UNIVERSIDADE FEDERAL DA GRANDE DOURADOS - UFGD
FACULDADE DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLOGIA - FACET

MARIANA FABIANE GARCIA TRAVASSOS

ABORDAGENS ALGÉBRICA E COMBINATÓRIA PARA O POLINÔMIO DE GAUSS

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA

DOURADOS - MS
AGOSTO – 2017

MARIANA FABIANE GARCIA TRAVASSOS

ABORDAGENS ALGÉBRICA E COMBINATÓRIA PARA O POLINÔMIO DE GAUSS

ORIENTADORA: PROF.ª DR.ª IRENE MAGALHÃES CRAVEIRO

Dissertação apresentada ao final do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT da Universidade Federal da Grande Dourados – UFGD como exigência parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

.

DOURADOS - MS
AGOSTO– 2017

Ficha catalográfica

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP).

T779a Travassos, Mariana Fabiane Garcia

Abordagens Algébrica e Combinatória para o Polinômio de Gauss / Mariana Fabiane Garcia Travassos -- Dourados: UFGD, 2017.

81f. : il. ; 30 cm.

Orientador: Irene Magalhães Craveiro

Dissertação (Mestrado em Matemática) - Faculdade de Ciências Exatas e Tecnologia, Universidade Federal da Grande Dourados.

Inclui bibliografia

1. Polinômio de Gauss. 2. Coeficiente binomial. 3. Partições. 4. Relações de Girard. I. Título.

Ficha catalográfica elaborada automaticamente de acordo com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
FUNDAÇÃO UNIVERSIDADE FEDERAL DA GRANDE DOURADOS
FACULDADE DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLOGIA
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL - PROFMAT

Termo de Aprovação

Após a apresentação, arguição e apreciação pela banca examinadora, foi emitido o parecer APROVADO, para a dissertação intitulada: **"Abordagens Algébrica e Combinatória para o Polinômio de Gauss"**, de autoria de **Mariana Fabiane Garcia Travassos**, apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática da Universidade Federal da Grande Dourados.

Profª. Dra. Irene Magalhães Craveiro (Orientador-UFGD)
Presidente da Banca Examinadora

Prof. Dr. Robert Jesus Rodriguez Reyes
Membro Examinador (UFGD)

Adriana Wagner

Profª. Dra. Adriana Wagner
Membro Examinador (UFMS)

Dourados/MS, 01 de setembro de 2017

DEDICATÓRIA

Dedico este trabalho ao meu amado Pai Plínio Travassos dos Santos Neto.

AGRADECIMENTOS

Agradeço, primeiramente a Deus, que me deu conhecimento e força para que eu pudesse concluir este trabalho.

Agradeço a meu Pai Plínio Travassos dos Santos Neto, que sempre me incentivou nos estudos, me dando apoio em todas as atividades e que foi minha fonte de inspiração nos momentos difíceis, mesmo não estando mais aqui os seus conselhos e amor sempre me guiaram, me fizeram trilhar mais está etapa na minha caminhada. Obrigada Pai!

Agradeço a meus filhos Leticia e Mario Augusto, por compreenderem minha ausência durante esta etapa de nossas vidas, e estarem sempre com seus rostinhos alegres esperando a mamãe!

Agradeço as minhas colegas mestrandas, Renata, Aline e Gracielle pelo apoio, compartilhamento e incentivo nas longas tardes e noites de estudos para preparação para as provas.

Obrigada minha amiga Joelma, que me ajudou na construção deste trabalho.

Agradeço a minha família, meu companheiro João Augusto, minha sogra e minha irmã Cassia, pelas várias horas que cuidaram de meus filhos para que eu pudesse estudar.

Obrigada minha mãe Mercedes Garcia que mesmo reclamando, gritando e sempre querendo que eu largasse o mestrado dizendo que essa não era a hora, cuidou muito dos meus filhos, enquanto eu dedicava horas aos estudos.

À Prof.ª Dr.ª Irene, meu muito obrigada! Seu apoio, incentivo e orientação foram essenciais no desenvolvimento deste trabalho.

Enfim, obrigada a todos que, de uma forma ou de outra, colaboraram comigo.

Muito obrigada!

LISTA DE TABELAS E FIGURAS

RESUMO

O foco principal deste trabalho é explorar o conceito de coeficiente q-binomial juntamente com suas propriedades, abordando os aspectos algébricos e combinatórios do polinômio de Gauss enfatizando que esse polinômio avaliado na indeterminada $q = 1$, reduz-se ao coeficiente binomial e neste caso dizemos que esse polinômio é uma extensão do coeficiente binomial. Introduzindo conceitos e definições para construção do Polinômio de Gauss, destacamos os polinômios simétricos elementares que tem uma relação estreita com as relações de Girard e as somas de Newton. A abordagem combinatória será feita por meio de partições em no máximo m partes com cada parte menor do que ou igual a N. Por meio desta ideia iremos relacionar este conceito com caminhos reticulados e ladrilhamento.

Palavras-chave: Polinômio de Gauss. Coeficiente binomial. Partições. Relações de Girard.

ABSTRACT

The main focus of this work is to explore the concept of the q-binomial coefficient together with its properties, approaching the algebraic and combinatorial aspects of the Gaussian polynomial emphasizing that this polynomial evaluated in the indeterminate $q = 1$, reduces to the binomial coefficient and in this case we say That this polynomial is an extension of the binomial coefficient. Introducing concepts and definitions for the construction of the Gaussian Polynomial, we highlight the elementary symmetric polynomials that have a close relationship with Girard's and Newton's relations. The combinatorial approach will be done by means of partitions at most m parts with each part smaller than or equal to N. Through this idea we will relate this concept with reticulated paths and tiling.

Keywords: Gaussian Polynomial. Binomial coefficient. Partitions. Girard Relationships.

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

O objetivo principal deste trabalho é apresentar duas abordagens para o polinômio de Gauss. A primeira abordagem envolve equações algébricas e relações de Girard. A segunda abordagem está estritamente relacionada ao conceito de partições de inteiros e funções geradoras, assim por meio desses conceitos iremos apresentar o polinômio de Gauss através das concepções de caminhos reticulados e ladrilhamento.

Faremos um breve histórico do desenvolvimento da matemática e seus pensadores, no que tange as teorias envolvidas neste trabalho.

A resolução de equações pode ser considerada a motivação principal para o desenvolvimento da Álgebra ao longo da historia da matemática. Podemos ver com o estudo da evolução da matemática que como descreve Costa (2016) desde os primórdios da civilização, o ser humano sentiu a necessidade de dar forma aos seus pensamentos e, no que tange ao pensamento matemático, as primeiras ideias já trataram de representar quantidades através de símbolos, evoluindo para os sistemas de numeração e posteriormente para a escrita de sentenças matemáticas mais elaboradas. Acredita-se então que as equações surgem como um desdobramento natural da maneira matemática de pensar, baseando-se na ideia fundamental de igualdade.

No início dos achados históricos de matemática as equações se apresentam sobre aspectos geométricos na civilização Grega. Depois de 300 d.C. com o declínio do Império Grego surgem no Oriente novos desenvolvimentos matemáticos na área de resolução de equações. Há um consenso entre os estudiosos de que a matemática na Mesopotâmia tenha sido mais evoluída que a do Egito. A existência de um sistema de numeração posicional, de base sexagesimal, no período dos Sumérios, permitia-lhes efetuar mais facilmente multiplicações o que possibilitava uma maior habilidade para calcular. Alguns problemas conhecidos dessa época mostram que resolviam, não só as equações lineares, mas também equações quadráticas.

Através da avaliação de duas expressões que se apresentam inicialmente muitas vezes bem diferente, está o principio de resolver uma equação, que é basicamente descobrir um valor que faça estas duas expressões serem de fato iguais. Costa (2013) relata que:

> As primeiras equações elaboradas e resolvidas pelos humanos tinham, naturalmente, uma forma muito simples, mas já traziam implícita a ideia de incógnita, a quantidade inicialmente desconhecida que equilibra o “tamanho” de dois conjuntos. Com o desenvolvimento paulatino da Matemática, as equações evoluíram em

> complexidade e na forma como são representadas. Hoje em dia elas estão envolvidas com praticamente tudo que compõe a sociedade moderna. Há uma vasta gama de categorias de equações, cujas incógnitas podem não ser meramente números, mas também funções. Equações poderosas o bastante para abarcar quase todos os problemas que possam ser traduzidos em linguagem matemática (Costa, 2016, p. 2).

Existem diversas formas de equações, neste estudo vamos usar os conceitos elementares de equações algébricas polinomiais que constituem uma parte importante da História da Matemática. Com a observação da evolução histórica das propostas e resoluções das equações percebemos que a resolução de equações de grau menor ou igual a 4, são responsáveis por uma revolução no que concerne ao estudo da álgebra e que levaram a uma classificação entre álgebra clássica e álgebra moderna.

Por volta do século XVII, inúmeros matemáticos ocidentais desenvolveram estudos no intuito de estabelecer relações entre as raízes e os coeficientes de uma equação quadrática. O grande obstáculo era a presença de números negativos como resultado das raízes, o que não era aceito entre os matemáticos desta época. Foi o matemático francês Albert Girard (1590 – 1633), que desenvolveu em seus estudos um método capaz de determinar as relações com a utilização de números negativos.

Albert Girard nasceu na cidade de Saint-Mihiel, na França e faleceu em 8 de dezembro de 1632, em Leiden. Silva (2017) relata que Girard migrou para Leiden, na Holanda, devido a perseguições religiosas. Quando tinha 22 anos, começou a frequentar a Universidade de Leiden, onde começou a estudar matemática, embora seu primeiro interesse tenha sido música. Na matemática, estudou Álgebra, Trigonometria e Aritmética, e, em 1626 publicou um tratado relacionado a Trigonometria, em que nele abordavam as abreviações $sen, cos\ e\ tag$, além de ter fornecido fórmulas para o cálculo da área de triângulos. É também famoso por ser o primeiro a formular $f_{n+2} = f_{n+1} + f_n$, que é a definição da sucessão de Fibonacci.

Já, na Álgebra que é um dos focos de interesse deste trabalho Girard, desenvolveu esboços do teorema fundamental da álgebra e também traduziu os trabalhos de Stevin, em 1625. Em 1629 Girard introduziu o problema de encontrar qual o número de raízes de uma equação qualquer, problema que funda uma perspectiva mais geral de análise das equações. Ele afirma que todas as equações possuem tantas soluções quanto o grau da quantidade de maior grau, o que consiste em uma primeira versão do que conhecemos hoje como teorema fundamental da álgebra. Albert Girard não só demonstrou a relação das raízes com os coeficientes da equação, como também mostrou, por exemplo, como calcular a soma dos quadrados dos cubos e das quartas potências das raízes de uma equação em termos de seus coeficientes. (Roque e Pitombeira, 2012)

Uma aplicação importante dos polinômios simétricos são as relações de Girard. Esse resultado estabelece uma relação entre as raízes e os coeficientes de um polinômio.

O grande obstáculo era a presença de números negativos como resultado das raízes, o que não era aceito entre os estudiosos. Foi Girard que desenvolveu um método capaz de determinar as relações com a utilização de números negativos.

Já a combinatória é a parte da matemática que trata dos problemas de contagem de subconjuntos de um conjunto finito. Além das combinações, arranjos e permutações que são amplamente conhecidas e trabalhadas no ensino médio, existem também dentro da combinatória as funções geradoras que são bastante uteis na resolução de problemas combinatórios assim como a teoria de partições. Alguns estudiosos da história da matemática acreditam que a Analise combinatória tenha sua origem com o matemático grego Arquimedes de Siracusa (287 -212 a. C.) que propôs um problema geométrico que consistia em calcular quantas maneiras poderiam ser reunidas 14 peças planas, de diferentes formatos e tamanhos com o objetivo de formar um quadrado.

A técnica das funções geradoras teve origem nos trabalhos de A. De Moivre (1667-1754) e, posteriormente, foi utilizada por L. Euler (1707-1783) em problemas da teoria aditiva de números, principalmente na teoria de partições. Laplace (1749-1827) trabalhou com essa técnica nos seus estudos de probabilidade e Nicolaus Bernoulli (1687-1759) fez uso das funções geradoras no estudo de permutações caóticas.

Em se tratando de partições, acredita-se que Leibniz foi o primeiro a questionar sobre partições. Em uma carta de 1674 que enviou para Bernoulli ele questiona sobre o número de "*divulsions*" de inteiros. O que se entende hoje que ele estava fazendo uma pergunta sobre partições de inteiros. O estudo de partições começou como parte da Análise, mas rapidamente se tornou parte da Teoria dos Números, depois se tornou parte da Análise Combinatória e recentemente ganhou seu próprio valor. Grandes matemáticos como Gauss, Cauchy, Jacobi, Weierstrass, Sylvester, Heine, Lebesgue, Schur, MacMahon e Ramanujan apresentaram definições e resultados envolvendo partições, contribuindo com o desenvolvimento da teoria.

Os coeficientes binomiais aparecem naturalmente como coeficientes multiplicadores na expansão de $(a+b)^n$, onde a e b são números reais e n é um número natural. Estes coeficientes apresentam estreita relação com as combinações simples, sendo assim bastante usados em Combinatória. Além disso, apresentam uma riqueza de identidades onde é possível exibir provas algébricas e combinatórias. Neste trabalho iremos nos concentrar em uma versão generalizada do coeficiente binomial, denominado polinômio de Gauss ou coeficiente q-binomial. Coeficientes binomiais generalizados aparecem espontaneamente nos estudos de partições de um inteiro positivo e das séries hipergeométricas.

Os números binomiais $\binom{n}{k}$ são definidos combinatoriamente como o número de maneiras de escolher k objetos de um conjunto de n objetos. Na expansão de $(1+z)^n$, onde z é um número real e n é um número natural o coeficiente de z^k é $\binom{n}{k}$, tal resultado é conhecido como Teorema Binomial. O coeficiente binomial satisfaz diversas identidades, sendo possível demonstrá-las algebricamente ou combinatoriamente.

No primeiro capítulo apresentaremos a definição do polinômio de Gauss algebricamente enunciando e demonstrando diversas propriedades inerentes desse conceito. Observaremos que o polinômio de Gauss é uma generalização do coeficiente binomial e que o Teorema q-binomial é uma extensão do Teorema binomial. Essa abordagem algébrica do polinômio de Gauss será feita usando o conceito de polinômios em várias indeterminadas sobre o corpo dos números reais, estabelecendo relações existentes entre os coeficientes e as respectivas raízes de uma dada equação algébrica. A ideia consiste na expansão de um polinômio nas indeterminadas $x,\ x_1, x_{2,} \dots, x_n$ definido por $\prod_{j=1}^{n}(x-x_j)$ e escrevendo esse polinômio como um polinômio na indeterminada z cujos coeficientes estejam em $\mathbb{R}[x_1, x_2, \dots, x_n]$. Com isso iremos determinar diversas relações que serão úteis para a definição do polinômio de Gauss, que é nosso objetivo. Além disso, essas relações são úteis na resolução de algumas equações irracionais e em sistemas não lineares.

No segundo capítulo apresentaremos a definição de partição de um inteiro positivo com suas respectivas propriedades e iremos estabelecer algumas funções geradoras para partições com restrições. Com isso, faremos a abordagem combinatória do polinômio de Gauss, para isso introduziremos o conceito de polinômio de Gauss por meio de caminhos reticulados e veremos que o coeficiente q-binomial está estreitamente relacionado com a função geradora para partições de um inteiro positivo n cujas partes é no máximo m e cada parte é menor ou igual a N, sendo N, m inteiros positivos. Essa é abordagem combinatória que faremos do polinômio de Gauss e a partir daí validaremos as propriedades principais. Além disso por meio dessa ideia iremos relacionar os conceitos de caminhos reticulados e ladrilhamento de um retângulo $1 \times n$ com ladrilhos de 1×1.

1. UMA ABORDAGEM ALGÉBRICA PARA O POLINÔMIO DE GAUSS

Nesse capítulo faremos uma abordagem do polinômio de Gauss por meio do conceito de polinômios em várias indeterminadas sobre o corpo dos números reais. Para isso conceberemos a definição de polinômios de várias variáveis e quando podemos dizer que esse polinômio é simétrico ou não. Esses conceitos serão uteis para o objetivo principal desse capítulo que é a definição de polinômio de Gauss e a validação de uma fórmula explícita para tal polinômio.

A partir de polinômios de várias variáveis vamos estabelecer relações existentes entre os coeficientes e as respectivas raízes de uma dada equação algébrica. A ideia consiste na expansão de um polinômio nas indeterminadas $z,\ x_1, x_{2,} \dots, x_n$ definido por $\prod_{j=1}^{n}(z - x_j)$ e escrevendo esse polinômio como um polinômio na indeterminada z cujos coeficientes estejam em $\mathbb{R}[x_1, x_2, \dots, x_n]$ é possível determinar diversas relações que serão úteis para a definição do polinômio de Gauss, que é nosso objetivo. Além disso, iremos observar que essas relações são úteis na resolução de algumas equações irracionais e em sistemas não lineares.

1.1 Polinômios simétricos

Considere o conjunto dos números reais que denotamos por $\mathbb{R}$ e o anel de polinômios em $\mathbb{R}[x_1]$, cujos coeficientes estão em $\mathbb{R}$. Se x_2 é uma variável sobre o anel $\mathbb{R}[x_1]$, então definimos:

$$\mathbb{R}[x_1, x_2] = (\mathbb{R}[x_1])[x_2].$$

Indutivamente definimos o anel em *n* variáveis $x_1, x_2, \dots, x_n$ por:

$$\mathbb{R}[x_1, x_2, \dots, x_n] = (\mathbb{R}[x_1, x_2, \dots, x_{n-1}])[x_n].$$

Um polinômio em *n* variáveis $f(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) \in \mathbb{R}[x_1, x_2, \dots, x_n]$ pode ser escrito na forma:

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{\substack{0 \leq i_1 \leq s_1 \\ 0 \leq i_2 \leq s_2 \\ \vdots \\ 0 \leq i_n \leq s_n}} a_{i_1, i_2, \dots, i_n}\, x_1^{i_1} . x_2^{i_2} . x_n^{i_n}$$

onde $s_1,\ s_2, \dots, s_n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ e $a_{i_1, i_2, \dots, i_n} \in\ \mathbb{R}$.

Definição 1.1: Um *monômio* em *n* variáveis $x_1, x_2, \dots, x_n$ é um produto simbólico na forma $x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n}$, onde os expoentes $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ são inteiros não negativos.
Quando $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n = 0$, denotamos $x_1^{\alpha_1}.x_2^{\alpha_2} \dots x_n^{\alpha_n} = 1$. Dados $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ inteiros não negativos não todos nulos, o *grau* de um monômio $x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n}$ é a soma $\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n$.

Considere a expressão $a_{j_1,j_2,\dots j_n} x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n}$, onde $a_{j_1,j_2,\dots j_n} \neq 0$ e $a_{j_1,j_2,\dots j_n} \in \mathbb{R}$. O *grau* de $a_{j_1,j_2,\dots j_n} x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n}$ é igual a soma $\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n$. A expressão $a_{j_1,j_2,\dots j_n} x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n}$ é chamada de *monômio não nulo*.

Por exemplo, $4x_1^2.x_2^3.x_3$ é um monômio não nulo e tem grau igual a $2 + 3 + 1 = 6$.

Definição 1.2: O grau de um polinômio não nulo em *n* variáveis $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ com coeficientes em $\mathbb{R}$ é o maior grau dos seus monômios não nulos.

Exemplo 1.1: O polinômio $p \in \mathbb{R}[x, y, z]$ nas variáveis x, y, z definido por: $p\,(x, y, z) = x^5 + y^3 - 3xy$ tem grau 5;

O polinômio $f \in \mathbb{R}[x, y, z]$ nas variáveis x, y, z definido por: $f\,(x, y, z) = 3x^5y^2 - 2y^4 + xyz - 1$ tem grau 7.

Exemplo 1.2: Os polinômios em $t \in \mathbb{R}[x, y]$ de grau 2 são da forma:

$$t(x, y) = a_{00} + a_{10}x + a_{01}y + a_{11}xy + a_{20}x^2 + a_{02}y^2,$$

onde $a_{ij} \in \mathbb{R}, i, j \in \{0,1,2\}$.

Definição 1.3: Dizemos que um polinômio $p \in \mathbb{R}\,[x_1, x_2, \dots, x_n]$ é simétrico se é invariante por qualquer permutação das suas variáveis.

Por exemplo, um polinômio $p \in \mathbb{R}[x, y]$, em duas variáveis x, y é dito simétrico se quando $p(x, y) = p(y, x)$ para todos os valores de x, y.

Exemplo 1.3: Seja um polinômio $p \in \mathbb{R}[x_1, x_2, x_3]$, definido por:

$$p(x_1, x_2, x_3) = x_1 + x_2 + x_3.$$

Observe que:

$$p(x_1, x_3, x_2) = x_1 + x_3 + x_2 = p(x_2, x_1, x_3) = p(x_2, x_1, x_3) = p(x_3, x_1, x_2) = p(x_3, x_2, x_1) = p(x_2, x_3, x_1).$$

Portanto $p \in \mathbb{R}[x_1, x_2, x_3]$ é simétrico.

