UNIVERSIDADE FEDERAL DA GRANDE DOURADOS- UFGD
Faculdade de Ciências Exatas e Tecnologia - FACET

Agnaldo Moraes

INFILTRAÇÃO DE ÁGUA NO SOLO: A EQUAÇÃO DE KOSTIAKOV

DOURADOS-MS
2018

Agnaldo Moraes

INFILTRAÇÃO DE ÁGUA NO SOLO: A EQUAÇÃO DE KOSTIAKOV

Dissertação apresentada ao final do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT da Universidade Federal da Grande Dourados como exigência parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Robert Jesús Rodríguez Reyes

DOURADOS-MS
2018

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP).

M828i Moraes, Agnaldo

Infiltração de água no solo: a Equação de Kostiakov / Agnaldo Moraes -- Dourados: UFGD, 2018.

50f. : il. ; 30 cm.

Orientador: Robert Jesús Rodríguez Reyes

Dissertação (Mestrado em Matemática) - Faculdade de Ciências Exatas e Tecnologia, Universidade Federal da Grande Dourados.

Inclui bibliografia

1. Infiltração. 2. Kostiakov. 3. Aplicação. 4. Ensino Médio. 5. Mínimos Quadrados. I. Título.

Ficha catalográfica elaborada automaticamente de acordo com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
FUNDAÇÃO UNIVERSIDADE FEDERAL DA GRANDE DOURADOS
FACULDADE DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLOGIA
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL - PROFMAT

Termo de Aprovação

Após a apresentação, arguição e apreciação pela banca examinadora, foi emitido o parecer APROVADO, para a dissertação intitulada: "Infiltração de água no solo: A equação de Kostiakov", de autoria de **Agnaldo Moraes**, apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática da Universidade Federal da Grande Dourados.

Prof. Dr. Robert Jesús Rodriguez Reyes (Orientador-UFGD)
Presidente da Banca Examinadora

Prof. Dr. Rogério de Oliveira
Membro Examinador (UFGD)

Mercedes Gonzales
Profª. Dra. Mercedes Rocio Gonzales Márquez
Membro Examinador (UEMS)

Dourados/MS, 23 de fevereiro de 2018

Os ideais que iluminaram
o meu caminho são a
bondade, a beleza e a
verdade.(Albert Einstein)

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus, por ter me sustentado e guiado até aqui.

A minha esposa Ana Cláudia Pereira da Costa e meus filhos Diogo e Victor Hugo por todo carinho, incentivo e compreensão, em todos os momentos.

Ao meu orientador, prof. Dr. Robert Jesús Rodríguez Reyes e sua família, por toda dedicação, paciência e auxílio na elaboração desse trabalho.

Aos meus colegas de turma, pelo companheirismo e por contribuírem com meu aprendizado.

Aos familiares e amigos pelo incentivo no decorrer desta jornada.

A todos os professores dessa instituição, pelo compromisso com o ensino e por tanto terem cooperado com minha formação.

A todos os professores, funcionários e estudantes da Escola Estadual Professora Lígia Terezinha Martins, pela disposição em realizar o ensino com qualidade.

A todos que, direta ou indiretamente, contribuíram para a realização do presente trabalho.

RESUMO

O presente trabalho nos traz um contexto sobre a infiltração de água no solo, bem como, o estudo da equação que o caracteriza. Há um enfoque na Equação de Kostiakov, mostrando as propriedades matemáticas envolvidas no cálculo de infiltração e velocidade de infiltração. Finalmente, apresentamos uma proposta de 4 aulas trabalhadas com alunos do 3º ano do Ensino Médio, na Escola Estadual Professora Lígia Terezinha Martins em Rio Brilhante-MS, onde o cálculo de infiltração é apresentado como uma possibilidade de aplicação dos conteúdos matemáticos estudados na escola.

Palavras-chave: Álgebra, Análise, Geometria e Topologia, Métodos Matemáticos.

ABSTRACT

The present work brings us a context about the infiltration of water in the soil, as well as the study of the equation that characterize it. There is a focus on the Kostiakov Equation, showing the mathematical properties involved in calculating infiltration and velocity of infiltration. Finally, we present a proposal of 4 classes worked with students of the 3rd year of High School, at the Lígia Terezinha Martins State School in Rio Brilhante-MS, where the infiltration calculation is presented as a possibility of applying the mathematical contents studied in the school.

Keywords: Algebra, Analysis, Geometry and Topology, Mathematical Methods.

Lista de Figuras

Lista de Tabelas

Sumário

1 Introdução

Existe uma distância entre as aplicações da matemática e o conteúdo desta disciplina visto nas escolas. Muitos estudantes sabem a matemática aplicada, mas não sabem abstrair e compreender os ensinamentos vistos na escola. Os Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio (PCNEM) orientam que os alunos concluintes do Ensino Médio:

> (...) saibam usar a Matemática para resolver problemas práticos do quotidiano; para modelar fenômenos em outras áreas do conhecimento; compreendam que a Matemática é uma ciência com características próprias, que se organiza via teoremas e demonstrações; percebem a Matemática como um conhecimento social e historicamente construído; saibam apreciar a importância da Matemática no desenvolvimento científico e tecnológico ([1])

A dificuldade em encontrar exemplos e atividades práticas é um dos fatores que impossibilitam, ao professor, o processo de dinamização de sua aula. É importante encontrar a valorização da contextualização em sala de aula, relacionada à construção de significados ([1]). Sempre que são trabalhadas situações cotidianas dos estudantes no âmbito escolar, essas conexões trazem significado, e permitem o exercício da cidadania. Quando situações ligadas à realidade são trazidas pelo professor, o estudante internaliza os conceitos de maneira significativa, possibilitando que as formalidades da matemática escolar sejam construídas de maneira prática e útil, levando tais conceitos, mesmo que limitados, ao uso cotidiano ([2] e [3]).

As diretrizes curriculares almejam um Ensino Médio, que possibilite aos estudantes articularem os conceitos científicos as suas experiências cotidianas e a outras áreas do conhecimento. A experiência de vivenciar sua própria aprendizagem como um trabalho de construção de conhecimentos, proporciona uma vida escolar de maior protagonismo e responsabilidade ([4]). Nesse caso, ao se fazer interligação do conhecimento com a realidade, ele se torna significativo para o aprendizado dos alunos.

A aplicação da matemática é realizada de muitas formas nas ciências agronômicas. Como Rio Brilhante-MS é um município com vários assentamentos rurais e fazendas, muitos estudantes se interessam em prosseguir no ensino superior nas áreas de agronomia, veterinária, agronegócio, entre outros eixos ligados às ciências agrárias. Neste contexto, o presente trabalho apresenta um estudo introdutório sobre a infiltração de água no solo, bem como uma das equações que a caracteriza: a equação de Kostiakov. A equação de infiltração de Kostiakov explora conteúdos importantes da disciplina de matemática estudados no ensino médio, destacando-se: função afim, função exponencial, equações logarítmicas, matrizes e determinantes.

O trabalho mostra uma experiência realizada na Escola Estadual Professora Lígia Terezinha Martins com a turma do 3° ano A do ensino médio, relativo a uma atividade prática de determinação da infiltração e velocidade de infiltração de água no solo, utilizando o infiltrômetro de anéis concêntricos, seguido de aulas para representação dos gráficos da infiltração acumulada e da velocidade de infiltração. Desta forma, a experiência mostra uma forma de aplicação nas ciências agrárias dos conteúdos matemáticos estudados no ensino médio.

A realização da aula prática sobre infiltração é uma forma de possibilitar o estudo de conteúdos da matemática do ensino médio de maneira mais dinâmica, de forma que os alunos vivenciem um pouco da aplicação de assuntos aprendidos na sala de aula. Sendo assim, o intuito é também fornecer parâmetros aos professores de matemática que permitam tornar a matemática mais atrativa e próximo da realidade aos alunos que têm vínculo com o campo.

Este trabalho será dividido em 5 capítulos, que se distribuem como segue:

O capítulo 1 refere-se à introdução.

No capítulo 2, introduzimos algumas terminologias básicas, bem como definições e exemplos sobre matrizes e determinantes.

No capítulo 3, apresentaremos o método dos mínimos quadrados para o ajuste de parâmetros de uma reta (reta de mínimos quadrados) a dados experimentais.

No capítulo 4 aplicaremos o método dos mínimos quadrados para a equação de infiltração de Kostiakov.

No capítulo 5 apresentaremos uma experiência prática do cálculo da infiltração. Nesse capítulo, tentamos encontrar a equação de Kostiakov que modela a infiltração da água do solo na Escola Estadual Professora Lígia Terezinha Martins, localizada no município de Rio Brilhante no estado de Mato Grosso do Sul.

2 Noções preliminares

O propósito deste capítulo é apresentar algumas definições, notações e teoremas sobre matrizes, sistemas lineares. Assim, este conteúdo facilitará o entendimento dos capítulos posteriores. As demonstrações dos teoremas listados estão fora do escopo do presente trabalho; porém, podem ser vistos com detalhes em [5] e [6].

