UNIVERSIDADE FEDERAL DA GRANDE DOURADOS - UFGD

MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA - PROFMAT

VIVIANE MANTOVANI MARTINES

BASE DE NUMERAÇÃO E O SISTEMA BINÁRIO

DOURADOS - MS
ANO 2019

VIVIANE MANTOVANI MARTINES

BASE DE NUMERAÇÃO E O SISTEMA BINÁRIO

Dissertação apresentada ao final do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT da Universidade Federal da Grande Dourados – UFGD como exigência parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Universidade Federal da Grande Dourados - UFGD
Mestrado Profissional em Matemática - PROFMAT

Orientador: PROF. DR. ROGÉRIO DE OLIVEIRA

DOURADOS - MS
ANO 2019

DEDICATÓRIA

Dedico este trabalho, primeiramente, a Deus que sempre me dá forças para ir atrás dos meus sonhos, e também a minha família, pelo apoio incondicional e incentivo constante, em especial aos meus filhos, Paula Mantovani e Felipe Mantovani, que sempre foram meu alicerce em tudo. Sem o apoio de ambos, este trabalho não teria sido realizado.

AGRADECIMENTOS

Quero registrar a minha gratidão a todos aqueles que foram essenciais para que tivesse êxito na conclusão desta nova etapa.

Em primeiro lugar agradeço a Deus, pela vida e pelas bênçãos, pelos amigos que colocou em meu caminho, pelo sustento e cuidado com a minha família e em toda minha caminhada.

Ao meu orientador Rogério de Oliveira, pela dedicação, ensinamentos, orientações ao longo dessa trajetória.

Aos demais professores pelo excelente ensino e confiança que proporcionaram a todos do curso.

Aos colegas que estiveram comigo desde o início tornando a caminhada mais fácil, apoiando e dividindo as dificuldades.

Agradeço a CAPES pelo apoio financeiro.

Enfim, a todos que me apoiaram, de forma direta ou indireta, a concluir esta etapa da minha vida, o meu sincero agradecimento.

"É muito melhor lançar-se em busca de conquistas grandiosas, mesmo expondo-se ao fracasso, do que alinhar-se com os pobres de espírito que nem gozam muito nem sofrem muito, porque vivem numa penumbra cinzenta, onde não conhecem nem vitória, nem derrota". (Theodore Roosevelt)

LISTA DE TABELAS

RESUMO

O objetivo deste trabalho é estudar o sistema de numeração posicional, focando nas propriedades aritméticas de bases diferentes da decimal e, em particular, da base binária. É difícil olhar em um número binário, octal, hexadecimal ou composto por outra base diferente de 10 e reconhecer o seu valor rapidamente, pela falta de familiaridade. Vamos observar que, entendendo a estrutura e funcionamento do sistema posicional, podemos trabalhar com outro sistema escrito em qualquer base com a mesma agilidade e facilidade que operamos com a base decimal. Elaboramos um trabalho explorando, principalmente, a base binária, constituída de dois dígitos, 0 e 1, sendo utilizado em computadores na execução de operações matemáticas e também para representar várias informações como números, caracteres, palavras, textos e cálculos algébricos.

Palavras-chave: Matemática. Números decimais. Números binários. Sistema de numeração.

“O presente trabalho foi realizado com o apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001”.

ABSTRACT

The objective of this work is to study the positional numbering system, focusing on the arithmetic properties of bases different from the decimal and, in particular, the binary base. It is difficult to look at a binary, octal, hexadecimal or composite number other than 10 and recognize its value quickly because of unfamiliarity. Let's note that by understanding the structure and function of the positional system, we can work with another system written on any basis with the same agility and ease that we operate with the decimal base. We elaborated a work exploring, mainly, the binary base, constituted of two digits, 0 and 1, being used in computers in the execution of mathematical operations and also to represent various information as numbers, characters, words, texts and algebraic calculations.

Keywords: Mathematics. Decimal numbers. Binary numbers. Numbering system.

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

Quando do surgimento do homem na Terra, vivendo em cavernas, não existia a ideia de números. Com o pouco desenvolvimento da humanidade e vivendo em diferentes regiões, o homem fazia a obtenção do seu próprio alimento pela caça ou pesca. Com o passar do tempo, possuindo habilidades naturais para pensar, ele percebeu a importância de produzir seu próprio alimento utilizando a agricultura e o pastoreio. Assim, passou a ter a necessidade de contar, desenvolveu a capacidade de comparar conjuntos e estabelecer entre eles uma correspondência de noções quantitativas, como pouco e muito, pequeno e grande, lento e rápido, levando o homem de uma vida primitiva a construir uma vida em sociedade. Eves (2004) afirma que:

> As pessoas comerciavam entre si e havia a necessidade de anotar a parte de cada família na caçada, ambas as atividades dependiam da ideia de contar, um prelúdio de pensamento científico. Alguns povos da Idade da Pedra, como a tribo Sioux, tinham calendários pictográficos que registravam várias décadas de história. Todavia, afora os sistemas de contagem primitivos, tudo o mais teve de esperar o desenvolvimento da agricultura, intensiva e em grande escala, que requeria uma aritmética mais sofisticada (EVES, 2004, p. 23).

O Sistema de Numeração é um método que usamos para representar uma certa quantidade, podendo definir uma coleção de objetos ou medidas. Em um sistema eficiente, cada número tem uma única representação.