Exemplo 1.4: Seja um polinômio $q \in \mathbb{R}[x_1, x_2, x_3]$, definido por:

$$q(x_1, x_2, x_3) = 3{x_1}^2 + 3{x_2}^2 + 3{x_3}^2 + x_1x_2x_3.$$

Observe que:

$$q(x_1, x_2, x_3) = 3{x_1}^2 + 3{x_2}^2 + 3{x_3}^2 + x_1x_2x_3.$$
$$q(x_1, x_3, x_2) = 3{x_1}^2 + 3{x_3}^2 + 3{x_2}^2 + x_1x_2x_3 ;$$
$$q(x_2, x_1, x_3) = 3{x_2}^2 + 3{x_1}^2 + 3{x_3}^2 + x_1x_2x_3 ;$$
$$q(x_2, x_3, x_1) = 3{x_2}^2 + 3{x_3}^2 + 3{x_1}^2 + x_1x_2x_3 ;$$
$$q(x_3, x_1, x_2) = 3{x_3}^2 + 3{x_1}^2 + 3{x_2}^2 + x_1x_2x_3 ;$$
$$q(x_3, x_2, x_1) = 3{x_3}^2 + 3{x_2}^2 + 3{x_1}^2 + x_1x_2x_3 ;$$

Logo,

$$q(x_1, x_2, x_3) = q(x_1, x_3, x_2) = q(x_2, x_1, x_3) = q(x_2, x_3, x_2) = q(x_3, x_2, x_1) = q(x_3, x_1, x_2).$$

Portanto $q \in \mathbb{R}[x_1, x_2, x_3]$ é simétrico.

Exemplo 1.5: Seja um polinômio $t \in \mathbb{R}[x_1, x_2, x_3]$, definido por:

$$t(x_1, x_2, x_3) = x_1.x_2 + x_2.x_3 + x_1.x_3.$$
$$t(x_1, x_3, x_2) = x_1.x_3 + x_3.x_2 + x_1.x_2$$

Analogamente para os outros casos, temos que $t(x_1, x_2, x_3) = t(x_2, x_1, x_3) = t(x_2, x_3, x_1) = t(x_3, x_2, x_1) = t(x_3, x_1, x_2)$, logo é simétrico.

Exemplo 1.6: Seja um polinômio $r \in \mathbb{R}[x_1, x_2, x_3]$, definido por:

$$r(x_1, x_2, x_3) = x_1{x_3}^2 + x_3{x_2}^2$$

$r \in \mathbb{R}[x_1, x_2, x_3]$ não é simétrico, pois $r(x_1, x_2, x_3) = x_1{x_3}^2 + x_3{x_2}^2 \neq r(x_1, x_3, x_2)$.

1.2 Polinômio em várias variáveis: Aplicações de polinômios simétricos

Dado um polinômio $p \in \mathbb{R}[z]$ de grau n, temos que $p(z) = a_nz^n + a_{n-1}z^{n-1} + \ldots + a_2z^2 + a_1z + a_0$, onde $a_j \in \mathbb{R}$ e $a_n \neq 0$. Dizemos que p é *mônico* se $a_n = 1$. Nesta seção iremos estabelecer relações entre $p(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \ldots + a_2z^2 + a_1z + a_0$ e suas raízes. Dessa forma iremos fazer alguns casos particulares, ou seja, os casos $n = 2$ e 3, em seguida generalizaremos o resultado.

No exemplo 1.7, faremos o caso $n = 2$. Dada uma equação algébrica $az^2 + bz + c = 0$ com $a \neq 0$, podemos escrevê-la de forma equivalente como $z^2 + \frac{b}{a}z + \frac{c}{a} = 0$. É possível obter relações entre $-\frac{b}{a}$ e $\frac{c}{a}$ por meio da soma e o produto das raízes de $r(z) = az^2 + bz + c$, respectivamente.

Essas identidades são chamadas relações de Girard. Em geral, as relações de Girard são identidades estabelecidas entre os coeficientes e as raízes da equação $p(z) = 0$, onde,

$$p(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \ ... + a_2z^2 + a_1z + a_0.$$

Exemplo 1.7: O caso $n = 2$. Considere um polinômio p em $\mathbb{R}[z]$ de grau 2, da forma:

$$p(z) = z^2 + a_1z + a_2. \qquad (1.1)$$

Vamos supor que existem $x_1, x_2, \in \mathbb{R}$, tais que:

$$p(z) = \prod_{i=1}^{2}(z - x_i) = (z - x_1).(z - x_2) \quad (1.2)$$

Expandindo (1.2) obtemos que:

$$p(z) = z^2 - (x_2 + x_1)z + x_1x_2. \quad (1.3)$$

Fazendo $\sigma_1 = x_2 + x_1$ e $\sigma_2 = x_1x_2$, temos que $p(z) = z^2 - \sigma_1z + \sigma_2$.

Comparando (1.1) e (1.3) concluímos:

$$-\sigma_1 = a_1 \text{ e } \sigma_2 = a_2.$$

Exemplo 1.8: O caso $n = 3$. Considere um polinômio p em $\mathbb{R}[z]$ de grau 3, da forma:

$$p(z) = z^3 + a_1z^2 + a_2z + a_3. \qquad (1.4)$$

Vamos supor que existem $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$, tais que:

$$p(z) = \prod_{i=1}^{3}(z - x_i) = (z - x_1)(z - x_2)(z - x_3) \qquad (1.5)$$

Determinaremos as relações existentes entre os coeficientes de $p(z) = z^3 + a_1z^2 + a_2z + a_3 \in \mathbb{R}[z]$ e as raízes da equação algébrica $p(z) = 0$. Em seguida, iremos generalizar esse exemplo para um polinômio *mônico* de grau n.

Expandindo (1.5) obtemos que:

$$p(z) = (z^2 - zx_2 - zx_1 + x_1x_2).(z - x_3)$$
$$= z^3 - z^2x_2 - z^2x_1 + zx_1x_2 - z^2x_3 + zx_2x_3 + zx_1x_3 - x_1x_2x_3$$

$$= z^3 - z^2(x_3 + x_2 + x_1) + z(x_2x_3 + x_1x_3 + x_1x_2) - x_1x_2x_3.$$

Portanto,

$$p(z) = z^3 - z^2(x_3 + x_2 + x_1) + z(x_2x_3 + x_1x_3 + x_1x_2) - x_1x_2x_3 \quad (1.6)$$

Fazendo $\sigma_1 = (x_1 + x_2 + x_3), \sigma_2 = x_1.x_2 + x_1.x_3 + x_2.x_3$ e $\sigma_3 = x_1.x_2.x_3$ na identidade (1.6), obtemos:

$$p(z) = z^3 - \sigma_1 z^2 + \sigma_2 z - \sigma_3 \qquad (1.7)$$

Os polinômios σ_1, σ_2 e σ_3 dependem das variáveis x_1, x_2, x_3 e $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3 \in \mathbb{R}[x_1, x_2, x_3]$. Além disso $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ são polinômios simétricos em $\mathbb{R}[x_1, x_2, x_3]$ que chamamos polinômios *simétricos elementares* em $\mathbb{R}[x_1, x_2, x_3]$.

A proposição 1.1 generaliza os exemplos 1.7 e 1.8, para todo n natural. A demonstração da proposição faremos por indução sobre n com $n \geq 2$. Para isso vamos considerar um polinômio na variável z de grau n e mônico, a saber, $p(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \ldots + a_2z^2 + a_1z + a_0$, $a_j \in \mathbb{R}$, cujas raízes são $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

E, em seguida definir os seguintes polinômios $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n \in \mathbb{R}[x_1, x_2, \ldots, x_n]$:

$$(1.8) \qquad \begin{cases} \sigma_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_1 + x_2 + \cdots + x_n = \sum_{j=1}^{n} x_j; \\ \sigma_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{j_1 < j_2} x_{j_1} x_{j_2} \\ \sigma_3(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{j_1 < j_2 < j_3} x_{j_1} x_{j_2} x_{j_3}; \\ \vdots \\ \sigma_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_1 x_2 \ldots x_n \end{cases}$$

Os polinômios definidos em (1.8) $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n$ são simétricos em $\mathbb{R}[x_1, x_2, \ldots, x_n]$.

Proposição 1.1:

$$p(z) = \prod_{j=1}^{n}(z - x_j) = z^n - \sigma_1 z^{n-1} + \sigma_2 z^{n-2} + \cdots + (-1)^n \sigma_n$$

com $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n \in \mathbb{R}[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ (1.9).

Demonstração: No exemplo 1.7 vimos que a relação é válida para $n = 2$.

Suponhamos que a expressão (1.9) é válida para n, queremos provar que vale também para $n + 1$.

Multiplicando $(z - x_{n+1})$ na expressão:

$$(z - x_{n+1})\prod_{j=1}^{n}(z - x_j) = (z^n - \sigma_1 z^{n-1} + \sigma_2 z^{n-2} + \cdots + (-1)^n \sigma_n\ )(z - x_{n+1}).$$

Ou seja,

$$\prod_{j=1}^{n+1}(z - x_j) = z^{n+1} - \sigma_1 z^n + \sigma_2 z^{n-1} + \cdots + (-1)^n \sigma_n z - x_{n+1} z^n + x_{n+1}\sigma_1 z^{n-1} -$$

$$-x_{n+1}\sigma_2 z^{n-2} + \ldots - x_{n+1}(-1)^n \sigma_n =$$

$$= z^{n+1} - (\sigma_1 + x_{n+1})z^n + (\sigma_2 + x_{n+1}\sigma_1)z^{n-1} - (\sigma_3 + x_{n+1}\sigma_2)z^{n-2} + \cdots$$

$$+((-1)^n \sigma_n + x_{n+1}\sigma_{n-1})z + (-1)^{n+1} x_{n+1}\sigma_n. \qquad (1.10)$$

Os coeficientes das potências de z na identidade (1.9), a saber, $(\sigma_1 + x_{n+1})$, $(\sigma_2 + x_{n+1}\sigma_1)$, $(\sigma_3 + x_{n+1}\sigma_2), \ldots, x_{n+1}\sigma_n \in \mathbb{R}[x_1, x_2, \ldots, x_n, x_{n+1}]$.

Além disso,

$$s_1(x_1, x_2, \ldots, x_n, x_{n+1}) = \sigma_1 + x_{n+1} = x_1 + x_2 + \cdots + x_n + x_{n+1} = \sum_{j=1}^{n+1} x_j;$$

$$s_2(x_1, x_2, \ldots, x_n, x_{n+1}) = (\sigma_2 + x_{n+1}\sigma_1) = \sum_{\substack{j_1, j_2 = 1 \\ j_1 < j_2}}^{n} x_{j_1} x_{j_2} + x_{n+1}\sigma_1 =$$

$$= \sum_{\substack{j_1, j_2 = 1 \\ j_1 < j_2}}^{n+1} x_{j_1} x_{j_2};$$

$$\vdots$$

$$s_{n+1}(x_1, x_2, \ldots, x_n, x_{n+1}) = x_{n+1}\sigma_n = x_{n+1} x_1 x_2 \ldots x_n = x_1 x_2 \ldots x_n x_{n+1}.$$

Portanto

$$\prod_{j=1}^{n+1}(z-x_j) = z^{n+1} - s_1 z^n + s_2 z^{n-1} + \cdots + (-1)^{n+1} s_{n+1}$$

E o resultado é válido para $n+1$. ■

Convém observar que os polinômios $\sigma_i(x_1, x_2, \dots, x_n)$ obtidos na expansão do polinômio:

$$\prod_{j=1}^{n}(z-x_j),$$

são polinômios simétricos (não alteram o valor quando permuta uma das variáveis) de grau i em $\mathbb{R}[x_1, x_2, \dots, x_n]$ chamados de polinômios simétricos elementares. Esses polinômios elementares σ_i podem ser obtido por meio da soma de parcelas formadas por produtos de i fatores escolhidos no conjunto $\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$. Dessa forma a quantidade de parcelas é a combinação de n tomado i a i, a saber, $\binom{n}{i}$.

Exemplo 1.10: Sabendo que as raízes de uma equação polinomial são $1, 1, \frac{1}{2}$ e -1 é possível obtê-la visto que tendo grau 4, pode ser escrita como:

$$p(x) = x^4 - \sigma_1 x^3 + \sigma_2 x^2 - \sigma_3 x + \sigma_4?$$

Solução:

$$\sigma_1 = x_1 + x_2 + x_3 + x_4$$

$$\sigma_2 = x_1.x_2 + x_1.x_3 + x_1.x_4 + x_2.x_3 + x_2.x_4 + x_3.x_4$$

$$\sigma_3 = x_1.x_2.x_3 + x_1.x_2.x_4 + x_1.x_3.x_4 + x_2.x_3.x_4$$

$$\sigma_4 = x_1.x_2.x_3.x_4$$

Assim, temos:

$$\sigma_1 = 1 + 1 + \frac{1}{2} + (-1) = \frac{3}{2}$$

$$\sigma_2 = 1.1 + 1.\frac{1}{2} + 1.(-1) + 1.\frac{1}{2} + 1.(-1) + \frac{1}{2}.(-1) = -\frac{1}{2}$$

$$\sigma_3 = 1.1.\frac{1}{2} + 1.1.(-1) + 1.\frac{1}{2}.(-1) + 1.\frac{1}{2}.(-1) = -\frac{3}{2}$$

$$\sigma_4 = 1.1.\frac{1}{2}.(-1) = -\frac{1}{2}$$

Logo,

$$p(x) = x^4 - \frac{3}{2}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2}x - \frac{1}{2}.$$

Exemplo 1.11: Resolva o sistema:

$$\begin{cases} \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = 12 \\ \frac{1}{x_1.x_2} = 20 \end{cases}.$$

Faça: $\sigma_1 = x_1 + x_2$ e $\sigma_2 = x_1.x_2$. Dessa forma:

$$\begin{cases} \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = 12 \\ \frac{1}{x_1.x_2} = 20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x_1 + x_2}{x_1.x_2} = 12 \\ \frac{1}{x_1.x_2} = 20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\sigma_1}{\sigma_2} = 12 \\ \frac{1}{\sigma_2} = 20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\sigma_1}{\sigma_2} = 12 \\ \sigma_2 = \frac{1}{20} \end{cases}.$$

Portanto $\sigma_1 = 12\sigma_2 = \frac{12.1}{20} = \frac{3}{5}$ e dessa forma concluímos: $\begin{cases} \sigma_1 = \frac{3}{5} \\ \sigma_2 = \frac{1}{20} \end{cases}$.

Observe que

$$\begin{cases} \sigma_1 = \frac{3}{5} \\ \sigma_2 = \frac{1}{20} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 = \frac{3}{5} \\ x_1.x_2 = \frac{1}{20} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_2 = \frac{3}{5} - x_1 \\ x_1.\left(\frac{3}{5} - x_1\right) = \frac{1}{20} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_2 = \frac{3}{5} - x_1 \\ -x_1{}^2 + \frac{3}{5}x_1 = \frac{1}{20} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_2 = \frac{3}{5} - x_1 \\ -x_1{}^2 + \frac{3}{5}x_1 - \frac{1}{20} = 0 \end{cases}.$$

Resolvendo a equação: $-x_1{}^2 + \frac{3}{5}x_1 - \frac{1}{20} = 0$, que é equivalente á:

$-20\,x_1{}^2 + 12\,x_1 - 1 = 0$. Portanto $x_1 = \frac{1}{2}$ ou $x_1 = \frac{1}{10}$.

Se $x_1 = \frac{1}{2}$, então $x_2 = \frac{1}{10}$;

Se $x_1 = \frac{1}{10}$, então $x_2 = \frac{1}{2}$. Portanto S = $\left\{\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{10}\right), \left(\frac{1}{10}, \frac{1}{2}\right)\right\}$.■

Agora vamos definir $S_k = x_1^k + x_2^k + \cdots + x_t^k \in \mathbb{R}[x_1, x_2, \ldots, x_n\,]$, onde $k, t \in \mathbb{N}$, sendo que $S_0 = t$. O polinômio $S_k = x_1^k + x_2^k + \cdots + x_t^k$ é simétrico em $\mathbb{R}[x_1, x_2, \ldots, x_n\,]$.

Proposição 1.2: O polinômio $S_k = x_1^k + x_2^k + \cdots + x_t^k \in \mathbb{R}[x_1, x_2, \ldots, x_n\,]$ satisfaz a seguinte identidade:

$$S_k - \sigma_1 S_{k-1} + \sigma_2 S_{k-2} + \cdots + (-1)^t \sigma_t S_{k-t} = 0 \; para \; k \geq t. \qquad (1.11)$$

com $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_t \in \mathbb{R}[x_1, x_2, \ldots, x_n]$.

Demonstração: Considere o polinômio $p(x) = a_t x^t + a_{t-1} x^{t-1} + \cdots + a_1 x + a_0$, com $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_t$ as raízes deste polinômio.

Como $S_k = x_1^k + x_2^k + \cdots + x_t^k \in \mathbb{R}[x_1, x_2, \ldots, x_n\,]$, com $k \geq t$ e $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_t \in \mathbb{R}[x_1, x_2, \ldots, x_n]$. Temos,

$$\sigma_1 = x_1 + x_2 + \cdots + x_t = \frac{-a_{t-1}}{a_t}$$

$$\sigma_2 = x_1 . x_2 + x_1 . x_3 + \cdots + x_{t-1} . x_t = \frac{a_{t-2}}{a_t}$$

$$\vdots$$

$$\sigma_j = \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_j \leq t} x_{i_1} . x_{i_2} . x_{i_3} \ldots x_{i_j} = (-1)^j \frac{a_{t-j}}{a_t}$$

Onde as raízes $x_i, i = 1, \ldots, t$, satisfaz as equações:

$$a_t x_1^t + a_{t-1} x_1^{t-1} + \cdots + a_1 x_1 + a_0 = 0$$

$$\vdots$$

$$a_t x_t^t + a_{t-1} x_t^{t-1} + \cdots + a_1 x_t + a_0 = 0$$

Multiplicando cada umas das equações acima respectivamente por x_i^{k-t}:

$$a_t x_1^k + a_{t-1} x_1^{k-1} + \cdots + a_1 x_1^{k-(t-1)} + a_0 . x_1^{k-t} = 0$$

$$a_t x_2^k + a_{t-1} x_2^{k-1} + \cdots + a_1 x_2^{k-(t-1)} + a_0 . x_2^{k-t} = 0$$

$$\vdots$$

$$a_t x_t^k + a_{t-1} x_t^{k-1} + \cdots + a_1 x_t^{k-(t-1)} + a_0 . x_t^{k-t} = 0$$

Somando todas as equações encontramos:

$$a_t\left(x_1^k + \cdots + x_t^k\right) + a_{t-1}\left(x_1^{k-1} + \cdots + x_t^{k-1}\right) + \cdots + a_0\left(x_1^{k-t} + \cdots + x_t^{k-t}\right) = 0$$

$\Leftrightarrow a_t S_k + a_{t-1} S_{k-1} + \cdots + a_0 S_{k-t} = 0$, como $a_t \neq 0$, dividimos por a_t, e obtemos:

$$S_k + \frac{a_{t-1}}{a_t} S_{k-1} + \cdots + \frac{a_0}{a_t} S_{k-t} = 0.$$

Como $\sigma_j = (-1)^j \frac{a_{t-j}}{a_t}$, então $\sigma_j(-1)^j = \frac{a_{t-j}}{a_t}$.

.

Substituindo $\sigma_j(-1)^j = \frac{a_{t-j}}{a_t}$ em $S_k + \frac{a_{t-1}}{a_t} S_{k-1} + \cdots + \frac{a_0}{a_t} S_{k-t} = 0$.

Temos,

$$S_k - \sigma_1 S_{k-1} + \sigma_2 S_{k-2} + \cdots + (-1)^t \sigma_t S_{k-t} = 0. \blacksquare$$

Exemplo 1.12: O caso $k = t = 2$ na proposição 1.2.

Considere $S_k = {x_1}^k + {x_2}^k$ em $\mathbb{R}[x_1, x_2]$. Temos que $S_k = \sigma_1 . S_{k-1} - \sigma_2 . S_{k-2}$.

De fato,

$$S_k = {x_1}^k + {x_2}^k = (x_1 + x_2).({x_1}^{k-1} + {x_2}^{k-1}) - (x_1 . x_2).({x_1}^{k-2} + {x_2}^{k-2}) =$$
$$= \sigma_1 . S_{k-1} - \sigma_2 . S_{k-2}.$$

Observe que: $S_0 = {x_1}^0 + {x_2}^0 = 1 + 1 = 2$ e $S_1 = {x_1}^1 + {x_2}^1 = x_1 + x_2 = \sigma_1$.

Exemplo 1.13: Resolva o sistema:

$$\begin{cases} {x_1}^2 + {x_2}^2 = 13 \\ x_1 . x_2 = 6 \end{cases}.$$

Faça $\sigma_1 = x_1 + x_2$ e $\sigma_2 = x_1 . x_2$. Segue da proposição 1.2 que $S_2 = {\sigma_1}^2 - 2\,\sigma_2$. Dessa forma temos que:

$$\begin{cases} {x_1}^2 + {x_2}^2 = 13 \\ x_1 . x_2 = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} {\sigma_1}^2 - 2\sigma_2 = 13 \\ \sigma_2 = 6 \end{cases}$$

Portanto:

${\sigma_1}^2 - 2.6 = 13 \Rightarrow {\sigma_1}^2 - 12 = 13 \Rightarrow {\sigma_1}^2 = 13 + 12 \Rightarrow {\sigma_1}^2 = 25 \Rightarrow \sigma_1 = \pm 5$.