2.1 A definição de matrizes

Definição 2.1. ***Matriz:***
Dados m e n em $\mathbb{N}$, define-se uma matriz real de ordem m por n ou simplesmente uma matriz m por n (escreve-se $m \times n$), como uma tabela formada por elementos de $\mathbb{R}$ distribuídos em m linhas e n colunas. Estes elementos de $\mathbb{R}$ são chamados entradas da matriz.

Exemplo 2.1. A matriz $[-5]$ é uma matriz 1×1, ao passo que

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

é uma matriz 2×3. As entradas da primeira linha da matriz são dadas pelos números reais $1, 2$ e 3, e as entradas da segunda linha da matriz são dadas pelos números reais $4, 5$ e 6.

É usual indicar as entradas de uma matriz arbitrária A pelos símbolos A_{ij}, ou ainda a_{ij}, onde os índices indicam, nessa ordem, a linha e a coluna em que o elemento se encontra. Assim, uma matriz $m \times n$ é usualmente representada por

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

ou por $A = [a_{ij}]_{m \times n}$, ou simplesmente por $A = [a_{ij}]$, quando a ordem da matriz estiver subentendida.

Definição 2.2. ***Matriz linha e matriz coluna**.*
Toda matriz $1 \times n$ é chamada de uma matriz linha (ou vetor linha) e toda matriz $m \times 1$ é chamada de uma matriz coluna (ou vetor coluna).

Exemplo 2.2. A matriz,

$$\begin{bmatrix} 5 & 4 & -1 & 7 & 8 \end{bmatrix}$$

é uma matriz linha de ordem 1×5 e a matriz,

$$\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 8 \end{bmatrix}$$

é uma matriz coluna de ordem 3×1.

Definição 2.3. ***Matriz quadrada***
Uma matriz $n \times n$ é chamada de matriz quadrada de ordem n.

Exemplo 2.3. As matrizes

$$\begin{bmatrix} 1 & 1/2 \\ & \\ 1/2 & 1/3 \end{bmatrix} \text{ e } \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0,1 & 0,3 & 0,7 \\ 0,01 & 0,09 & 0,49 \end{bmatrix}$$

são matrizes quadradas de ordem 2 e 3 respectivamente.
Em uma matriz quadrada $A = [a_{ij}]$ de ordem n, as entradas a_{ii} com $1 \leq i \leq n$, formam a diagonal principal de A.

Exemplo 2.4. A diagonal principal da última matriz do Exemplo 2.3 está dada pelas entradas $1; 0,3$ e $0,49$.

Definição 2.4. ***Matriz identidade***

A matriz de ordem n com entradas 1 na diagonal principal e demais entradas nulas,

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

é chamada matriz identidade de ordem n e denotada usualmente por I_n.

Definição 2.5. ***Matriz nula***
Uma matriz $m \times n$ cujas entradas são todas iguais a zero é chamada de uma matriz nula.

Exemplo 2.5. A matriz

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

é uma matriz nula de ordem 2×3.

2.2 Algumas operações com matrizes

A seguir apresentam-se algumas operações básicas com matrizes.

Definição 2.6. ***Igualdade de matrizes.***
Duas matrizes são definidas como sendo iguais se tiverem a mesma ordem e suas entradas correspondentes forem iguais.

Exemplo 2.6. Considere as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 7 \\ -2 & x \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 4 & 7 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

Se $x = 1$, então $A = B$, mas para todos os outros valores de x as matrizes A e B não são iguais, pois nem todas suas entradas coincidem. Não existe valor de x tal que $A = C$, pois A e C têm ordens diferentes.

Definição 2.7. ***Adição de matrizes***
Se $A = [a_{ij}]$ e $B = [b_{ij}]$ são duas matrizes de mesma ordem $m \times n$, a soma de A e B, denotada por $A + B$, é a matriz $C = [c_{ij}]$ de ordem $m \times n$, tal que $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ para todo $1 \leq i \leq m$ e para todo $1 \leq j \leq n$.

Exemplo 2.7.

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 & -3 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Definição 2.8. ***Matriz oposta.***
Dada uma matriz $A = [a_{ij}]$, define-se a matriz oposta de A, como a matriz $-A = [-a_{ij}]$. A adição de matrizes tem propriedades semelhantes à adição nos números reais, como mostra o teorema a seguir.

Teorema 2.1. *Se A, B e C são matrizes de mesma ordem $m \times n$, então:*

(i) $A + (B + C) = (A + B) + C$, associatividade da adição;

(ii) $A + B = B + A$, comutatividade da adição;

(iii) $A + 0 = A$, onde 0 denota a matriz nula $m \times n$ (elemento neutro);

(iv) $A + (-A) = 0$.

Definição 2.9. ***Subtração de matrizes.***
Se A e B são duas matrizes de mesma ordem $m \times n$, define-se a subtração de A e B como

$$A - B = A + (-B)$$

.

Exemplo 2.8.

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 6 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -4 \end{bmatrix}$$

Definição 2.10. ***Multiplicação de matrizes***
Sejam $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ *e* $B = [b_{ij}]_{n\times p}$ *duas matrizes. O produto de* A *por* B*, denotado por* AB*, é definido como a matriz* $C = [c_{ij}]_{m\times p}$ *tal que*

$$c_{ij} = a_{i1}.b_{1j} + \cdots + a_{in}.b_{nj}$$

para todo $1 \leq i \leq m$ *e para todo* $1 \leq j \leq p$*.*
Vamos explicar esta fórmula para obter o elemento da matriz AB *que se encontra na i-ésima linha e j-ésima coluna:*
"Na matriz A*, destaque a i-ésima linha, e na matriz* B*, destaque a j-ésima coluna. Feito isso, multiplique ordenadamente o primeiro elemento da linha com o primeiro elemento da coluna, o segundo elemento da linha com o segundo elemento da coluna, etc., o último elemento da linha com o último elemento da coluna e finalmente some todos esses números".*

Exemplo 2.9. Considere as matrizes

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \text{ e } \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Como A possui duas colunas e B duas linhas o produto está bem definido. Além disso, sabe-se que AB será de ordem 3×2. Portanto, o produto AB é dado por

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.(-1) + 0.1 & 1.1 + 0.(-1) \\ 0.(-1) + (-1).1 & 0.1 + (-1).(-1) \\ 2.(-1) + 4.1 & 2.1 + 4.(-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$$

No seguinte teorema apresentam-se algumas propriedades da multiplicação de matrizes.

Teorema 2.2. *Desde que as operações sejam possíveis, tem-se:*

(i) $A(B + C) = AB + AC$;

(ii) $(A + B)C = AC + BC$;

(iii) $(AB)C = A(BC)$;

(iv) $AI = IA = I$.

Definição 2.11. ***Transposta de uma matriz.***
Dada uma matriz $A = [a_{ij}]_{m\times n}$*, chama-se transposta de* A*, e denota-se por* A^t*, a matriz* $[b_{ij}]_{n\times m}$*, onde*

$$a_{ij} = b_{ij}$$

para todo $1 \leq i \leq n$ *e para todo* $1 \leq j \leq m$*.*

Exemplo 2.10. Algumas matrizes e suas transpostas.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \end{bmatrix}, \; B = \begin{bmatrix} 6 & 1 \\ 1 & 4 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$$

$$A^t = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 6 \\ 3 & 7 \\ 4 & 8 \end{bmatrix}, \qquad B^t = \begin{bmatrix} 6 & 1 & 3 \\ 1 & 4 & 5 \end{bmatrix}$$

Exemplo 2.11. Para a matriz quadrada:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -8 & 4 & 9 \\ 7 & 6 & 10 \end{bmatrix},$$

sua transposta A^t é obtida "refletindo" A em torno de sua diagonal principal

$$A^t = \begin{bmatrix} 1 & -8 & 7 \\ 1 & 4 & 6 \\ 0 & 9 & 10 \end{bmatrix}$$

Definição 2.12. ***Matriz Inversa***
Seja a matriz quadrada $A_{n\times n} = [a_{ij}]_{n\times n}$. Denomina-se matriz inversa de A, a matriz A^{-1} tal que $A.A^{-1} = A^{-1}.A = I_n$ .Uma matriz quadrada A é dita invertível (ou não singular) se A admite uma matriz inversa.

Propriedades da Matriz Inversa

(i) Se a matriz A é não singular admite inversa A^{-1} e esta é única.

(ii) Se a matriz A é não singular, sua inversa A^{-1} também é. A matriz inversa de A^{-1} é A.

(iii) A matriz identidade I é não singular e é sua própria inversa: $I = I^{-1}$.

(iv) Se a matriz A é não singular, sua transposta A^t também é. A matriz inversa de A^t é $(A^{-1})^t$.

(v) Se as matrizes A e B são não singulares e de mesma ordem, o produto AB é uma matriz não singular. A inversa de AB é a matriz $B^{-1}A^{-1}$.

2.3 Sistemas lineares e matrizes

A seguir, mostra-se como as matrizes aparecem de maneira natural no contexto de sistemas de equações lineares.