Durante a história da humanidade, o número passou por diversas mudanças na sua representação. Os símbolos “5” ou “V”, por exemplo, são numerais representando a mesma quantidade, “cinco”. No sistema que usamos hoje, a partir da quantidade 10, não há um novo algarismo para representá-la, pois são usados dois símbolos já existentes, 1 e 0; o mesmo ocorre a partir daí, como o 11 e o 12. Essas regras tornaram-se fundamentais para o sistema de numeração que chamamos de posicional, pois os números são infinitos e, dessa forma, seria complicado e até impossível para registros a definição de enormes quantidades de símbolos diferentes. O sistema de numeração que usamos nos dias de hoje, tem base decimal, o que significa que precisamos de apenas dez símbolos diferentes para representar qualquer número natural.

Porém, nosso sistema não precisaria ser exatamente de base dez, isso quer dizer que se a base fosse seis ou doze, ou até qualquer outra, teríamos a mesma agilidade e se tornaria habitual. A escolha pela base 10 é devido ao fato de termos dez dedos nas mãos, como explica Fomín (1984):

> As razões pelas quais precisamente o sistema decimal foi universalmente aceito não são, de maneira alguma, de natureza matemática: os dez dedos das mãos constituíram o aparelho primário de cálculo usado pelo homem desde os tempos pré-históricos. Usando seus dedos é fácil contar até dez. Quando chegamos aos dez, isto é, depois de consumir todas as possibilidades do nosso "dispositivo de cálculo" natural, o mais lógico é considerar o número 10 como uma nova unidade maior (a unidade da próxima ordem). Dez dezenas formam a unidade da terceira ordem e assim por diante. Portanto, precisamente o cálculo baseado nos dedos deu origem ao sistema que agora parece completamente natural. (FOMÍN, 1984, p. 5, tradução nossa).

No Capítulo 2 iremos abordar temas elementares como algoritmos das operações fundamentais e critérios de divisibilidade, que exercitados com números escritos em bases diferentes da decimal mostram que é possível adquirir familiaridade com qualquer base.

No Capítulo 3 daremos atenção especial à base binária. Os computadores utilizam o sistema binário, baseado na presença ou ausência de energia, ou seja, circuito ligado ou desligado. Todas as operações matemáticas e todo processo que um computador executa é nessa base. Percebemos que as novas tecnologias estão cada vez mais presentes no dia a dia do aluno, mas a maioria não sabe como um processador executa suas operações matemáticas.

1. HISTÓRICO SOBRE OS SISTEMA DE NUMERAÇÃO E OUTRAS BASES

Vivendo em cavernas e com mudanças frequentes para diferentes regiões, o homem primitivo dependia do local em que habitava para sobreviver. Segundo Eves (2004, p. 22) *"os primeiros povos viviam da caça de pequenos animais selvagens e das frutas, castanhas e raízes que colhiam".*

A história da matemática nos permite observar o desenvolvimento dos sistemas de numeração na cultura e na evolução da civilização humana. Eves (2004, p. 24) aponta que: *"Depois de 3000 a.C, emergem comunidades agrícolas densamente povoadas ao longo do rio do Nilo na África, dos rios Tigre e Eufrates no Oriente Médio. Essas comunidades criaram culturas nas quais a ciência e a matemática começaram a se desenvolver".*

Com o passar do tempo e devido às mudanças climáticas, muitos registros mostram que a natureza foi sofrendo várias modificações; algumas regiões frias tornam-se quentes, e vice-versa, plantas e animais morrem, dificultando a coleta de alimentos para a sobrevivência. Foi assim que o homem percebeu a necessidade de produzir seu próprio alimento. Segundo Eves (2004):

> [...] tudo tinha que se adaptar à caça: seus instrumentos de pedra, madeira, osso, carapaça de animais eram desenhados ou para a caça ou para a preparação de alimentos; o fogo, que dominaram, era usado para cozer e para o aquecimento; sua arte retratava cenas de caçadas [...] (EVES, 2004, p. 22).

A partir daí ele passou a dedicar-se à agricultura e ao pastoreio, passando a se preocupar com quantidades que se tornam necessárias para organizar o rebanho e a sua produção. A contagem torna-se algo inevitável com todos os acontecimentos, e o homem começa a organizar o meio em que vive.

O homem passou a ter necessidade de contar e, com o passar do tempo, precisou registrar a sua contagem, por isso, criou sistemas para representar os números. Essa contagem era bem precária em relação aos dias de hoje. O pensamento quantitativo do homem era apenas de forma intuitiva. De acordo com Eves (2004):

> É razoável admitir que a espécie humana, mesmo nas épocas mais primitivas, tinha algum senso numérico, pelo menos ao ponto de reconhecer mais ou menos quando se acrescentavam ou retiravam alguns objetos de uma coleção pequena, pois há estudos que mostram que alguns animais são dotados desse senso. Com a evolução gradual da sociedade, tornam-se inevitáveis contagens simples. Uma tribo tinha que saber quantos eram seus membros e quantos eram seus inimigos e tornava-se necessário a um homem saber se seu rebanho de carneiros estava diminuindo (EVES, 2004, p. 25).

Segundo Mol (2013), um pastor controlava a quantidade de seu rebanho usando contagem. Pedras e outros objetos, como gravetos, conchas ou grãos e marcas no chão, na areia, em ossos ou na madeira poderiam ser empregados para contar os animais de um rebanho, o número de pessoas ou até os dias.

De acordo com Miyaschita, (2002, p. 5) *"os primeiros sistemas de escrita numérica que se conhece são os dos egípcios e os dos sumérios, surgidos por volta de 3500 a.C."* Assim, registrar os objetos e não apenas juntar os pedregulhos, tornava-se cada vez mais necessário, já que essas pedras se perdiam e também eram difíceis de carregar quando representavam uma quantidade muito grande.