Se $\sigma_1 = 5$, então:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 5 \\ x_1 . x_2 = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = 3 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x_1 = 3 \\ x_2 = 2 \end{cases}.$$

Se $\sigma_1 = -5$, então:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -5 \\ x_1 . x_2 = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -3 \\ x_2 = -2 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x_1 = -2 \\ x_2 = -3 \end{cases}.$$

Portanto as soluções do sistema são $\{(2,3); (3,2); (-3,-2); (-2,-3)\}$.

Os exemplos 1.11 e 1.13 foram adaptados de [8].

Exemplo 1.14: Resolva o sistema:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_1.x_2 = 7 \\ {x_1}^2 + {x_2}^2 + x_1.x_2 = 13 \end{cases}$$

Façamos $\sigma_1 = x_1 + x_2$ e $\sigma_2 = x_1.x_2$. Segue da proposição 1.2 que $S_2 = {x_1}^2 + {x_2}^2$. Dessa forma temos que:

$$S_2 = {x_1}^2 + {x_2}^2 = {\sigma_1}^2 - 2\,\sigma_2;$$

Portanto,

$$\begin{cases} \sigma_1 + \sigma_2 = 7 \\ S_2 + \sigma_2 = 13 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sigma_1 + \sigma_2 = 7 \\ {\sigma_1}^2 - 2\,\sigma_2 + \sigma_2 = 13 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sigma_1 + \sigma_2 = 7 \\ {\sigma_1}^2 - \sigma_2 = 13 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sigma_2 = 7 - \sigma_1 \\ {\sigma_1}^2 - 7 + \sigma_1 = 13 \end{cases}.$$

Resolvendo ${\sigma_1}^2 + \sigma_1 - 20 = 0$, encontramos: $\sigma_1 = -5$ ou $\sigma_1 = 4$.

Se $\sigma_1 = -5$, então $\sigma_2 = 12$. Dessa forma não existe x_1, $x_2 \in \mathbb{R}$, tais que:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -5 \\ x_1\,.x_2 = 12 \end{cases}$$

Se $\sigma_1 = 4$, então $\sigma_2 = 3$. Dessa forma,

$\begin{cases} x_1 + x_2 = 4 \\ x_1\,.x_2 = 3 \end{cases}$, o que nos dá: $x_1 = 3$ e $x_2 = 1$ ou $x_1 = 1$ e $x_2 = 3$.

Portanto, as soluções do são $\{(3,1),(1,3)\}$.

Exemplo 1.15: Fatore o polinômio $p(x_1, x_2,\ x_3) = {x_1}^3 + {x_2}^3 + {x_3}^3 - 3x_1.x_2.x_3 \in \mathbb{R}[x_1, x_2, x_3\ ]$.

Façamos: $\sigma_1 = x_1 + x_2 + x_3$, $\sigma_2 = x_1.x_2 + x_1.x_3 + x_2.x_3$ e $\sigma_3 = x_1.x_2.x_3$. Segue da proposição 1.2 que:

$$S_3 = {\sigma_1}^3 - 3\sigma_1\sigma_2 + 3\sigma_3.$$

Dessa forma:

$$\begin{aligned} p(x_1, x_2,\ x_3) &= {x_1}^3 + {x_2}^3 + {x_3}^3 - 3x_1.x_2.x_3 \\ &= S_3 - 3\sigma_3 \\ &= {\sigma_1}^3 - 3\sigma_1\sigma_2 + 3\sigma_3 - 3\sigma_3 \\ &= {\sigma_1}^3 - 3\sigma_1\sigma_2 = \sigma_1({\sigma_1}^2 - 3\sigma_2) \\ &= (x_1 + x_2 + x_3).\left[(x_1 + x_2 + x_3)^2 - 3(x_1.x_2 + x_1.x_3 + x_2.x_3)\right] \\ &= (x_1 + x_2 + x_3).\left[({x_1}^2 + {x_2}^2 + {x_3}^2 + 2x_1.x_2 + 2x_1.x_3 + 2x_2.x_3 - 3x_1.x_2 - 3x_1.x_3 - 3x_2.x_3)\right] \\ &= (x_1 + x_2 + x_3).({x_1}^2 + {x_2}^2 + {x_3}^2 - x_1.x_2 - x_1.x_3 - x_2.x_3). \end{aligned}$$

1.3 Polinômio de Gauss

Nesta seção faremos uma abordagem algébrica do polinômio de Gauss para isso usaremos os conceitos de polinômios em várias indeterminadas sobre o corpo dos números reais, polinômios simétricos e homogêneos em $\mathbb{R}[x_1, x_2, \dots, x_n]$. A ideia consiste em avaliarmos a identidade (1.9) da proposição 1.1 sendo que esta estabelece relações entre as raízes de um polinômio e os seus respectivos coeficientes.

Definição 1.4: Dizemos que um polinômio $p \in \mathbb{R}[x_1, x_2, \dots, x_n]$ é *homogêneo* nas variáveis $x_1, x_2, \dots, x_n$ se $p(tx_1, tx_2, \dots, tx_n) = t^s p(x_1, x_2, \dots, x_n)$, para algum $s \in \mathbb{N}$ e para todo t ∈ ℝ. Assim p é $homog\hat{e}neo$ de grau s.

Exemplo 1.16: Seja um polinômio $p \in \mathbb{R}[x_1, x_2, x_3]$, definido por:

$$p(x_1, x_2, x_3) = x_1 + x_2 + x_3.$$

Observe que para todo t ∈ ℝ:

$$p(\mathrm{t}x_1, \mathrm{t}x_2, \mathrm{t}x_3) = \mathrm{t}x_1 + \mathrm{t}x_2 + \mathrm{t}x_3 = \mathrm{t}(x_1 + x_2 + x_3) = \mathrm{t}p(x_1, x_2, x_3).$$

Portanto p é homogêneo de grau 1.

Exemplo 1.17: Seja um polinômio $\sigma_2 \in \mathbb{R}[x_1, x_2, \dots, x_n]$, definido por:

$$\sigma_2(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{j_1 < j_2} x_{j_1} x_{j_2}.$$

Observe que

$$\sigma_2(tx_1, tx_2, \dots, tx_n) = \sum_{j_1 < j_2} tx_{j_1} tx_{j_2} = \sum_{j_1 < j_2} t^2 x_{j_1} x_{j_2} = t^2 \sum_{j_1 < j_2} x_{j_1} x_{j_2} = t^2 \sigma_2(x_1, x_2, \dots, x_n).$$

Portanto, σ_2 é homogêneo de grau 2.

Segue da proposição 1.1:

$$p(z) = \prod_{j=1}^{n} (z - x_j) = z^n - \sigma_1 z^{n-1} + \sigma_2 z^{n-2} + \cdots + (-1)^n \sigma_n,$$

com $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n \in \mathbb{R}[x_1, x_2, \dots, x_n]$, onde

$$\begin{cases} \sigma_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_1 + x_2 + \cdots + \ x_n = \sum_{j=1}^{n} x_j; \\ \sigma_2(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{j_1 < j_2} x_{j_1}\, x_{j_2}; \\ \sigma_3(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{j_1 < j_2 < j_3} x_{j_1}\, x_{j_2} x_{j_3}; \\ \vdots \\ \sigma_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_1 x_2 \dots x_n \end{cases}$$

Os polinômios $\sigma_i(x_1, x_2, \dots, x_n)$ definidos em (1.8) são homogêneos nas variáveis $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ de grau i. Avaliando os σ_i em $x_1 = x_2 = \cdots = \ x_n = 1$ temos que:

$$\sigma_i(1,1, \dots, 1) = \binom{n}{i} = \frac{n!}{i!\,(n-i)!}.$$

Além disso,

$$p(z) = \prod_{j=1}^{n} (z-1) = (z-1)^n =$$
$$= z^n - \sigma_1(1,1,\dots,1) z^{n-1} + \sigma_2(1,1,\dots,1) z^{n-2} + \cdots + (-1)^n \sigma_n(1,1,\dots,1)$$
$$= \ z^n - \binom{n}{1} z^{n-1} + \binom{n}{2} z^{n-2} + \cdots + (-1)^n \binom{n}{n}. \qquad (1.12)\ \blacksquare$$

Dessa forma de (1.12), obtemos o Teorema binomial.

Proposição 1.3: Para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$(z-1)^n = z^n - \binom{n}{1} z^{n-1} + \binom{n}{2} z^{n-2} + \cdots + (-1)^n \binom{n}{n}.$$

Fazendo a mudança de x_i para $-x_i$ em (1.9) obtemos:

$$(z + x_1)(z + x_2) \cdots (z + x_n) =$$
$$= \ z^n - \sigma_1(-x_1, -x_2, \dots, -\,x_n) z^{n-1} + \sigma_2(-x_1, -x_2, \dots, -\,x_n) z^{n-2} + \cdots$$
$$+ (-1)^n \sigma_n(-x_1, -x_2, \dots, -\,x_n). \qquad (1.13)$$

Fazendo z = 1 em (1.13) temos:

$$(1+x_1)(1+x_2)\cdots(1+x_n) =$$
$$= 1-\sigma_1(-x_1,-x_2,\dots,-x_n)+\sigma_2(-x_1,-x_2,\dots,-x_n)+\cdots+\sigma_n(-x_1,-x_2,\dots,-x_n) \quad (1.14)$$

Os σ_i definidos em (1.8) são polinômios nas variáveis x_k e o número de variáveis influencia a lei de formação das funções σ_i. Por exemplo,

$$\sigma_2(x_1,x_2,x_3) = x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3.$$

Por outro lado,

$$\sigma_2(x_1,x_2,x_3,x_4) = x_1x_2+x_1x_3+x_1x_4+x_2x_3+x_2x_4+x_3x_4.$$

Dessa forma, definimos:

$$\begin{cases}\sigma_0(x_1,x_2,x_3,\dots,x_n) = 1 & (1.15)\\ \sigma_m(x_1,x_2,x_3,\dots,x_n) = 0, \text{se } m > n & (1.16)\end{cases}$$

Vamos estabelecer as seguintes relações de recorrência:

Proposição 1.4: Para $k > 1$, $k \in \mathbb{N}$, temos que:

$$\sigma_{k+1}(x_1,x_2,x_3,\dots,x_n) = x_n\sigma_k(x_1,x_2,x_3,\dots,x_{n-1})+\sigma_{k+1}(x_1,x_2,x_3,\dots,x_{n-1}) \quad (1.17)$$

Demonstração: Vamos particionar a soma $\sigma_{k+1}(x_1,x_2,x_3,\dots,x_n)$ em duas parcelas:

Na primeira soma vamos considerar as parcelas formadas por produtos de comprimento k, onde cada fator $x_{j_i}\epsilon$ $\{x_1, x_2,\dots x_{n-1}\}$, e em seguida multiplicar cada parcela dessa soma (formada de produtos) por x_n.

Já a segunda soma deve ser formada por parcelas de produtos de comprimento k+1 cujos fatores pertençam a $\{x_1, x_2,\dots x_{n-1}\}$.

Daí, $\sigma_{k+1}(x_1,x_2,x_3,\dots,x_n)= x_n\sigma_k(x_1,x_2,x_3,\dots,x_{n-1})+\sigma_{k+1}(x_1,x_2,x_3,\dots,x_{n-1})$.

Proposição 1.5: Para $k > 1$, $k \in \mathbb{N}$, temos que:

$$\sigma_{k+1}(x_1,x_2,x_3,\dots,x_n) = x_1\sigma_k(x_2,x_3,x_4,\dots,x_n)+\sigma_{k+1}(x_2,x_3,x_4,\dots,x_n) \quad (1.18)$$

Demonstração: Vamos proceder como na demonstração da proposição 1.4. Dessa forma particionaremos a soma $\sigma_{k+1}(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$ em duas somas:

Na primeira soma vamos considerar as parcelas formadas por produtos de comprimento k, onde cada fator $x_{j_i} \epsilon \{x_2, x_3, \dots x_n\}$, e em seguida multiplicar cada parcela dessa soma *(formada por produtos) por* x_1.

A segunda soma deve ser formada por parcelas de produtos de comprimento k+1 cujos fatores pertençam a $\{x_2, x_3, \dots x_n\}$.

Daí, $\sigma_{k+1}(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) = x_1\sigma_k(x_2, x_3, x_4, \dots, x_n) + \sigma_{k+1}(x_2, x_3, x_4, \dots, x_n)$. ■

Como σ_k são polinômios homogêneos nas variáveis $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ de grau k, então para todo $t \in \mathbb{R}$, temos:

$$\sigma_k(tx_1, tx_2, tx_3, \dots, tx_n) = t^k\sigma_k(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n). \qquad (1.19)$$

No caso particular de $t = -1$, temos:

$$\sigma_k(-x_1, -x_2, -x_3, \dots, -x_n) = (-1)^k\sigma_k(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)\,. \qquad (1.20)$$

Substituindo (1.20) em (1.14), obtemos a identidade:

$$(1 + x_1)(1 + x_2)\cdots(1 + x_n) =$$
$$= 1 + \sigma_1(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) + \sigma_2(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) + \cdots + \sigma_n(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)\,. \quad (1.21)$$

Fazendo a substituição de x_i por tx_i em (1.21) obtemos:

$$(1 + tx_1)(1 + tx_2)\cdots(1 + tx_n) =$$
$$= 1 + \sigma_1(tx_1, tx_2, tx_3, \dots, tx_n) + \sigma_2(tx_1, tx_2, tx_3, \dots, tx_n) + \cdots + \sigma_n(tx_1, tx_2, tx_3, \dots, tx_n) \quad (1.22)$$

Segue de (1.19) que:

$$(1 + tx_1)(1 + tx_2)\cdots(1 + tx_n) =$$
$$= 1 + t\sigma_1(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) + t^2\sigma_2(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) + \cdots + t^n\sigma_n(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n). \quad (1.23)$$

Vamos considerar a função na variável $t \in \mathbb{R}$ definida por:

$$F_n(t) = (1 + tx_1)(1 + tx_2)\cdots(1 + tx_n) = 1 + t\sigma_1 + t^2\sigma_2 + \cdots + t^n\sigma_n \qquad (1.24)$$

E então determinar os coeficientes σ_k por meio da expansão de $F_n(t)$ em série de Taylor em torno de $t = 0$. Segue de [10], que para $k \geq 1$:

$$\sigma_k(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) = \frac{d^k\big(F_n(0)\big)}{k!\ dt^k}. \qquad (1.25)$$

Temos por definição que $\sigma_0(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) = 1$.

Avaliando as funções $\sigma_k(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$ para $x_i = xq^{i-1}, i = 1, 2, 3, \dots, n$, ou seja, $\sigma_k\big(x_1, x_2, x_{3,} \dots, x_n\big) = \sigma_k(x, xq, xq^2, \dots, xq^{n-1})$.

Segue de (1.19) que:

$$\sigma_k(x, xq, xq^2, \dots, xq^{n-1}) = x^k\sigma_k(1, q, q^2, \dots, q^{n-1}), \text{ ou seja,}$$

$$\sigma_k(1, q, q^2, \dots, q^{n-1}) = x^{-k}\sigma_k(x, xq, xq^2, \dots, xq^{n-1}). \qquad (1.26)$$

Agora vamos analisar $\sigma_k(x, xq, xq^2, \dots, xq^{n-1})$, observemos que σ_k são constituídos por somas, cujas parcelas são produtos formados por k fatores que pertencem ao conjunto $\{x, qx, q^2x, q^3x, \dots, q^{n-1}x\}$. Dessa forma, cada parcela em $\sigma_k(x, xq, xq^2, \dots, xq^{n-1})$ é formada por um produto desses k fatores cuja menor potência x^sq^t, $s, t \in \mathbb{N}$ nesse produto é da forma $x^kq^{\frac{k(k-1)}{2}}$.

De fato:

$$x.qx.q^2x \dots q^{k-1}x = x^kq^{1+2+3+\dots+k-1} = x^kq^{\frac{k(k-1)}{2}}, \text{e nesse caso } s = k \text{ e } t = \frac{k(k-1)}{2}.$$

Colocando $x^kq^{\frac{k(k-1)}{2}}$ em evidência em $\sigma_k(x, xq, xq^2, \dots, xq^{n-1})$ podemos escrever:

$$\sigma_k(x, xq, xq^2, \dots, xq^{n-1}) = x^kq^{1+2+\dots+(k-1)}\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = x^kq^{\frac{k(k-1)}{2}}\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} \qquad (1.27),$$

onde $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}$ é um polinômio na variável q.

Segue de (1.27) e (1.26) que:

$$\sigma_k(1, q, q^2, \dots, q^{n-1}) = q^{\frac{k(k-1)}{2}} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} \qquad (1.28)$$

Observe o caso $n = k$ em (1.28)

$$\sigma_n(1, q, q^2, \dots, q^{n-1}) = q^{\frac{n(n-1)}{2}} \begin{bmatrix} n \\ n \end{bmatrix} \qquad (1.29)$$

Segue da definição que:

$$\sigma_n(1, q, q^2, \dots, q^{n-1}) = q . q^2 \dots\ q^{n-1} = q^{1+2+\cdots+n-1} = q^{\frac{n(n-1)}{2}} \qquad (1.30)$$

Segue de (1.29) e (1.30) que $\begin{bmatrix} n \\ n \end{bmatrix} = 1$. ■

Definição 1.5: Sejam $k, n \in \mathbb{N}$. O polinômio $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}$ na variável q dado em (1.28) é chamado *polinômio de Gauss* ou *coeficiente q-binomial*.

Segue de (1.15) e (1.16), respectivamente que: $\begin{bmatrix} n \\ 0 \end{bmatrix} = 1$ e $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = 0$, se $n < k$.

Nosso objetivo a partir de agora, é determinar uma fórmula explícita para o polinômio $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}$ na variável q, no caso $n > k$ e $k > 0$. Para isso, usaremos as proposições 1.4 e 1.5.

Segue da Proposição 1.4 que:

$$\sigma_{k+1}(1, q, q^2, \dots, q^n) = q^n \sigma_k(1, q, q^2, \dots, q^{n-1}) + \sigma_{k+1}(1, q, q^2, \dots, q^{n-1}) \qquad (1.31)$$

Substituindo $\sigma_{k+1}(1, q, q^2, \dots, q^n) = q^{\frac{(k+1)k}{2}} \begin{bmatrix} n+1 \\ k+1 \end{bmatrix}$, $\sigma_k(1, q, q^2, \dots, q^{n-1}) = q^{\frac{k(k-1)}{2}} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}$ e $\sigma_{k+1}(1, q, q^2, \dots, q^{n-1}) = q^{\frac{(k+1)k}{2}} \begin{bmatrix} n \\ k+1 \end{bmatrix}$ em (1.31) obtemos:

$$q^{\frac{(k+1)k}{2}} \begin{bmatrix} n+1 \\ k+1 \end{bmatrix} = q^n\, q^{\frac{k(k-1)}{2}} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} + q^{\frac{(k+1)k}{2}} \begin{bmatrix} n \\ k+1 \end{bmatrix}$$

$$q^{\frac{(k+1)k}{2}} \begin{bmatrix} n+1 \\ k+1 \end{bmatrix} = q^n\, q^{-k} q^k q^{\frac{k(k-1)}{2}} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} + q^{\frac{(k+1)k}{2}} \begin{bmatrix} n \\ k+1 \end{bmatrix}$$

$$q^{\frac{(k+1)k}{2}} \begin{bmatrix} n+1 \\ k+1 \end{bmatrix} = q^{n-k} q^{\frac{2k+k^2-k}{2}} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} + q^{\frac{(k+1)k}{2}} \begin{bmatrix} n \\ k+1 \end{bmatrix}$$

$$q^{\frac{k(k+1)}{2}} \begin{bmatrix} n+1 \\ k+1 \end{bmatrix} = q^{n-k} q^{\frac{(k+1)k}{2}} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} + q^{\frac{(k+1)k}{2}} \begin{bmatrix} n \\ k+1 \end{bmatrix}$$

$$q^{\frac{k(k+1)}{2}} \begin{bmatrix} n+1 \\ k+1 \end{bmatrix} = q^{\frac{(k+1)k}{2}} \left\{ q^{n-k} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} n \\ k+1 \end{bmatrix} \right\}.$$

Portanto,

$$\begin{bmatrix} n+1 \\ k+1 \end{bmatrix} = q^{n-k} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} n \\ k+1 \end{bmatrix}. \qquad (1.32)$$

Dessa forma concluímos que o polinômio de Gauss satisfaz a seguinte relação de recorrência:

Proposição 1.6: Para $k, n \in \mathbb{N}$, com $n > k$ temos que:

$$\begin{bmatrix} n+1 \\ k+1 \end{bmatrix} = q^{n-k} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} n \\ k+1 \end{bmatrix}.$$

Vamos aplicar a proposição 1.5 e dessa forma temos a seguinte identidade:

$$\sigma_{k+1}(1, q, q^2, \dots, q^n) = \sigma_k(q, q^2, \dots, q^n) + \sigma_{k+1}(q, q^2, \dots, q^n)\,. \qquad (1.33)$$

Sendo $\sigma_k(q, q^2, q^3, \dots, q^n) = q^k \sigma_k(1, q, \dots, q^{n-1})$ e $\sigma_{k+1}(q, q^2, q^3, \dots, q^n) = q^{k+1}\sigma_{k+1}(1, q, \dots, q^{n-1})$, concluímos:

$$\sigma_{k+1}(1, q, q^2, \dots, q^n) = q^k \sigma_k(1, q, q^2, \dots, q^{n-1}) + q^{k+1}\sigma_{k+1}(1, q, q^2, \dots, q^{n-1}) \qquad (1.34)$$

