de frequência. O SEM em si é um método de solução de domínio em frequência. Consequentemente, o SEM pode ser aplicado com sucesso nas seguintes situações: (i) quando as características de um sistema (por exemplo, equação constitutiva ou amortecimento interno) dependem da frequência (por exemplo, materiais visco elásticos) e (ii) quando as condições de contorno de um sistema são especificadas no domínio da frequência (por exemplo, as condições de limite de impedância para os problemas de interação fluido-estrutura).

5. Eficaz para lidar com as condições de contorno não-refletindo dos problemas de domínio infinito ou semi-infinito. Isto é conseguido usando o elemento espectral semi-infinito (muitas vezes chamado de elemento through-off), que pode ser formulado simplesmente removendo os modos de onda refletidos a partir do limite no infinito das funções de forma dinâmica.

6. Método livre de bloqueio. O SEM não exibe os problemas de bloqueio do cisalhamento, muitas vezes levantados no FEM convencional, porque as soluções de onda exatas para as equações governantes são usadas como funções dinâmicas de forma no SEM.

7. Eficaz para lidar com dados digitalizados. Isso é devido ao algoritmo FFT usado no SEM é uma ferramenta eficiente para lidar com dados digitalizados da seguinte maneira: (i) os dados experimentais medidos digitalmente através dos conversores analógico-digitais e (ii) as forças de excitação medidas ou especificadas em formas de valores numéricos nos intervalos regulares de tempo e não nas formas de funções analíticas.

8. As funções de transferência do sistema (a inversa da matriz de rigidez dinâmica global) são os subprodutos da análise dos elementos espectrais. Assim, é muito direto realizar os problemas inversos, como a identificação do sistema (por exemplo,

identificação de parâmetros do sistema, condições de contorno, articulações estruturais ou danos estruturais) e a identificação da força.

Apesar das vantagens acima mencionadas da SEM, existem também algumas desvantagens da seguinte maneira:

1. Os modelos de elementos espectrais exatos desenvolvidos foram principalmente para problemas unidimensionais (1-D) (por exemplo, varas e feixes) ou alguns problemas multidimensionais que podem ser transformados em problemas equivalentes a 1-D (por exemplo, Placas de tipo Levy). Se o modelo de elemento espectral exato não estiver disponível para um problema, a abordagem aproximada de modelagem de elemento espectral pode ser aplicada adotando funções de forma dinâmica aproximadas obtidas usando os números de onda calculados a partir da relação de dispersão aproximada ou usando outro método de aproximação apropriado. Como as hipóteses possíveis para a modelagem aproximada do elemento espectral serão menos severas do que aqueles geralmente feitos para o FEM convencional, os modelos de elementos espectrais aproximados ainda podem fornecer soluções muito precisas.

2. Como o SEM é um método de análise de domínio de frequência baseado em técnicas DFT / FFT, ele não pode ser aplicado diretamente em sistemas não-lineares variáveis no tempo, para os quais o princípio da superposição não é válido. Assim, para o caso de sistemas não-lineares, por exemplo, talvez seja necessário usar um método de iteração tratando termos não-lineares como pseudo-forças.

3. No SEM as soluções de domínio do tempo são pós-processadas envolvendo as funções de transferência com carregamentos externos no domínio da frequência, através dos algoritmos IFFT. Assim, mesmo que o SEM garanta soluções de domínio de frequência exatas, não é verdade para as soluções de domínio do tempo, porque os erros devido a aliasing ou vazamentos são inevitáveis na prática. Como os erros de aliasing ou induzidos por vazamento dependem das condições da FFT, deve-se ter especial cuidado na determinação das condições de FFT bem-sucedidas.

2.3 ANÁLISE ESPECTRAL DE SINAIS

Em matemática, é bem conhecido que um sinal periódico arbitrário pode ser decomposto em muitos componentes harmônicos e, na transformação reversa, o sinal pode ser sintetizado superpondo todos os seus componentes harmônicos. Esta é a base da análise espectral (Fourier). Para um sinal dado em forma funcional, podemos avaliar seus componentes harmônicos avaliando analiticamente a integral contínua da transformada de Fourier. No entanto, se a função de sinal é tão complicada, podemos decidir usar a integração numérica. Nesse caso, precisamos conhecer os valores do sinal apenas em um conjunto discreto de instâncias. Uma situação semelhante surge na maioria das

medições experimentais, porque os modernos sistemas de aquisição de dados baseados em conversores analógico-digitais armazenam dados digitalizados amostrados em intervalos discretos, uniformemente espaçados. A transformada discreta de Fourier (DFT - do inglês, *Discrete Fourier Transform*) nos permite lidar com dados amostrados discretos de um sinal. A vantagem importante da teoria DFT é que ela nos permite usar a transformada rápida de Fourier (FFT - do inglês, *Fast Fourier Transform*), que é um algoritmo extremamente eficiente para o cálculo da DFT. Para formular modelos de elementos espectrais, as soluções exatas para as equações governantes são geralmente representadas nas formas espectrais usando a DFT. Assim, esta seção apresentará uma breve revisão das teorias e aplicações associadas a DFT e FFT.

2.3.1 Séries de Fourier

Se $x(t)$ é uma função periódica contínua do tempo t , com o período T , podemos sempre representá-lo na forma de uma série de Fourier como:

$$x(t) = a_0 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos \omega_n t + b_n \sin \omega_n t) \quad (2.2)$$

onde a_0 , a_n e b_n são coeficientes de Fourier constantes.

As funções cosseno e seno podem ser decompostas usando as identidades de Euler da seguinte maneira

$$\begin{aligned} \cos \omega_n t &= \frac{1}{2} (e^{i\omega_n t} + e^{-i\omega_n t}) \\ \sin \omega_n t &= -\frac{i}{2} (e^{i\omega_n t} - e^{-i\omega_n t}) \end{aligned} \quad (2.3)$$

Onde $i = \sqrt{-1}$, é uma unidade imaginária. Ao substituir a Equação 2.3 na Equação 2.2, obtemos uma expressão da seguinte forma

$$x(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n - ib_n) e^{i\omega_n t} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n + ib_n) e^{-i\omega_n t} \quad (2.4)$$

Definindo

$$X_n = a_n - ib_n \quad (2.5)$$

podemos reescrever a Equação 2.4 em uma forma compacta

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} X_n e^{i\omega_n t} \quad (2.6)$$

onde X_n é o n ésimo coeficiente de Fourier para uma função periódica contínua $x(t)$. Ao substituir a Equação 2.5 e, em seguida, aplicando a Equação 2.3, obtemos

$$X_n = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) e^{-i\omega_n t} dt \quad (2.7)$$

As Equações 2.6 e 2.7 constituem o par de transformada de Fourier para a função periódica contínua $x(t)$. A Equação 2.6 é referida como a equação de síntese e a Equação 2.7 como a equação de análise para uma função periódica contínua $x(t)$. Em resumo, a transformada de Fourier decompõe uma função periódica em um espectro discreto de seus componentes de frequência, e a transformada inversa sintetiza uma função de seu espectro de componentes de frequência.

2.3.2 Transformada Discreta de Fourier

Em matemática, a transformada discreta de Fourier converte uma sequência finita de amostras igualmente espaçadas de uma função em uma sequência de comprimento de amostras igualmente espaçadas da transformada de Fourier em tempo discreto (DTFT - do inglês, *Discrete-Time Fourier Transform*), que é um valor complexo em função da frequência. O intervalo no qual o DTFT é amostrado é o recíproco da duração da sequência de entrada. Uma DFT inversa é uma série de Fourier, usando as amostras de DTFT como coeficientes senoidais complexos nas frequências DTFT correspondentes. Ele possui os mesmos valores de amostra da sequência de entrada original. A DFT é, portanto, considerada uma representação do domínio da frequência da sequência de entrada original. Se a sequência original abranger todos os valores diferentes de zero de uma função, seu DTFT é contínuo (e periódico), e o DFT fornece amostras discretas de um ciclo. Se a sequência original é um ciclo de uma função periódica, a DFT fornece todos os valores diferentes de zero de um ciclo de DTFT.

2.3.3 Transformada Rápida de Fourier

A transformada rápida de Fourier é um engenhoso algoritmo computacional altamente eficiente para computar a DFT e seu inverso, IDFT, originalmente descoberto por Gauss por volta de 1805 e redescoberto por Cooley e Tukey na IBM em 1965. A FFT não é uma transformação diferente da DFT, mas apenas um meio de calcular o DFT com uma redução considerável no tempo computacional. O algoritmo Cooley-Tukey torna o FFT extremamente eficiente, reduzindo as operações aritméticas (multiplicações e adições) de algo da ordem de N^2 para $N/\log_2 N$. Esta é uma redução dramática no tempo de computação para grandes valores de N , sendo N número de elementos. Vale ressaltar que, embora a FFT use um computador, ela não é um método numérico no sentido usual, porque as descrições analíticas de DFT e IDFT, ainda são mantidos. Um indivíduo que trabalha com FFT não precisa necessariamente conhecer os detalhes dentro do algoritmo FFT, mas deve saber como preparar os dados e como interpretar os resultados. (KAMMLER, 2000).

Como regra geral, os dados a serem transformados pela FFT consistem em N séries temporais discretas uniformemente espaçadas. Para a eficiência máxima de computação, para um ótimo N é necessário ser uma potência inteira de 2: ou seja, $N = 2^p$ onde $p =$

inteiro. Embora alguns algoritmos de FFT não exijam que N seja uma potência inteira de 2, $N = 2^p$ é ideal para a velocidade máxima de execução do algoritmo FFT.

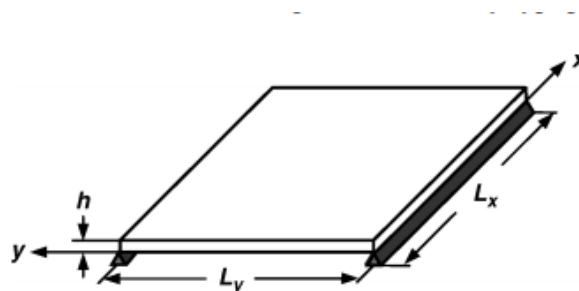
2.4 APLICAÇÕES

Nesta seção serão mostrados alguns exemplos de aplicação da análise de elemento espectral encontrados no Livro de (LEE, 2009), tanto quanto o método da formulação para a resolução do problema e suas características principais.