Definição 2.13. ***Sistema de equações lineares***
Um sistema de equações lineares com m equações e n incógnitas é uma expressão da

forma

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \qquad\qquad\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \tag{2.1}$$

onde os $a'_{ij}s$ *e os* b'_is, *para* $1 \leq i \leq m$ *e* $1 \leq j \leq n$, *são números reais dados.*

Utilizando a definição de igualdade de matrizes (definição 2.6) e multiplicação de matrizes (definição 2.10), decorre que o sistema (2.1) pode ser escrito como uma simples equação matricial:

$$AX = B$$

onde,

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix}; \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

As matrizes A, X e B são chamadas, respectivamente, de matriz dos coeficientes do sistema, matriz das incógnitas e matriz dos termos independentes.

Uma sequência de números $s_1, s_2, \cdots, s_n$ é chamada uma **solução** do sistema se

$$x_1 = s_1, x_2 = s_2, \ldots, x_n = s_n$$

é uma solução de cada equação do sistema.

Um sistema linear que não possui soluções é chamado de **inconsistente**; se existir pelo menos uma solução do sistema, diz-se que ele é **consistente**

Exemplo 2.12. O conjunto de equações

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + 2x_3 &= 9 \\ 2x_1 + 4x_2 - 3x_3 &= 1 \\ 3x_1 + 6x_2 - 5x_3 &= 0 \end{aligned}$$

é um sistema de equações lineares e pode ser escrito como

$$AX = B$$

onde,

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & -3 \\ 3 & 6 & -5 \end{bmatrix}; \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{bmatrix} 9 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Além disso, o sistema é consistente pois tem a solução $x_1 = 1$, $x_2 = 2$ e $x_3 = 3$.

Exemplo 2.13. O sistema de equações

$$
\begin{aligned}
x_1 + x_2 &= 1 \\
x_1 + x_2 &= 3 \\
x_1 + x_3 &= 8 \\
x_1 + x_3 &= 2
\end{aligned}
$$

é um sistema inconsistente pois não é verdade que

$$x_1 + x_2 = 1 = 3$$

2.4 Determinante de uma matriz

A definição de determinante de uma matriz quadrada A, denotada por $\det(A)$ ou $|A|$, pode ser dada de diversas maneiras. Neste trabalho, adota-se a definição recursiva de determinante. Esta definição permite calcular o determinante através de determinante de matrizes de menor ordem.

Se $A = [a]$ é uma matriz 1×1, então $\det(A) = a$; se A é uma matriz 2×2.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

então,

$$\det(A) = a_{11}.a_{22} - a_{12}.a_{21} \tag{2.2}$$

Para definir o determinante para matrizes 3×3, usa-se a definição de determinantes 2×2. Assim, se A é uma matriz 3×3

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

então,

$$\det(A) = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

De forma resumida, pode-se escrever:

$$\det(A) = a_{11}|A_{11}| - a_{12}|A_{12}| + a_{13}|A_{13}| \tag{2.3}$$

onde, A_{11}, A_{12} e A_{13} são obtidas de A eliminando a primeira linha e uma das três colunas.

Observação 2.1. A expressão do determinante em (2.2) é muito fácil de lembrar. Basta tomar o produto dos elementos da diagonal principal da matriz A e dele subtrair o produto dos elementos da outra diagonal.

Observação 2.2. A expressão do determinante em (2.3) também pode ser reescrita como

$$\det(A) = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

Esta última expressão pode ser recuperada a partir da Regra de Sarrus ([7]) muito utilizada no Ensino Médio.

$$\left|\begin{array}{ccc|cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{array}\right.$$

$$- \quad - \quad - \qquad\qquad + \quad + \quad +$$

Exemplo 2.14. Para calcular o determinante da matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 10 \\ 1 & 0 & 5 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

do esquema

$$\begin{array}{ccccc} 1 & -1 & 10 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 5 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 1 & 3 \end{array}$$

$$- \quad - \quad - \qquad\qquad + \quad + \quad +$$

obtém-se

$$\det(A) = 0 - 5 + 30 - 0 - 15 + 2 = 12$$

Agora, pode-se obter uma definição recursiva para o determinante. Quando $n = 3$, $\det(A)$ é definido usando os determinantes das matrizes 2×2, A_{1j}, como em (2.3) acima. Quando $n = 4$, $\det(A)$ faz uso dos determinantes das matrizes 3×3, A_{1j}. De modo geral, um determinante $n \times n$ é definido através de determinantes de matrizes $(n-1) \times (n-1)$.

Definição 2.14. ***Determinante de uma matriz de ordem*** n
Para $n \geq 2$, o determinante da matriz $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ é definida pela expressão:

$$\det(A) = a_{11}\det(A_{11}) - a_{12}\det(A_{12}) + \cdots + (-1)^{1+n}a_{1n}\det(A_{1n})$$

onde, os elementos $a_{11}, a_{12}, a_{13}, \ldots, a_{1n}$ são da primeira linha de A e A_{1j}, $j \in 1, 2, \ldots, n$, representa a matriz obtida eliminando, em A a primeira linha e a j-ésima coluna.

Exemplo 2.15. Para calcular o determinante da matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 10 & 1 \\ 1 & 5 & 0 \\ 1 & 2 & 9 \end{bmatrix},$$

segue-se pela definição 2.14

$$\begin{aligned}
\det(A) &= a_{11}|A_{11}| - a_{12}|A_{12}| + a_{13}|A_{13}| \\
&= 1|A_{11}| - 10|A_{12}| + 1|A_{13}| \\
&= 1.\begin{vmatrix} 5 & 0 \\ 2 & 9 \end{vmatrix} - 10.\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 9 \end{vmatrix} + 1.\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \\
&= 1(45-0) - 10(9-0) + 1(2-5) \\
&= -48
\end{aligned}$$

2.5 A regra de Cramer

O próximo teorema fornece uma fórmula para a solução de certos sistemas de equações lineares. Esta fórmula é conhecida como a regra de Cramer.

Teorema 2.3. ***Regra de Cramer***

Seja $AX = B$ um sistema $n \times n$. Se $\det(A) \neq 0$, então o sistema tem uma única solução dada por:

$$x_j = \frac{\det(A_j)}{\det(A)}, \qquad j = 1, 2, \ldots, n,$$

onde, A_j denota a matriz obtida de A substituindo a sua j-ésima coluna pela única coluna de B.

Exemplo 2.16. Usando a regra de Cramer para resolver o sistema linear:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 87 \\ x_1 + x_3 = 123 \\ x_2 + x_3 = 66 \end{cases}$$

Do sistema, tem-se:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \qquad A_1 = \begin{bmatrix} 87 & 1 & 0 \\ 123 & 0 & 1 \\ 66 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 87 & 0 \\ 1 & 123 & 1 \\ 0 & 66 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 87 \\ 1 & 0 & 123 \\ 0 & 1 & 66 \end{bmatrix}$$

Como $\det(A) = -2 \neq 0$, pela regra de Cramer:

$$\begin{aligned} x_1 = \frac{\det(A_1)}{\det(A)} &= \frac{-144}{-2} = 72 \\ x_2 = \frac{\det(A_2)}{\det(A)} &= \frac{-30}{-2} = 15 \\ x_3 = \frac{\det(A_3)}{\det(A)} &= \frac{-102}{2} = 51 \end{aligned}$$

Observação 2.3. Embora a regra de Cramer forneça uma fórmula explicita das soluções de um sistema, ela é ineficiente para cálculos manuais, com exceção do caso de matrizes 2×2, ou, talvez, 3×3. Isto, porque o número de equações que ela envolve é muito grande, quando se trabalha com muitas equações.

2.6 Espaços Vetoriais

Definição 2.15. *Um espaço vetorial é um conjunto não vazio V de objetos, chamados vetores, sobre os quais estão definidas duas operações, chamadas soma e multiplicação por escalar (número real), sujeitas aos dez axiomas listados a seguir*

1. *A soma de u e v,denotada por $u + v$, pertence a V.*
2. $u + v = v + u$.
3. $(u + v) + w = u + (v + w)$.
4. *Existe um vetor nulo 0 em V tal que $v + 0 = v$.*
5. *Para cada v em V, existe um vetor $-v$ em V tal que $v + (-v) = 0$.*
6. *O múltiplo escalar de v por c, denotado por cv, pertence a V.*
7. $c(u + v) = cu + cv$.
8. $(c + d)u = cu + du$.
9. $c(du) = (cd)u$.
10. $1u = u$.

Exemplo 2.17. Os espaços $\mathbb{R}^n$, com $n \geq 1$, são espaços vetoriais. Os três casos especiais mais importantes de $\mathbb{R}^n$ são $\mathbb{R}$ (os números rais), $\mathbb{R}^2$ (os vetores do plano) e $\mathbb{R}^3$ (os vetores do espaço tridimensional).