A numeração escrita começou a ser feita com marcas em madeiras, argilas ou qualquer outro objeto que possibilitasse a marcação. A partir do quarto milênio, na civilização mesopotâmica, surge a escrita cuneiforme em tabuletas retangulares, feitas de argila e marcadas com estilete. Em seguida, eram cozidas ou secas ao sol para aumentar sua durabilidade, (Mol, 2013).

Assim, conforme a sociedade foi se desenvolvendo o homem precisava aprimorar sua ideia de quantidade e começavam a surgir registros para números que foram sofrendo grandes transformações até chegarem ao sistema que utilizamos hoje. Roque (2012) nos diz que:

> Normalmente, associa-se a história dos números à necessidade de contagem, relacionada a problemas de subsistência. Quando lemos sobre a origem da contagem, o exemplo que encontramos com mais frequência é o de pastores de ovelhas que teriam sentido a necessidade de controlar o rebanho por meio da associação de cada animal a uma pedra. Em seguida, ao invés de pedras, teria se tornado mais prático associar marcas, escritas na argila, e estas marcas estariam na origem dos números. Mas esta versão não é segura. As fontes para o estudo das civilizações muito antigas são escassas e fragmentadas (ROQUE, 2012, p.17).

O sistema de numeração quinário originou-se entre vários povos graças ao uso dos dedos de uma mão para contagem, sendo um dos sistemas mais utilizados pelos povos primitivos da América. Eves (2004), afirma que:

> O sistema quinário, ou sistema de numeração de base 5, foi o primeiro a ser usado extensivamente. Até hoje algumas tribos da América do Sul contam com as mãos: "um, dois, três, quatro, mão, mão e um" [...] Ainda no século XIX se encontravam calendários de camponeses germânicos no sistema quinário (EVES, 2004, p. 28).

Eves (2004), afirma que um outro sistema de numeração, o duodecimal, pode ter sido usado em épocas pré-históricas. Como podemos observar nos dias de hoje, o sistema duodecimal teve muita influência, principalmente em relação a medidas, na compra e venda de objetos, utensílios domésticos e até alguns alimentos que geralmente são contados por dúzias ou meia dúzia. Temos os exemplos de meses num ano, das horas de um relógio e a grosa, que representa a quantidade de cento e quarenta e quatro unidades, ou seja, doze dúzias; a base 12 aparece, também, em unidades de medida, já que um pé equivale a doze polegadas. Fomín (1984) destaca que:

> Em diferentes períodos históricos, muitas vilas usaram sistemas de numeração diferentes do decimal. Por exemplo, o sistema duodecimal foi bastante difundido. Sem dúvida, sua origem também está ligada ao cálculo pelos dedos, já que os quatro dedos da mão (com exceção do polegar) têm 12 falanges no total, passando o polegar nestas falanges, pode-se contar de 1 a 12. Então, 12 é considerado a unidade da próxima ordem, etc. (FOMÍN, 1984, p. 6, tradução nossa).

Há evidências do uso de um outro sistema na Babilônia antiga, o sexagesimal, que ainda hoje é utilizado como medida de tempo, na subdivisão da hora em 60 minutos, dos minutos em 60 segundos e também na medida de ângulos em graus, minutos e segundos. De acordo com Fomín, (1984, p. 7), *"outra hipótese é que os babilônios consideravam o ano composto de 360 dias, que foi relacionado de forma natural ao número 60".*

Um sistema que tem menor influência em nosso cotidiano, é o sistema de base 20, chamado vigesimal, que se originou pela contagem através dos dedos, neste caso, das mãos e dos pés. Segundo Fomín (1984, p. 8, tradução nossa), *"os astecas e maias, que durante vários séculos habitaram as vastas regiões do continente americano e criaram uma alta cultura praticamente liquidada pelos conquistadores espanhóis nos séculos XVI e XVII, usaram o* *sistema vigesimal".* Podemos encontrar alguns vestígios desse mesmo sistema, também usado pelos celtas, no continente Europeu. Eves (2004), afirma que:

> Esse sistema foi usado por índios americanos, sendo mais conhecido pelo bem desenvolvido sistema de numeração maia. As palavras-números francesas *quatre-vingt* (oitenta) em vez de *buitante* e *quatre-vingt-dix* (noventa) em vez de *nonante* são traços da base 20 dos celtas. Também se encontram traços no gaélico, no dinamarquês e no inglês. Os groenlandeses usam "um homem" para 20, "dois homens" para 40 e assim por diante. Em inglês há a palavra *score* (uma vintena), frequentemente usada. (EVES, 2004, p. 28).

Outra base do sistema de numeração é a binária. Esse sistema é usado no funcionamento dos computadores e em toda eletrônica digital. Os programas são codificados com os dígitos do sistema binário, 0 e 1, armazenados nas mídias para representar todos os caracteres utilizados no computador, incluindo os números e as letras. Segundo Miyaschita (2002), este sistema de numeração binário foi proposto pelo matemático alemão Gottfried Leibniz, sendo um dos sistemas mais antigos que se conhece provavelmente devido à sua simplicidade, pois emprega a menor base numérica possível para o sistema de numeração.

Como vimos acima, os dedos das mãos têm sido a principal forma de contagem usada pelos homens desde a pré-história. Uma razão natural que influenciou esses sistemas que utilizam números múltiplos de dez e de cinco como base, tem uma razão muito forte, como já mencionado, a soma dos dedos das mãos, pois auxiliam na contagem como uma calculadora primitiva. Porém, foi o sistema de base decimal que prevaleceu e que, por diferentes motivos foi aceito universalmente.