2.4.1 Dinâmica de Barras e Placas

Nesta aplicação, o método do elemento espectral (SEM) é aplicado às vigas e placas submetidas a forças dinâmicas distribuídas. Em SEM as forças dinâmicas distribuídas podem ser representadas pelas forças nodais espectrais equivalentes, que são definidas pela integração da multiplicação das forças dinâmicas distribuídas, pela transformação discreta de Fourier e pela matriz da função de forma dinâmica. Como uma abordagem alternativa, o método de dois elementos (TEM – do inglês, Two Element Method) pode ser aplicado para lidar com as forças dinâmicas distribuídas que atuam nas vigas ou placas. Para a análise de elementos espectrais baseada em TEM, a força dinâmica distribuída atuando sobre um feixe é primeiro dividida em uma sequência de forças pontuais. A resposta dinâmica completa é então obtida sobrepondo todas as respostas dinâmicas excitadas por cada força pontual. Para calcular a resposta dinâmica devido a uma força pontual, o feixe é representado por um modelo de dois elementos, de modo que o nó de interconexão se torne o ponto no qual a força de ponto está localizada. Ao contrário das estruturas de feixe 1-D, as placas mostram características de onda bidimensionais muito complicadas. Assim, desenvolver os modelos de elementos espectrais para as placas com condições gerais de contorno não é tão simples. Portanto, a modelagem do elemento espectral é introduzida apenas para as placas do tipo Levy. O TEM desenvolvido para as vigas é então estendido para as placas do tipo Levy, submetidas às forças dinâmicas distribuídas.

Figura 3 – Placa retangular do tipo Levy

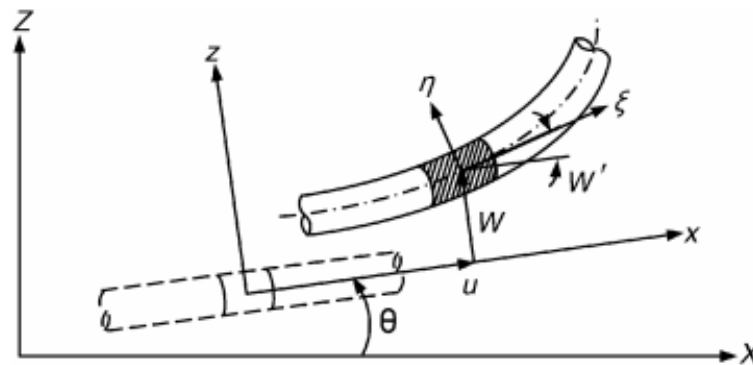


Fonte: Retirado do livro (LEE, 2009).

2.4.2 Vibrações Induzidas por Fluxo de Dutos

As tubulações em plantas químicas, oleodutos, bombas de descarga, linhas de fluido propulsor de foguetes cheios de líquido e o sistema circulatório humano são exemplos típicos da transferência de fluidos sob pressão de alta velocidade. As condições variáveis no tempo, impostas pelas operações da bomba ou da válvula, podem alterar os campos de fluido internos. À medida que o fluido interno interage com a parede do tubo, as mudanças nos campos de fluido continuarão alterando o comportamento dinâmico de um sistema de tubulação e vice-versa. Às vezes, esse fenômeno de interação fluido-estrutura pode resultar em vibrações graves, que podem causar falhas estruturais (ASHLEY; HAVILAND, 1950). Portanto, é importante prever com precisão as características dinâmicas estruturais de uma tubulação e os transientes de fluido dentro da tubulação durante a fase inicial do projeto. Para este fim, precisamos levar em conta o mecanismo de interação fluido-estrutura mais realista na teoria da dinâmica tubular. Em geral, as interações estrutura-fluido são representadas por um conjunto de equações governantes acopladas para a dinâmica da tubulação e para os transientes de fluido dentro da tubulação. Assim, os modelos de elemento espectral são formulados a partir das equações de dinâmica de tubulação acoplada nos dutos uniformes que transportam fluidos internos derivados usando o princípio de Hamilton e a teoria da mecânica de fluidos.

Figura 4 – Vibração de um duto uniforme inclinado

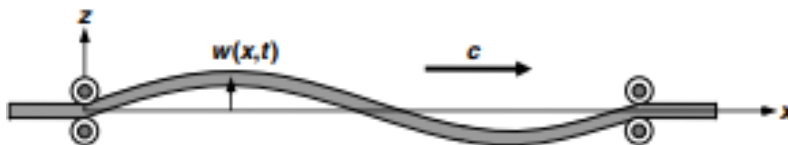


Fonte: Retirado do livro (LEE, 2009).

2.4.3 Dinâmica de Estruturas de Movimento Axial

Estruturas axialmente móveis são de importância tecnológica e estão presentes em uma ampla gama de problemas de engenharia: exemplos típicos são as linhas na indústria têxtil, correntes e correias, papel de alta velocidade e fitas magnéticas, serras de fita, filamentos, cabos aéreos bondes, tiras de torres de resfriamento e similares. A velocidade de movimento axial de uma estrutura pode afetar significativamente suas características dinâmicas, dando origem a variações nas frequências naturais e modos de vibração. Acima de uma certa velocidade crítica de movimento, a estrutura em movimento axial pode experimentar severas vibrações ou instabilidade, resultando em falha estrutural. Assim, é importante prever com precisão as características dinâmicas de tais estruturas em movimento axial para obter projetos bem-sucedidos. Se a rigidez de flexão de uma estrutura unidimensional em movimento axial é insignificante, a estrutura pode ser representada pelo modelo de corda. No entanto, se a rigidez de flexão não for desprezível, a estrutura de movimento axial é geralmente representada por um modelo de viga. Para as estruturas que se movem axialmente com uma ampla largura, como as lâminas de serra de fita larga e as tiras da torre de resfriamento, é necessário usar modelos de placa bidimensionais. Assim, a modelagem de elementos espectrais é considerada para cordas que se movem axialmente, vigas de Bernoulli-Euler, vigas de Timoshenko e chapas finas.

Figura 5 – Corda axialmente móvel

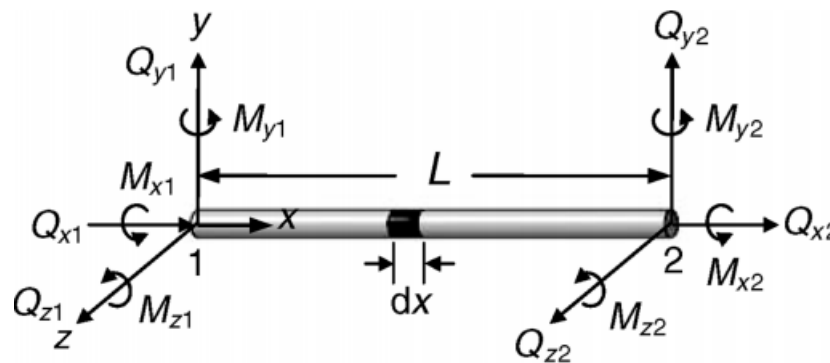


Fonte: Retirado do livro (LEE, 2009).

2.4.4 Dinâmica dos Sistemas de Rotor

Máquinas rotativas têm sido amplamente utilizadas em diversas aplicações de engenharia, como motores, turbinas e máquinas-ferramentas. Em geral, as máquinas rotativas consistem em múltiplos eixos e discos (ou pás) que são conectados uns aos outros para formar os sistemas de rotor, suportados por múltiplos mancais. É muito importante prever com precisão as características dinâmicas dos sistemas do rotor durante a fase de projeto. Assim, tem havido extensos estudos sobre a modelagem e análise de tais sistemas de rotores ao longo de muitas décadas e revisões detalhadas sobre o assunto podem ser encontradas em (RAO, 1996). A solução é o modelo de elemento espectral para um sistema de rotor flexível de múltiplos rolamentos com discos rígidos. Inicialmente as equações de movimento para os sistemas de rotor são derivadas usando o princípio de Hamilton e as equações de Lagrange. Os eixos circulares giratórios de um rotor são representados pelos modelos de eixo Timoshenko uniformes e os discos rígidos são considerados oscilantes em torno de seus centros. Os rolamentos de apoio são considerados como os rolamentos flexíveis e são representados por eficazes molas translacionais e rotacionais. Os desequilíbrios de massa dos discos são considerados no modelo do elemento espectral.

Figura 6 – Modelo para uma barra de Timoshenko como um eixo do rotor

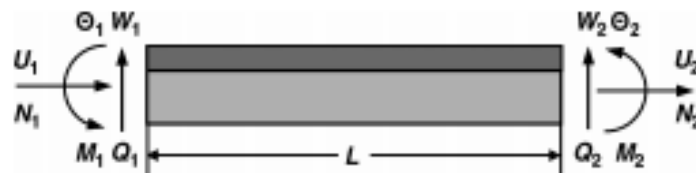


Fonte: Retirado do livro (LEE, 2009).

2.4.5 Dinâmica de Estruturas de Camadas Múltiplas

Ao longo do tempo, muitos tipos de estruturas de múltiplas camadas foram desenvolvidos para várias aplicações de engenharia. Eles incluem as vigas elásticas de duas camadas e as vigas tratadas com amortecimento de camada passiva (PCLD – do inglês, Passive Constrained Layer Damping). A tira bi metálica é um exemplo típico do feixe de duas camadas elástico-elástico. O feixe de PCLD consiste basicamente de uma camada de base elástica, uma camada de material visco elástico (VEM) e uma camada de restrição elástica, e é aplicada para o controle passivo de vibração estrutural e ruído. Para estruturas com complexas multicamadas, modelos analíticos mais precisos e métodos de solução são obrigatórios para adquirir características dinâmicas satisfatórias. Neste caso, as equações governantes são derivadas para um feixe de duas camadas elástico-elástico e um feixe de PCLD usando o princípio de Hamilton. Os modelos de elementos espectrais são então formulados usando a abordagem variacional. Os modelos convencionais de elementos finitos também são fornecidos para avaliar o desempenho dos modelos de elementos espectrais. As equações diferenciais parciais governantes de estruturas multicamadas são geralmente acopladas totalmente.

Figura 7 – Feixe de duas camadas elástico-elástico

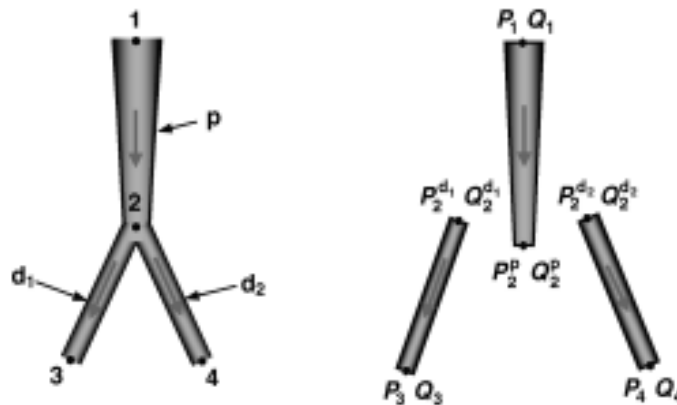


Fonte: Retirado do livro (LEE, 2009).