Substituindo $\sigma_{k+1}(1, q, q^2, \dots, q^n) = q^{\frac{(k+1)k}{2}} \begin{bmatrix} n+1 \\ k+1 \end{bmatrix}$,

$\sigma_k(1, q, q^2, \dots, q^{n-1}) = q^{\frac{(k-1)k}{2}} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}$ e $\sigma_{k+1}(1, q, q^2, \dots, q^{n-1}) = q^{\frac{(k-1)k}{2}} \begin{bmatrix} n \\ k+1 \end{bmatrix}$ em (1.34) obtemos:

$$q^{\frac{(k+1)k}{2}} \begin{bmatrix} n+1 \\ k+1 \end{bmatrix} = q^k q^{\frac{(k-1)k}{2}} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} + q^{k+1} q^{\frac{(k+1)k}{2}} \begin{bmatrix} n \\ k+1 \end{bmatrix}$$

$$q^{\frac{(k+1)k}{2}} \begin{bmatrix} n+1 \\ k+1 \end{bmatrix} = q^{\frac{(k+1)k}{2}} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} + q^{k+1} q^{\frac{(k+1)k}{2}} \begin{bmatrix} n \\ k+1 \end{bmatrix}$$

$$q^{\frac{k(k+1)}{2}} \begin{bmatrix} n+1 \\ k+1 \end{bmatrix} = q^{\frac{(k+1)k}{2}} \left\{ \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} + q^{k+1} \begin{bmatrix} n \\ k+1 \end{bmatrix} \right\}.$$

Portanto,

$$\begin{bmatrix} n+1 \\ k+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} + q^{k+1} \begin{bmatrix} n \\ k+1 \end{bmatrix}. \qquad (1.35)$$

Dessa forma concluímos que o polinômio de Gauss satisfaz a seguinte relação de recorrência:

Proposição 1.7: Para $k, n \in \mathbb{N}$, temos que:

$$\begin{bmatrix} n+1 \\ k+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} + q^{k+1} \begin{bmatrix} n \\ k+1 \end{bmatrix}.$$

Segue das proposições 1.6 e 1.7 que:

$$0 = \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} + q^{k+1} \begin{bmatrix} n \\ k+1 \end{bmatrix} - q^{n-k} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} n \\ k+1 \end{bmatrix}$$

$$0 = \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} (1 - q^{n-k}) + \begin{bmatrix} n \\ k+1 \end{bmatrix} (q^{k+1} - 1)$$

$$\begin{bmatrix} n \\ k+1 \end{bmatrix} (q^{k+1} - 1) = - \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} (1 - q^{n-k})$$

$$\begin{bmatrix} n \\ k+1 \end{bmatrix} = \frac{- \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q (1 - q^{n-k})}{(q^{k+1} - 1)} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} n \\ k+1 \end{bmatrix} = \frac{(1 - q^{n-k})}{(1 - q^{k+1})} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}.$$

Dessa forma concluímos que o polinômio de Gauss satisfaz a seguinte relação de recorrência:

Proposição 1.8: Para $k, n \in \mathbb{N}, n > k$,

$$\begin{bmatrix} n \\ k+1 \end{bmatrix} = \frac{(1 - q^{n-k})}{(1 - q^{k+1})} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}. \qquad (1.36)$$

Fazendo $k = 1$ em (1.28) temos que $\sigma_1(1, q, q^2, \dots, q^{n-1}) = q^0 \begin{bmatrix} n \\ 1 \end{bmatrix}$. Por outro lado,

$$\sigma_1(1, q, q^2, \dots, q^{n-1}) = 1 + q + q^2 + \cdots + q^{n-1} =$$

$$= \frac{(1 + q + q^2 + \cdots + q^{n-1})(1 - q)}{(1 - q)} = \frac{1 - q^n}{1 - q}$$

Portanto,

$$\begin{bmatrix} n \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1 - q^n}{1 - q}.$$

Observe que:

$$\begin{bmatrix} n \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n \\ 1+1 \end{bmatrix} = \frac{1-q^{n-1}}{1-q^2}\begin{bmatrix} n \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1-q^{n-1}}{1-q^2} \times \frac{1-q^n}{1-q};$$

$$\begin{bmatrix} n \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n \\ 2+1 \end{bmatrix} = \frac{1-q^{n-2}}{1-q^3}\begin{bmatrix} n \\ 2 \end{bmatrix} = \frac{1-q^{n-2}}{1-q^3} \times \frac{1-q^{n-1}}{1-q^2} \times \frac{1-q^n}{1-q};$$

$$\begin{bmatrix} n \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n \\ 3+1 \end{bmatrix} = \frac{1-q^{n-3}}{1-q^4}\begin{bmatrix} n \\ 3 \end{bmatrix} = \frac{1-q^{n-3}}{1-q^4} \times \frac{1-q^{n-2}}{1-q^3} \times \frac{1-q^{n-1}}{1-q^2} \times \frac{1-q^n}{1-q};$$

$$\begin{bmatrix} n \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n \\ 4+1 \end{bmatrix} = \frac{1-q^{n-4}}{1-q^5}\begin{bmatrix} n \\ 4 \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{1-q^{n-4}}{1-q^5} \times \frac{1-q^{n-3}}{1-q^4} \times \frac{1-q^{n-2}}{1-q^3} \times \frac{1-q^{n-1}}{1-q^2} \times \frac{1-q^n}{1-q}.$$

Segue por indução: $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = \frac{(1-q^{n-k+1})(1-q^{n-k})\ldots(1-q^n)}{(1-q^k)(1-q^{k-1})\ldots(1-q)}$ (1.37)

Logo, chegamos na fórmula explícita para o polinômio de Gauss.

Proposição 1.9: Para $k, n \in \mathbb{N}, n > k$,

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = \frac{(1-q^{n-k+1})(1-q^{n-k})\ldots(1-q^n)}{(1-q^k)(1-q^{k-1})\ldots(1-q)}$$

Definição 1.6: Seja $n \in \mathbb{N}$. Chamamos de um q-*análogo* do natural n, e denotamos por $[n]$ o seguinte polinômio na variável q definido como,

$$[n] = \frac{q^n-1}{q-1} = 1 + q + q^2 + \cdots + q^{n-1}.$$

Segue da definição 1.6 que $\lim_{q\to 1}[n] = 1 + 1 + \cdots + 1 = n$ e dessa forma dizemos que $[n]$ é uma extensão do número natural n.

Definição 1.7: Seja $n \in \mathbb{N}$. Chamamos de um q-*análogo* do $n!$, e denotamos por $[n]!$ o seguinte polinômio na variável q definido recursivamente por:

$$[n]! = [n][n-1]!, \text{ com } [1]! = 1$$

Segue da definição 1.7 que $lim_{q\to 1}[n]! = n!$ e dessa forma dizemos que $[n]!$ é uma extensão do número $n!$.

Exemplo 1.18:

$[1]! = [1] = 1;$

$[2]! = [2].[1] = (1+q).1 = 1+q;$

$[3]! = [3].[2]! = (1+q+q^2).(1+q);$

$[4]! = [4].[3]! = (1+q+q^2+q^3)(1+q+q^2).(1+q);$

Proposição 1.10: Para $k, n \in \mathbb{N}$, temos que,

$$lim_{q\to 1}\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = \binom{n}{k}.$$

Demonstração: Nos casos $k = 0, 1, n$ e $n < k$. Temos que:

1) $lim_{q\to 1}\begin{bmatrix} n \\ 0 \end{bmatrix} = lim_{q\to 1} 1 = 1 = \binom{n}{0}$;

2) $lim_{q\to 1}\begin{bmatrix} n \\ 1 \end{bmatrix} = lim_{q\to 1}(1+q+\cdots+q^{n-1}) = n = \binom{n}{1}$;

4) $lim_{q\to 1}\begin{bmatrix} n \\ n \end{bmatrix} = lim_{q\to 1} 1 = 1 = \binom{n}{n}$;

3) $lim_{q\to 1}\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = lim_{q\to 1} 0 = 0 = \binom{n}{k}$, se $n < k$.

Suponha que $n > k$, dessa forma segue da proposição 1.9 que

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = \frac{(1-q^{n-k+1})(1-q^{n-k})\ldots(1-q^n)}{(1-q^k)(1-q^{k-1})\ldots(1-q)}.$$

Dessa forma reescrevendo $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}$, temos:

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = \frac{(1-q^n)(1-q^{n-1})\ldots\left(1-q^{n-(k-1)}\right)}{(1-q^k)\ldots(1-q)} \times \frac{(1-q^{n-k})\ldots(1-q^2)(1-q)}{(1-q^{n-k})\ldots(1-q^2)(1-q)} =$$

$$= \frac{\frac{(1-q^n)}{1-q}(1-q)\frac{(1-q^{n-1})}{1-q}(1-q)\ldots\frac{(1-q^2)}{1-q}(1-q)\frac{(1-q)}{1-q}(1-q)}{\frac{(1-q^k)}{1-q}(1-q)\ldots\frac{(1-q)}{1-q}(1-q)\frac{(1-q^{n-k})}{1-q}(1-q)\ldots\frac{(1-q^2)}{1-q}(1-q)\frac{(1-q)}{1-q}(1-q)}$$

$$= \frac{\frac{(1-q^n)}{1-q}\frac{(1-q^{n-1})}{1-q}\cdots\frac{(1-q^2)}{1-q}\frac{(1-q)}{1-q}(1-q)^n}{\frac{(1-q^k)}{1-q}\cdots\frac{(1-q^2)}{1-q}\frac{(1-q)}{1-q}(1-q)^k\frac{(1-q^{n-k})}{1-q}\cdots\frac{(1-q^2)}{1-q}\frac{(1-q)}{1-q}(1-q)^{n-k}} =$$

$$= \frac{\frac{(1-q^n)}{1-q}\frac{(1-q^{n-1})}{1-q}\cdots\frac{(1-q^2)}{1-q}\frac{(1-q)}{1-q}.}{\frac{(1-q^k)}{1-q}\cdots\frac{(1-q^2)}{1-q}\frac{(1-q)}{1-q}\frac{(1-q^{n-k})}{1-q}\cdots\frac{(1-q^2)}{1-q}\frac{(1-q)}{1-q}} =$$

$$= \frac{[n][n-1]\ldots[1]}{[k][k-1]\ldots[1]\ldots[n-k]\ldots[2][1]} =$$

$$= \frac{[n]!}{[k]!\,[n-k]!}.$$

Portanto,

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = \frac{[n]!}{[k]!\,[n-k]!} \text{ e } lim_{q\to 1}\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = \binom{n}{k}.$$

O coeficiente binomial satisfaz diversas identidades, sendo possível demonstrá-las algebricamente. O polinômio de Gauss, a saber, $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}$ é uma extensão ou uma generalização do coeficiente binomial, e este fato decorre da proposição 1.9, pois, $lim_{q\to 1}\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = \binom{n}{k}$.

Além disso,

$$\begin{bmatrix} n \\ n-k \end{bmatrix} = \frac{[n]!}{[n-k]!\,[n-(n-k)]!} = \frac{[n]!}{[k]!\,[n-k]!} = \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}.$$

Outra propriedade do polinômio de Gauss similar à propriedade obtida por meio do coeficiente binomial é a relação de Stifel[1] esta propriedade segue da proposição 1.7, a saber:

---

[1] Michael Stifel (1487 – 1567) publicou em 1544 sua obra *Arithmetica integra*, o mais importante tratado de álgebra da Alemanha no século XVI. Nele aparece pela primeira vez o triângulo dos coeficientes do binômio, até os de ordem 17, inclusive a fórmula recorrente entre eles hoje conhecida como relação de Stifel, que é uma

$$\begin{bmatrix} n+1 \\ k+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} + q^{k+1} \begin{bmatrix} n \\ k+1 \end{bmatrix}, \forall\, k, n \in \mathbb{N}.$$

Por meio dessa propriedade podemos construir um triângulo similar ao Triângulo de Pascal[2]. A respectiva propriedade nos diz que o polinômio de Gauss disposto na linha $n+1$ pode ser obtido através do polinômio de Gauss da linha n, $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}$ somado a $q^{k+1}\begin{bmatrix} n \\ k+1 \end{bmatrix}$. Por exemplo:

Tabela 1 - Triângulo similar ao Triângulo de Pascal

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} & & & & \\
 & & & \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} & & \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} & & & \\
 & & \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} & & \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} & & \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} & & \\
 & \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix} & & \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} & & \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} & & \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix} & \\
\begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix} & & \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix} & & \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix} & & \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix} & & \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \end{bmatrix}
\end{array}$$

$$\vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots$$

Fonte: Autora

Calculando os coeficientes q −binomiais na tabela 1 e reescrevendo a tabela obtemos:

---

identidade bem conhecida em análise combinatória e tem suas aplicações envolvendo coeficientes binomiais dada por : para quaisquer naturais n,k tais que $1 \leq k \leq n$, $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$ [1].

[2] O triângulo de Pascal é um triângulo numérico formado pelos coeficientes binomiais. Foi descoberto pelo matemático chines Yang Hui (1238-1298) e posteriormente Blaise Pascal (1623-1662) matemático e filósofo, escreveu e estudou as suas propriedades. O triângulo é infinito e simétrico, e seus lados esquerdo e direito sempre devem possuir o número 1. Cada linha possui um número a mais que a linha anterior. Por suas interessantes propriedades, pode ser construído facialmente á partir da primeira linha [1].

Tabela 2 - Generalização do Triângulo de Pascal

1					$\rightarrow$	$\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$				
1	1				$\rightarrow$	$\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$			
1	1+q	1			$\rightarrow$	$\begin{bmatrix}2\\0\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}2\\2\end{bmatrix}$		
1	$1+q+q^2$	$1+q+q^2$	1		$\rightarrow$	$\begin{bmatrix}3\\0\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}3\\1\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}3\\2\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}3\\3\end{bmatrix}$	
1	$1+q+q^2+q^3$	$1+q+2q^2+q^3+q^4$	$1+q+q^2+q^3$	1	$\rightarrow$	$\begin{bmatrix}4\\0\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}4\\1\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}4\\2\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}4\\3\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}4\\4\end{bmatrix}$
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮		⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

Fonte: Autora.

1.4 Uma generalização do Teorema Binomial

Os números binomiais $\binom{n}{k}$ são definidos combinatoriamente como o número de maneiras de escolher k objetos de um conjunto de n objetos. Na expansão de $(1+z)^n$, onde z é um número real e n é um número natural o coeficiente de z^k é $\binom{n}{k}$ tal resultado é conhecido como Teorema Binomial. O polinômio de Gauss, também chamado de coeficiente q-binomial, definido na seção anterior é uma extensão do coeficiente binomial satisfazendo diversas identidades similares às identidades obtidas por meio do coeficiente binomial. Nesta seção validaremos e enunciaremos o Teorema q-binomial a seguir observaremos que esse resultado é uma extensão ou generalização do Teorema binomial. Segue da identidade (1.21):

$$(1+x_1)(1+x_2)\dots(1+x_n) =$$
$$= 1+\sigma_1(x_1,x_2,\dots,x_n)+\sigma_2(x_1,x_2,\dots,x_n)+\cdots+\sigma_n(x_1,x_2,\dots,x_n). \qquad (1.38)$$

Fazendo $x_i = xq^{i-1}, i = 1,\dots,n,$ em (1.38) e usando as identidades (1.27) e (1.28) temos:

$$(1+x)(1+xq)(1+xq^2)\dots(1+xq^{n-1}) =$$
$$= 1+\sigma_1(x,xq,xq^2,\dots,xq^{n-1})+\sigma_2(x,xq,xq^2,\dots,xq^{n-1})+\cdots+\sigma_n(x,xq,xq^2,\dots,xq^{n-1})$$
$$= 1+x\sigma_1(1,q,q^2,\dots,q^{n-1})+x^2\sigma_2(1,q,q^2,\dots,q^{n-1})+\cdots+x^n\sigma_n(1,q,q^2,\dots,q^{n-1})$$

$$= 1 + x \begin{bmatrix} n \\ 1 \end{bmatrix} + x^2 q^{\frac{2(2-1)}{2}} \begin{bmatrix} n \\ 2 \end{bmatrix} + x^3 q^{\frac{3(3-1)}{2}} \begin{bmatrix} n \\ 3 \end{bmatrix} + \cdots + x^n q^{\frac{n(n-1)}{2}} \begin{bmatrix} n \\ n \end{bmatrix}$$

$$= 1 + x \begin{bmatrix} n \\ 1 \end{bmatrix} + x^2 \begin{bmatrix} n \\ 2 \end{bmatrix} q + x^3 \begin{bmatrix} n \\ 3 \end{bmatrix} q^3 + x^4 \begin{bmatrix} n \\ 4 \end{bmatrix} q^6 \ldots + x^n \begin{bmatrix} n \\ n \end{bmatrix} q^{\frac{n(n-1)}{2}} \qquad (1.39)$$

Segue da identidade (1.39) o Teorema Binomial generalizado ou uma extensão do Teorema Binomial que damos a seguir:

Proposição 1.11: Sejam $x, q \in \mathbb{R}$. Então

$$(1 + x)(1 + xq)(1 + xq^2) \ldots (1 + xq^{n-1}) =$$

$$= 1 + x \begin{bmatrix} n \\ 1 \end{bmatrix} + x^2 \begin{bmatrix} n \\ 2 \end{bmatrix} q + x^3 \begin{bmatrix} n \\ 3 \end{bmatrix} q^3 + x^4 \begin{bmatrix} n \\ 4 \end{bmatrix} q^6 \ldots + x^n \begin{bmatrix} n \\ n \end{bmatrix} q^{\frac{n(n-1)}{2}}.$$

Fazendo $q \to 1$ na identidade (1.39) obtemos o Teorema Binomial, ou seja,

$$(1 + x)^n = (1 + x)(1 + x)(1 + x) \ldots (1 + x) =$$

$$= 1 + x \binom{n}{1} + x^2 \binom{n}{2} + x^3 \binom{n}{3} + x^4 \binom{n}{4} \ldots + x^n \binom{n}{n}.$$

1.5 Algumas propriedades

Na seção anterior validamos diversas propriedades do polinômio de Gauss e observamos que essas identidades são generalizações de propriedades relativas ao coeficiente binomial. A seguir listamos cada uma delas:

Propriedades: Para todo $n, k \in \mathbb{N}$, temos:

1. $\begin{bmatrix} n \\ 0 \end{bmatrix} = 1;$
2. $\begin{bmatrix} n \\ n \end{bmatrix} = 1;$
3. $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = 0$, se $n < k$;
4. $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = \dfrac{(1 - q^{n-k+1})(1 - q^{n-k}) \ldots (1 - q^n)}{(1 - q^k)(1 - q^{k-1}) \ldots (1 - q)}$ $, n > k;$

5. $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = \dfrac{[n]!}{[k]!\,[n-k]!}$;

6. $lim_{q\to 1} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = \binom{n}{k}$;

7. $\begin{bmatrix} n \\ n-k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}$

8. $\begin{bmatrix} n+1 \\ k+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} + q^{k+1} \begin{bmatrix} n \\ k+1 \end{bmatrix}$;

9. $\begin{bmatrix} n+1 \\ k+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n \\ k+1 \end{bmatrix} + q^{n-k} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}$.