O sistema de base 10 foi escolhido pelos egípcios, sumérios, gregos, romanos, e pelo sistema de numeração indo-arábico, que é o que utilizamos nos dias de hoje (Miyaschita, 2002). O sistema indo-arábico, além de ser decimal, tem a característica de ser posicional, diferentemente do egípcio, por exemplo. Miyaschita (2002) afirma que:

> Esse sistema de numeração foi o sistema proposto por Aryabhata, o matemático árabe que difundiu o sistema de numeração posicional na Europa Ocidental por volta do século VIII. Pode-se dizer, portanto que esse sistema é o predominante hoje graças a esse árabe, que difundiu o sistema de numeração decimal entre os povos que dominaram o mundo nos séculos seguintes impondo sua cultura para os "primitivos" colonizados. Não se pode dizer que o sistema decimal seja o mais perfeito de todos, pois é uma questão realmente de condicionamento. Se Aryabhata

> tivesse espalhado um sistema de numeração de base cinco, por exemplo, provavelmente estaríamos utilizando o sistema de numeração quinário em nossos dias (MIYASCHITA, 2002 p. 28).

De acordo com Guimarães, (2008, p. 45), *"Os indianos inicialmente não utilizavam o sistema posicional, utilizavam a base dez e princípio aditivo. Os algarismos tinham representações diferenciadas para cada unidade simples, dezena, centena, milhar e dezena de milhar".* Essas representações eram muito limitadas na hora de fazer os cálculos aritméticos e a representação dos números muito grandes.

Os hindus tinham interesse pela astronomia, por cálculos e por números grandes. Surge a necessidade de aperfeiçoar o sistema de numeração. Portanto a ideia de valor posicional e um zero foram introduzidos algum tempo depois. Segundo (Guimarães, 2008), os indianos usavam a palavra "súnya" que significava vazio ou lacuna, para indicar a ausência das unidades de uma certa ordem, esse era o termo usado para representar o zero. Guimarães (2008, p. 49), afirma que: *"Os nove primeiros algarismos tinham um valor variável dependendo da posição que ocupavam, e a ausência de posições era representada com um símbolo para o zero. O zero foi simbolizado por um ponto, ou também por um pequeno círculo".*

Porém, foram os babilônios os primeiros a inventar o zero. Este símbolo "0" está relacionado à ideia de nenhum, nulo, nada ou não existente. Em sua dissertação, Guimarães (2008) afirma que:

> Este zero algarismo babilônico era utilizado apenas em posições intermediárias, ele não era utilizado no final do número, o que provocava muitas ambiguidades que precisavam ser resolvidas recorrendo-se ao contexto. Surge nos babilônios, o zero, como marca lugar, mas ainda limitado (GUIMARÃES, 2008 p. 39).

Assim, os hindus aproveitam a ideia do zero para utilizar em seu sistema de numeração. A presença do zero se torna necessária no sistema de numeração posicional. Guimarães (2008), afirma que:

> O zero algarismo surge nos sistemas de numeração Babilônica e Maia. Os Maias utilizavam o zero algarismo em todas as posições, diferente dos Babilônios, que só o utilizaram nas posições intermediárias. Os indianos apropriaram-se das ideias

> babilônicas e as aperfeiçoaram, formando o nosso atual sistema de numeração decimal. (GUIMARÃES, 2008, p. 44).

Os sistemas posicionais mencionados acima, binário, duodecimal, vigesimal, sexagesimal, junto com o sistema decimal, tiveram um papel muito importante no desenvolvimento da escrita dos números. Para evitar confusão na hora de estudarmos as diferentes bases numéricas, é preciso observar as diferenças entre esses sistemas, pois os mesmos dígitos têm valores numéricos distintos dependendo da base que estamos trabalhando, como é o caso dos dígitos 1 e 0 no número 10; o 1 no sistema decimal representa o número dez, “dez unidades”, já no sistema binário, representa o número dois, “duas unidades”. Para entendermos melhor, estudaremos a seguir a estrutura e o funcionamento desses sistemas, que são baseados no mesmo princípio geral.

2. SISTEMA DE NUMERAÇÃO E A BASE POSICIONAL

Desde a idade antiga, os humanos tinham a necessidade da contagem e o uso dos números se tornou um processo indispensável para à organização da vida humana, devido ao crescimento de seus rebanhos, plantações ou o número de habitantes de uma região. Segundo (Eves, 2004), quando se tornou necessário efetuar contagens de maior quantidade, o homem percebeu a importância de aperfeiçoar o processo, dispondo os números em grupos, sendo a ordem de grandeza desses grupos determinada em grande parte por um determinado processo de correspondência. Com o desenvolvimento da civilização, surge um sistema de numeração escrito, onde usamos poucos símbolos para representar números relativamente grandes e efetuamos as operações de maneira rápida e fácil.

O sistema chamado de posicional, consiste no método de escolher uma base b, atribuindo símbolos para 0, 1, 2, 3, ..., $b - 1$. Na representação de um número maior que $b - 1$, combinamos os símbolos já existentes, de forma que cada algarismo (símbolo), além do seu valor específico, possui um valor que lhe é atribuído devido à posição que ocupa na representação do número, sendo que o símbolo “0” indica as ordens vazias. Um exemplo de sistema posicional é o sistema de numeração que estamos acostumados a utilizar no dia a dia: o sistema decimal (sistema de base 10) ou indo-arábico (devido à origem).