2.4.6 Biomecânica: Análise do Fluxo Sanguíneo

O sistema arterial transporta sangue do coração para os tecidos do corpo. As características do fluxo sanguíneo (por exemplo, velocidade do sangue e pressão) certamente influenciam a tensão de cisalhamento e a tensão da parede arterial, que regulam o diâmetro do lúmen e a espessura da parede arterial, respectivamente. Como as doenças cardiovasculares, como estenose e aneurisma, são fortemente relacionadas com o estresse e a tensão de cisalhamento da parede arterial, é muito importante investigar as características do fluxo sanguíneo de maneira precisa e eficiente para fins de pesquisa de doenças cardiovasculares, concebendo desenhos e planejamento cirúrgico. Assim, os métodos computacionais surgiram como ferramentas poderosas para a modelagem e análise do fluxo sanguíneo. Os modelos computacionais de fluxo sanguíneo desenvolvidos durante a última metade do século podem ser classificados nos modelos de parâmetros concentrados, nos modelos de propagação de onda unidimensional (1-D) e modelos tridimensionais (3-D) de interação fluido-estrutura. Os modelos 1-D são muito úteis porque são capazes de fornecer informações clinicamente relevantes sobre o fluxo sanguíneo local e ondas de pressão através do sistema arterial de forma muito eficiente, além das condições de contorno adequadas para os modelos 3-D.

Figura 8 – Um elemento de ramificação binária - veias

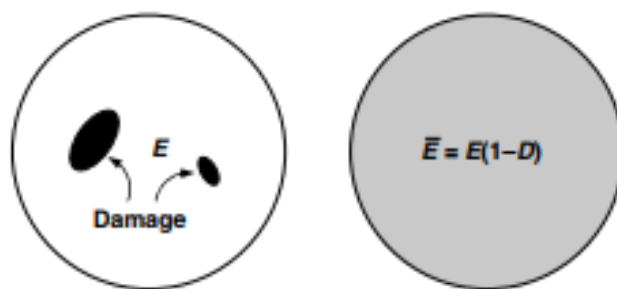


Fonte: Retirado do livro (LEE, 2009).

2.4.7 Identificação de Danos Estruturais

O dano estrutural gerado dentro de uma estrutura pode levar a mudanças nas respostas dinâmicas e características da estrutura, como a frequência natural, a forma do modo e o amortecimento modal, que, por sua vez, podem ser usados para detectar, localizar e quantificar o dano. Na literatura, existem vários métodos de identificação de danos estruturais (SDIMs – do inglês, Structural Damage Identification Methods), que podem ser classificados em várias categorias, dependendo dos tipos de dados experimentais usados nos métodos. Os dados experimentais utilizados na literatura incluem dados modais, energia de deformação, parâmetros de função de transferência, matriz de flexibilidade, forças residuais, características de onda, impedâncias mecânicas, dados de função de resposta em frequência (FRF) e assim por diante. Como os dados FRF são medidos diretamente das estruturas, eles estarão livres de quaisquer erros de extração modal. Além disso, os dados FRF podem fornecer muito mais informações de danos em uma faixa de frequência desejada quando comparados com os dados modais, porque os dados modais são extraídos principalmente de um número muito limitado de dados FRF em torno da ressonância. Motivado pelas vantagens dos dados FRF sobre os dados modais, existem estudos sobre um SDIM baseado no método do elemento espectral (SEM) no qual os dados FRF são usados para identificação de danos estruturais. Para o problema inverso, como reduzir o tamanho do problema tem sido um importante assunto de pesquisa durante um longo período de tempo. Assim, um método de redução de domínio também é introduzido como uma abordagem de candidato em potencial.

Figura 9 – Representação uniforme de dano local em um elemento de estrutura



Fonte: Retirado do livro (LEE, 2009).

3 MODELAGEM VIA ELEMENTOS ESPECTRAIS

Neste capítulo será apresentado o método utilizado para a resolução que foi o Método da Relação Força-Deslocamento. Em seguida é aplicado esta ferramenta para um elemento de barra unidimensional (deslocamento apenas na direção axial). E com a resolução é possível aproximar o método para um caso real em que será explicado posteriormente.

3.1 MÉTODO DA RELAÇÃO FORÇA-DESLOCAMENTO

Nesta seção, os dois conceitos de equilíbrio e compatibilidade com soluções exatas para as equações de movimento, que é a relação direta entre forças nodais e deslocamentos nodais, são usados para formular o modelo de elemento espectral para uma estrutura.

As equações governantes do movimento de uma estrutura submetida a vibração forçada podem ser simbolicamente representadas como

$$\mathcal{L}u(x, t) + M\ddot{u} = p(x, t) \quad (3.1)$$

onde \mathcal{L} é o operador estrutural diferencial linear no tempo t e coordenada espacial no domínios de x e M é o operador inercial. Os pontos ($\dot{}$) indicam as derivadas com o tempo t . $\mathbf{u}(x, t)$ e $\mathbf{p}(x, t)$ são os vetores de campos de deslocamento e o vetor de forças externas, respectivamente. Suponha que as forças externas possam ser representadas na forma espectral por

$$\mathbf{p}(x, t) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} P_n(x; \omega_n) e^{i\omega_n t} \quad (3.2)$$

onde $P_n(x; \omega)$ são os componentes espectrais (ou coeficientes de Fourier) das forças externas $p(x, t)$. A solução para a equação 3.1 pode ser então assumida de uma forma semelhante à

$$\mathbf{u}(x, t) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} U_n(x; \omega_n) e^{i\omega_n t} \quad (3.3)$$

onde $U_n(x; \omega)$ são os componentes espectrais dos campos de deslocamento $u(x, t)$. Substituindo as Equações 3.2 e 3.3 na Equação 3.1 e assumindo que os componentes espectrais \mathbf{U}_n e \mathbf{P}_n satisfazem a Equação 3.1 em cada frequência discreta ω_n , podemos obter

$$L\mathbf{U}_n(x; \omega_n) - \omega_n^2 M\mathbf{U}_n(x; \omega_n) = \mathbf{P}_n(x; \omega_n) \quad (3.4)$$

onde L é o operador estrutural diferencial linear na coordenada espacial do domínio em x .

As funções de forma dependentes da frequência, denominadas funções de forma dinâmica e usadas para formular a matriz do elemento espectral, são obtidas a partir da equação homogênea

$$L\mathbf{U}_n(x) - \omega_n^2 M\mathbf{U}_n(x) = 0 \quad (3.5)$$

A equação 3.5 vale para todas as frequências discretas e cada frequência discreta ω_n se torna parâmetro. Por uma questão de brevidade, os subscritos n que apareceram na Equação 3.5 serão omitidos no seguinte:

$$L\mathbf{U}(x) - \omega^2 M\mathbf{U}(x) = 0 \quad (3.6)$$

A mesma forma que a Equação 3.6 pode ser derivada simplesmente assumindo soluções harmônicas para a Equação 3.1 homogênea, que tem sido popular na literatura associada ao método de rigidez dinâmica.

A solução geral para a Equação 3.6 pode ser assumida na forma de

$$U(x) = ce^{-ikx} \quad (3.7)$$

onde \mathbf{c} é um vetor constante e k é o número de onda, frequência espacial. A substituição da Equação 3.7 na Equação 3.6 gera um problema do tipo

$$A(k; \omega)c = 0 \quad (3.8)$$

As condições para a existência da solução não trivial \mathbf{c} da Equação 3.8 requerem que o determinante de $A(k; \omega)$ seja zero como

$$\det A(k; \omega)c = 0 \quad (3.9)$$

que produz uma equação característica para o número de onda k na forma em que α é a constante em função de ω , produto da determinante

$$k^p + \alpha_{(p-1)}(\omega)k^{(p-1)} + \alpha_{(p-2)}(\omega)k^{(p-2)} + \dots + \alpha_1(\omega)k + \alpha_0(\omega) = 0 \quad (3.10)$$

A Equação 3.10 é chamada de relação de dispersão ou relação de espectro. Suponha que k_1, k_2, \dots, k_p são as raízes distintas da Equação 3.10 em uma frequência discreta ω . O autovetor c_i associado pode então ser calculado a partir da Equação 3.8 como

$$\mathbf{c}_i = a_i \left\{ \begin{array}{c} 1 \\ \beta_i \end{array} \right\} = a_i \phi_i \quad (i = 1, 2, \dots, p) \quad (3.11)$$

onde o autovetor c_i é normalizado para que um componente do vetor normalizado ϕ_i se torne unidade e os outros componentes sejam coletados como o vetor β_i . As constantes a_i

serão determinadas para satisfazer as condições de contorno associadas. Uma vez obtidas as soluções k_i e c_i para satisfazer o problema de autovalor na Equação 3.8, as soluções gerais para a Equação 3.6 podem ser escritas como

$$U(x) = \sum_{i=1}^p \phi_i e^{-ik_i(\omega)x} a_i \equiv E(x; \omega) a \quad (3.12)$$

em que,

$$\begin{aligned} E(x; \omega) &= [\phi_1 \phi_2 \phi_3 \dots \phi_p] \Lambda(x; \omega) \\ \Lambda(x; \omega) &= \text{diag}[e^{-ik_i(\omega)x}] \\ a &= \{a_1 \ a_2 \ a_3 \dots a_p\}^T \end{aligned} \quad (3.13)$$

Para um elemento finito de comprimento L , a Equação 3.12 deve satisfazer as condições geométricas e de contorno natural em dois nós finais $x = 0$ e $x = L$: os deslocamentos nodais espectrais e declives (simplesmente, graus nodais de liberdade, DOFs) vetor \mathbf{d} e as forças nodais espectrais (simplesmente forças nodais) vetor \mathbf{f} .

O deslocamento e a inclinação são geralmente chamados de variáveis primárias e sua especificação nos limites constitui as condições geométricas de contorno. As variáveis primárias podem ser relacionadas aos campos de deslocamento na forma de

$$D(x) = L_{GB} U(x) \quad (3.14)$$

onde L_{GB} é o operador diferencial linear para as condições geométricas de contorno. Substituindo a Equação 3.12 na Equação 3.14 e, em seguida, considerando os DOFs nodais \mathbf{d} especificados em dois nós finais do elemento finito temos,

$$d = \left\{ \begin{array}{c} D(0) \\ D(L) \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} L_{GB} E(x; \omega) |_{x=0} \\ L_{GB} E(x; \omega) |_{x=L} \end{array} \right\} a = H(\omega) a \quad (3.15)$$

Ao eliminar o vetor constante, a partir da Equação 3.12 usando a Equação 3.15, as soluções gerais podem ser reescritas em termos do vetor de DOFs nodais como

$$U(x) = N(x; \omega) d \quad (3.16)$$

onde $N(x, \omega)$ é a função de forma dinâmica definida por

$$N(x; \omega) = E(x; \omega) H^{-1}(\omega) \quad (3.17)$$

As forças e momentos internos são geralmente chamados de variáveis secundárias e sua especificação na fronteira constitui as condições de contorno natural. A força dos materiais fornece a relação entre as variáveis secundárias e os campos de deslocamento na forma de

$$F(x) = L_{NB} U(x) \quad (3.18)$$

onde L_{NB} é o operador diferencial linear para as condições de contorno natural. Substituindo a Equação 3.16 na Equação 3.18 e considerando as forças nodais \mathbf{f}_c , que são as cargas concentradas especificadas em dois nós finais do elemento finito, produz a equação do elemento espectral,

$$f_c \equiv \left\{ \begin{array}{c} -F(0) \\ +F(L) \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} -L_{NB}N(x; \omega) |_{x=0} \\ +L_{NB}N(x; \omega) |_{x=L} \end{array} \right\} d \equiv S(\omega)d \quad (3.19)$$

em que,

$$S(\omega) = \left\{ \begin{array}{c} -L_{NB}N(x; \omega) |_{x=0} \\ +L_{NB}N(x; \omega) |_{x=L} \end{array} \right\} d = G(\omega)H^{-1}(\omega) \quad (3.20)$$

com

$$G(\omega) = \left\{ \begin{array}{c} -L_{NB}E(x; \omega) |_{x=0} \\ +L_{NB}E(x; \omega) |_{x=L} \end{array} \right\} \quad (3.21)$$

A matriz $\mathbf{S}(\omega)$ é a matriz de rigidez dinâmica exata dependente da frequência, que é denominada matriz do elemento espectral na literatura. Na Equação 3.19, os sinais de mais (+) e menos (-) refletem a diferença entre as convenções de sinais usadas na teoria da resistência dos materiais e aquelas comumente adotadas nos métodos de elementos, como o FEM convencional e o SEM.