Queremos validar a seguinte identidade, fazendo algumas manipulações algébricas:

$$\sum_{j=0}^{n} q^{j^2} \begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} 2n \\ n \end{bmatrix} \qquad (1.40)$$

A interessante identidade dada em (1.40) que envolve o polinômio de Gauss é uma generalização da identidade $\sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j}^2 = \binom{2n}{n}$, pois quando avaliamos (1.40) em $q = 1$ obtemos a tal célebre identidade. Essa identidade prova-se algebricamente comparando os coeficientes de x^n na expansão da igualdade:

$(1+x)^{2n} = (1+x)^n(1+x)^n$, quando se aplica o Teorema binomial, dado um n inteiro positivo. Da mesma forma prova-se (1.40):

Proposição 1.12: Sejam $q \in \mathbb{R}$. Então

$$\sum_{j=0}^{n} q^{j^2} \begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} 2n \\ n \end{bmatrix}$$

Demonstração: Fazendo $x = zq$ na proposição 1.11 temos que:

$$(1+zq).(1+zq^2)\ldots(1+zq^n) =$$
$$= 1 + zq \begin{bmatrix} n \\ 1 \end{bmatrix} + z^2q^3 \begin{bmatrix} n \\ 2 \end{bmatrix} + z^3q^6 \begin{bmatrix} n \\ 3 \end{bmatrix} + \cdots + z^n q^{\frac{n(n+1)}{2}} \begin{bmatrix} n \\ n \end{bmatrix}$$

$$= \sum_{j=0}^{n} z^j \, q^{\frac{j(j+1)}{2}} \begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix} \qquad (1.41)$$

De (1.41), temos que :

$$\sum_{j=0}^{2n} z^j \, q^{\frac{j(j+1)}{2}} \begin{bmatrix} 2n \\ j \end{bmatrix} = (1 + zq).(1 + zq^2) \dots (1 + zq^{2n}) =$$

$$= [(1 + zq).(1 + zq^2) \dots (1 + \mathrm{z}q^n)].[(1 + z.q^n.q).(1 + z.q^n.q^{\mathrm{n}})] =$$

$$= \sum_{j=0}^{n} z^j \, q^{\frac{j(j+1)}{2}} \begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix} . \sum_{k=0}^{n} (zq^n)^k . q^{\frac{k(k+1)}{2}} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} \qquad (1.42)$$

Comparando o coeficiente de z^n na igualdade dada em (1.42) temos:

$$q^{\frac{n(n+1)}{2}} \begin{bmatrix} 2n \\ n \end{bmatrix} = \sum_{k=0}^{n} q^{\frac{(n-k).(n-k+1)}{2}} \begin{bmatrix} n \\ n-k \end{bmatrix} . q^{\frac{2nk+k(k+\mathbf{1})}{\mathbf{2}}} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}, \text{ ou seja,}$$

$$q^{\frac{n(n+1)}{2}} \begin{bmatrix} 2n \\ n \end{bmatrix} = \sum_{k=0}^{n} q^{\frac{n^2-nk+n-kn+k^2-k}{2}} \begin{bmatrix} n \\ n-k \end{bmatrix} . q^{\frac{2nk+k^2+k}{2}} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} q^{\frac{n^2-2nk+n+k^2-k}{2}} . q^{\frac{2nk+k^2+k}{2}} \begin{bmatrix} n \\ n-k \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}.$$

Ou ainda,

$$q^{\frac{n(n+1)}{2}} \begin{bmatrix} 2n \\ n \end{bmatrix} = \sum_{k=0}^{n} q^{\frac{n^2+n+2k^2}{2}} \begin{bmatrix} n \\ n-k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}$$

$$q^{\frac{n(n+1)}{2}} \begin{bmatrix} 2n \\ n \end{bmatrix} = \sum_{k=0}^{n} q^{\frac{n(n+1)}{2}} . q^{k^2} \begin{bmatrix} n \\ n-k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}$$

$$q^{\frac{n(n+1)}{2}} \begin{bmatrix} 2n \\ n \end{bmatrix} = q^{\frac{n(n+1)}{2}} \sum_{k=0}^{n} q^{k^2} \begin{bmatrix} n \\ n-k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2n \\ n \end{bmatrix} = \sum_{k=0}^{n} q^{k^2} \begin{bmatrix} n \\ n-k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = \sum_{k=0}^{n} q^{k^2} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2n \\ n \end{bmatrix} = \sum_{k=0}^{n} q^{k^2} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}$$

Portanto,

$$\begin{bmatrix} 2n \\ n \end{bmatrix} = \sum_{k=0}^{n} q^{k^2} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}^2 . \blacksquare$$

2 PARTIÇÕES DE UM INTEIRO: UMA ABORDAGEM COMBINATÓRIA PARA O POLINÔMIO DE GAUSS

Neste capítulo apresentaremos a definição de partição de um inteiro positivo com suas respectivas propriedades e iremos estabelecer algumas funções geradoras para partições com restrições. Será introduzido o conceito de polinômio de Gauss por meio de partições com restrições e veremos que o coeficiente q-binomial está estreitamente relacionado com a função geradora para partições de um inteiro positivo n cujas partes é no máximo m e cada parte é menor do que ou igual a N, sendo N, m inteiros positivos. No final apresentaremos uma interpretação pratica do Polinômio de Gauss por meio de ladrilhamento de retângulo e caminhos reticulados.

2.1 Partições de um inteiro

Definição 2.1: Considere $(\lambda_1,\ \lambda_2, \dots ,\ \lambda_k)$ tais que $\lambda_1, \geq\ \lambda_2\ \geq\ \dots \geq\ \lambda_k$ inteiros positivos. Seja $n =\ \lambda_1\ +\ \lambda_2 + \cdots\ \lambda_k$. Dizemos que $(\lambda_1,\ \lambda_2, \dots , \lambda_k)$ é uma partição do inteiro n, cujos λ_i, com $1 \leq i \leq k$,são chamados de partes da partição de n.

Também denotamos uma partição de n por $(\lambda_1^{\alpha_1},\ \lambda_2^{\alpha_2},\ \dots\ ,\ \lambda_l^{\alpha_l})$, onde α_l é o número de partes iguais a λ_i e $k = \alpha_1 +\ \alpha_2 +\ \dots + \alpha_l$.

Assim temos:

$$\sum_{i=1}^{k} \lambda_i = n$$

Denotamos por $p(n)$ o número de partições de n. Assim temos que $p(4) = 5;\ p(5) = 7$ e $p(7) = 15$.

Exemplos 2.1: As partições dos inteiros 4, 5 e 7 são dadas:

4	5	7
3+1	4+1	6+1
2+2	3+2	5+2
2+1+1	3+1+1	5+1+1
1+1+1+1	2+2+1	4+3
	2+1+1+1	4+2+1
	1+1+1+1+1	4+1+1+1
		3+3+1
		3+2+2
		3+2+1+1
		3+1+1+1+1
		2+2+2+1
		2+2+1+1+1
		2+1+1+1+1+1
		1+1+1+1+1+1+1

Podemos observar que o numero de partições de um inteiro, ou seja, $p(n)$ apresenta um crescimento muito rápido à medida que n aumenta. O matemático indiano S. Ramanujan juntamente com G.H. Hardy e H. Randemacher no século XX, criaram a seguinte fórmula para calcular $p(n)$:

$$p(n) = \frac{1}{\pi\sqrt{2}} \sum_{k=1}^{\infty} A_k(n)\, \sqrt{k} \left[\frac{d}{dx} \, \frac{sen\, h\left(\frac{\pi}{x}\left(\frac{2}{3}\left(x - \frac{1}{24}\right)\right)\right)^{\frac{1}{2}}}{\left(x - \frac{1}{24}\right)^{\frac{1}{2}}} \right]_{x=n}$$

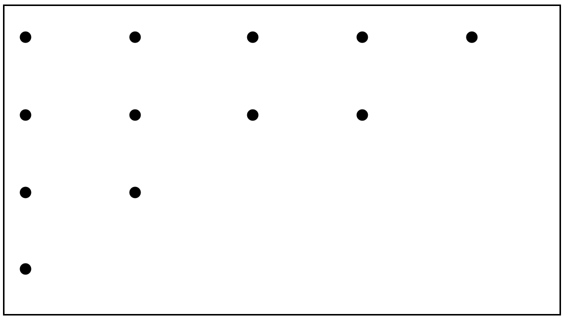
em que,

$$A_k(n) = \sum_{0 \,\leq\, h \leq k, (h,k)=1} \exp\left(\pi i \sum_{j=k}^{k-1} \frac{1}{k}\left(\frac{hj}{k} - \left\lfloor \frac{hj}{k} \right\rfloor - \frac{1}{2}\right) - \frac{2\pi i h n}{k} \right) \text{ e}$$

$$\lfloor x \rfloor = \max \{m \in \mathbb{Z} \mid m \leq x\}.$$

Uma partição de n pode ser representada graficamente por meio de um conjunto de n pontos no plano, sendo que cada linha deve sempre estar alinhada à esquerda, em ordem decrescente e com um número de pontos igual a cada uma das partes de n. Essa representação é conhecida como gráfico de Ferrers.

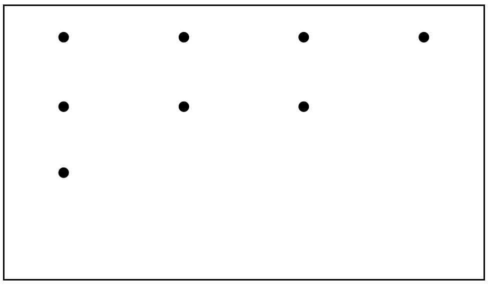
Exemplo 2.2: O gráfico da partição 5+4+2+1 de 12 é:

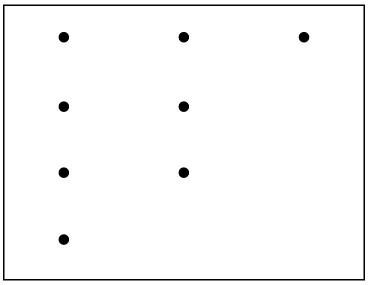


Definição 2.2: Dada uma partição qualquer de um inteiro n, se trocarmos as linhas com as colunas, no gráfico de Ferrers, ou seja, o que é linha se transforma em coluna e o que é coluna se transforma em linha, obteremos uma nova partição de n, que é a *partição conjugada* de n. Está operação no conjunto das partições é chamada *conjugação.*

Exemplos 2.3:

Partição de n = 8	Partição Conjugada
4 + 3 + 1	3 + 2 + 2 + 1



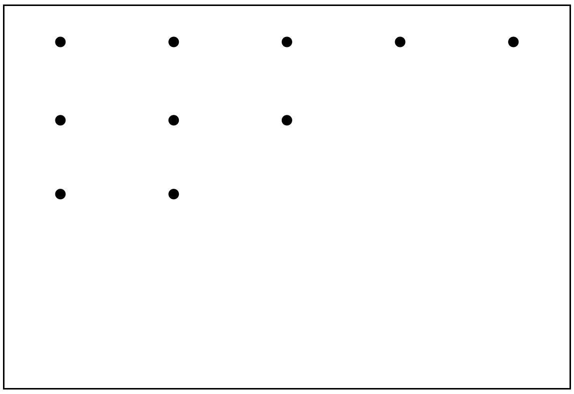


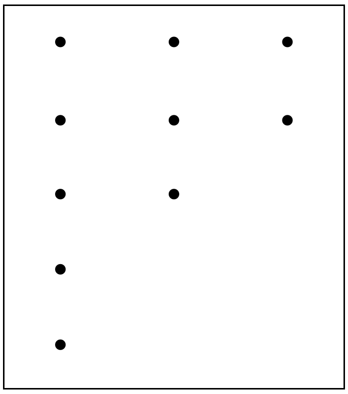
Partição de n = 10

5 + 3 + 2

Partição Conjugada

3 + 3 + 2 + 1 + 1



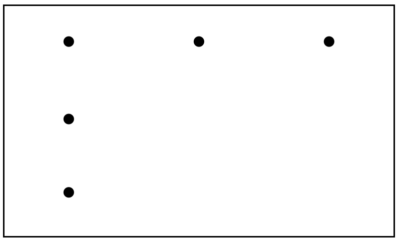


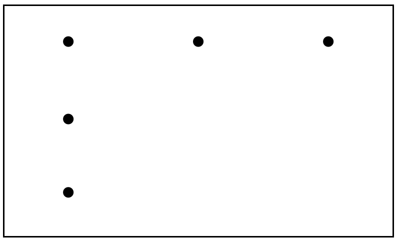
Partição de n = 5

3 + 1 + 1

Partição Conjugada

3 + 1 + 1





Com este exemplo da partição $3 + 1 + 1$ de $n = 5$, podemos concluir que uma partição conjugada não é necessariamente distinta da partição original, daí podemos definir à partição *autoconjugada*.

Definição 2.3: Quando a partição é igual a sua conjugada, ou seja, quando trocamos as linhas pelas colunas e conseguimos a mesma representação da partição, temos o que chamamos de *partição autoconjugada.*

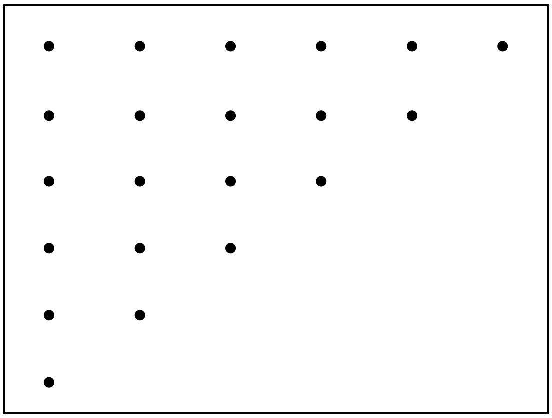
Exemplo 2.4:

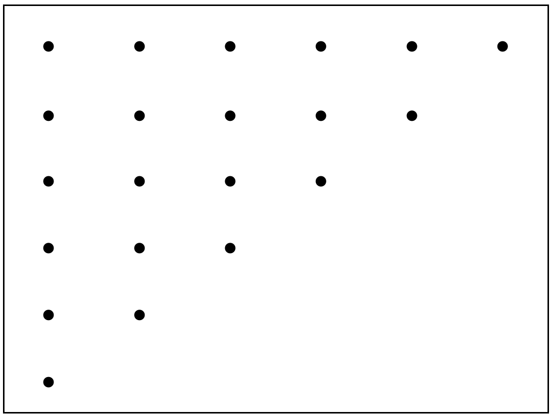
Partição de n = 15

6+5+4 + 3 +2+ 1

Partição Autoconjugada

6+5+4 + 3 +2+ 1





Teorema 2.1: O número de partições de n que são autoconjugadas é igual número de partições de n em partes ímpares distintas, ou seja:

$$p(n\mid autoconjugadas\ ) = p(n\mid partes\ ímpares\ distintas)$$

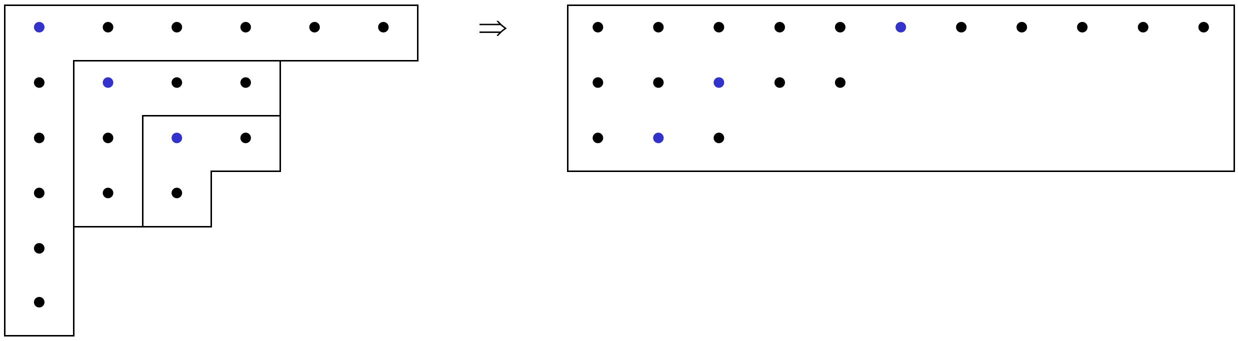
Demonstração: Consideremos uma partição de n autoconjugada, tomamos a primeira linha junto com a primeira coluna da representação do gráfico de *Ferrers* e representamos uma nova linha com todos estes pontos (o ponto central deve ser contado apenas uma vez). Procedemos da mesma forma para a segunda linha e segunda coluna, criando a segunda linha da nova representação. Fazemos isso repetidamente até que se esgotem as linhas e colunas, e assim terminamos a nova representação. Dado que as partições autoconjugadas são simétricas em relação a diagonal, todas as linhas criadas por este processo possuem um número ímpar de pontos, dado pelo tamanho da linha original multiplicada por 2, menos 1, pois devido a simetria existente, a linha e a coluna da partição original tem a mesma quantidade de pontos e um ponto em comum.

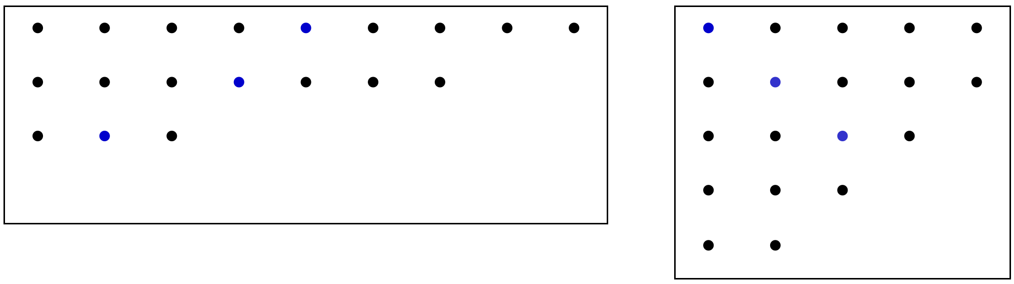
Inversamente, considerando uma partição de n em partes ímpares distintas, partindo do ponto central da primeira linha, distribuímos os pontos restantes desta linha a esquerda do ponto central em uma linha formada da esquerda para direita, e os pontos que se encontravam a direita do ponto central, colocamos em coluna abaixo do ponto central. Dando origem assim a primeira linha e primeira coluna da nova partição (ponto central deve ser contato apenas uma vez). Fazendo o processo análogo com as demais linhas, formamos um gráfico de *Ferrers* autoconjugado, conforme figura do exemplo 2.5. Esta bijeção prova o teorema.

Exemplo 2.5:

Partição de $n = 19$ | Partição Conjugada

6 + 4 + 4 + 3 + 1 + 1 | 11 + 5 + 3





Proposição 2.1 A cardinalidade do conjunto das partições de n em no máximo N partes é igual a cardinalidade do conjunto das partições de n cuja a maior parte é menor do que ou igual a N.

A proposição 2.1 segue direto da operação de conjugação.

Dentre os vários métodos para resolução de problemas de contagem os mais conhecidos são os princípios multiplicativo e aditivo. Entretanto, quanto mais se impõe restrições a estes problemas, mais difícil se torna a sua contagem. É aí que se destaca a Função Geradora, que é uma das ferramentas da análise combinatória que facilita a resolução de problemas.

Definição 2.4 A função *geradora ordinária* para a sequência $a_k, k = 0, 1, 2, 3, \dots$ é definida como sendo a função $G(x)$ que possui a_k como coeficiente de x^k quando expressa em termos de potências de x, isto é,

$$G(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k.$$

Exemplo 2.6:

A função $G(x) = (1+x)^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1}x + \binom{n}{2}x^2 + \cdots + \binom{n}{n}x^n$ é a função geradora da sequência $a_k = \binom{n}{k}, k = 0,1,2,3,\ldots$.

A função $G(x) = \frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots$ é a função geradora da sequência $a_k = 1, k = 0,1,2,3,\ldots$.

Exemplo 2.7: Como podemos distribuir sete objetos idênticos em três caixas, sem que nenhuma fique vazia?

Sabemos que as partições de 7 são: {(7), (6+1), (5+2), (5+1+1), (4+3), (4+2+1), (4+1+1+1), (3+3+1), (3+2+2), (3+2+1+1), (3+1+1+1+1), (2+2+2+1), (2+2+1+1+1), (2+1+1+1+1+1), (1+1+1+1+1+1+1)}. Assim, (5+1+1), (4+2+1), (3+3+1) e (3+2+2), são as possibilidades. Logo, temos 04 maneiras distintas de distribuir 07 objetos idênticos em 03 caixas.

A Função geradora para as partições de n em partes ímpares distintas é

$$\prod_{k=0}^{\infty}(1 + x^{2k+1}), \text{pois,}$$

$$(1+x)(1+x^3)(1+x^5)\ldots(1+x^{2k+1})\ldots =$$
$$= 1 + x + x^3 + x^4 + x^5 + x^6 + x^7 + 2x^8 + 2x^9 + 2x^{10} + 2x^{11} + \cdots$$

O coeficiente de x^6 é igual a 1, que é o total de maneiras de se escrever 6 como soma de ímpares distintos. A potência x^6 aparece como o produto de $x.x^5$. Observamos também que o coeficiente de x^{11} é igual a 2, pois o número 11 só pode ser escrito como soma de ímpares distintos nas formas 11 e 7+3+1.

Vemos que

$$\prod_{k=0}^{\infty}(1 + x^{2k+1}) = \sum_{n=0}^{\infty} d_1(n).x^n$$

onde $d_1(n)$ é o número de partições de n em partes ímpares distintas.

Exemplo 2.8: Função geradora para as partições de n em partes distintas.

Se tornarmos o produto

$(1+x)(1+x^2)(1+x^3)\ldots(1+x^n)\ldots = 1+x+x^2+2x^3+2x^4+3x^5+4x^6+5x^7+\cdots$ teremos a função geradora para as partições n em partes distintas. Observe, por exemplo, que o coeficiente de x^7é igual a 5, pois existem 5 partições de 7 em partes distintas: 7, 6+1, 5+2, 4+3 e 4+2+1.

Dessa forma,

$$\prod_{k=1}^{\infty}(1+x^k),$$

é a função geradora para as partições de n em partes distintas.

Proposição 2.2: A função geradora para o número de partições de n, denotado por $p(n)$, é dada por,

$$\sum_{n=0}^{\infty} p\,(n).\,x^n = \prod_{k=0}^{\infty}\frac{1}{1-x^k}.$$

Demonstração:

Temos que,

$$\frac{1}{1-x} = 1+x+x^2+x^3+\cdots$$

$$\frac{1}{1-x^2} = 1+x^2+x^4+x^6\ldots$$

$$\vdots$$

$$\frac{1}{1-x^m} = 1+x^m+x^{2m}+x^{3m}\ldots$$

Portanto,

$$\prod_{k=0}^{\infty}\frac{1}{1-x^k} = (1+x+x^2+x^3+\cdots)(1+x^2+x^4+x^6\ldots)\ldots(1+x^m+x^{2m}+\cdots)\ldots$$

Donde concluímos que as contribuições para os coeficientes de x^n vêm de um termo x^{a_1} da primeira série, de x^{2a_2}da segunda série, de x^{3a_3} da terceira série, ..., e de x^{ma_m} da $m-$ésima série, onde $a_i \geq 0$, para todo i. Sendo o produto destes termos igual a x^n, temos que $a_1+2a_2+3a_3+\cdots+ma_m = n$, ou seja, $x = (\,1^{a_1}, 2^{a_2}, \ldots, m^{a_m})$.