Já no sistema não posicional, ao contrário do sistema posicional, os dígitos têm o valor do símbolo utilizado onde seja a posição que ocupa no número. Tomemos, como exemplo, o sistema de numeração romano, que é formado por um grupo de símbolos em que o um - I, cinco - V, dez - X, cinquenta - L, cem - C, etc., valem sempre o mesmo em qualquer posição que ocupam. Por exemplo, para representar o número 182, temos CLXXXII, onde o símbolo X e I aparecem mais de uma vez e sempre valem a mesma quantidade, independentemente da posição, o X valendo uma dezena e I valendo uma unidade. Muitos desses símbolos são encontrados em livros para representar capítulos, numeração de atividades, séculos, em relógios para representar horas.

No sistema de numeração posicional, podemos escrever qualquer número natural com uma quantidade pequena de símbolos e, o mais importante, realizar as operações aritméticas com agilidade e facilidade. Segundo Roque (2012):

> Uma grande vantagem dos sistemas posicionais, que é utilizada em nosso sistema decimal, é que os mesmos símbolos são suficientes para escrever qualquer número, inteiro ou fracionário. Os chamados “algarismos”, 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9 nos permitem escrever qualquer número, desde a massa de um próton até o número de partículas atômicas do universo. Os egípcios, os gregos e os romanos, por exemplo, não adotavam sistemas posicionais. Seus sistemas eram “aditivos”, isto é, somavam-se os valores de cada símbolo usado na representação de um número para se ter este número (o sistema romano era aditivo-subtrativo, com uma regra que especificava quando somar e quando subtrair valores). Outra grande vantagem de um sistema posicional, como o nosso, é que neles é possível desenvolver algoritmos eficientes para realizar operações (ROQUE, 2012, p. 24).

No sistema decimal, que é o sistema universalmente utilizado para representar os números inteiros, cada algarismo representa uma ordem, começando da direita para a esquerda. Para cada bloco de três ordens temos uma classe; essas classes também são contadas da direita para a esquerda. Assim, temos a classe das unidades, a classe dos milhares, a classe dos milhões, a classe dos bilhões etc., como podemos ver na tabela abaixo.

*T**abela 1**: Classes e ordens do sistema decimal*

Classe dos Bilhões			**Classe dos Milhões**			**Classe dos Milhares**			**Classe das Unidades**		
12ª ORDEM	11ª ORDEM	10ª ORDEM	9ª ORDEM	8ª ORDEM	7ª ORDEM	6ª ORDEM	5ª ORDEM	4ª ORDEM	3ª ORDEM	2ª ORDEM	1ª ORDEM
Centenas de Bilhão	Dezenas de Bilhão	Unidades de Bilhão	Centenas de Milhão	Dezenas de Milhão	Unidades de Milhão	Centenas de Milhar	Dezenas de Milhar	Unidades de Milhar	Centenas	Dezenas	Unidades

Porém, para fazer a leitura de números grandes, separamos os algarismos em blocos de 3 ordens, colocando um ponto ou espaço, da direita para a esquerda, para separar as classes. Em alguns casos evita-se o uso do ponto, que pode ser confundido com a multiplicação.

Mas, como citamos anteriormente, a base numérica não precisa necessariamente ser 10; podemos usar qualquer número inteiro $b > 1$, como base numérica. Assim, podemos escrever qualquer número natural N no sistema posicional de base b. Os sistemas de numeração posicionais baseiam-se em um teorema, que podemos demonstrá-lo aplicando a divisão euclidiana. Faremos, a seguir, uma demonstração de forma semelhante a apresentada em Abramo (2016), onde admitiremos que zero é um número natural.

Teorema 2.1:

Sejam dados os números naturais N e b, com $N > 0$ e $b > 1$. Existem números naturais n e $a_0, a_1, \ldots, a_n < b$, com $a_n \neq 0$, univocamente determinados, tais que

$$N = a_n b^n + a_{n-1} b^{n-1} + a_{n-2} b^{n-2} + \ldots + a_2 b^2 + a_1 b^1 + a_0 b^0.$$

A demonstração será feita usando indução completa sobre N. Se $N < b$, basta tomar $n = 0$ e $a_0 = N$. A unicidade da escrita é clara nesse caso.

Vamos supor que o resultado vale para todo natural menor do que N, onde $N \geq b$. Agora vamos provar para N. Aplicando a divisão euclidiana, existem q e a, únicos, tais que

$$N = bq + a, \text{ com } a < b. \qquad 2.1$$

Se tivéssemos $q \geq N$, como $b > 1$, teríamos $bq > N$ o que seria um absurdo. Assim, temos $q < N$ e, pela hipótese de indução, existem números naturais n' e $a_1, a_2, \ldots, a_{n'} < b$, com $a_{n'+1} \neq 0$, univocamente determinados, tais que,

$$q = a_{n'+1} b^{n'} + a_{n'} b^{n'-1} + \ldots + a_2 b + a_1. \qquad 2.2$$

Substituindo 2.2 em 2.1, temos que

$$N = bq + a = b(a_{n'+1} b^{n'} + a_{n'} b^{n'-1} + \ldots + a_2 b + a_1.) + a,$$

onde o resultado segue-se pondo $a_0 = a$ e $n = n' + 1$.

□

Portanto, é este teorema que nos permite escrever qualquer número no sistema posicional. Na fórmula acima, b é a base do sistema de numeração e a_i será cada um dos dígitos do número N, sendo que o índice n indica a posição relativa de cada dígito, ou seja,

$$N = a_n b^n + a_{n-1} b^{n-1} + a_{n-2} b^{n-2} + \ldots + a_2 b^2 + a_1 b^1 + a_0 b^0 = a_n a_{n-1} a_{n-2} \ldots a_2 a_1 a_0 .$$

Essa expansão numérica pode ser estendida aos números racionais, quando utilizamos também potências negativas da base.