O desenvolvimento recente do software de computação simbólica facilita a obtenção da expressão analítica explícita da matriz do elemento espectral. No entanto, a implementação de computador do procedimento de formulação matricial de elemento espectral pode ser realizada numericamente.

3.2 ELEMENTOS DE BARRA

A vibração longitudinal livre de uma barra uniforme (Teoria da barra) é representada por (RAO, 2011),

$$EAu'' - \rho A\ddot{u} = 0 \quad (3.22)$$

onde $u(x, t)$ é o deslocamento longitudinal, E é o módulo de Young, A é a área de seção transversal e ρ é a densidade de massa. O símbolo (') denota as derivadas com respectiva coordenada espacial x . A força axial interna (N_t) é dada por,

$$N_t(x, t) = EAu'(x, t) \quad (3.23)$$

onde o subscrito t é usado para denotar a variável no domínio do tempo. A solução para a Equação 3.22 é assumida na forma espectral como

$$u(x, t) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} U_n(x; \omega_n) e^{i\omega_n t} \quad (3.24)$$

onde N é o número de pontos e i a unidade imaginária. Substituindo a Equação 3.24 na Equação 3.22 produz um problema para uma frequência discreta específica como

$$EAU'' + \omega^2 \rho AU = 0 \tag{3.25}$$

A solução geral para a Equação 3.25 é assumida como sendo,

$$U(x) = ae^{-ik(\omega)x} \tag{3.26}$$

substituindo a Equação 3.26 na Equação 3.25, uma relação de dispersão pode ser obtida como

$$k^2 - k_l^2 = 0 \tag{3.27}$$

onde k_l é o número de onda para o modo de onda longitudinal e é definido por,

$$k_l = \omega \sqrt{\frac{\rho A}{EA}} \tag{3.28}$$

obtem-se duas raízes reais na Equação 3.27 como

$$k_1 = -k_2 = K_l \tag{3.29}$$

Para um elemento de barra finito de comprimento L , a solução geral para a Equação 3.25 pode então ser obtida na forma de

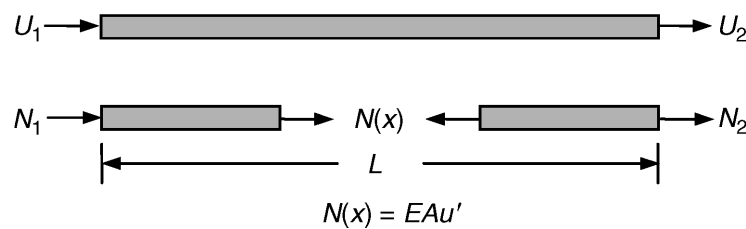
$$U(x) = a_1 e^{-ik_l x} + a_2 e^{+ik_l x} = e(x; \omega) a \tag{3.30}$$

em que a constante, obtendo matricialmente

$$\begin{aligned} e(x; \omega) &= [e^{-ik_l x} \quad e^{+ik_l x}] \\ a &= \{a_1 \quad a_2\}^T \end{aligned} \tag{3.31}$$

Os deslocamentos nodais espectrais do elemento da barra finita mostrado na Figura 10 podem ser relacionados ao campo de deslocamento

Figura 10 – Desenho esquemático da barra e as convenções de sinais tomadas



Fonte: Retirado do livro (LEE, 2009).

$$\{d\} = \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} U(0) \\ U(L) \end{Bmatrix} \tag{3.32}$$

Desenvolvido a Equação 3.32 temos,

$$\{d\} = \begin{Bmatrix} 1 & 1 \\ e^{-ik(\omega)x} & e^{+ik(\omega)x} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{Bmatrix} \quad (3.33)$$

Da Equação 3.23, os componentes espectrais da força axial estão relacionados com $U(x)$ por,

$$\{N(x)\} = EA \{U'\} (x) \quad (3.34)$$

tendo que todas as variáveis que estiverem entre $\{\}$ são consideradas como matriz.

As forças axiais nodais espectrais definidas para o elemento da barra finita podem ser relacionadas às forças definidas pela resistência dos materiais obtendo uma matriz 2x2 como,

$$\{f_c(\omega)\} = \begin{Bmatrix} N_1 \\ N_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -N(0) \\ N(L) \end{Bmatrix} \quad (3.35)$$

Da mesma forma desenvolvido a Equação 3.35 temos,

$$\{f_c\} = EA \begin{Bmatrix} 1 & 1 \\ -ik(\omega)x e^{-ik(\omega)x} & ik(\omega)x e^{+ik(\omega)x} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{Bmatrix} \quad (3.36)$$

Assim, após toda a manipulação das equações é possível definir a matriz espectral como,

$$\{\mathbf{S}_r(\omega)\} = \{\mathbf{f}_c(\omega)\} \{\mathbf{d}(\omega)\}^{-1} \quad (3.37)$$

3.3 AJUSTE DO MÉTODO PARA UM PROBLEMA REAL

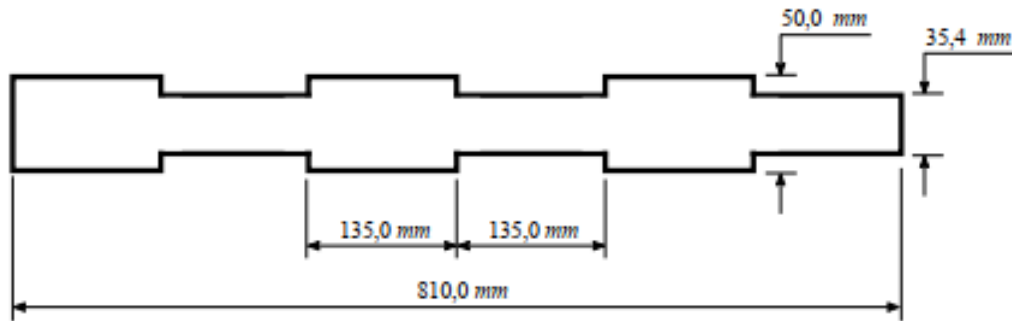
Nesta seção será demonstrado a adaptação realizada no método de barra para que fosse possível realizar a simulação em uma barra periódica, estrutura encontrada em uma tese de doutorado em que foi utilizado os resultados experimentais obtidos por (SANTOS, 2018).

3.3.1 Estudo Experimental

A tese utilizada para a comparação teve como principal proposta, segundo o Autor, o desenvolvimento de uma relação entre as amplitudes de ondas longitudinais transmitidas e incidentes (relação entre o deslocamento na extremidade oposta ao impacto e a extremidade em que ocorre o impacto, também chamado de Transmissibilidade) em termos das propriedades físicas e geométricas de uma genérica estrutura periódica para simplificar o processo do projeto. Usando esta formulação mostra-se que uma barra

periódica pode ser projetada para satisfazer os requisitos de uma supressão de vibração. Um problema hipotético é proposto e resultados experimentais mostram os "stop bands", faixas de frequências em que as ondas são atenuadas.

Figura 11 – Desenho esquemático da barra periódica e suas dimensões



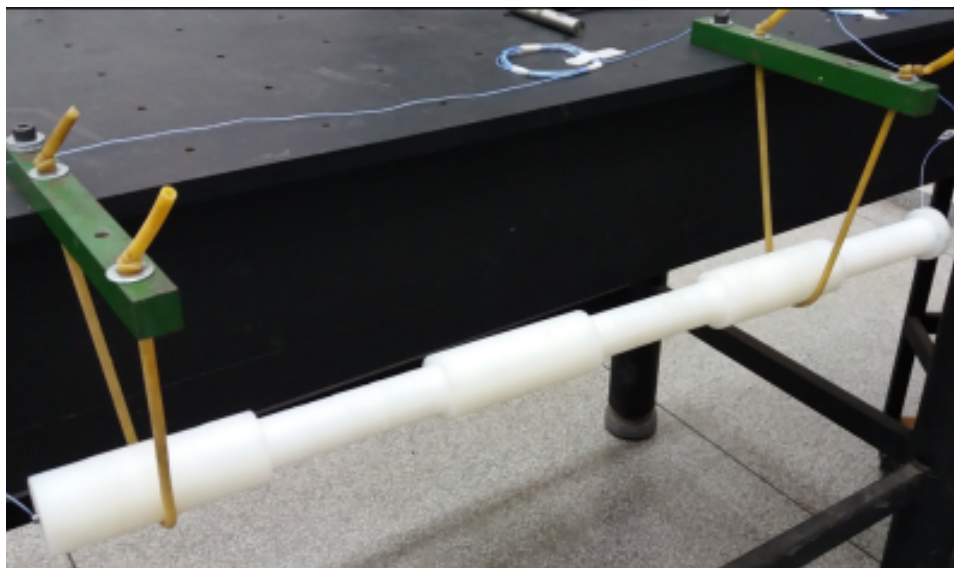
Fonte: Retirado da tese (SANTOS, 2018).

A estrutura periódica estudada foi considerado uma haste periódica cilíndrica com um diâmetro 50mm, o projeto completo é dado como segue:

- Número de células, $N = 3$;
- Razão de área, $S_{ca} = 1.82$;
- Relação de comprimento do segmento, $L_{ca} = 1$;
- Diâmetro do segmento c , $d_c = 50 \text{ mm}$;
- Diâmetro do segmento a , $d_a = (\sqrt{\frac{1}{S_{ca}}}) \times d_c = 37 \text{ mm}$;
- Comprimento do segmento a , $L_a = 135 \text{ mm}$;
- Comprimento do segmento c , $L_c = 135 \text{ mm}$;
- Comprimento total da barra periódica, $L_t = 810 \text{ mm}$.