Cada a_i deve ser visto como o número de $i's$ que aparecem como parte na partição de n, isto é, podemos expressar n como:

$$n = (1 + 1 + \cdots + 1) + (2 + 2 + \cdots + 2) + \cdots + (m + m + \cdots + m)$$

onde temos $a_1 1'$s no primeiro parênteses, $a_2 2'$s no segundo, $a_3 3'$s no terceiro e $a_m m'$s no $m -$ésimo. Visto desta forma, cada partição de n irá contribuir com uma unidade para o coeficiente de x^n nesta expansão.■

Exemplo 2.9: Suponha que, em cada uma das quatro primeiras séries, tenhamos tomado, respectivamente, as seguintes potências de x: x^4, x^6, x^6 e x^{12}. Interpretando essas potências como:

$$x^4 = x^{1+1+1+1}$$

$$x^6 = x^{2+2+2}$$

$$x^6 = x^{3+3}$$

$$x^{12} = x^{4+4+4}$$

E, visto que $x^4.x^6.x^6.x^{12} = x^{28}$, temos a seguinte partição de 28:

$$4 + 4 + 4 + 3 + 3 + 2 + 2 + 2 + 1 + 1 + 1 + 1.$$

Observe que o x^6 na segunda série representa três 2's e o x^6 na terceira série representa dois 3's.

Deixamos agora uma tabela com as principais funções geradoras, para as partições de n.

Tabela 3 – Funções Geradoras

Função Geradora	**Para a partição das partições de n em partes que são**
$\prod_{k=0}^{\infty}(1 + x^{2k+1})$	Ímpares distintas
$\prod_{k=0}^{\infty}\frac{1}{1 - x^{2k+1}}$	Ímpares
$\prod_{k=1}^{\infty}(1 + x^{k})$	Distintas
$\prod_{k=1}^{\infty}(1 + x^{2k})$	Pares distintas
$\prod_{k=1}^{\infty}\frac{1}{1 - x^{2k}}$	Pares
$\prod_{k=1}^{\infty}\frac{1}{1 - x^{k^2}}$	Quadrados

$\prod_{k=1}^{\infty}\left(1+x^{k^2}\right)$	Quadrados distintos
$\prod_{P\ primo}^{\infty} \frac{1}{1-x^P}$	Primos

Fonte: [10]

2.2 Uma abordagem para o polinômio de Gauss: Partições com restrições

Definição 2.5: A função geradora para as partições de um inteiro *n*, com no máximo *m* partes, cada parte $\leq N$ é igual a:

$$\begin{bmatrix} N+m \\ m \end{bmatrix} = \sum_{n\geq 0} p(n|no\ máximo\ m\ partes, cada\ parte \leq N)q^n.$$

Exemplo 2.10: Dados $N = 3$ e $m = 2$ as partições em no máximo 2 partes com cada parte ≤ 3 são:

Para: $n = 0$, temos a partição: $\emptyset$;

$n = 1$, temos a partição: (1);

$n = 2$, temos as partições: $(1+1), (2)$;

$n = 3$, temos as partições: $(2+1), (3)$;

$n = 4$, temos as partições: $(2+2), (3+1)$;

$n = 5$, temos a partição: $(3+2)$;

$n = 6$, temos a partição: $(3+3)$.

Portanto, $\begin{bmatrix} 3+2 \\ 2 \end{bmatrix} = 1 + q + 2q^2 + 2q^3 + 2q^4 + q^5 + q^6$.

Segue direto da definição:

$$\begin{bmatrix} m \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m \\ m \end{bmatrix} = 1$$

pois a única partição possível é a vazia.

Segue da operação de conjugação:

$$\begin{bmatrix} N+m \\ m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N+m \\ N \end{bmatrix} \qquad (2.1)$$

Dessa forma podemos escrever:

$$\begin{bmatrix} N \\ m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N - m + m \\ m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m + N - m \\ N - m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N \\ N - m \end{bmatrix} \qquad (2.2)$$

Proposição 2.3: $$\begin{bmatrix} N + m \\ m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N + m - 1 \\ m \end{bmatrix} + q^N \begin{bmatrix} m + N - 1 \\ m - 1 \end{bmatrix} \qquad (2.3)$$

Demonstração: Dada uma partição em no máximo m partes com cada parte menor do que ou igual a N existem duas possibilidades.

(1) Todas as partes são estritamente menores do que N, a função geradora para essas partes é,

$$\begin{bmatrix} (N-1) + m \\ m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N + m - 1 \\ m \end{bmatrix}.$$

(2) A maior parte é exatamente N, registramos essa parte como q^N, e então observamos que o que resta é uma partição em no máximo $m - 1$ partes, cada parte menor do que ou igual a N. A função geradora para estas partições é,

$$q^N \begin{bmatrix} N + m - 1 \\ m - 1 \end{bmatrix}.$$

Ilustramos o caso (1) e (2) nas figuras 1 e 2, respectivamente,

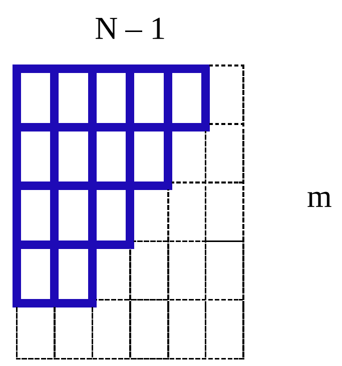


Figura 1

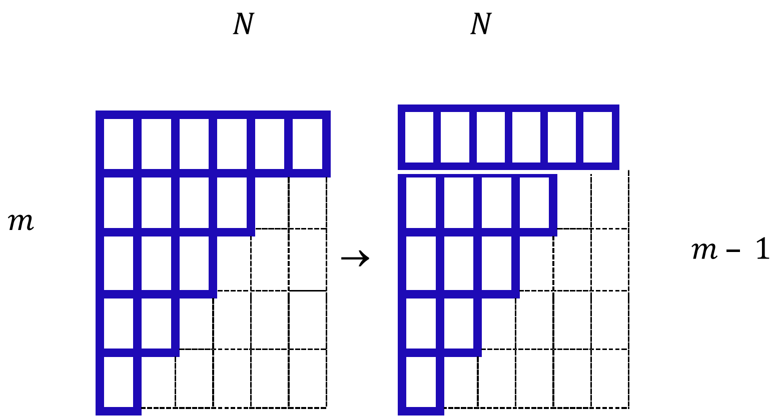


Figura 2

Segue de (1) e (2),

$$\begin{bmatrix} N+m \\ m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N+m-1 \\ m \end{bmatrix} + q^N \begin{bmatrix} N+m-1 \\ m-1 \end{bmatrix} \blacksquare$$

Observe que na figura 1, é apresentado um retângulo $(N-1) \times m$ onde podemos formar todas as partições em no máximo m partes cada parte $\leq N-1$. Na figura 2, fixamos o retângulo $N \times 1$ e restou o retângulo $N \times (m-1)$, onde é possível formar partições em no máximo $m-1$ partes, cada parte $\leq$ N.

Como,

$\begin{bmatrix} N-1+m \\ m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m+N-1 \\ N-1 \end{bmatrix}$, então podemos escrever (2.3) da seguinte maneira:

$$\begin{bmatrix} N+m \\ m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m+N-1 \\ N-1 \end{bmatrix} + q^N \begin{bmatrix} N+m-1 \\ m-1 \end{bmatrix} \qquad (2.4)$$

Segue de (2.1) e (2.4)

$$\begin{bmatrix} N+m \\ m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m+N \\ N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N+m-1 \\ m-1 \end{bmatrix} + q^m \begin{bmatrix} m+N-1 \\ N-1 \end{bmatrix} \qquad (2.5)$$

Segue de (2.5)

$$\begin{bmatrix} N+1 \\ m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N-m+1+m \\ m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N-m+1+m-1 \\ m-1 \end{bmatrix} + q^m \begin{bmatrix} N-m+1+m-1 \\ N-m+1-1 \end{bmatrix},$$

Ou seja,

$$\begin{bmatrix} N+1 \\ m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N \\ m-1 \end{bmatrix} + q^m \begin{bmatrix} N \\ N-m \end{bmatrix};$$

Como $\begin{bmatrix} N \\ N-m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N \\ m \end{bmatrix}$, então:

$$\begin{bmatrix} N+1 \\ m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N \\ m-1 \end{bmatrix} + q^m \begin{bmatrix} N \\ m \end{bmatrix} \qquad (2.6)$$

Segue de (2.4) e (2.5)

$$\begin{bmatrix} N+1 \\ m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N-m+1+m \\ m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m+N-m+1 \\ N-m+1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} m+N-m+1-1 \\ N-m+1-1 \end{bmatrix} + q^{N-m+1} \begin{bmatrix} N-m+1+m-1 \\ m-1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} N \\ N-m \end{bmatrix} + q^{N-m+1} \begin{bmatrix} N \\ m-1 \end{bmatrix}, \text{ e de (2.2)}$$

$$\begin{bmatrix} N \\ N-m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N \\ m \end{bmatrix}.$$

Dessa forma,

$$\begin{bmatrix} N+1 \\ m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N \\ m \end{bmatrix} + q^{N-m+1} \begin{bmatrix} N \\ m-1 \end{bmatrix} \qquad (2.7)$$

Subtraindo (2.7) de (2.6) temos:

$$0 = \begin{bmatrix} N \\ m \end{bmatrix} (q^m - 1) + \begin{bmatrix} N \\ m-1 \end{bmatrix} (1 - q^{N-m+1})$$

ou seja,

$$-\begin{bmatrix} N \\ m \end{bmatrix} (q^m - 1) = \begin{bmatrix} N \\ m-1 \end{bmatrix} (1 - q^{N-m+1})$$

isto é,

$$\begin{bmatrix} N \\ m \end{bmatrix} (1 - q^m) = \begin{bmatrix} N \\ m-1 \end{bmatrix} (1 - q^{N-m+1})$$

ou ainda,

$$\begin{bmatrix} N \\ m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N \\ m-1 \end{bmatrix} \frac{(1 - q^{N-m+1})}{1 - q^m} \text{ para m} \geq 1.$$

Observe que, para $m = 1$,

$$\begin{bmatrix} N \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N \\ 0 \end{bmatrix} \frac{(1 - q^{N-1+1})}{1 - q^1}$$

$$= \begin{bmatrix} N \\ 0 \end{bmatrix} \frac{(1 - q^N)}{1 - q} = \frac{(1 - q^N)}{1 - q}, \text{pois } \begin{bmatrix} N \\ 0 \end{bmatrix} = 1.$$

Para $m = 2$

$$\begin{bmatrix} N \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N \\ 1 \end{bmatrix} \frac{(1 - q^{N-2+1})}{1 - q^2} =$$

$$= \frac{(1 - q^N)}{1 - q} \frac{(1 - q^{N-1})}{1 - q^2}$$

Para $m = 3$

$$\begin{bmatrix} N \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N \\ 2 \end{bmatrix} \frac{(1 - q^{N-3+1})}{1 - q^3}$$

$$= \begin{bmatrix} N \\ 2 \end{bmatrix} \frac{(1 - q^{N-2})}{1 - q^3} = \frac{(1 - q^N)}{1 - q} \frac{(1 - q^{N-1})}{1 - q^2} \frac{(1 - q^{N-2})}{1 - q^3}.$$

Segue por indução sobre N.

Proposição 2.4:

$$\begin{bmatrix} N \\ m \end{bmatrix} = \frac{(1 - q^N)(1 - q^{N-1}) \dots (1 - q^{N-m+1})}{(1 - q)(1 - q^2) \dots \ (1 - q^m)}$$

Podemos escrever,

$$\begin{bmatrix} N \\ m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N - m + m \\ m \end{bmatrix} = \sum_{n \geq 0} p(n| \text{ em no máximo m partes, cada parte } \leq \text{ N} - \text{m}) q^n$$

Segue da proposição 2.4 que o polinômio de Gauss dado pela fórmula explícita:

$$\frac{(1 - q^N)(1 - q^{N-1}) \dots (1 - q^{N-m+1})}{(1 - q)(1 - q^2) \dots \ (1 - q^m)}$$

é a função geradora para partições de n em no máximo m partes, com cada parte $\leq \ N - m$.

Além disso,

$$\binom{N}{m} = lim_{q \to 1} \begin{bmatrix} N \\ m \end{bmatrix}$$

ou seja, o total de partições de n em no máximo m partes cada parte $\leq \ N - m$ é $\binom{N}{m}$. ■

2.3 Uma abordagem combinatória para o polinômio de Gauss: Caminhos reticulados

Faremos aqui uma interpretação do coeficiente binomial $\binom{N+m}{m}$ através de caminhos reticulados em $\mathbb{Z}^2 = \{(a,b); a, b \in \mathbb{Z}\}$.

Considerando um retângulo $N \times m$. De quantas maneiras podemos passar da origem (0,0) para o ponto (N, m), onde N e m são inteiros não negativos, podendo caminhar de unidade em unidade para a direita (leste) ou para cima (norte).

Tomamos um total de $N+m$ passos, exatamente N desses passos devem ir para o leste, sendo tomados em qualquer posição. Assim do conjunto de $N+m$ passos, podemos selecionar qualquer m deles para serem os passos para o norte. Dessa forma, teremos $\binom{N+m}{m}$ caminhos que partem da origem até o ponto (N, m) com as restrições dadas.

Faremos um exemplo para ilustrar a situação.

Exemplo 2.11: De quantas maneiras podemos passar da origem (0,0) para o ponto (3,2)?

De acordo com a figura 3:

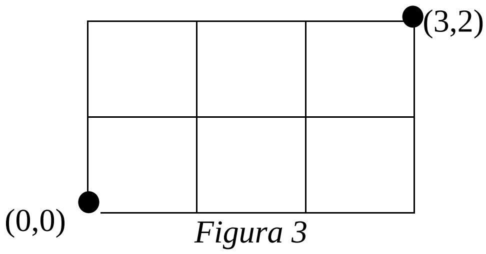


Figura 3

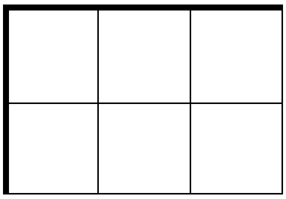
Temos,

$$\binom{3+2}{2} = \binom{5}{2} = \frac{5!}{3!\,2!} = 10 \text{ caminhos de } (0,0) \text{ a } (3,2).$$

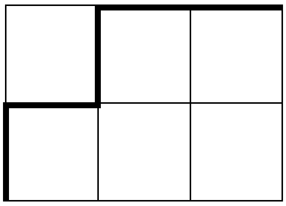
Vamos listar cada um desses caminhos reticulados:

Tabela 4 – Caminhos Reticulados da Figura 3

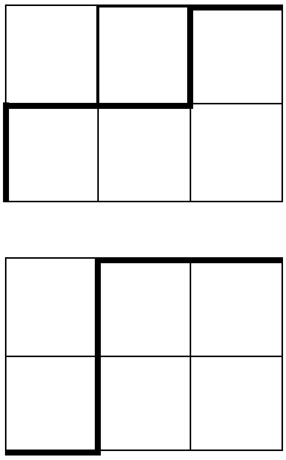
q^0



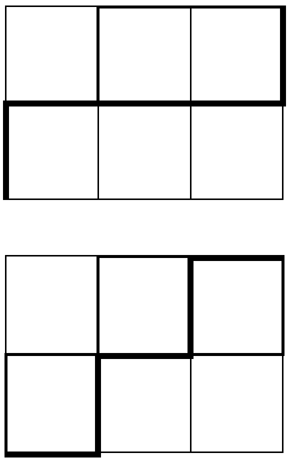
q^1

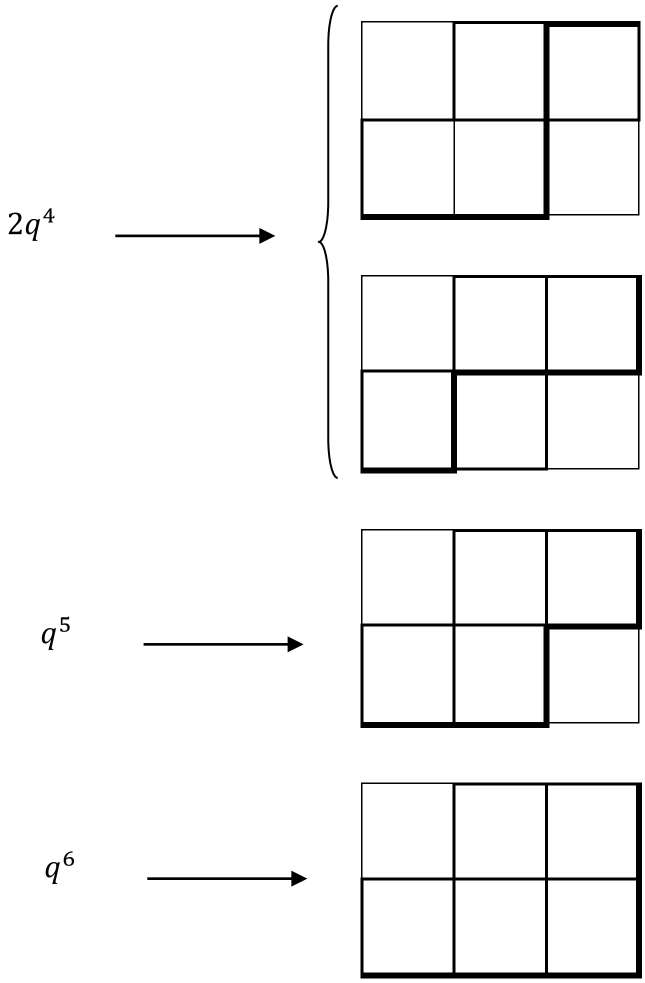


$2q^2$



$2q^3$





Fonte: Autora.

No exemplo 2.11, para cada caminho reticulado associamos uma potencia de q, q^n, onde n indica o total de quadrados 1×1 acima do caminho. Denotamos por $\mathcal{C}\ (N, m)$ o conjunto formado pelos caminhos reticulados C que partem de $(0,0)$ até (N, m).

Definição 2.6: Dados N e m números naturais, seja $C \in \mathcal{C}\ (N, m)$, definimos o peso C por $q^{w(C)}$, sendo $w(C)$ o número de quadrados $1\ \times\ 1$ acima do caminho reticulado C.

Segue do exemplo 2.11 que $\binom{5}{2} = \binom{3+2}{2}$ é o total de caminhos reticulados diferentes que partem de $(0,0)$ até $(3,2)$. Além disso:

$$\sum_{\mathcal{C} \in \mathcal{C}\ (N,m)} q^{W(C)} = 1 + q + 2q^2 + 2q^3 + 2q^4 + q^5 + q^6 = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix}$$

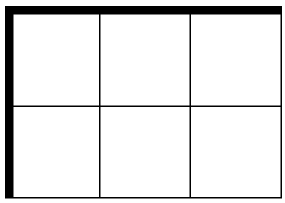
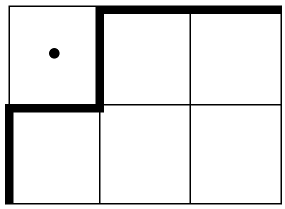
Dados N e m inteiros, vamos detonar por $\wp(N,m)$ o conjunto das partições de um inteiro em no máximo m partes, cada parte $\leq N$.

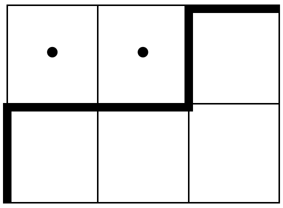
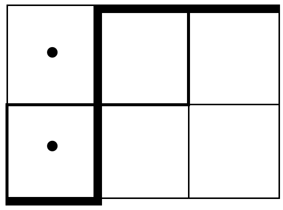
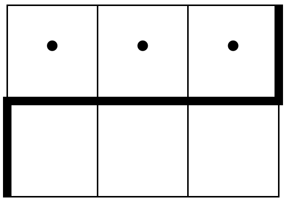
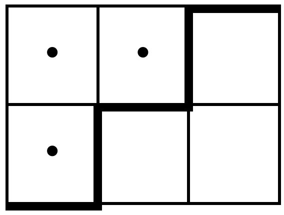
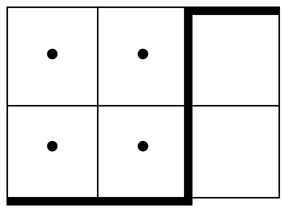
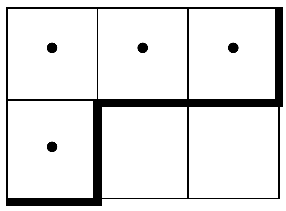
A partir do exemplo 2.12 iremos dar uma ideia de bijeção entre $\mathcal{C}(N,m)$ e $\wp(N,m)$, aproveitando esse exemplo apresentaremos o peso de cada caminho reticulado $C \in \mathcal{C}(N,m)$.

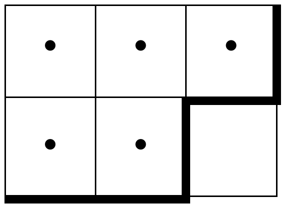
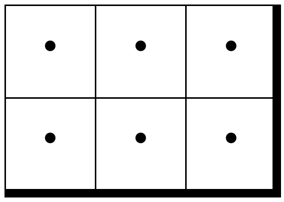
Exemplo 2.12 Considere o conjunto dos caminhos reticulados $\mathcal{C}(3,2)$. Queremos estabelecer uma bijeção entre $\mathcal{C}(3,2)$ e as partições de um inteiro em no máximo duas partes cada parte ≤ 3.