Definição 2.16. *O comprimento (ou norma) de um vetor $v = (v_1, \ldots, v_n)$ em $\mathbb{R}^n$ é o escalar não negativo $||v||$ definido por*

$$||v|| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2, \ldots, v_n^2}$$

Exemplo 2.18. O comprimento do vetor $v = (1, -3, 5)$ é

$$||v|| = \sqrt{(1)^2 + (-3)^2 + (5)^2} = \sqrt{35}$$

Definição 2.17. *Sejam $v_1, \ldots, v_n$, vetores em um espaço vetorial V. Dizemos que os vetores $v_1, \ldots, v_n$, são linearmente independentes, ou LI, se a equação*

$$a_1v_1 + \ldots + a_nv_n = 0$$

é satisfeita somente quando $a_1 = \cdots = a_n = 0$. Caso exista algum $a_i \neq 0$, dizemos que os vetores $v_1, \ldots, v_n$, são linearmente dependentes, ou LD.

Exemplo 2.19. Vamos determinar se os vetores $v_1 = (4, 0, 1)$, $v_2 = (0, 2, 1)$ são dependentes ou independentes. Para isso, da equação

$$a_1v_1 + a_2v_2 = 0$$

temos que

$$a_1(4, 0, 1) + a_2(0, 2, 1) = (0, 0, 0)$$

ou, equivalentemente, por

$$(4a_1, 2a_2, a_1 + a_2) = (0, 0, 0)$$

Igualando os componentes correspondentes, dá

$$\begin{aligned} 4a_1 &= 0 \\ 2a_2 &= 0 \\ a_1 + a_2 &= 0 \end{aligned}$$

Resolvendo o sistema, obtemos

$$a_1 = a_2 = 0$$

Assim, o vetores $v_1 = (4, 0, 1)$, $v_2 = (0, 2, 1)$ são linearmente independentes.

Exemplo 2.20. Os vetores $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ e $(0, 0, 1)$ são linearmente independentes, pois a equação

$$x(1, 0, 0) + y(0, 1, 0) + z(0, 0, 1) = (0, 0, 0),$$

é satisfeita somente se $x = y = z = 0$.

3 Mínimos Quadrados

3.1 Problemas de mínimos quadrados

Um sistema linear de m equações com n incógnitas $Ax = b$ pode não ter uma solução, isto é, o sistema é inconsistente. Na prática, esta inconsistência se deve a erros de medição nos coeficientes de A. Em tais situações, procuramos um x que faça com que Ax fique o mais próximo possível de b.

Podemos pensar em Ax como uma aproximação de b. Quanto menor a distância entre b e Ax, dada por $\|b - Ax\|$, melhor a aproximação. O problema geral de mínimos quadrados é encontrar um x que torne $\|b - Ax\|$ o menor possível.

Definição 3.1. *Se A for $m \times n$ e b pertencer ao espaço vetorial $\mathbb{R}^m$, uma solução de mínimos quadrados para $Ax = b$ será um vetor x^* pertencente ao espaço vetorial $\mathbb{R}^n$ tal que*

$$\|b - Ax^*\| \leq \|b - Ax\|,$$

para todo x em $\mathbb{R}^n$.

Para esclarecer a origem do termo mínimos quadrados, seja,

$$b - Ax = \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_m \end{bmatrix}$$

O termo "solução de mínimos quadrados" vem do fato que minimizar $\|b - Ax\|$, também minimiza

$$\|b - Ax\|^2 = e_1^2 + e_2^2 + \cdots + e_m^2$$

Daí o termo mínimos quadrados.

3.2 Solução de mínimos quadrados

Uma maneira de encontrar alguma solução de mínimos quadrados de $Ax = b$ é resolvendo a equação

$$A^t Ax = A^t b.$$

Esta equação representa um sistema de equações conhecido como equações normais para $Ax = b$. O fato anterior baseia-se no seguinte teorema

Teorema 3.1. *Seja $Ax = b$ um sistema linear de m equações e n incógnitas. O conjunto de soluções de mínimos quadrados de $Ax = b$ coincide com o conjunto não vazio de soluções das equações normais de $A^tAx = A^tb$.*

Demonstração. ver [5] □

Como uma aplicação do teorema anterior, consideremos o seguinte

Exemplo 3.1. Encontre a solução de mínimos quadrados do sistema inconsistente $Ax = b$ (exemplo 2.13) em que

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 8 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Solução: Do teorema 3.1, temos que resolver a equação normal $A^tAx = A^tb$. Para isso, calcula-se

$$A^tA = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$A^tb = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 8 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 \\ 4 \\ 10 \end{bmatrix}$$

A solução do sistema $A^tAx = A^tb$ é dado por

$$x_1 = 5 - x_3, \quad x_2 = -3 + x_3$$

onde x_3 é arbitrário. Logo a solução geral de mínimos quadrados de $Ax = b$ é da forma

$$x^* = \begin{bmatrix} 5 \\ -3 \\ 0 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Em geral, as soluções de mínimos quadrados de sistemas lineares não são únicas. No entanto, o próximo teorema nos dá um critério para o caso em que existe apenas uma solução para mínimos quadrados de $Ax = b$.

Teorema 3.2. *Seja A uma matriz $m \times n$. As seguintes afirmações são equivalentes:*

(a) A equação $Ax = b$ tem uma única solução de mínimos quadrados para cada $b \in \mathbb{R}^m$.

(b) As colunas de A são linearmente independentes.

(c) A matriz A^tA é invertível.

Quando essas informações são verdadeiras, a solução de mínimos quadrados x^* é dada por

$$x^* = (A^tA)^{-1}A^tb$$

Demonstração. Ver [5] □

Exemplo 3.2. Encontre a solução de mínimos quadrados do sistema inconsistente $Ax = b$, onde:

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 11 \end{bmatrix}$$

Solução: Observe que as colunas de A são linearmente independentes (exemplo 2.19), portanto pelo teorema 3.2 existe uma única solução de mínimos quadrados. Para calcular a solução, temos que

$$A^tA = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 17 & 1 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$$

$$A^tb = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 11 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 19 \\ 11 \end{bmatrix},$$

De modo que a equação normal $A^tAx = A^tb$ é

$$\begin{bmatrix} 17 & 1 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 19 \\ 11 \end{bmatrix}$$

Resolvendo este sistema, obtemos uma única solução de mínimos quadrados, a saber,

$$x^* = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

3.3 Retas de mínimos quadrados

Um exemplo de aproximação por mínimos quadrados é ajustar uma reta a um conjunto de pontos no plano determinados experimentalmente.

Suponha que queiramos ajustar uma reta $y = a + bx$ aos pontos

$$(x_1, y_1), (x_2, y_2), \cdots, (x_n, y_n)$$

determinados experimentalmente. Se esses pontos estiverem na reta, os coeficientes incógnitos a e b satisfarão às equações:

$$\begin{aligned} y_1 &= a + bx_1 \\ y_2 &= a + bx_2 \\ &\vdots \\ y_n &= a + bx_n \end{aligned}$$

Pode-se escrever este sistema como

$$Ax = b \tag{3.1}$$

Em que

$$A = \begin{bmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & x_n \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}, \quad \text{e} \quad b = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

Se os pontos dados não pertencerem à reta, é impossível encontrar coeficientes a e b que satisfaçam o sistema (3.1) exatamente, ou seja, o sistema é inconsistente. Neste caso, procura-se uma solução de mínimos quadrados.

$$x^* = \begin{bmatrix} a^* \\ b^* \end{bmatrix}$$

A reta $y = a^* + b^*x$ chama-se reta de mínimos quadrados ou ajuste linear de mínimos quadrados aos dados se os coeficientes da reta provêm de uma solução de mínimos quadrados. Lembramos que, uma solução de mínimos quadrados de (3.1) minimiza

$$\|b - Ax\|^2 \tag{3.2}$$

Expressando (3.2) em termos de componentes, obtém-se

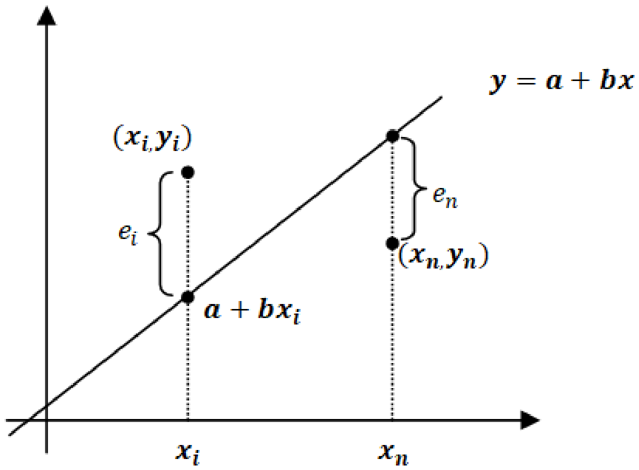
$$\|b - Ax\|^2 = e_1^2 + e_2^2 + \cdots + e_n^2 \tag{3.3}$$

onde

$$e_i = |y_i - a - bx_i|, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Os valores e_i podem ser interpretados como a distância vertical entre a reta $y = a + bx$ e os pontos de dados (x_i, y_i). Ver a seguinte figura

Figura 3.1: Interpretação de e_i



Fonte: Adaptado de Anton [6, p. 377]

Esta distância é uma medida do “erro” que resulta no ponto (x_i, y_i) do ajuste inexato de $y = a + bx$ a este ponto dos dados.