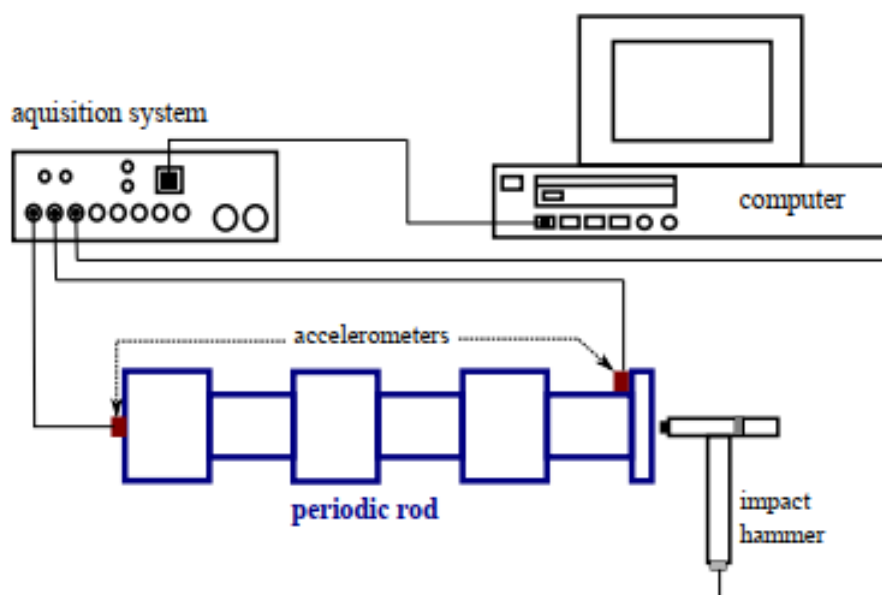
O procedimento experimental realizado teve como equipamento utilizado: dois acelerômetros uniaxiais (miniatura PCB 352A25), um martelo de impacto (PCB 086C04), sistema de aquisição (LMS SCADAS Mobile, 8 canais) e um computador (DELL Intel® Core™ i7-2600). , CPU de 3,4 GHz, 16 GB de RAM). A barra periódica foi suspensa por bandas elásticas para simular a condição livre-livre, como mostra a Figura 12 e, além disso, é excitada por uma força de impacto na extremidade cujo diâmetro é o menor. Então, as vibrações são medidas por dois acelerômetros fixados em ambas as extremidades da haste. As medições são obtidas e pós-processadas utilizando o software LMS Test.Lab Impact Testing versão 14A com as seguintes configurações de aquisição: 6400 Hz de largura de banda, 8192 linhas espectrais, 1,28 tempo de aquisição e 0,78125 de resolução.

Figura 12 – Foto da barra periódica



Fonte: Retirado da tese (SANTOS, 2018).

Figura 13 – Desenho esquemático do procedimento experimental



Fonte: Retirado da tese (SANTOS, 2018).

3.3.2 Discretização do Método de Elemento Espectral

Após a elaboração da matriz espectral de uma barra uniforme mostrada na Seção 3.2 e que o método do elemento espectral se assemelha a método de elementos finitos, porém com duas importantes ressalvas: a formulação do método do elemento espectral é escrita no domínio da frequência; e a função de interpolação do elemento é a solução

analítica da equação da onda, já apresentado na Seção 2.2. Baseado na última característica o número de elementos requerido para um modelo espectral coincidirá com o número de descontinuidades na estrutura, ou seja, é necessário para que o modelo represente a estrutura apresentada anteriormente em que demonstra 6 descontinuidades, realizar a discretização da matriz.

Para calcular a matriz espectral global, ou seja, a matriz que representa a estrutura por completo é necessário encontrar as matrizes que representa cada seção da barra antes da descontinuidade pela Equação 3.37, em que é calculado para cada diâmetro.

Assim sendo a matriz espectral global será

$$S_{global} = \left\{ \begin{array}{ccccccc} S1_{11} & S1_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ S1_{21} & S1_{22} + S2_{11} & S2_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & S2_{21} & S2_{22} + S1_{11} & S1_{12} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & S1_{21} & S1_{22} + S2_{11} & S2_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & S2_{21} & S2_{22} + S1_{11} & S1_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & S1_{21} & S1_{22} + S2_{11} & S2_{12} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & S2_{21} & S2_{22} \end{array} \right\} \quad (3.38)$$

em que, $S1$ é a matriz espectral apenas da barra com o diâmetro $d_a = 37mm$ e $S2$ a matriz espectral da barra com o diâmetro de $d_c = 50mm$. Quando há 2 componentes da matriz somando, significa que ali se encontra o nó, que neste caso foi posicionado na descontinuidade da estrutura.

Em seguida, para que se possa comparar os resultados da tese é necessário converter a resposta para o deslocamento usando a Equação 3.37, isolando a variável desejada e considerando uma entrada de força com um impulso temos,

$$\{d(\omega)\} = \{S_r(\omega)\}^{-1} \quad (3.39)$$

Portanto, após a obtenção da matriz espectral do problema, é realizado a inversa dela obtendo assim uma resposta de deslocamento.

4 RESULTADOS E DISCUSSÕES

O software Scilab versão 6.0.1 foi utilizado para a criação de um *script* de solução, pois é um software para computação numérica, que além de gratuito oferece um eficiente ambiente para a solução de diversos problemas acadêmicos, como, por exemplo, problemas na área da engenharia (ENTERPRISES, 2007). O Scilab trabalha com a representação de ponto flutuante de precisão dupla (64bits) de acordo como padrão IEE754. Isto quer dizer, entre outras coisas, que possui precisão de $52 + 1$ sendo -1022 e 1023 seus menores e maiores expoentes, respectivamente. No *script*, foi realizado o equacionamento da matriz espectral, usando todas as formulações apresentadas na metodologia. Após a obtenção da matriz, foi possível gerar gráficos em que mostram as frequências naturais do sistema (FRFs), assim sendo possível comparar com os valores experimentais retirados da dissertação e o método dos elementos finitos em que as matrizes se encontram em anexo (7).

Após construir toda a formulação para a obtenção da matriz espectral, foi possível gerar uma tabela de comparação dos valores das frequências naturais entre os métodos utilizados, representados na Tabela 1. O valor entre parênteses representa o valor de elementos utilizado para tal solução, sendo 6 o mínimo pois como explicado anteriormente é necessário no mínimo que o número de elementos seja igual ao número de descontinuidades. No método dos elementos finitos, por ser necessário uma quantidade de elementos consideráveis para que seja observado valores de pico de frequências em alta ordem, não é mostrado na tabela alguns valores de frequência no método aplicado com números pequenos de elementos.

Tabela 1 – Frequência natural para cada método

Método	Frequência Natural (Hz)				
	1° frequência	2° frequência	3° frequência	4° frequência	5° frequência
Experimental	467,188	1375	2130,469	3925	4678,125
SEM (6)	434,204	1302,293	2073,927	4003,014	4726,421
FEM(6)	434,204	1350,52	2170,381	4629,967	-
FEM(12)	434,204	1302,293	2073,927	4147,695	-
FEM(18)	434,204	1302,293	2073,927	4051,241	4774,648
FEM(24)	434,204	1302,293	2073,927	4051,241	4774,648
FEM(30)	434,204	1302,293	2073,927	4051,241	4774,648
FEM(42)	434,204	1302,293	2073,927	4051,241	4726,421

É possível verificar que quanto maior a frequência, os valores obtidos pelo FEM vão se distanciando do valor experimental, sendo necessário o aumento do número de elementos para que possa se aproximar do valor real. Também foi preciso 42 elementos para que alcançasse o valor obtido pelo SEM com 6 elementos apenas.

Como explicado anteriormente no desenvolvimento, uma das vantagens do método de elemento espectral é o custo de computação baixa, onde é possível afirmar comparando o tempo que o CPU gasta para executar o script de cada método no software. A comparação é representada pela Tabela 2. Com a tabela é possível perceber que para obter resultados que o SEM disponibiliza com aproximadamente 0,03125 s, o FEM necessita de 2,54687 s.

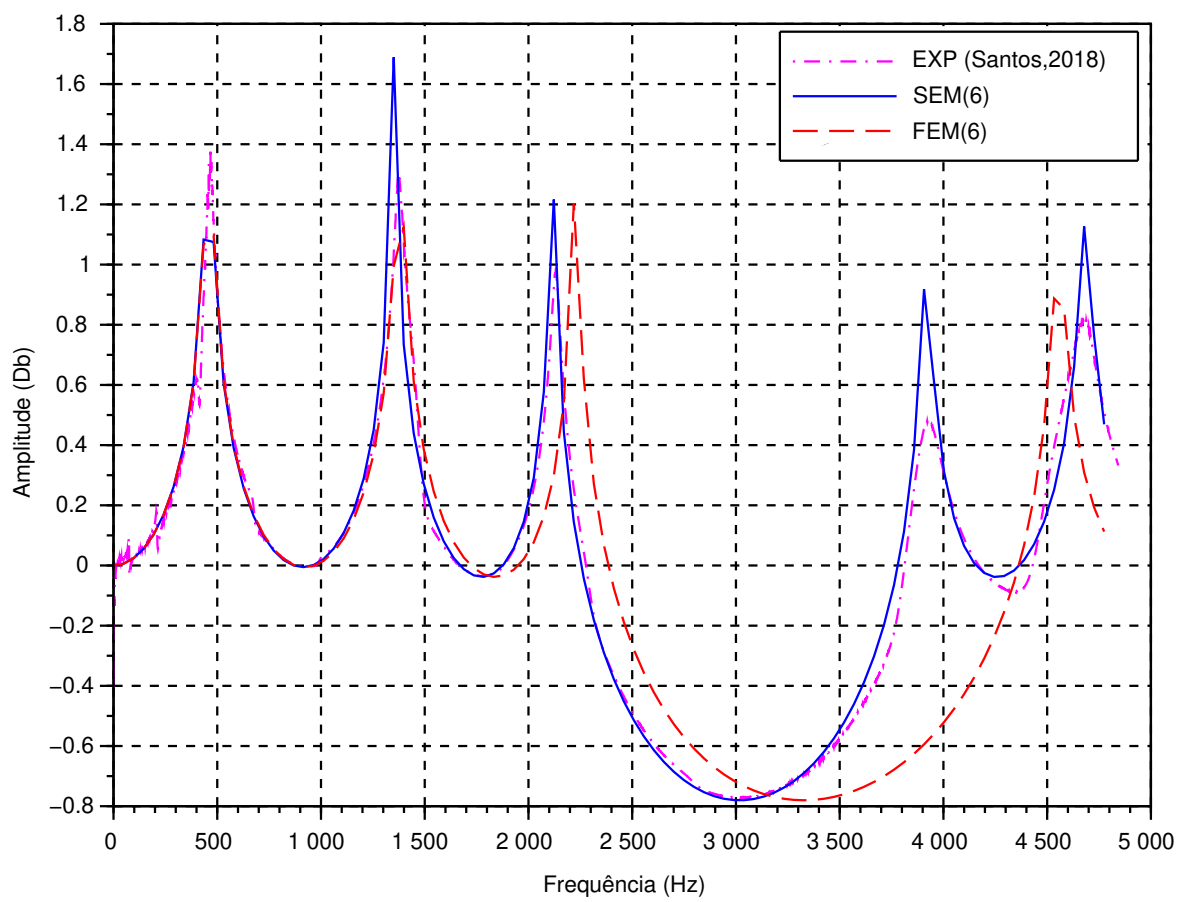
Tabela 2 – Tempo de CPU gasto para executar cada método

Método	Tempo de CPU (s)
SEM(6)	0,03125
FEM(6)	0,015625
FEM(12)	0,03125
FEM(18)	0,8125
FEM(24)	1,25
FEM(30)	1,34375
FEM(42)	2,54687

Para melhor visualização da comparação entre os métodos, se mostrou necessário a plotagem dos gráficos da Transmissibilidade (U_r/U_l), esses que representa o comportamento do sistema ao longo da frequência. As plotagens têm como eixo X as frequências em hertz e o eixo Y como unidade logarítmica em decibéis. Como pode ser observado na Figura 14, o método de elementos finitos com pouco número de elementos não apresenta o ultimo pico, se mostrando ineficiente e a necessidade de mais elementos para que se obtenha um resultado satisfatório, como é demonstrado na Figura 15 e na Figura 16. Nas Figuras é possível notar que nos primeiros picos de frequência, os valores do FEM se mostram próximos ao de elementos espectrais. Porém ao decorrer do aumento da frequência, os valores começam a se afastar. Isso se deve ao método de elementos finitos não ser adequado e impreciso para soluções em frequências altas.