Para isso faremos a tabela:

Tabela 5 – Bijeções da partes de um inteiro

Peso=$\boldsymbol{q^{W(C)}}$	$\boldsymbol{C \in \mathcal{C}(3,2)}$	$\wp\ (\boldsymbol{N,m})$
$\boldsymbol{q^0}$		$\emptyset$
$\boldsymbol{q^1}$		1

$\mathbf{2q^2}$		**2**
		$\mathbf{1+1}$
$\mathbf{2q^3}$		3
		$2+1$
$\mathbf{2q^4}$		$2+2$
		$3+1$

$\boldsymbol{q^5}$		$3+2$
$\boldsymbol{q^6}$		$3+3$

Fonte: Autora.

De acordo com a tabela 5:

$$\sum_{C \in \mathcal{C}(3,2)} q^{w(C)} = q^0 + q^1 + 2q^2 + 2q^3 + 2q^4 + q^5 + q^6 =$$

$$= \sum_{n \geq 0} p\ (n|\ \text{em no máximo duas partes, cada parte} \leq\ 3)\ q^n = \begin{bmatrix} 3+2 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Observe que,

$$\begin{bmatrix} 5 \\ 3 \end{bmatrix} = \frac{(1-q^5).(1-q^4)}{(1-q^2).(1-q)} =$$

$$= \frac{(1-q).(q^4+q^3+q^2+q+1).(1-q^2).(1+q^2)}{(1-q^2).(1-q)}$$

$$= (q^4+q^3+q^2+q+1).(1+q^2)$$

$$= q^4+q^3+q^2+q+1+q^6+q^5+q^4+q^3+q^2$$

$$= 1+q+2q^2+2q^3+2q^4+q^5+q^6. \blacksquare$$

2.3.1 A bijeção entre $\wp(\boldsymbol{N},\boldsymbol{m})$ e $\boldsymbol{\mathcal{C}}(\boldsymbol{N},\boldsymbol{m})$

Vamos descrever por meio de passos, onde $\boldsymbol{N}$ indica um passo para cima (norte) e $\boldsymbol{L}$ indica um passo para direita (leste) o caminho reticulado $C\ \in \mathcal{C}\ (N,m)$.

Exemplo 2.13: Considere $C\ \in \mathcal{C}\ (6,5)$:

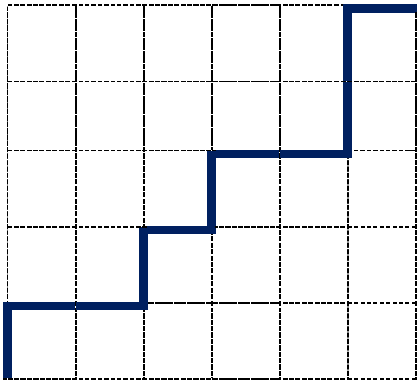


Figura 4

Podemos escrevê-lo como uma sequência de letras $\boldsymbol{N}$ e $\boldsymbol{L}$, indicando os passos:

$$\boldsymbol{N\ L\ L\ N\ L\ N\ L\ L\ N\ N\ L}$$

Para descrever o caminho C dado geometricamente por meio de uma sequência de comprimento $N\ +\ m$, formado por letras $\boldsymbol{N}$ e $\boldsymbol{L}$, basta ler a sequência da esquerda para direita começando na origem do plano xy, (0,0) e terminando em (N,m). Vamos estabelecer uma correspondência biunívoca entre $\wp(\mathrm{N},\mathrm{m})$ e $\mathcal{C}(N,m)$.

Dada uma partição $\lambda\ \in \wp(\mathrm{N},\mathrm{m})$. Temos,

$$\begin{cases} \lambda = \lambda_1 + \lambda_2 \ldots + \lambda_t, & 1 \leq t \leq\ m \\ \lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_t, & 1 \leq \lambda_i \leq\ N \end{cases}$$

Vamos denotar $\lambda = \left(\lambda_1^{\alpha_1}, \lambda_2^{\alpha_2}, \ldots, \lambda_k^{\alpha_k}\right)$, $k\ \leq\ t$, onde α_i é a quantidade de partes iguais a λ_i e observe que $t\ =\ \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_k$.

Se λ for a partição vazia associamos o caminho C_0 que consiste de m passos para o norte e N passos para o leste. Observe que o peso C_0 é $q^{w(C_0)} = q^0 = 1$.

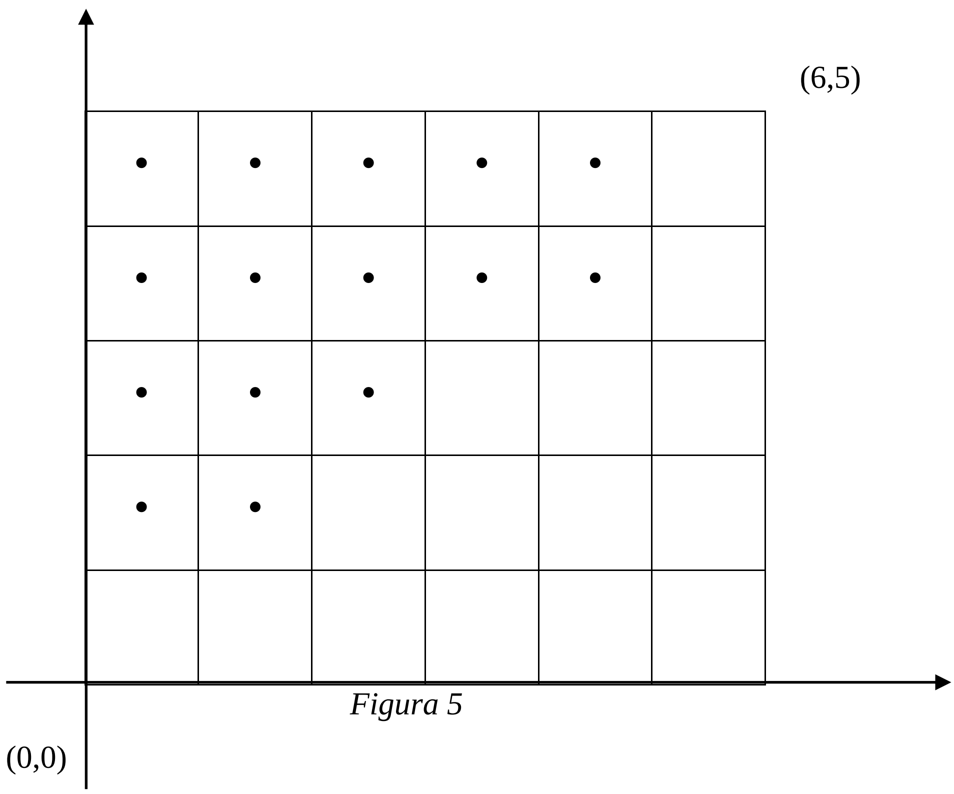
1. Coloque o gráfico de Ferrers de λ no retângulo $N \times m$, disposto no primeiro quadrante do plano xy, com um dos vértices na origem $(0,0)$, consequentemente os outros vértices são: $(N, 0), (0, m), (N, m)$.

2. Como a partição tem t partes, então iniciaremos a construção do caminho com $m - t$ passos para o norte, em seguida deslocamos $\lambda_k = \lambda_t$ passos para o leste e α_k passos para o norte. Agora desloque $\lambda_{k-1} - \lambda_k$ passos para leste e α_{k-1} passos para o norte. Depois vá com $\lambda_{k-2} - \lambda_{k-1}$ para leste e α_{k-2} para norte, e assim sucessivamente, até chegar no lado superior do retângulo, depois caminhe para leste até (N, m). A partir de 1 e 2 é possível descrever o caminho C_λ por meio de uma sequência de comprimento $N + m$ com as letras ***L*** e ***N*** observe o peso de $C_\lambda \in \mathcal{C}$ (N, m).

Vamos executar o processo para: $\lambda \in \wp(6,5)$.

1. Temos,

$$\lambda = 5 + 5 + 3 + 2 = (5^2, 3^1, 2^1), t = 2 + 1 + 1 = 4$$



$\alpha_1 = 2$
$\alpha_2 = 1$
$\alpha_3 = 1$

Figura 5

2. Temos,

$$N = 6, \quad m = 5, \quad t = 4, \quad \lambda_1 = \lambda_2 = 5, \quad \lambda_3 = 3 \ e \ \lambda_4 = 2,$$

$$\alpha_1 = 2, \quad \alpha_2 = 1, \quad \alpha_3 = 1\,, \quad m - t = 5 - 4 = 1$$

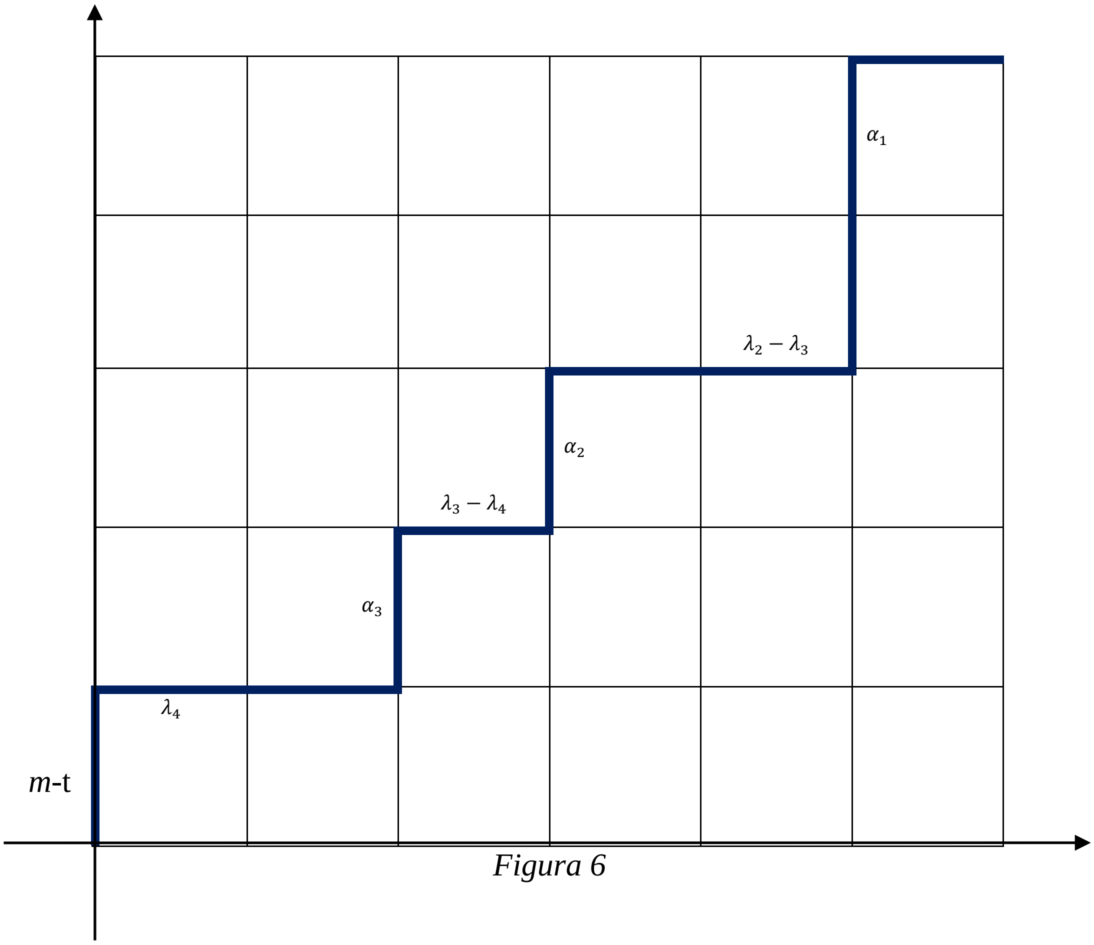


Figura 6

Portanto o caminho para a partição $\lambda = 5 + 5 + 3 + 2 \in \mathcal{C}(6{,}5)$ é:

$$C_\lambda\text{: } \boldsymbol{N\ L\ L\ N\ \ L\ N\ L\ L\ N\ N\ L.}$$

Reciprocamente, dado $C \in \mathcal{C}(N, m)$, podemos descrevê-lo por meio de uma sequência de comprimento $N + m$, cujas entradas são formadas pelas letras $\boldsymbol{N}$ e $\boldsymbol{L}$. A leitura dessa sequência faremos da esquerda para direita.

1. Observe que a quantidade de passos que damos para norte **(N)** inicialmente, determina a quantidade de partes da partição, que será dada por $m - l$, onde l é o total de passos que damos inicialmente para norte. Assim, $m - l \leq m$. Em seguida construiremos a menor parte contando a quantidade de passos para o leste.

2. Os passos para norte **(N)**, depois que aplicamos o item 1, indica quantas vezes a menor parte aparece.

3. A próxima menor parte é formada pela menor parte do item 2, mais o total de passos que damos para o leste, depois do passo 1 e 2. Esse processo é feito sucessivamente até esgotar todas as letras da sequência.

4. Observe que temos no máximo N passos para leste e as partes das partições que construímos são no máximo N.

Segue de 1, 2 e 3 que a partição λ_c obtida por meio de C, $\lambda_c \in \wp(N,m)$.

Vamos ilustrar o processo para ao exemplo $C \in \mathcal{C}(6{,}5)$, descrito pela sequência:

$$C\text{: } \boldsymbol{N\,L\,L\,N\,L\,N\,L\,L\,N\,N\,L}$$

Temos que $N = 6, m = 5$ e $l = 1$. Logo $m - l = 5 - 1 = 4$. A partição λ_c tem quatro partes, a saber:

$$\lambda_c = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4$$

$\lambda_4 = 2$

$\lambda_3 = \lambda_4 + 1 = 2 + 1 = 3$ e $\alpha_3 = 1$

$\lambda_2 = \lambda_3 + 2 = 3 + 2 = 5$ e $\alpha_2 = 1$

$\lambda_1 = 5$ e $\alpha_1 = 1$

Observe que $w(C) = q^{\lambda} = q^{5+5+3+2}$.

Assim, mostramos que $|\wp(N,m)| = |\mathcal{C}(N,m)|$. Além disso, a função geradora para partições em no máximo m partes, cada parte menor do que ou igual a N é:

$$\sum_{C \in \mathcal{C}(N,m)} q^{w(C)}$$

Logo concluímos,

$$\sum_{C \in \mathcal{C}(N,m)} q^{w(C)} = \sum_{n \geq 0} p(n;\ \text{em no máximo m partes, cada parte} \leq N) q^n = \begin{bmatrix} N+m \\ m \end{bmatrix}.$$

2.4 Uma interpretação do Polinômio de Gauss por meio do ladrilhamento do retângulo $\mathbf{1} \times \boldsymbol{n}$.

Queremos ladrilhar o retângulo $1 \times n$ usando k quadrados azuis 1×1 e $n-k$ quadradros vermelhos 1×1, ou seja k ladrilhos azuis e $n-k$ ladrilhos vermelhos.

Definição 2.7: Denotamos por $\mathcal{L}(n,k)$ o conjunto dos diferentes ladrilhamentos do retângulo $1 \times n$ usando k ladrilhos azuis e $n-k$ ladrilhos vermelhos.

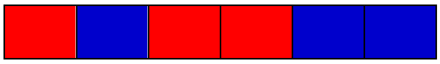
Para cada ladrilhamento $L \in \mathcal{L}(n,k)$, vamos definir o peso de L por $W(L)$, onde $W(L)$ é calculado da seguinte forma:

- Calcula-se o peso do ladrilho individual no ladrilhamento L. Um ladrilho vermelho sempre recebe peso 1. O ladrilho azul tem peso q^s, onde s é igual ao total de ladrilhos vermelhos a esquerda do ladrilho azul no ladrilhamento L.

- Calcula-se $W(L)$ multiplicando o peso de todos os ladrilhos no ladrilhamento L.

Exemplo 2.14: $\mathcal{L}(6,3)$ é o conjunto dos diferentes ladrilhamentos do retângulo 1×6, com 3 ladrilhos azuis e 3 ladrilhos vermelhos.

Seja $L \in \mathcal{L}(6,3)$, como segue abaixo, calcule o peso de L, W(L).



Considerações:

1. O primeiro, o terceiro e o quarto ladrilhos tem peso 1.
2. O segundo ladrilho tem peso q^1, pois a esquerda dele tem um ladrilho vermelho;
3. O quinto ladrilho tem peso q^3, pois a esquerda dele tem 3 ladrilhos vermelhos;
4. O sexto ladrilho tem peso q^3, pois a esquerda dele tem 3 ladrilhos vermelhos.

Portanto $W(L) = 1.q.1.1.q^3.q^3 = q^{1+3+3} = q^7$.

Agora vamos estabelecer uma correspondência biunívoca entre $\mathcal{L}(n,k)$ e $\mathcal{C}(n-k,k)$, ou seja, para cada ladrilhamento L do retângulo $1 \times n$, com k ladrilhos azuis e $n-k$ ladrilhos vermelhos, vamos estabelecer o único caminho reticulado $C \in \mathcal{C}(n-k,k)$ correspondente a L.

A bijeção entre $\mathcal{L}(n,k)$ e $\mathcal{C}(n-k, k\,)$ é dado da seguinte forma:

- Para cada ladrilho azul no ladrilhamento L, movemos uma unidade para cima (Norte);

- Para cada ladrilho vermelho no ladrilhamento L, movemos uma unidade para direita (Leste). A bijeção preserva os pesos, ou seja, $q^{W(C)} = w(L)$.

Exemplo 2.15: Seja, $L \in \mathcal{L}(8{,}3)$, o seguinte ladrilhamento do retângulo 1×8, com 3 ladrilhos azuis e 5 ladrilhos vermelhos de acordo com a figura 7:

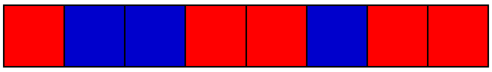


Figura 7

O caminho reticulado $C \in \mathcal{C}(8-3,\ 3) = \mathcal{C}(5,3)$, associado a L é:

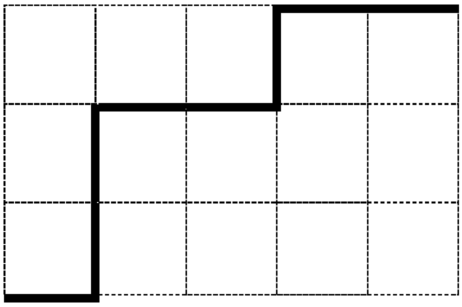


Figura 8

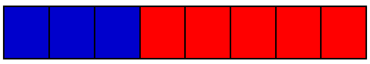
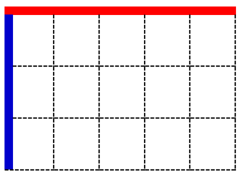
Observe que $q^{w(C)} = w(L)$.

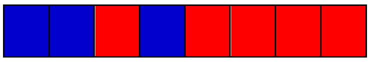
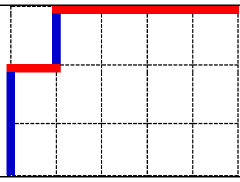
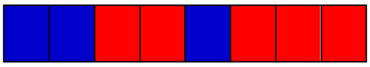
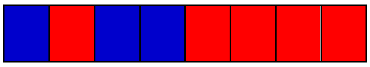
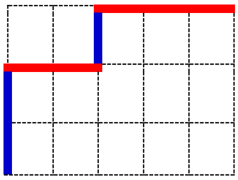
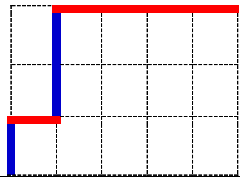
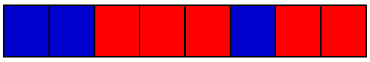
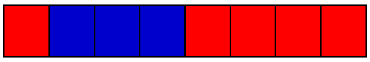
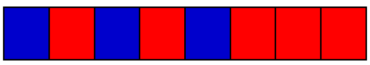
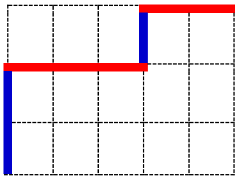
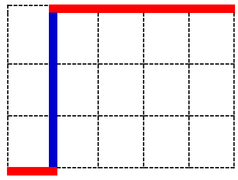
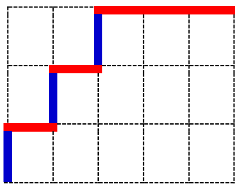
Para ilustrar a correspondência entre $\mathcal{C}(n-k,k)$ e $\mathcal{L}(n,k)$ faremos o caso $n = 8$ e $k = 3$.