Desde que (3.3) é minimizado por x^*, a reta de mínimos quadrados minimiza a soma dos quadrados desses erros estimados, e daí o nome de reta de mínimos quadrados.

3.4 Equações normais

Pelo teorema 3.1 a solução de mínimos quadrados de (3.1) pode ser obtido resolvendo o sistema normal associado

$$A^t A x = A^t b$$

ou, em forma estendida,

$$\begin{bmatrix} n & \sum_{i=1}^{n} x_i \\ \sum_{i=1}^{n} x_i & \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a^* \\ b^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{n} y_i \\ \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \end{bmatrix}$$

Além disso, pode ser facilmente mostrado ([5]) que as colunas de A são linearmente independentes se, e somente se, pelo menos dois dos números $x_1, x_2, \ldots, x_n$ são distintos. Neste caso segue do teorema 3.2 que a solução de mínimos quadrados é única e é dada por

$$a^* = \frac{\sum x_i \sum x_i y_i - \sum y_i \sum x_i^2}{(\sum x_i)^2 - n \sum x_i^2}$$

$$b^* = \frac{\sum x_i \sum y_i - n \sum x_i y_i}{(\sum x_i)^2 - n \sum x_i^2}$$

Observação 3.1. Observe que simplificamos os símbolos de somatória; ao menos que haja menção ao contrário, todas as somatórias irão de $i = 1$ a n.

Assim, existe uma única reta de mínimos quadrados ou ajuste linear de mínimos quadrados $y = a^* + b^* x$ aos pontos dados.

Vejamos um exemplo de obtenção de uma reta de mínimos quadrados.

Exemplo 3.3. Encontre a equação $y = a^* + b^* x$ da reta de mínimos quadrados que melhor se ajusta aos pontos $(2, 6), (3, 7), (5, 10), (6, 13)$.

Solução: As seguintes quantidades podem ser calculadas:

$$n = 4 \qquad \sum x_i y_i = 161 \qquad \sum x_i^2 = 74 \qquad \sum x_i = 16 \qquad \sum y_i = 36$$

Assim a equação normal será dada por

$$\begin{bmatrix} 4 & 16 \\ 16 & 74 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a^* \\ b^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 36 \\ 161 \end{bmatrix}$$

daí obtemos que

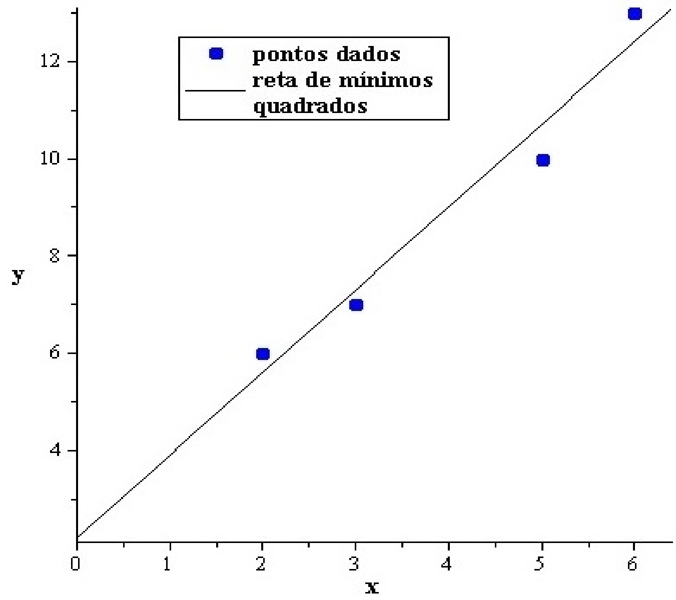
$$a^* = 2,2, \quad b^* = 1,7.$$

Logo, a reta de mínimos quadrados é dada por,

$$y = 2,2 + 1,7x$$

A reta, junto aos dados, é mostrada no gráfico a seguir

Figura 3.2: Reta de mínimos quadrados.



Fonte: O autor (2017)

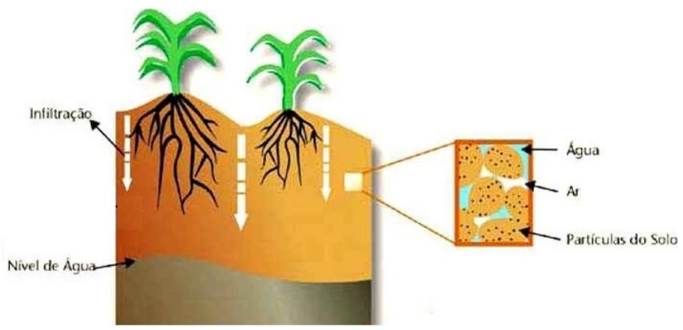
4 A infiltração de água no solo

4.1 Infiltração

A infiltração é um dos mais importantes processos que compõem o ciclo hidrológico, pois é um fator determinante na disponibilização de água para as culturas, na recarga dos aquíferos subterrâneos, no manejo e conservação do solo e da água, etc.

Define-se infiltração como um processo dinâmico de penetração vertical de água através da superfície de solo ([8] e [9]). Após a passagem da água pela superfície do solo, ou seja, cessada a infiltração, a camada superior atinge um "alto" teor de umidade, enquanto que as camadas inferiores apresentam-se ainda com "baixos" teores de umidade (ver Figura 4.1). Há então, uma tendência de um movimento descendente de água provocando um molhamento das camadas inferiores.

Figura 4.1: Infiltração da água no solo.



Fonte: Adaptado de Carvalho [10, p. 12]

Em termos gerais, a infiltração é um processo desacelerado. Começa com uma velocidade alta que vai diminuindo gradativamente com o tempo até atingir um valor final constante.

O termo velocidade ou taxa de infiltração refere-se à quantidade de água que atravessa a unidade de área da superfície do solo por unidade de tempo. Como foi descrito anteriormente, a velocidade de infiltração decresce com o tempo até atingir um certo equilíbrio. Nessas condições, quando a velocidade praticamente não varia com o tempo, passa a ser chamada de velocidade de infiltração básica e denotada por Vib ([8] e [9]).

O conhecimento da Vib é de fundamental importância para definir os métodos de conservação de solo, planejamento e dimensionamento de sistemas de irrigação e drenagem. Os valores de Vib são os seguintes:

Solo Argiloso: $Vib < 5$

Solo Franco-argiloso: $5 < Vib < 10$

Solo Franco: $10 < Vib < 20$

Solo Franco-arenoso: $20 < Vib < 30$

Solo Arenoso: $Vib > 30$

4.2 Equação de Kostiakov

Modelar a infiltração é um processo muito complexo, pois existem muitas variáveis que influenciam o seu comportamento, como por exemplo, as propriedades da superfície do solo que variam com o tempo. Sendo assim, diversas equações têm sido propostas com o objetivo de descrever de forma aproximada a infiltração. Destacam-se, entre outras, ([11],[12],[13] e [14]):

- Equação de Philip
- Equação de Kostiakov
- Equação de Horton
- Equação de Smith

Uma das mais utilizadas e simples é a equação de Kostiakov [12], representada pela expressão

$$I = kt^a \tag{4.1}$$

em que:

$I =$ infiltração acumulada ou volume infiltrado total (mm ou cm)

$t =$ tempo a partir do início da infiltração (min)

$k =$ constante positiva dependente do solo

$a =$ constante dependente do solo, variando de 0 a 1.

Observação 4.1. A equação de Kostiakov (4.1) possui limitações para longos tempos de irrigação. Essa equação descreve bem a infiltração para pequenos tempos.

Derivando-se a equação (4.1) em função do tempo, tem-se a velocidade de infiltração instantânea VI, também chamada de taxa de infiltração da água no solo.

$$VI = \frac{dI}{dt} = akt^{a-1} \tag{4.2}$$

A expressão (4.2) pode-se exprimir como

$$VI = \frac{dI}{dt} = \frac{ak}{t^{1-a}} \tag{4.3}$$

Uma observação atenta da equação (4.3) revela que $VI \to 0^+$ quando $t \to \infty$. Essa situação não é real uma vez que, na realidade, a velocidade tende para a Vib. No entanto, para a maior parte dos intervalos de tempo de interesse, as equações (4.1), (4.2) podem representar adequadamente o processo de infiltração da água no solo.