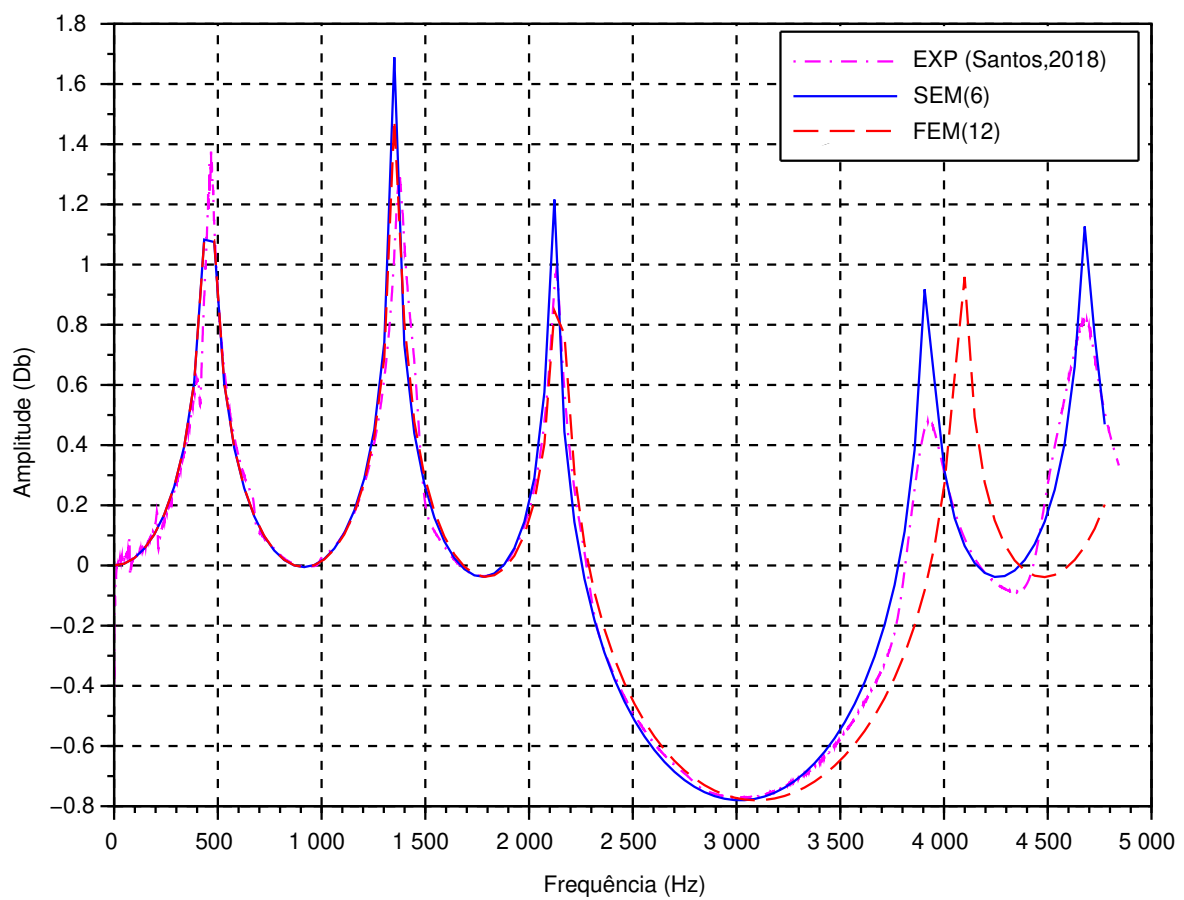
Podemos observar na Figura 20 que em frequências altas o FEM não se mostra tão eficiente quanto em frequências baixas. Então aumentamos o número de elementos (Figura 21) para que obter resposta mais próxima do SEM. Mesmo com alto número de elementos é possível visualizar que o FEM possui um erro na resposta. Portanto é possível afirmar que o FEM não possui precisão em alta frequência como é encontrado no SEM.

Figura 14 – Transmissibilidade: Experimental (SANTOS, 2018), SEM(6) e FEM(6)



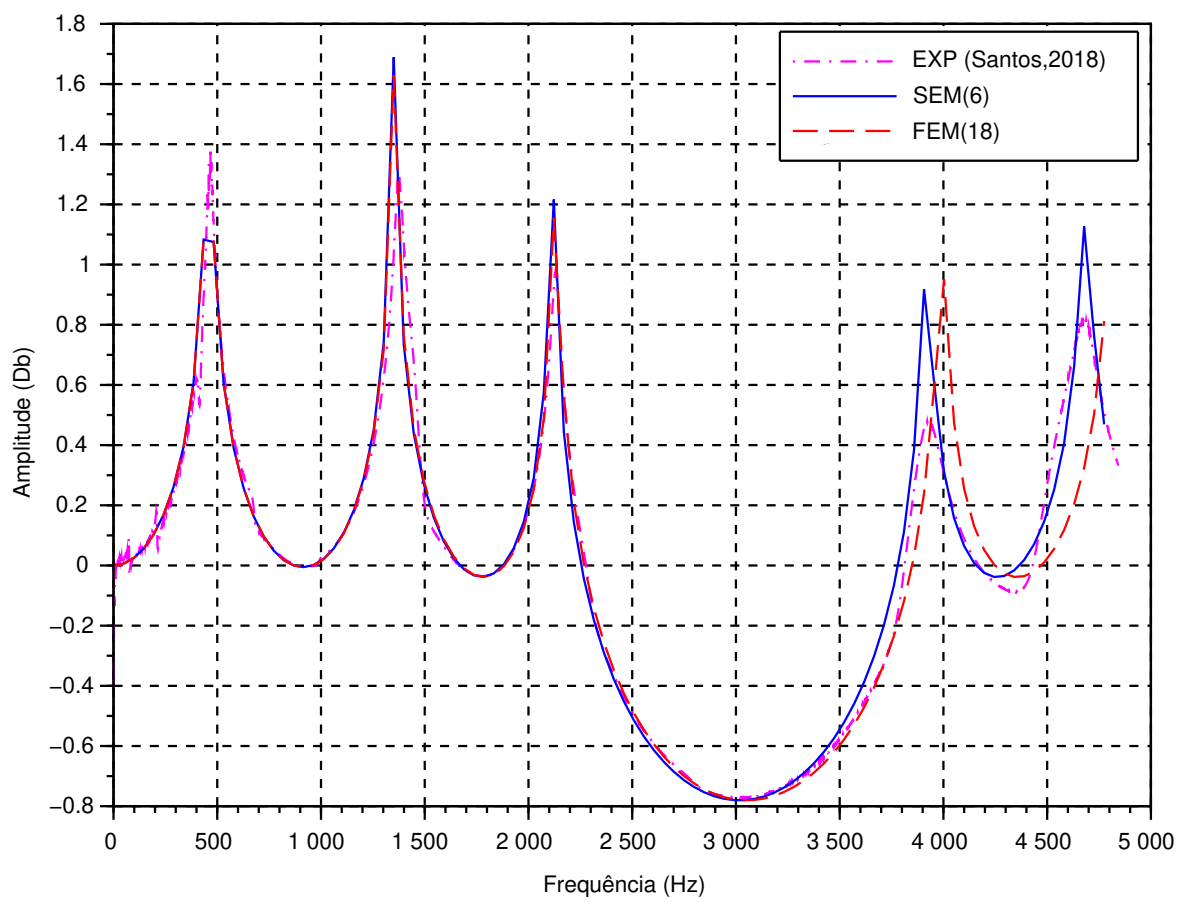
Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 15 – Transmissibilidade: Experimental (SANTOS, 2018), SEM(6) e FEM(12)



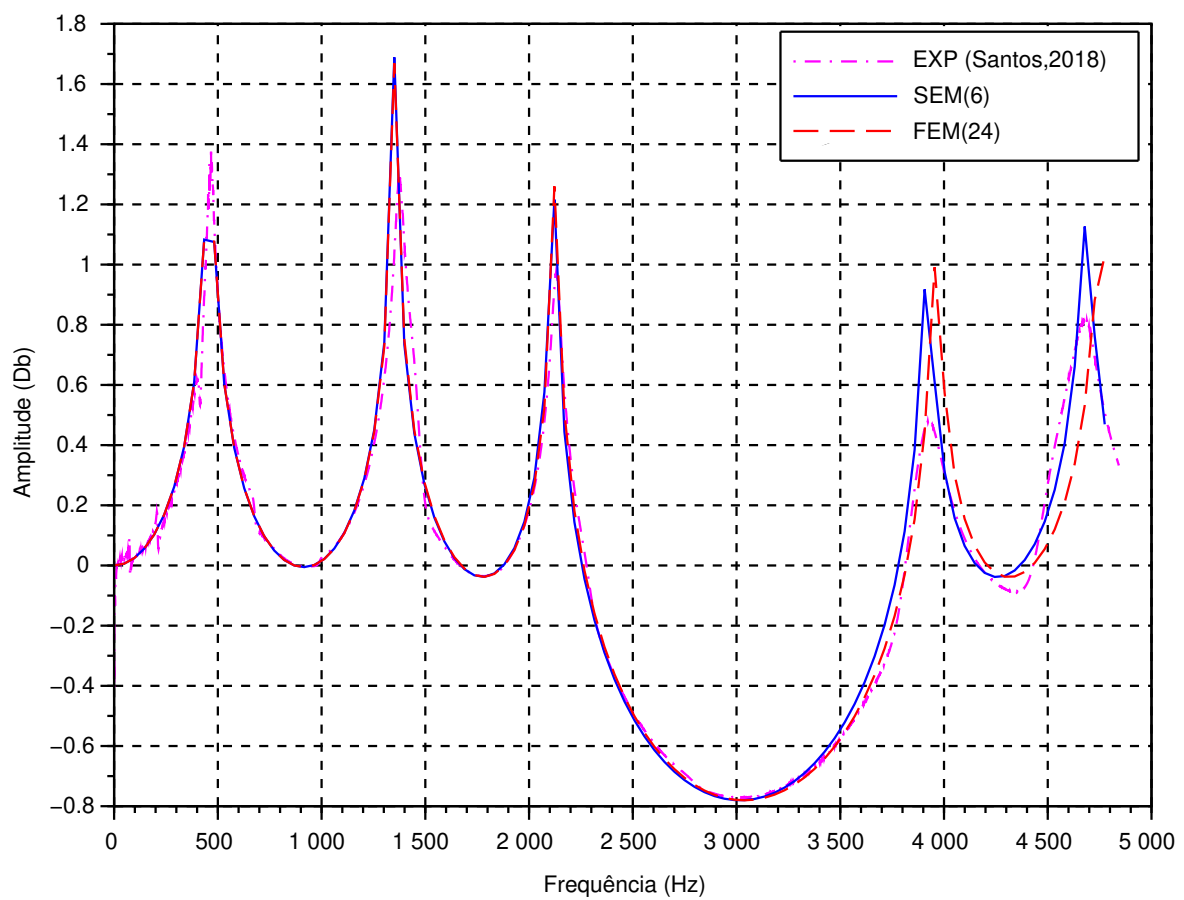
Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 16 – Transmissibilidade: Experimental (SANTOS, 2018), SEM(6) e FEM(18)