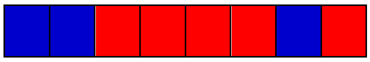
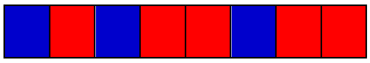
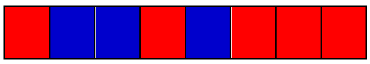
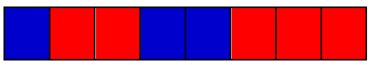
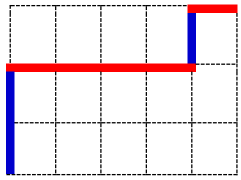
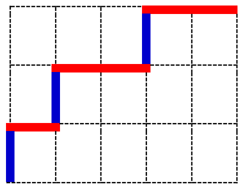
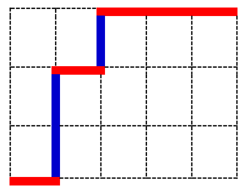
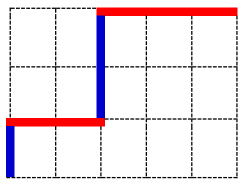
Na tabela 6 descrevemos para cada $L \in \mathcal{L}(8,3)$, o respectivo $C \in \mathcal{C}(8-3,\ 3) = C \in \mathcal{C}(5,3)$, associado a L e observamos que $q^{w(C)} = w(L)$. Vamos denotar

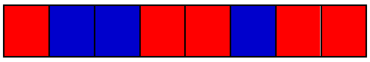
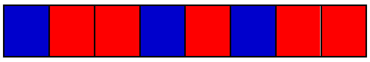
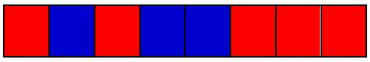
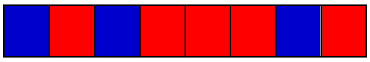
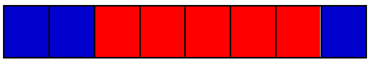
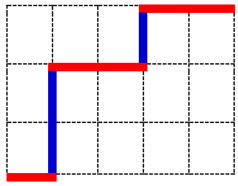
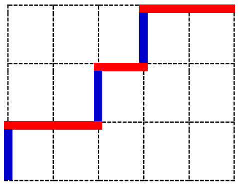
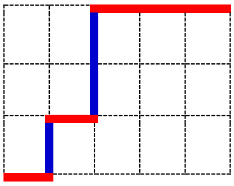
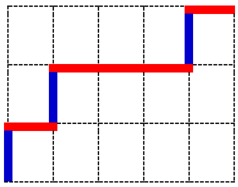
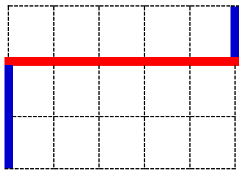
$$S(n) = \sum_{\substack{L\in\mathcal{L}(n,k) \\ w(L)=q^n}} W(L) \quad e \quad s(n) = \sum_{\substack{C\in\mathcal{C}(n,k) \\ w(C)=n}} q^{W(C)}$$

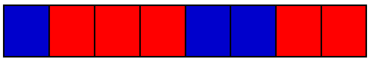
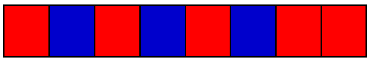
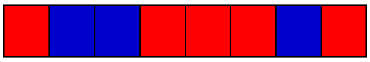
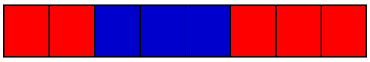
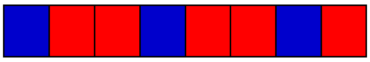
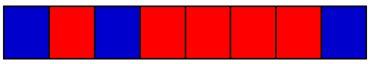
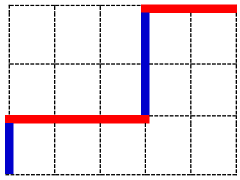
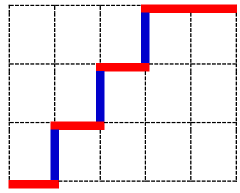
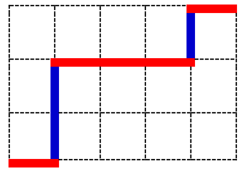
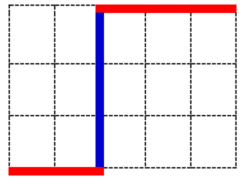
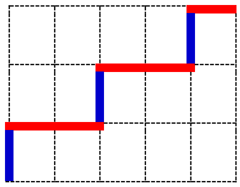
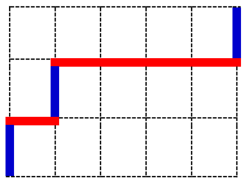
Tabela 6 – Ladrilhamento X Caminhos Reticulados

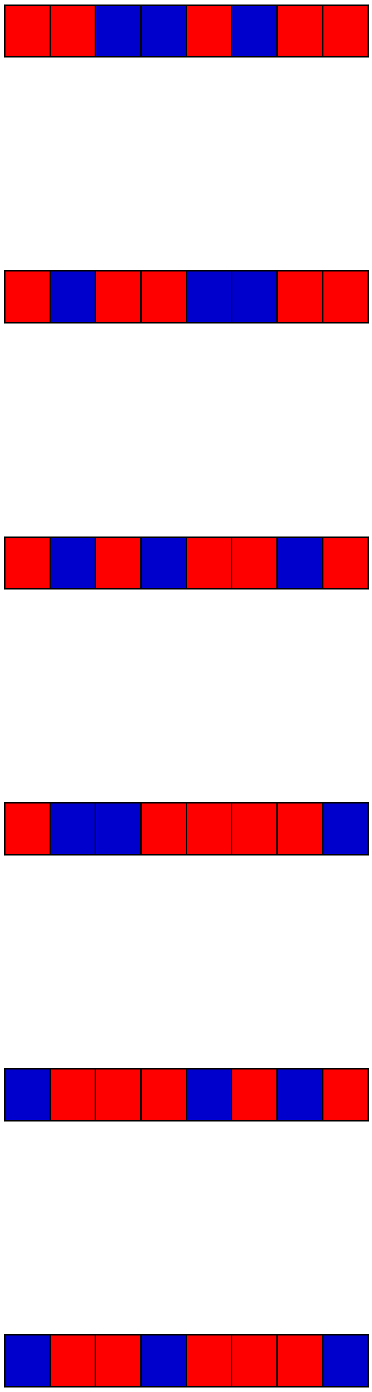
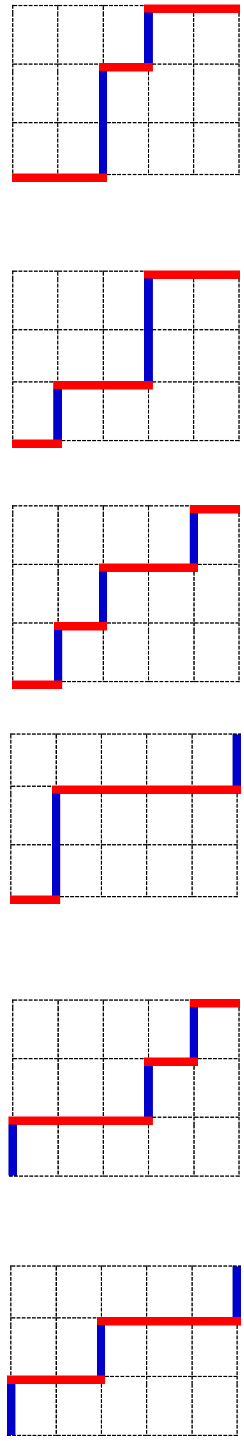
$n \geq 0$	$L \in \mathcal{L}\ (8-3,3)$	$S(n)$	$C \in \mathcal{C}\ (8-3,3)$	$s(n)$
0		q^0		q^0

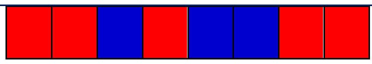
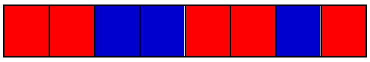
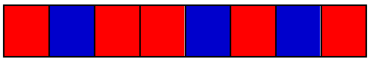
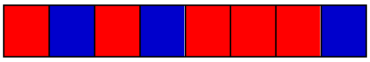
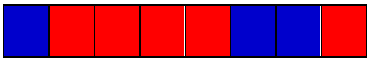
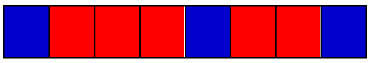
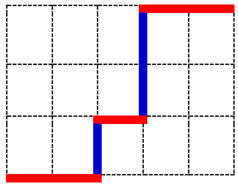
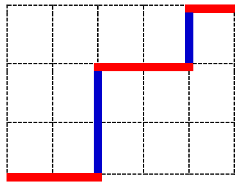
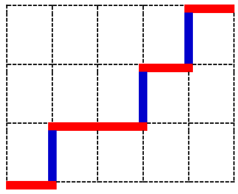
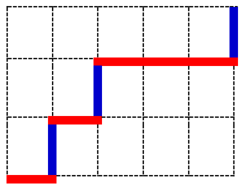
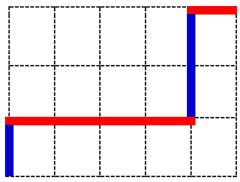
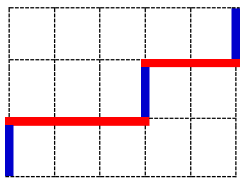
1		q^1		q^1
2	 	$2q^2$	 	$2q^2$
3	  	$3q^3$	  	$3q^3$

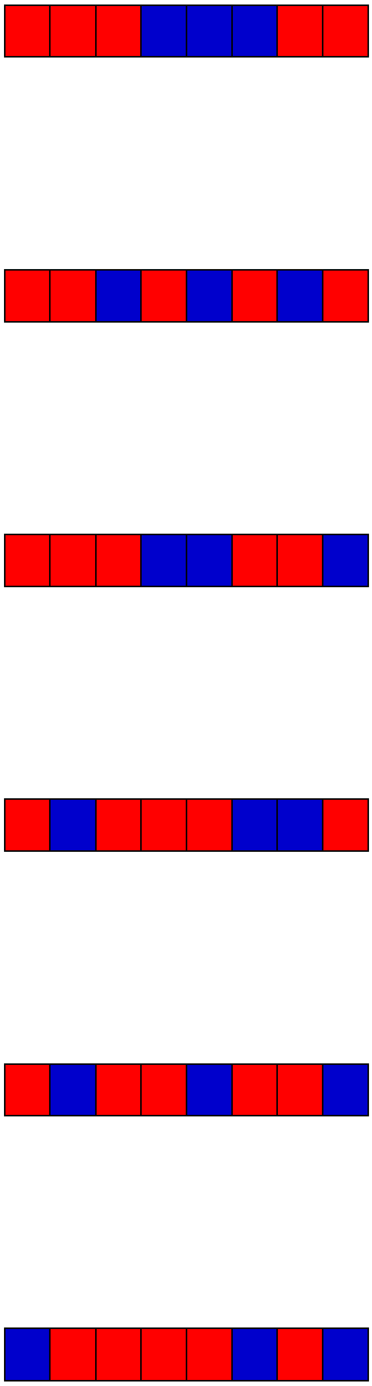
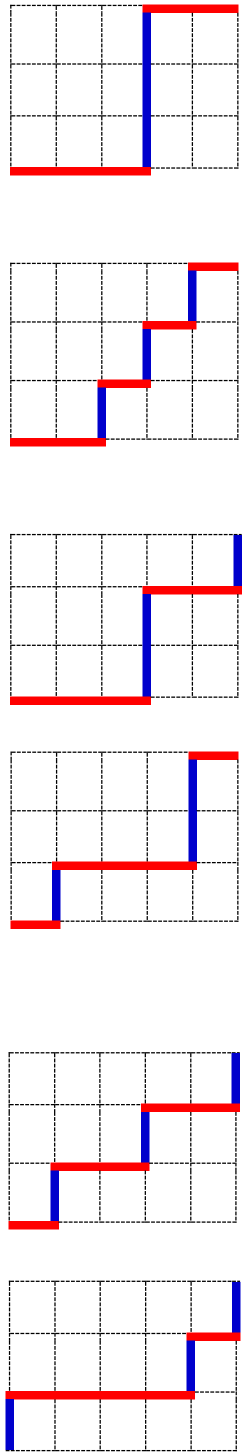
4	   	$4q^4$	   	$4q^4$

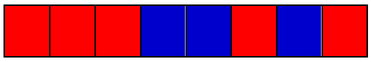
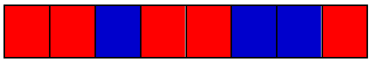
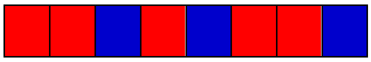
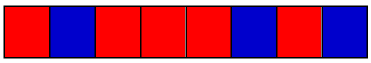
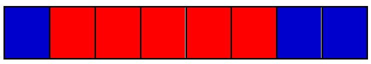
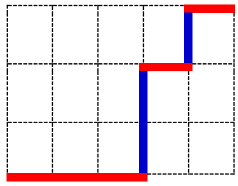
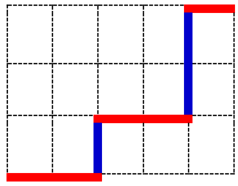
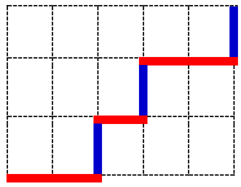
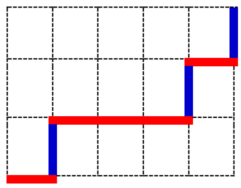
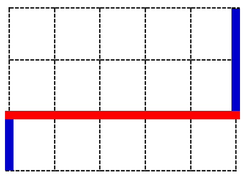
5	    	$5q^5$	    	$5q^5$

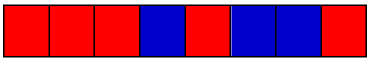
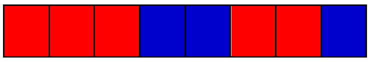
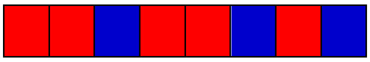
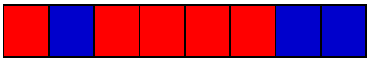
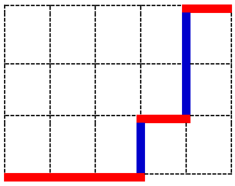
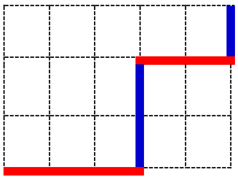
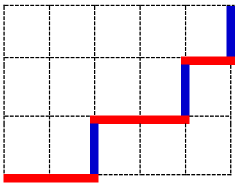
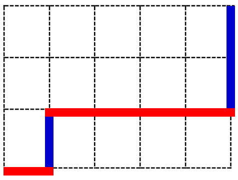
6	     	$6q^6$	     	$6q^6$

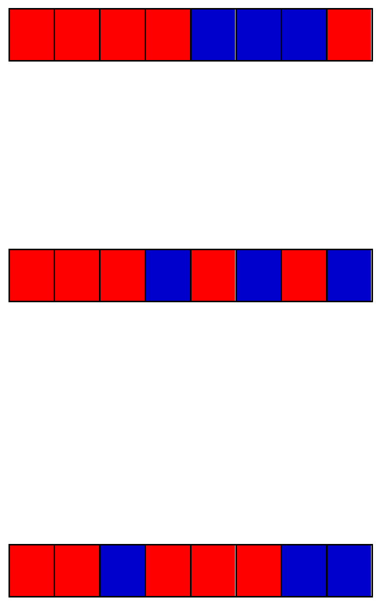
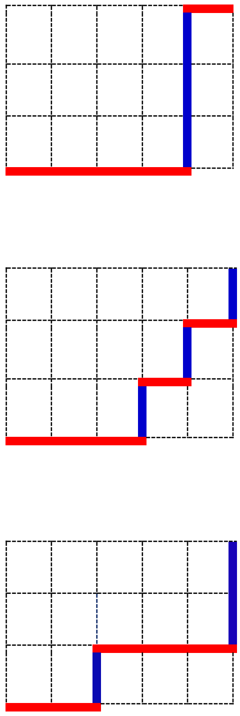
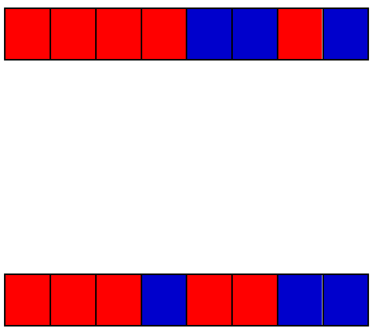
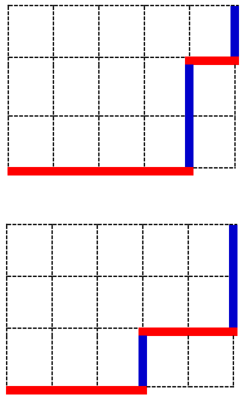
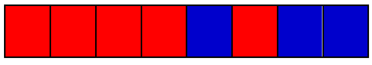
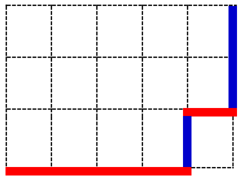
7		$6q^7$		$6q^7$

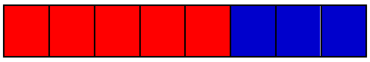
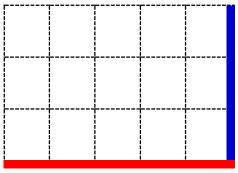
8	     	$6q^8$	     	$6q^8$

9		$6q^9$		$6q^9$

10	    	$5q^{10}$	    	$5q^{10}$

11	   	$4q^{11}$	   	$4q^{11}$

12		$3q^{12}$		$3q^{12}$
13		$2q^{13}$		$2q^{13}$
14		$2q^{14}$		$2q^{14}$

15		q^{15}		q^{15}

Fonte: Autora.

Observe que estabelecemos uma bijeção entre $\mathcal{L}(n,k)$ e $\mathcal{C}(n-k,k)$. Dessa forma, temos que:

$$|\mathcal{L}(n,k)| = |\mathcal{C}(n-k,k)|$$

Além disso, a função geradora para partições em no máximo k partes, cada parte menor do que ou igual a $N-k$, é,

$$\sum_{L\in\mathcal{L}(n,k)} w(L)$$

Segue das observações das seções 2.2, 2.3 e 2.4,

Proposição 2.6:

$$\sum_{L\in\mathcal{L}(n,k)} w(L) = \sum_{C\in\mathcal{C}(n-k,k)} q^{W(C)} = \sum_{n\geq 0} p\,(n\,;\ \text{em no máximo } k \text{ partes, cada parte } \leq \text{ N})q^{n}$$

$$= \begin{bmatrix} N-k+k \\ k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N \\ k \end{bmatrix}.$$

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste trabalho foram apresentados alguns resultados e exemplos sobre polinômios simétricos, somas de Newton, e Relações de Girard, para construção do conceito de coeficiente q-binomial juntamente com suas propriedades.

Para isso abordarmos aspectos algébricos e combinatórios do polinômio de Gauss enfatizando que esse polinômio avaliado na indeterminada $\boldsymbol{q = 1}$, reduz-se ao coeficiente binomial e neste caso mostramos que esse polinômio é uma extensão do coeficiente binomial.

Também apresentamos algumas abordagens combinatórias que foram feitas por meio de partições em no máximo $\boldsymbol{m}$ partes com cada parte menor ou igual a $\boldsymbol{N}$. Por meio desta ideia relacionamos este conceito com caminhos reticulados e ladrilhamento.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

[1] BOYER, CARL B. História da Matemática. 3. ed. São Paulo: E. Blucher, 2010.

[2] BRASIL, SEC. DE ED. FUNDAMENTAL. "Parâmetros curriculares nacionais: matemática." Brasilia: MEC/SEF, 1997.

[3] GARCIA, DOMINGOS BOAES. "Resolução de problemas de Combinatória usando Funções Geradoras." Dissetação PROFMAT - Universidade Federal do Maranhão. São Luís: UFMA, 2013.

[4] COSTA, VALDIR SOARES. "Uma Introdução aos Polinômios Simétricos e Aplicações." Dissetação PROFMAT - Universidade Federal de Alagoas. Maceio: UFAL, 2013.

[5] HEFEZ, ABRAMO, VILLELA, MARIA LÚCIA TORRES. Polinômios e Equações Algébricas. Rio de Janeiro: SBM, 2012.

[6] MEC, "PCN-PARAMETROS NACIONAIS DO ENSINO MÉDIO." portal.mec.gov.br. 2000. www.portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/ciencian.pdf (acesso em 05 de agos. de 2015).

[7] SANTOS, JOSÉ PLINIO, MARGARIDA P. MELLO, E IDANI T. C. MURARI. Introdução à Análise Combinatória. Rio de Janeiro: Ciência Moderna, 2007.

[8] STANLEY, R. P. Enumertive Combinatorics, Vol II, Cambridg Studies in Advanced Mathematics 49. Vol. II. New York: Cambridg University Press, 1997.

[9] GOMES, Carlos A. Polinômios Simétricos. UFRN, Natal – RN.

[10] LIMA, Elon Lages. Análise Real – Volume 1. 12. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2016. Coleção Matemática Universitária.

[11] SANTOS, José Plínio de Oliveira. Introdução a Teoria dos Números. Rio de Janeiro, 2003: Associação Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada.

[12] MARQUES, S. O. O Algoritmo de Euclides. Disponível em: https://serolmar.wordpress.com/2010/07/13/o-algoritmo-de-euclides/. Acesso em 10 de junho de 2017.

[13] OLIVEIRA, S. R. O Produto Triplo de Jacobi: Aspectos Analítico e Combinatório. Dissertação de Mestrado.UNICAMP IMECC, março de 2001.

[14] AZOSE, J. A Tiling Interpretation of q-Binomial Coefficients. Harvey Mudd College, 2007.

[15] THIAGO, Cícero. MENDES, Marcelo. Somas de Newton. Polos Olímpicos de Treinamento Curso de Álgebra - Nível 3. Disponível em: http://urantiagaia.org/educacional/matematica/algebra3/Aula09- Somas_de_Newton. pdf. Acesso em 12 de maio de 2017.