Observe o número escrito na base decimal 142,52; vamos escrevê-lo como soma de potências de 10.

Temos,

$$142,52 = 1.10^2 + 4.10^1 + 2.10^0 + 5.10^{-1} + 2.10^{-2}.$$

De forma geral, a representação de um número racional R pode ser escrita, também, como a soma de potências de qualquer base $b > 1$:

$$R = a_n b^n + a_{n-1} b^{n-1} + \ldots + a_2 b^2 + a_1 b^1 + a_0 b^0 + \mathrm{a}_{-1} \mathrm{b}^{-1} + \mathrm{a}_{-2} b^{-2} + \mathrm{a}_{-3} b^{-3} + \ldots.$$

Com isso, chegamos a notação posicional onde todo número racional R pode ser representado pelos seus coeficientes com a vírgula separando a parte inteira da parte fracionária.

$$R = a_n a_{n-1} \ldots a_1 a_0 , a_{-1} a_{-2} \ldots a_{-n} .$$

É importante observarmos que os números irracionais e os números racionais que são dízimas periódicas, representados desta forma, têm infinitos dígitos à direita da vírgula.

Para representarmos um número no sistema de numeração posicional de base b, precisamos de símbolos básicos. Escolhe-se um conjunto S com b símbolos

$$S = \{ s_0 , s_1 , s_2 , . . , s_{b-1} \} ,$$

onde $S_0 = 0$ e cada símbolo, isoladamente, representa respectivamente cada um dos números de 0 a $b - 1$. A representação do teorema acima, relativo a base b é chamada de expansão decimal se $b = 10$, e binária se $b = 2$. Se a base é 10, podemos utilizar o conjunto de símbolos:

$$S = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}.$$

Como vimos, no sistema decimal, o valor que o algarismo assume é sempre múltiplo de uma potência de 10 e esses valores são somados representando uma quantidade. Abramo (2016) p. 58, afirma que: *"Há outros sistemas de numeração em uso, notadamente o sistema binário ou em bases de potências de 2, que são correntemente usados em computação".* Neste sistema, temos:

$$S = \{0, 1\}.$$

Se a base do sistema for maior que 10, utiliza-se os símbolos de 0 a 9, acrescentando novos símbolos para 10, ..., $b - 1$. Por exemplo, se a base for 16 usamos os símbolos, A, B, C, D, E e F, para representar os números 10, 11, 12, 13, 14 e 15, respectivamente. A seguir citaremos alguns exemplos com diferentes bases.

Exemplo 2.1: Vamos converter o número sete para a base binária.

Usando a expansão do teorema, mas com $b = 2$, temos:

$$7 = 1.2^2 + 1.2^1 + 1.2^0.$$

Portanto, como na equação anterior, escrevemos o número sete, na base dois, da seguinte forma:

$$1.2^2 + 1.2^1 + 1.2^0 = 111.$$

Observe que se tomarmos um número escrito em uma base b qualquer, não saberemos qual é a quantidade que ele representa, pois, dependendo da base numérica em uso será interpretado de maneira diferente. Portanto, para evitar equívoco, a partir de agora, vamos escrever esses números entre parênteses e as bases serão indicadas em subscrito, sendo que na base dez omitiremos os parênteses. Assim, no exemplo acima, vimos que $7 = (111)_2$.

Exemplo 2.2: Determine o número $(101)_b$, quando b = 2, 8, 10 ou 16.

$$\begin{aligned}(101)_2 &= 1.2^2 + 0.2^1 + 1.2^0 = 5\\ (101)_8 &= 1.8^2 + 0.8^1 + 1.8^0 = 65\\ 101 &= 1.10^2 + 0.10^1 + 1.10^0 = 101\\ (101)_{16} &= 1.16^2 + 0.16^1 + 1.16^0 = 257.\end{aligned}$$

Exemplo 2.3: Vamos representar o número $(2CA)_{16}$ na base decimal.

Como vimos anteriormente, C = 12 e A = 10. Logo,

$$(2CA)_{16} = 2.16^2 + C.16^1 + A.16^0 = 2.256 + 12.16 + 10.1 = 512 + 192 + 10 = 714.$$

Vamos citar outros exemplos envolvendo a aplicação da expansão do teorema em uma base b qualquer.

Exemplo 2.4: (PAPMEM, 2009) Vamos representar $P = (14654)_b$ na base $b + 1$.

Como o maior dígito do número é 6, então $b \geq 7$. Decompondo P, temos,

$$P = 1b^4 + 4b^3 + 6b^2 + 5b^1 + 4b^0.$$

Queremos escrever esse número como uma soma de potências de base $b + 1$.

Expandindo a potência $(b + 1)^4$ temos,

$$(b + 1)^4 = b^4 + 4b^3 + 6b^2 + 4b + 1. \qquad 2.3$$

Reescrevemos P como,

$$P = (1b^4 + 4b^3 + 6b^2 + 4b + 1) + b + 3. \qquad 2.4$$

Substituindo 2.3 em 2.4, temos

$$P = \left(b^4 + 4b^3 + 6b^2 + 4b + 1\right) + b + 3.$$

observe que:

$$P = \left(b + 1\right)^4 + \left(b + 1\right) + 2. \text{ Logo,}$$

$$P = 1\left(b + 1\right)^4 + 0\left(b + 1\right)^3 + 0\left(b + 1\right)^2 + 1\left(b + 1\right) + 2b^0.$$

Assim,

$$P = \left(10012\right)_{b+1}.$$

Podemos exemplificar com $b = 7$. Assim,

$$\left(14654\right)_b = \left(14654\right)_7 = 4106$$
$$\left(10012\right)_{b+1} = \left(10012\right)_8 = 4106.$$

Exemplo 2.5: (UDESC, 2017) Vamos determinar em que base *b*, o número 216 é representado por $(1000)_b$.