4.3 Cálculo das constantes a e k para a equação de Kostiakov

A determinação das constantes a e k da equação de Kostiakov (4.1) pode ser feita utilizando-se o método dos mínimos quadrados, isto é, encontrando a reta de mínimos quadrados. Entretanto, esse método é baseado no fato de que a relação entre as variáveis dependentes e independentes é linear. Esse não é o caso da equação de Kostiakov (4.1). Assim, o objetivo a seguir é transformar a equação de Kostiakov (4.1) para uma forma linear. Para isso, aplicando-se logaritmo na equação (4.1), obtemos

$$\log I = \log k + a \log t$$

Dessa forma, constata-se que essa apresentação da equação de infiltração é uma equação da reta do tipo $Y = A + BX$, em que:

$$\begin{aligned} Y &= \log I \\ A &= \log k \\ B &= a \\ X &= \log t \end{aligned}$$

Da seção 3.4 temos que as constantes A e B são determinadas pelas seguintes expressões

$$A = \frac{\sum X_i \sum X_i Y_i - \sum Y_i \sum X_i^2}{(\sum X_i)^2 - n \sum X_i^2} \tag{4.4}$$

$$B = \frac{\sum X_i \sum Y_i - n \sum X_i Y_i}{(\sum X_i)^2 - n \sum X_i^2} \tag{4.5}$$

onde n é o número de pares de valores formados por t e I. Os valore t e I são obtidos por meio de teste de campo. Isso será explicado na proxima seção 4.3.1.

Obtidos os valores de A e B, determina-se k e a das expressões

$$10^A = k \qquad B = a$$

ou seja, o valor de k é encontrado aplicando o antilog A e a é o próprio valor de B.

O seguinte exemplo ilustra melhor o procedimento anterior

Exemplo 4.1. Um determinado solo foi submetido ao teste de infiltração (método do infiltrômetro de anel) e foram levantados os seguintes dados

Tabela 4.1: Teste de infiltração

t(min)	I (cm)	$X = \log t$	$Y = \log I$	X^2	XY
0	0	-	-	0,0000	0,0000
4	1,5	0,6021	0,1761	0,3625	0,1060
9	2,7	0,9542	0,4314	0,9106	0,4116
14	3,7	1,1461	0,5682	1,3136	0,6512
19	4,8	1,2788	0,6812	1,6352	0,8711
24	5,6	1,3802	0,7482	1,9050	1,0327
29	6,6	1,4624	0,8195	2,1386	1,1985
34	7,6	1,5315	0,8808	2,3454	1,3489
39	8,6	1,5911	0,9345	2,5315	1,4868
44	9,4	1,6435	0,9731	2,7009	1,5993
54	11,0	1,7324	1,0414	3,0012	1,8041
64	12,9	1,8062	1,1106	3,2623	2,0059
74	14,4	1,8692	1,1584	3,4940	2,1652
84	16,2	1,9243	1,2095	3,7029	2,3274
94	17,8	1,9731	1,2350	3,8932	2,4368
104	19,4	2,0170	1,2878	4,0684	2,5975
114	20,9	2,0569	1,3201	4,2309	2,7154
124	22,5	2,0934	1,3522	4,3824	2,8307
134	24,0	2,1271	1,3802	4,5246	2,9359
144	25,5	2,1584	1,4065	4,6585	3,0358
154	26,8	2,1875	1,4281	4,7852	3,1241
164	28,4	2,2148	1,4533	4,9055	3,2189
174	30,0	2,2405	1,4771	5,0201	3,3096
184	31,6	2,2648	1,4997	5,1294	3,3965
194	33,2	2,2878	1,5211	5,2340	3,4801
204	34,8	2,3096	1,5416	5,3344	3,5605
214	36,4	2,3304	1,5611	5,4308	3,6380
Total		47,1834	29,1969	90,9012	57,2887

Fonte: Carvalho [10, p. 75]

Apresentar as equações de infiltração e velocidade de infiltração propostas pelo modelo de Kostiakov.

Solução: Da tabela temos que o número de pares de valores t e I é $n = 26$. Das equações (4.4), (4.5) e da tabela anterior, obtemos

$$A = \frac{\sum X_i \sum X_i Y_i - \sum Y_i \sum X_i^2}{(\sum X_i)^2 - n \sum X_i^2}$$

$$A = \frac{47,1834(57,2887) - 90,9012(29,1969)}{(47,1834)^2 - 26(90,9012)} = -0,3575$$

$$B = \frac{\sum X_i \sum Y_i - n \sum X_i Y_i}{(\sum X_i)^2 - n \sum X_i^2}$$

$$B = \frac{47,1834(29,1969) - 26(57,2887)}{(47,1834)^2 - 26(90,9012)} = 0,8158$$

Desde que

$$\log k = -0,3575 \quad \text{e} \quad B = a = 0,8158$$

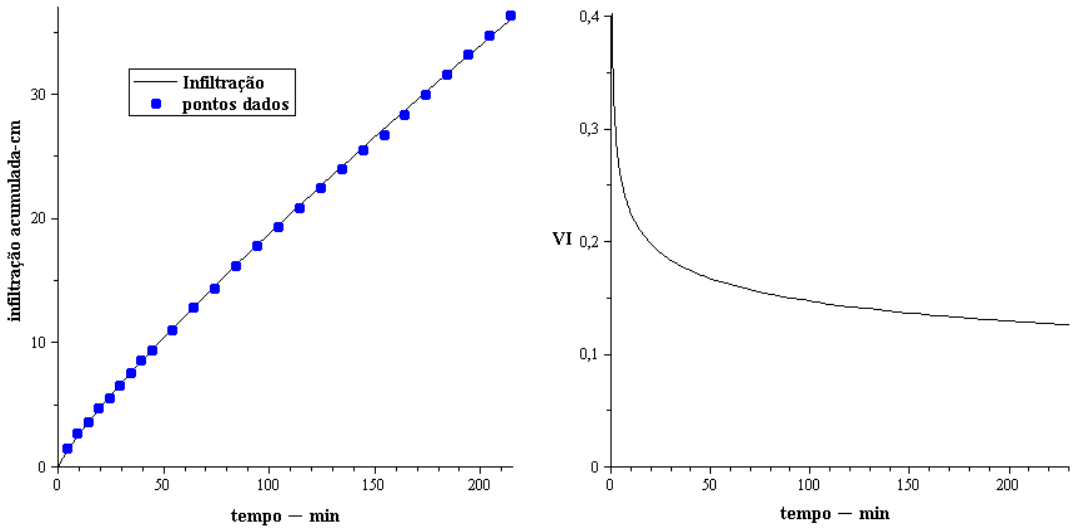
a forma final da equação de infiltração é

$$I = 0,4212t^{0,8158}$$

e a equação da velocidade de infiltração instantânea é dada por

$$VI = 0,3436t^{-0,1842}$$

Figura 4.2: Infiltração acumulada e sua velocidade.



(a) Infiltração acumulada (b) Velocidade de infiltração

Fonte: O autor (2017)

Observa-se do gráfico (b) da Figura 4.2 que a velocidade de infiltração VI tende para uma constante no tempo. Essa constante é chamada de velocidade de infiltração básica Vib. Assim, para o solo estudado no exemplo, temos que

$$Vib \approx 0,12$$

4.3.1 Método do Infiltrômetro de Anel

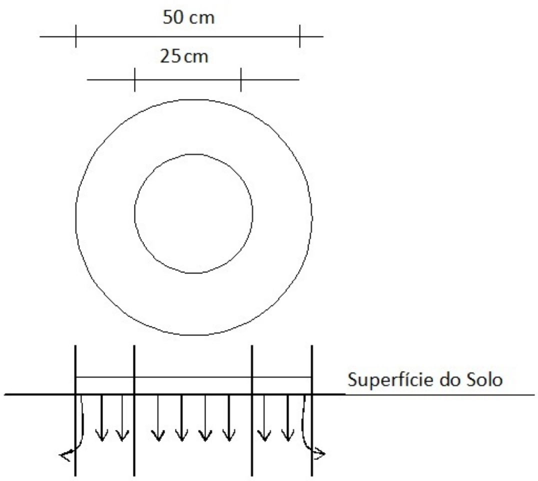
No exemplo 4.1 foi construída uma tabela para os 26 pares de dados de t e I. Um método usado para a construção dessas tabelas é o método do infiltrômetro de anel como mostrado na Figura 4.3.

Figura 4.3: Infiltrômetro de anel em operação.

Fonte: Mello [15, p. 26]

Os infiltrômetros mais utilizados apresentam dois anéis concêntricos. O anel interno com diâmetro de 25 cm e o externo com diâmetro de 50 cm, ambos com altura de aproximadamente 30 cm (ver Figura 4.4). Os anéis são cravados verticalmente no solo, deixando-se uma borda livre levemente superior a 15 cm.

Figura 4.4: Desenho esquemático do infiltrômetro de anel.



Fonte: Carvalho [10, p. 69]

O anel externo tem como função reduzir o efeito da dispersão lateral da água infiltrada do anel interno. Deste modo, a água do anel interno infiltra no perfil do solo em uma direção vertical, o que reduz a superestimativa da taxa de infiltração. As medições são feitas no anel de menor diâmetro. Primeiramente, coloca-se uma folha de plástico no interior do anel de prova, revestindo-o totalmente. Logo após, adiciona-se água nos dois anéis, de forma que os níveis fiquem igualados. Com o auxílio de uma régua, anota-se a carga hidráulica no anel interno, retirando-se imediatamente o plástico para que comece a infiltração da água. Deste modo, registra-se o volume de água inserido no anel, com intervalos de tempo pré-determinados. A infiltração vertical é representada pela diferença de leitura entre dois intervalos de tempo.