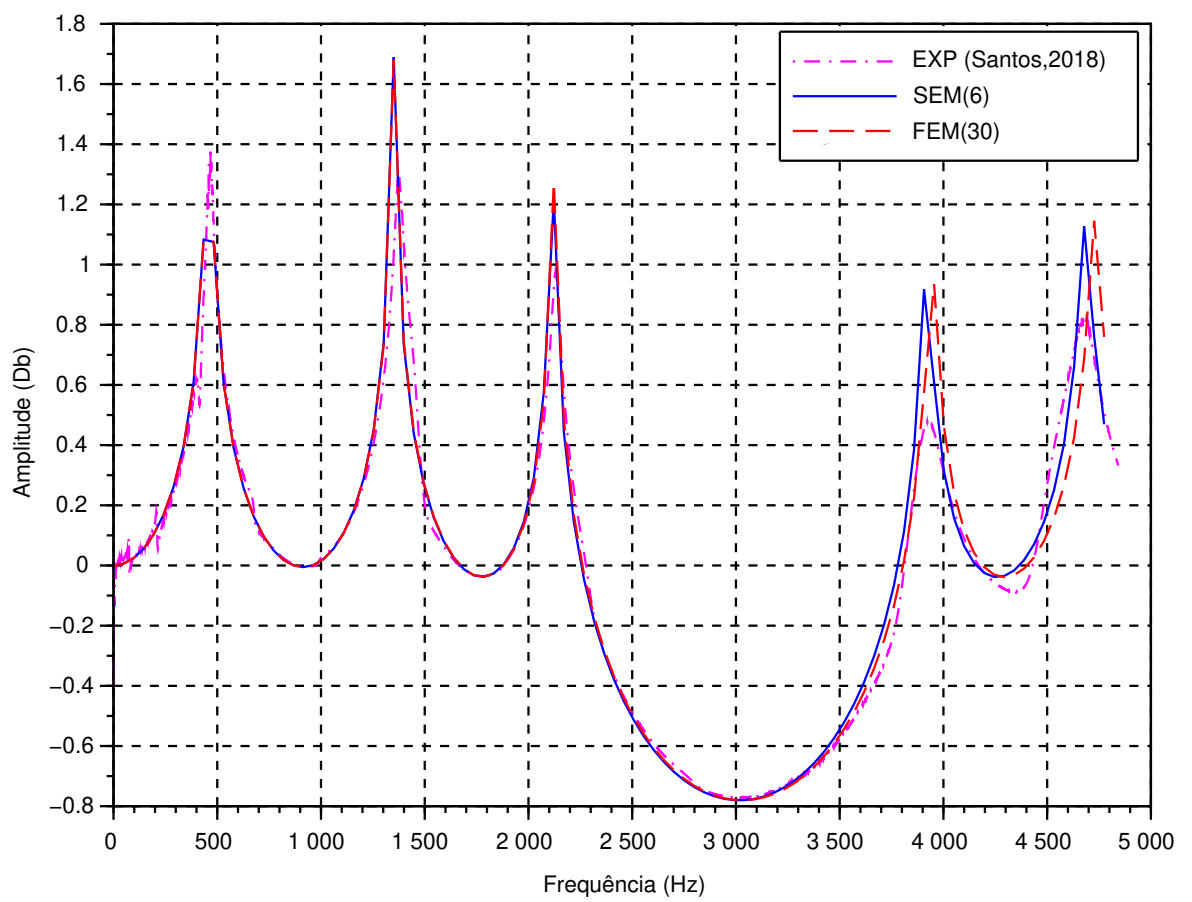
Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 17 – Transmissibilidade: Experimental (SANTOS, 2018), SEM(6) e FEM(24)



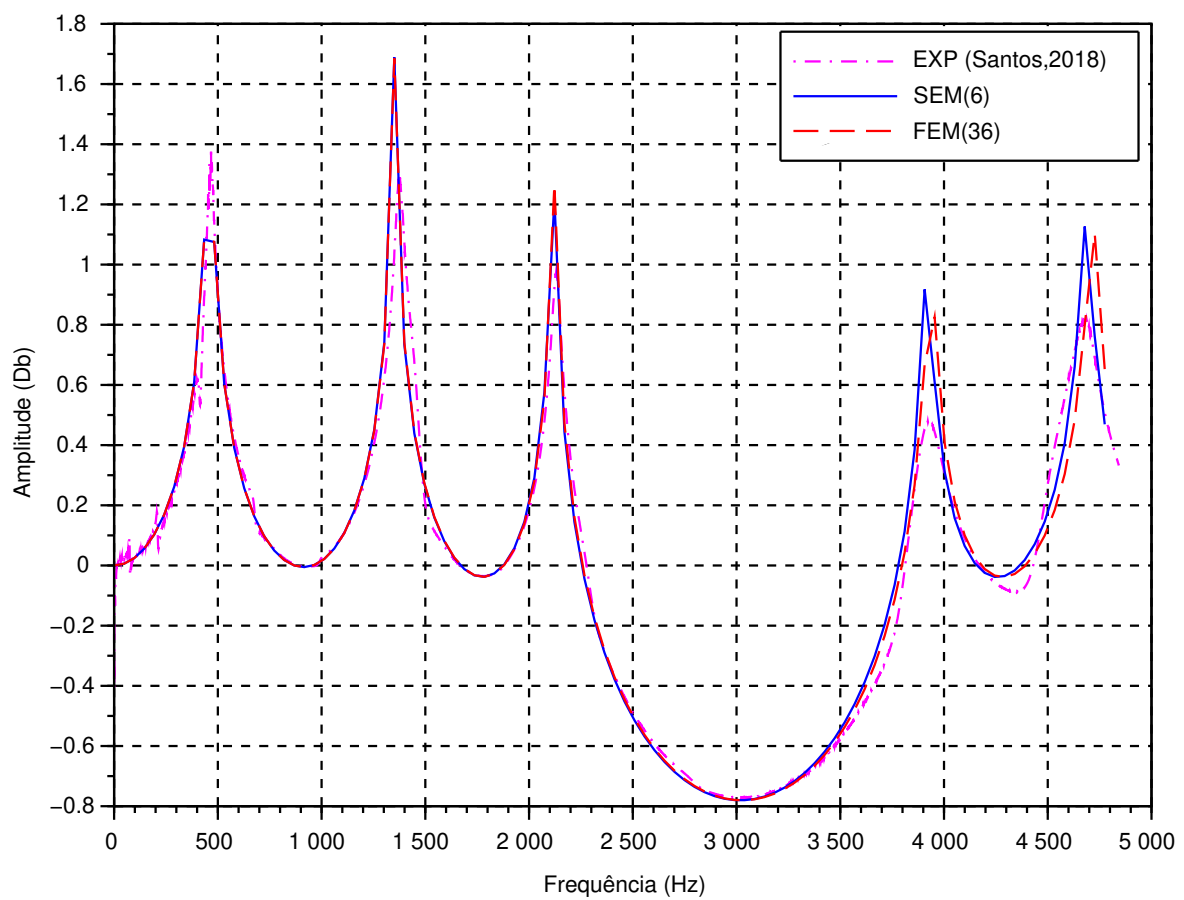
Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 18 – Transmissibilidade: Experimental (SANTOS, 2018), SEM(6) e FEM(30)



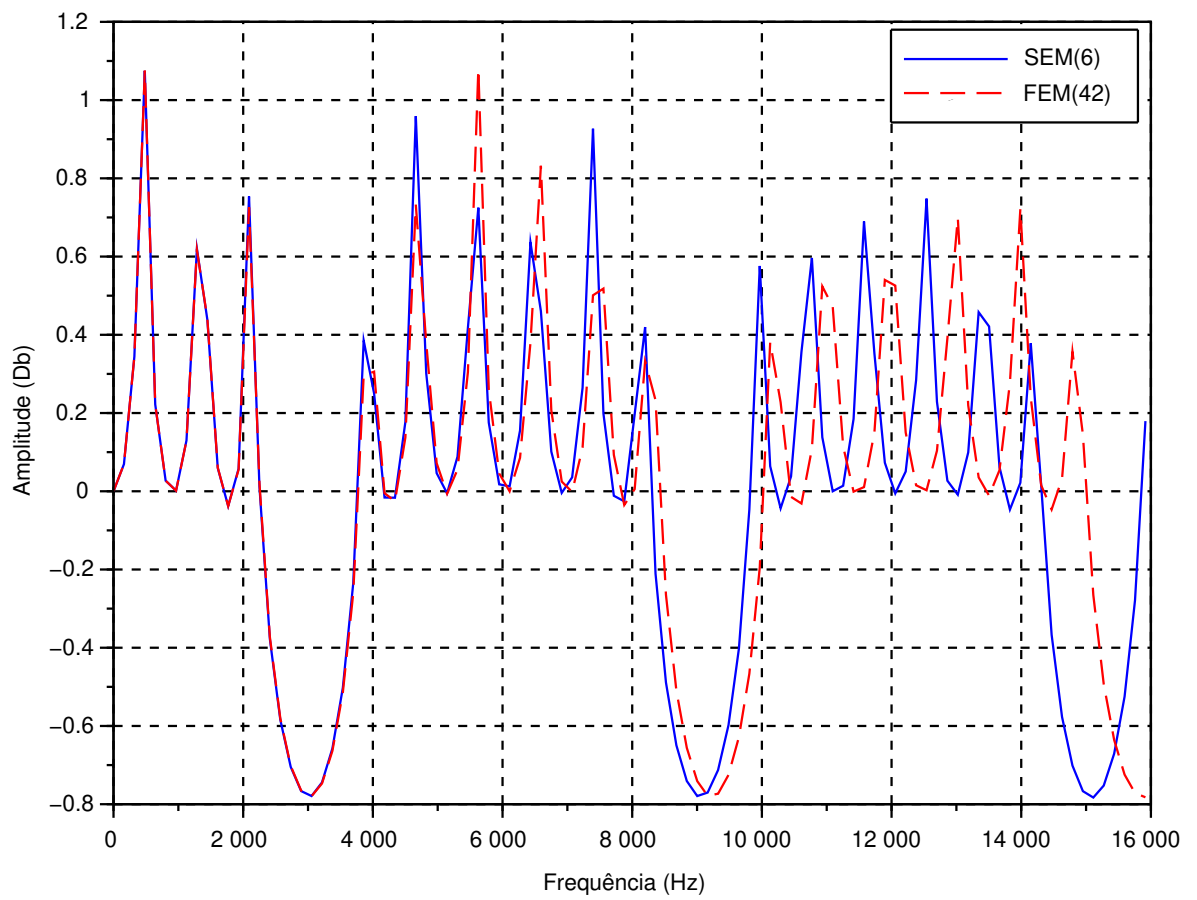
Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 19 – Transmissibilidade: Experimental (SANTOS, 2018), SEM(6) e FEM(42)