Temos que: $\left(1000\right)_b = 1b^3 + 0b^2 + 0b^1 + 0b^0$. Então,

$b^3 = 216.$

Logo, $b = \sqrt[3]{216}$ e assim,

$b = 6.$

Portanto, $216 = \left(1000\right)_6$.

Logo, o sistema de numeração posicional permite que cada número real tenha uma única representação, eventualmente infinita.

A seguir, vamos apresentar um algoritmo para determinar a representação de um número N numa determinada base b, aplicando sucessivamente a divisão euclidiana. Chamaremos o quociente de N por b de q_0, de q_0 por b de q_1 e assim, sucessivamente. Os restos serão $a_0, a_1, a_2, \ldots$. Assim,

$$
\begin{array}{llll}
N = bq_0 + a_0, & a_0 < b & \text{e} & 0 < q_0 < N \\
q_0 = bq_1 + a_1, & a_1 < b & \text{e} & 0 < q_1 < q_0 \\
q_1 = bq_2 + a_2, & a_2 < b & \text{e} & 0 < q_2 < q_1 \\
\vdots & & & \\
q_{n-2} = bq_{n-1} + a_{n-1}, & a_{n-1} < b & \text{e} & 0 < q_{n-1} < q_{n-2} \\
q_{n-1} = \mathrm{b}\mathrm{q}_n + a_n, & a_n < b & \text{e} & q_n = 0
\end{array}
$$

Decorre que: $q_{n-1} = b.0 + a_n$, ou seja, $q_{n-1} = a_n \quad com\ 0 \leq a_n < b.$

Levando em consideração as igualdades acima, fazemos a substituição no valor de q_0 na primeira expressão e, assim por diante, em $q_1, q_2, ..., q_{n-1}$. Temos que:

$$
\begin{aligned}
&N = b q_0 + a_0 \\
&N = b\left(bq_1 + a_1\right) + a_0 = b^2 q_1 + ba_1 + a_0 \\
&N = b^2\left(bq_2 + a_2\right) + ba_1 + a_0 \\
&N = b^3 q_2 + b^2 a_2 + ba_1 + a_0 \\
&\vdots \\
&\vdots \\
&N = b^{n-1}\left(bq_{n-1} + a_{n-1}\right) + b^{n-2}a_{n-2} + \ldots + b^2 a_2 + ba_1 + a_0, \\
&N = b^n q_{n-1} + b^{n-1}a_{n-1} + b^{n-2}a_{n-2} + \ldots + b^2 a_2 + ba_1 + a_0.
\end{aligned}
$$

Como, $q_{n-1} = a_n$.

Então, $N = b^n a_n + b^{n-1}a_{n-1} + b^{n-2}a_{n-2} + \ldots + b^2 a_2 + ba_1 + a_0.$

Podemos observar, nas divisões sucessivas por b, que os restos das divisões, constituem uma sequência de dígitos $a_0, a_1, a_2, ..., a_n$, que assim representam, da posição a_n até a_0, o número escrito na base b, ou seja,

$$N = a_n a_{n-1} \ldots a_1 a_0.$$

Exemplo 2.6: Vamos converter o número 3184, para a base ternária.

O sistema de numeração ternário, de base 3, é aquele em que utilizamos três dígitos diferentes para representar seus algarismos, sendo 0, 1 e 2.

O processo, como visto acima, deverá começar dividindo este número pela base para a qual queremos converter, no caso, a base 3. Dividimos quantas vezes forem necessárias, até chegarmos a um quociente igual a zero.

Temos,

$$\begin{aligned}
3184 &= 1061\times 3 + 1\\
1061 &= 353\times 3 + 2\\
353 &= 117\times 3 + 2\\
117 &= 39\times 3 + 0\\
39 &= 13\times 3 + 0\\
13 &= 4\times 3 + 1\\
4 &= 1\times 3 + 1\\
1 &= 0\times 3 + 1.
\end{aligned}$$

Assim, concluímos que

$$3184 = 1.3^7 + 1.3^6 + 1.3^5 + 0.3^4 + 0.3^3 + 2.3^2 + 2.3 + 1.$$

Observe que o número ficou expresso como soma de potências de 3 e que os restos das divisões sucessivas (11100221), de baixo para cima, compõem o número escrito na base ternária.

Portanto, $3184 = (11100221)_3$.

O entendimento do sistema de numeração posicional, a partir de conceitos generalizados anteriormente, é essencial no momento em que convertemos e comparamos as representações de um mesmo número em bases diferentes. Veremos agora, com mais atenção, algumas bases diferentes da decimal.

No sistema binário (base dois), temos apenas dois símbolos, 0 e 1, para compor os números. Começamos com o símbolo 0 e para o próximo número utilizamos o 1, a partir do número dois representamos com os dois dígitos: 10, e nessa sequência construímos os próximos números, 11, 100, 101, 110, 111, …

Já no sistema octal (base oito), representamos números com oito símbolos. Seguimos até o número sete, e a partir do oito, voltamos com os dois dígitos: 10, e assim por diante, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 20, 21, …

O sistema duodecimal (base doze), assim como o binário e o octal, é um sistema de numeração posicional. São empregados 12 símbolos, esses símbolos após o 9 podem ser representados com a escolha de letras convenientes, por exemplo A para representar o 10 e B para representar o 11.