Durante a realização do teste, a água deve ser reposta nos dois anéis todas as vezes que a carga hidráulica se aproximar de 5 cm. A cada reabastecimento, anota-se a nova altura de referência. De acordo com [8] ou [9], a relação entre a lâmina infiltrada e o tempo necessário para esta infiltração representa a velocidade de infiltração instantânea. A soma das lâminas infiltradas durante o teste indica a infiltração acumulada.

Com os dados obtidos no teste, constrói-se uma tabela onde fica representado a variação da velocidade de infiltração ao longo do tempo e a infiltração acumulada durante o teste.

5 A experiência do cálculo da infiltração na Escola Estadual Professora Lígia Terezinha Martins

Neste capítulo apresenta-se uma experiência prática do cálculo da infiltração com os alunos da turma 3° ano A do ensino médio da Escola Estadual Professora Lígia Terezinha Martins, localizada no município de Rio Brilhante no estado de Mato Grosso do Sul.

5.1 Teste de Infiltração

1ª Etapa: Nesta etapa, dialogou-se com os estudantes sobre a utilização do teste de infiltração, salientando-se que esta prática é utilizada em várias áreas das ciências agrárias: agronomia, topografia, engenharia ambiental, entre outras áreas que trabalham diretamente com o solo (Figura 5.1).

Figura 5.1: Dialogo com os estudantes sobre o teste.

Fonte: O autor (2017)

2ª Etapa: Para esta etapa, adquiriu-se um cilindro de ferro com 25 cm de diâmetro interno e 30 cm de altura, também utilizou-se outro cilindro de 50 cm de diâmetro interno e 30 cm de altura.

Com a participação dos estudantes, cravou-se os dois anéis concêntricos a uma profundidade de 15 cm e realizou-se o nivelamento dos anéis, utilizando-se um pedaço de ripão e um nível de mão (Figura 5.2).

Figura 5.2: Nivelamento dos cilindros.

Fonte: O autor (2017)

3ª Etapa: Colocou-se uma sacola plástica no anel central preenchendo-a com água até uma altura de 15 cm do nível do solo. Fixou-se uma régua de alumínio para as marcações. Posteriormente, preencheu-se o cilindro exterior com água ao mesmo nível do cilindro interno, retirando-se a sacola plástica, iniciou-se o teste (Figuras 5.3 e 5.4)

Figura 5.3: Preenchimento de água dos cilindros.

Figura 5.4: Início do teste de infiltração.

Fonte: O autor (2017)

4ª Etapa: Iniciou-se as anotações indicando-se a infiltração da água ao decorrer do tempo (Tabela 5.1). Quando o nível da água aproximou-se do nível do solo, realizou-se as reposições de água nos dois cilindros até uma altura de 15 cm (Figura 5.5).

Tabela 5.1: Teste da infiltração na Escola Estadual Professora Lígia Terezinha Martins.

Tempo t (min)	Diferença (min)	Infiltração I (cm)	Diferença da infiltração (cm)	$X = \log t$	$Y = \log I$	X^2	$X.Y$	Velocidade de infiltração (cm/min)
1		2						
3		3,8						
5		5,2						
10		8,3						
15		10,9						
20		13,5						
25		16,1						
30		18,6						
40		23,6						
50		28,6						
60		33,5						
70		38,2						
80		42,7						
90		47,1						
105		53,7						
120		60,3						
135		66,9						

Fonte: O autor (2017)

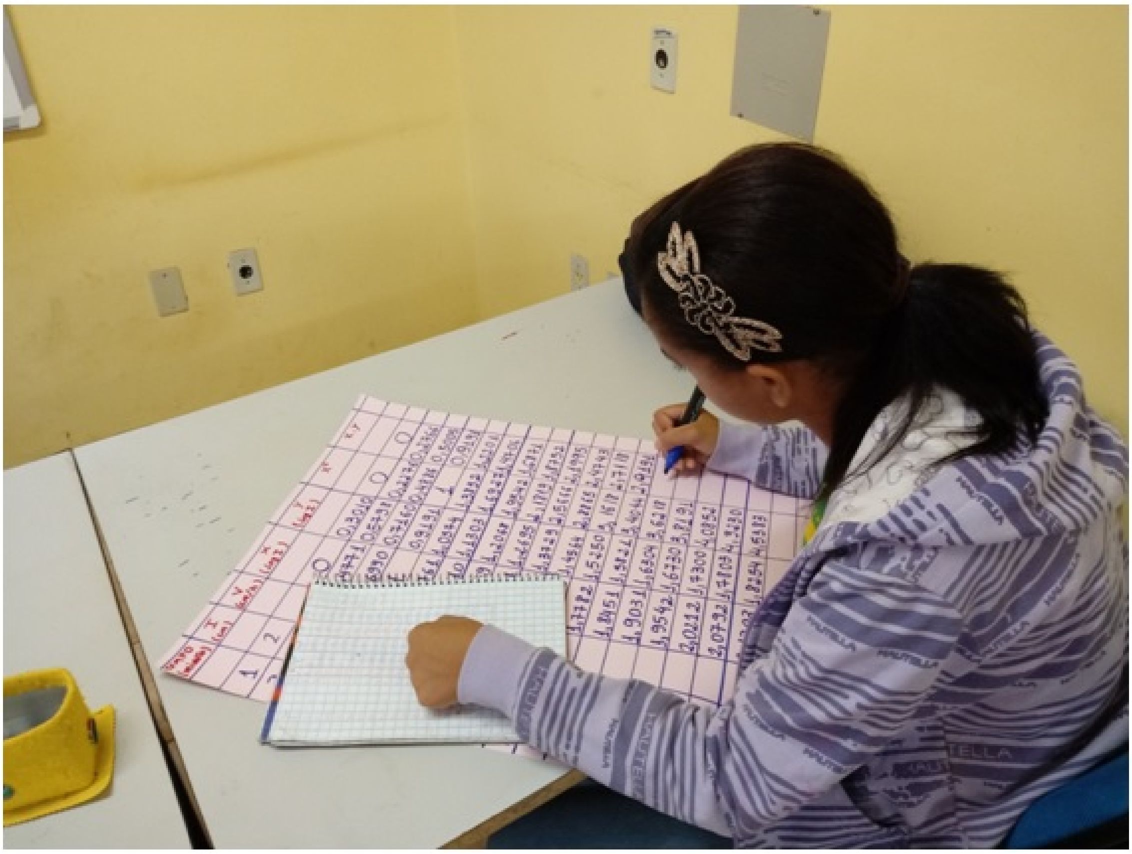
Figura 5.5: Reposição da água.

Fonte: O autor (2017)

5ª Etapa: Nesta etapa, procedeu-se ao preenchimento da Tabela 5.1 da quarta etapa. Coletou-se os dados durante 135 minutos, quando já havia uma repetição na velocidade de infiltração. Ver Figuras 5.6, 5.7 e Tabela 5.2.

Figura 5.6: Alunos preenchendo a tabela.

Figura 5.7: Tabela quase pronta.



Fonte: O autor (2017)

Tabela 5.2: Teste da infiltração na Escola Estadual Professora Lígia Terezinha Martins.

Tempo t (min)	Diferença (min)	Infiltração I (cm)	Diferença da infiltração (cm)	$X = \log t$	$Y = \log I$	X^2	$X.Y$	Velocidade de infiltração (cm/min)
1	1	2	2	0	0,301	0	0	2
3	2	3,8	1,8	0,4771	0,5798	0,2276	0,2766	0,9
5	2	5,2	1,4	0,699	0,716	0,4886	0,5005	0,7
10	5	8,3	3,1	1	0,9191	1	0,9191	0,62
15	5	10,9	2,6	1,1761	1,0374	1,3832	1,2201	0,52
20	5	13,5	2,6	1,301	1,1303	1,6927	1,4706	0,52
25	5	16,1	2,6	1,3979	1,2068	1,9542	1,6871	0,52
30	5	18,6	2,5	1,4771	1,2695	2,1819	1,8752	0,5
40	10	23,6	5	1,6021	1,3729	2,5666	2,1995	0,5
50	10	28,6	5	1,699	1,4564	2,8865	2,4743	0,5
60	10	33,5	4,9	1,7782	1,525	3,1618	2,7118	0,49
70	10	38,2	4,7	1,8451	1,5821	3,4044	2,9191	0,47
80	10	42,7	4,5	1,9031	1,6304	3,6218	3,1029	0,45
90	10	47,1	4,4	1,9542	1,673	3,8191	3,2695	0,44
105	15	53,7	6,6	2,0212	1,73	4,0852	3,4966	0,44
120	15	60,3	6,6	2,0792	1,7803	4,323	3,7016	0,44
135	15	66,9	6,6	2,1303	1,8254	4,5383	3,8888	0,44
				24,5406	21,7354	41,3349	35,7133	

Fonte: O autor (2017)

6ª Etapa: Nesta etapa procedeu-se a determinar a equação de infiltração de Kostiakov.