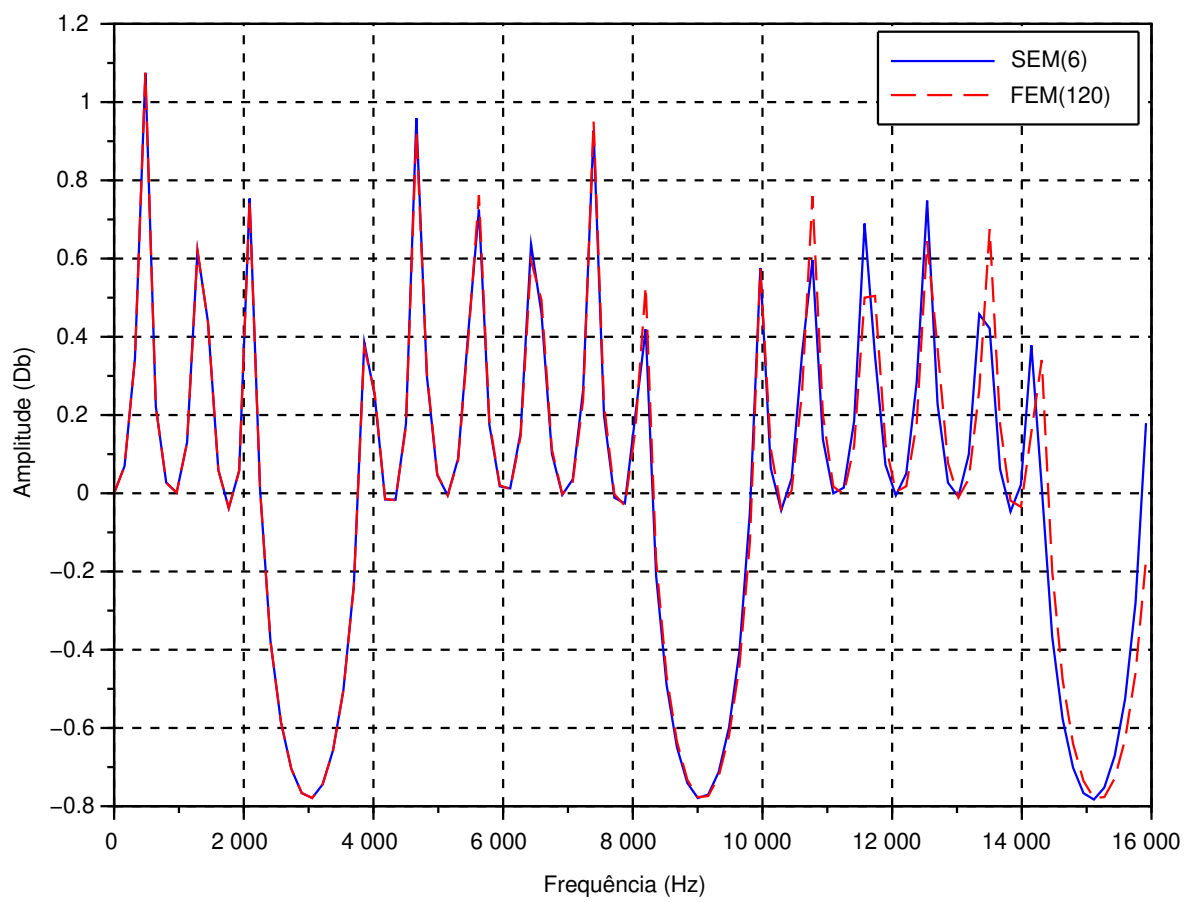
Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 20 – Transmissibilidade: SEM(6) e FEM(30)



Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 21 – Transmissibilidade: SEM(6) e FEM(120)



Fonte: Elaborado pelo autor.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Este trabalho apresentou uma abordagem alternativa em relação ao método utilizado normalmente pelos softwares para projetar estruturas. Toda o conhecimento necessário para o entendimento do método foi apresentado e com isso foi possível reproduzir satisfatoriamente os resultados validados pelos dados obtidos experimentalmente.

Com os resultados é possível concluir que existe sim vantagens do SEM. Para que os valores do método dos elementos finitos aproximasse dos valores experimentais se mostrou necessário o uso de 42 elementos, ou seja, 7 elementos por barra antes da descontinuidade, tendo que quando utilizava o mesmo número de elementos do SEM, 6 elementos, não era mostrada respostas acima de 4000 Hz. Foram apresentados o tempo que o CPU gasta para que o software Scilab gerasse os gráficos de função resposta em frequência, apresentando que o método dos elementos espectrais foi necessário apenas 0,03125 s tendo que o FEM foi preciso 2,54687 s para que todos os valores de frequência fossem próximos.

O desenvolvimento do método de elemento espectral (SEM) e sua comparação com o método de elementos finitos (FEM) se mostram de grande importância, uma vez que foi possível observar notoriamente os benefícios do SEM frente ao FEM. Logo, é necessário um estudo mais aprofundado do SEM, visto que é um método recente e apresenta formulação mais complexa em termos matemáticos. Além disso a implementação deste método em softwares se mostra promissor devido a diminuição do custo computacional de modelagem e simulações.

Finalmente, o estudo de um método não tão popular foi de suma importância para que despertasse curiosidade e a pesquisa de publicações do tema. Também graças aos dados experimentais fornecido pelo professor Rodrigo do curso de Engenharia Mecânica, foi possível a validação do método elaborado neste trabalho.

6 SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS

Durante as pesquisas realizadas para a elaboração do trabalho foram encontradas diversas outras aplicações, já apresentadas no desenvolvimento desta monografia, que também podem ser validados realizando estudos experimentais. Do mesmo modo foi visto que é possível realizar um estudo numérico para contribuir na comparação de dados. Portanto, algumas sugestões são apresentadas da seguinte maneira:

- Realizar um estudo numérico da barra periódica apresentada neste trabalho como mais um meio de obtenção de dados para comparação;
- Se aprofundar em outros tipos de estruturas como temas apresentados no desenvolvimento deste trabalho;
- Utilizar os dados obtidos pelo método para a formulação de monitoração estrutural de danos, em que é possível identificar falhas na estrutura;
- Após a elaboração do item acima, realizar uma comparação de dados com resultados obtidos através de estudo experimental;
- Em parceria com um projeto já existente na faculdade, estudar a vibração que um rotor gera durante seu funcionamento e verificar qual a influência dela na sua vida útil;

7 PUBLICAÇÕES ORIGINADAS DESTE TRABALHO

Congressos Nacionais:

- Fukuoka, F. T.; Conceição, S. M.; Introdução ao método de elementos espectrais através do estudo de barras em movimento longitudinal. In: XXV CREEM - Congresso Nacional de Estudantes de Engenharia Mecânica, 2018, Brasília. Publicado em: <http://abcm.org.br/uploads/Anais%20do%20XXV%20CREEM%20vol.4.pdf>
- Fukuoka, F. T.; Madruga, M. D. S.; Conceição, S. M.; Análise do método de elementos espectrais através do estudo em tubulações com fluxo interno constante. In: XXV CREEM - Congresso Nacional de Estudantes de Engenharia Mecânica, 2018, Brasília. Publicado em: <http://abcm.org.br/uploads/Anais%20do%20XXV%20CREEM%20vol.4.pdf>

REFERÊNCIAS

- ALFORD R.M., K. K.; BOORE, D. Accuracy of finite difference modeling of the acoustic wave equation. *Geophysics*, 1974.
- ASHLEY, H.; HAVILAND, G. Bending vibrations of a pipe line containing glowing fluids. *Journal of Applied Mechanics*, 1950.
- BANERJEE, J. Dynamic stiffness formulation for structural elements: a general approach. *Computers & Structures*, 1997.
- COOK R. D. AND MALKUS, D. S.; PLESHA, M. E.; WITT, R. J. *Concepts and Applications of Finite Element Analys.* [S.l.]: Publication Services, Inc, 2002.
- DOYLE, J. F. Wave propagation in structure: spectral analysis using fast discrete fourier transforms. *2nd ed. Springer-Verlag, New York, USA*, 1997.
- ENTERPRISES, S. *What is Scilab ?* 2007. Disponível em: <<https://www.scilab.org/en/scilab/about>>.
- GOPALAKRISHNAN, A. C. S.; MAHAPATRA, D. R. *Spectral Finite Element Method.* [S.l.: s.n.], 2018.
- KAMMLER, D. A first course in fourier analysis. *Prentice Hall*, 2000.
- KHANA CHANDRA SHEKHAR UPADHYAYB, M. G. A. Spectral element method for parabolic interface problems. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg*, 2018.
- LEE, U. *Spectral Element Method in Structural Dynamics.* [S.l.]: Publication Services, Inc, 2009.
- PEPPER, D. W.; HEINRICH, J. C. *The Finite Element Method.* [S.l.]: Taylor e Francis Group, 2006.
- RAO, J. *Rotor Dynamics.* [S.l.: s.n.], 1996.
- RAO, S. *Mechanical Vibrations.* [S.l.: s.n.], 2011.
- SANTOS, R. B. *An alternative approach to design periodic rods.* Dctoral Thesis, 2018.
- ULLRICH DANIEL R. REYNOLDS, J. E. G. M. A. T. P. A. Impact and importance of hyperdiffusion on the spectral element method: A linear dispersion analysis. *Journal of Computational Physics*, 2018.
- ZHANG HANFENG YAO, H. L. C. New space–time spectral and structured spectral element methods for high order problems. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 2018.

ANEXO A - Matrizes de massa e rigidez para uma barra

As matrizes dos elementos finitos utilizados neste trabalho.

Matriz de rigidez para barra:

$$K = \frac{AE}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Matriz de massa para barra:

$$M = \frac{\rho AL}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$