Da Tabela 5.2 temos que o número de pares de valores t e I é $n = 17$. Calculando os valores de A e B, tem-se:

$$A = \frac{\sum X_i \sum X_i Y_i - \sum X_i^2 \sum Y_i}{(\sum X_i)^2 - n \sum X_i^2}$$

$$A = \frac{24,5406(35,7133) - 41,3349(21,7354)}{(24,5406)^2 - 17(41,3349)} = 0,2190$$

$$B = \frac{\sum X_i \sum Y_i - n \sum X_i Y_i}{(\sum X_i)^2 - n \sum X_i^2}$$

$$B = \frac{24,5406(21,7354) - 17(35,7133)}{(24,5406)^2 - 17(41,3349)} = 0,7339$$

Desde que

$$\log k = A = 0,2190 \quad \text{e} \quad B = a = 0,7339$$

a equação de Kostiakov é dada por

$$I = 1,6557 t^{0,7339} \tag{5.1}$$

e a velocidade de infiltração instantânea é

$$VI = 1,2151t^{-0,2661}$$

A equação de Kostiakov torna-se viável para se ter conhecimento do volume de água que pode ser utilizado na irrigação em determinado tempo. Vejam-se os seguintes exemplos

Exemplo 5.1. Instalando-se uma horta no terreno da escola, com área de 100 m^2, qual o volume de água infiltrado no solo em uma irrigação de 30 minutos?

Solução Da equação de Kostiakov 5.1, tem-se que

$$I = 1,6557(30)^{0,7339} \approx 20,0928 \text{ cm}$$

Assim, o volume de água infiltrado no solo da escola é de $200,928$ litros por metro quadrado.

Exemplo 5.2. Calcular o tempo necessário para que seja aplicada uma lâmina de irrigação de 50 cm no terreno da escola.

Solução Da equação de Kostiakov 5.1, segue-se que

$$50 = 1,6557t^{0,7339}$$

$$\frac{50}{1,6557} = t^{0,7339}$$

$$\log \frac{50}{1,6557} = \log t^{0,7339}$$

$$1,4799 = 0,7339 \log t$$

$$2,0164 = \log t$$

$$t = 10^{2,0164} \approx 104 \text{ min}$$

Assim, o tempo necessário para a infiltração da lâmina de 50 cm será de aproximadamente 104 minutos

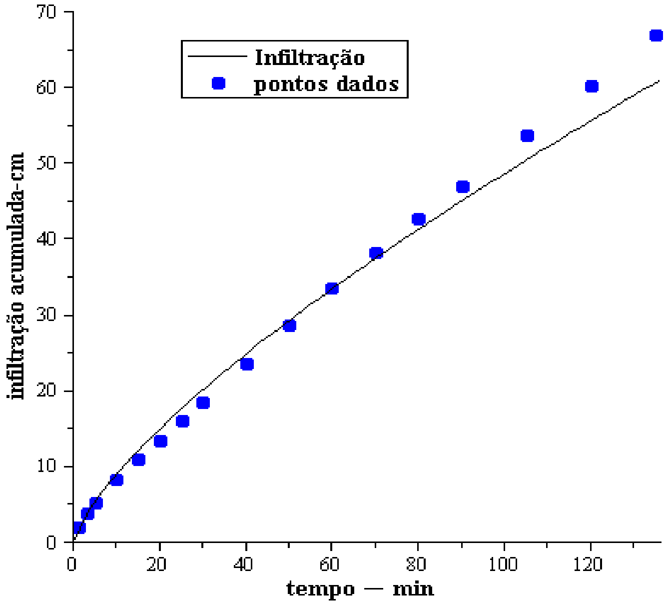
7ª **Etapa**: Realizou-se a construção dos gráficos com os resultados obtidos (Figura 5.8).

Figura 5.8: Construção dos gráficos.

Fonte: O autor (2017)

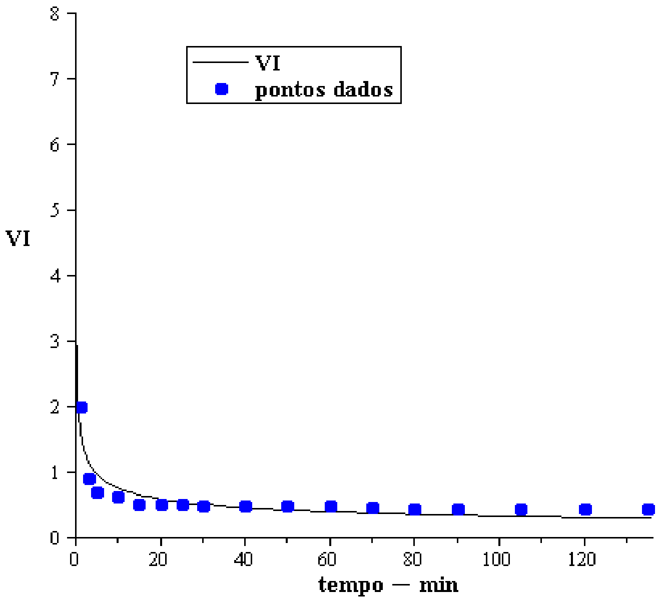
Os gráficos da infiltração e da velocidade de infiltração são dados a seguir

Figura 5.9: Infiltração acumulada.



Fonte: O autor (2017)

Figura 5.10: Velocidade de Infiltração.



Fonte: O autor (2017)

Observa-se da Figura 5.10 e Tabela 5.2 que a velocidade de infiltração básica é aproximadamente

$$Vib \approx 0,44.$$

Dessa forma constata-se que o solo é do tipo argiloso.

6 Considerações Finais

A escolha de situações do cotidiano que revelem uma ligação com os conteúdos estudados nas aulas de matemática, mostra-se necessária para um maior estímulo aos estudantes na busca pelo conhecimento.

Observamos que o interesse pelo aprendizado é maior quando uma atividade prática está relacionada. Diante do exposto neste trabalho, verificamos que é possível a utilização do cálculo de infiltração de água no solo como alternativa para desenvolver conteúdos matemáticos estudados no ensino médio. Notamos que é necessário no mínimo 2 aulas, de 50 minutos cada, para a coleta de dados com o método do infiltrômetro de anéis, e 2 aulas para a realização dos cálculos, preparação e apresentação dos resultados.

Referências

[1] BRASIL. *Orientações Curriculares para o Ensino Médio*. Brasília: Ministério da Educação, Secretaria de Educação Básica, 2006. v. 2.

[2] SILVEIRA, D. da S. *Professores dos anos iniciais: experiências com o material concreto para o ensino de matemática*. Dissertação (Mestrado em Educação em Ciências: Química da Vida e Saúde) — FURG, Brasil, 2012.

[3] GIARDINETTO, J. R. B. *Matemática escolar e matemática da vida cotidiana*. Campinas: Autores Associados, 1999.

[4] BRASIL. *Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio*. Brasília: Ministério da Educação, Secretaria de Educação Média e Tecnológica, 2000.

[5] LAY, D. C. *Álgebra Linear e suas Aplicações*. 4. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2013.

[6] ANTON, H.; RORRES, C. *Álgebra linear com aplicações*. 10. ed. Porto alegre: Bookman, 2012.

[7] DANTE, L. R. *Matemática: Contexto e Aplicações*. 2. ed. São Paulo: Ática, 2013.

[8] MANTOVANI, E. C. et al. *Irrigação: princípios e métodos*. Viçosa, MG: UFV, 2007.

[9] BERNARDO, S.; SOARES, A. A.; MANTOVANI, E. C. *Manual de irrigação*. Viçosa, MG: UFV, 1982.

[10] CARVALHO, D. F.; SILVA, L. D. B. Hidrologia. Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, p. 115, 2006. Disponível em: <http://www.ufrrj.br/institutos/it/deng/leonardo/it113-hidrologia.htm>. Acesso em: 15 Fev. 2017.

[11] PHILIP, J. R. The theory of infiltration: 1. The infiltration equation and its solution. *Soil science*, LWW, v. 83, n. 5, p. 345–358, 1957.

[12] KOSTIAKOV, A. N. On the dynamics of the coefficient of water-percolation in soils and on the necessity of studying it from a dynamic point of view for purposes of amelioration. *Trans. 6th Cong. International. Soil Science, Russian Part A*, p. 17–21, 1932.

[13] HORTON, R. E. The interpretation and application of runoff plot experiments with reference to soil erosion problems. *Soil Science Society of America Proceedings*, v. 3, p. 340–349, 1938.

[14] SMITH, R. E. The infiltration envelope: results from a theoretical infiltrometer. *Journal of Hydrology*, Elsevier, v. 17, n. 1-2, p. 1–22, 1972.

[15] MELLO, J. L. P.; SILVA, L. D. B. Irrigação. Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2009. Disponível em: <http://www.ufrrj.br/institutos/it/deng/jorge/downloads/APOSTILA/>. Acesso em: 24 Fev. 2017.