Quando trabalhamos com números pequenos, conseguimos escrever os números em seqüência, ou seja, fazendo a contagem com a respectiva representação. Porém, este processo se complica quando queremos obter uma conversão de números maiores.

Exemplo 2.7: Vamos representar o número 4967 na base doze.

Como temos uma base maior que a base decimal, devemos acrescentar os símbolos A e B para representar o 10 e o 11, respectivamente.

Fazendo as divisões, temos:

$$
\begin{aligned}
4967 &= 413\times 12 + 11 \\
413 &= 34\times 12 + 5 \\
34 &= 2\times 12 + 10 \\
2 &= 0\times 12 + 2
\end{aligned}
$$

Assim, $4967 = 2\times 12^3 + 10\times 12^2 + 5\times 12^1 + 11 = (2A5B)_{12}$.

3. SISTEMA BINÁRIO (BASE 2)

O sistema binário é frequente no mundo da tecnologia digital e para o computador essa leitura binária é ideal, tratando-se de rapidez e facilidade de leitura, pois os circuitos computacionais se comportam em dois estados e os aparelhos eletrônicos utilizam a numeração binária para leitura desses comandos: o 0 (zero) significa desligado e o 1 (um) significa ligado (chave aberta ou fechada).

Todos os dias podemos observar, no nosso celular, televisão, laptop, microondas, máquina de lavar roupa, ou em qualquer outro dispositivo eletrônico, o símbolo liga/desliga: ⏻ (0 e 1 entrelaçados). Esse símbolo, foi projetado inicialmente para representar botões de “Standby”, que é o estado do eletrônico que não está completamente desligado, ou seja, está em “estado de espera”, que seria uma situação intermediária entre o ligado (1) e o desligado (0). Ele não foi originalmente previsto para cumprir a função de “ON/OFF”, mas foi se popularizando nos eletrônicos e perdeu o significado original de Standby, passando a ser associado com ligar ou desligar o aparelho.

A base dois é a menor base numérica possível de um sistema de numeração posicional e também o sistema de numeração mais simples, no sentido de que utiliza somente os algarismos 0 e 1. Segundo Miyaschita (2002, p. 23). *“Alguns povos da Austrália e da Polinésia já usavam, apesar de com certa imperfeição, esse sistema de numeração posicional de base dois”.*

Neste capítulo, vamos notar que, não é apenas a representação dos algarismos que é simplificada no sistema de numeração binário, mas as regras das operações nesse sistema também são extremamente simples. De acordo com Miyaschita (2002, p. 23). *“No século XVII, esse sistema de numeração foi proposto por um grande matemático alemão, Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716) numa época que se discutia qual era a base de numeração mais eficiente*”. Franzon (2015), afirma que:

No Explication de l'Arithmétique Binaire, lembra que no sistema decimal utilizamos os algarismos de 0 a 9 e diz que quando chegamos ao dez, iniciamos novamente a contagem escrevendo dez como 10, e dez vezes dez, ou cem, como 100, e dez vezes 100, ou mil, como 1000. No sistema binário, utilizamos os algarismos 0 e 1 e quando chegamos ao dois recomeçamos a contagem escrevendo dois como 10, e dois vezes dois, ou quatro, como 100, e dois vezes quatro, ou oito, por 1000 (FRAZON, 2015, p. 156).

Nesse sistema contamos de dois em dois, e a cada 2 unidades da 1ª ordem, equivalem a 1 unidade da 2ª ordem, a cada 2 unidades da 2ª ordem equivalem a 1 unidade da 3ª ordem e assim sucessivamente, seguimos o mesmo processo como as classes do sistema decimal. Na representação abaixo, notamos uma correspondência entre as progressões numéricas desses sistemas, podemos dizer que $[(10)_2]^n = 2^n$. Veja a representação dessa progressão abaixo:

$$\left.\begin{array}{r}
(1)_2 = 1 = 2^0 \\
(10)_2 = 2 = 2^1 \\
(100)_2 = 4 = 2^2 \\
(1000)_2 = 8 = 2^3 \\
(10000)_2 = 16 = 2^4 \\
(100000)_2 = 32 = 2^5 \\
(1000000)_2 = 64 = 2^6 \\
(10000000)_2 = 128 = 2^7 \\
(100000000)_2 = 256 = 2^8 \\
(1000000000)_2 = 512 = 2^9 \\
(10000000000)_2 = 1024 = 2^{10}
\end{array}\right\|$$

Assim, a representação de um número N na base 2, escreve-se como a soma de potências de 2:

$$N = a_n 2^n + a_{n-1} 2^{n-1} + a_{n-2} 2^{n-2} + ... + a_2 2^2 + a_1 2^1 + a_0 2^0,$$

onde cada dígito a_i é igual a 0 ou 1.

Então, podemos transformar o número binário 11111011110 no número decimal 2014 da seguinte forma:

$$(11111011110)_2 = 1.2^{10} + 1.2^9 + 1.2^8 + 1.2^7 + 1.2^6 + 0.2^5 + 1.2^4 + 1.2^3 + 1.2^2 + 1.2^1 + 0.2^0 = 2014.$$

Uma diferença básica e fundamental entre esse sistema e o sistema decimal, é a quantidade de algarismos utilizados para representar o número. Observe que, no sistema decimal utilizamos apenas quatro algarismos para escrever o número 2014, enquanto que em binário precisamos de onze algarismos. Verificamos que, de maneira geral, quanto menor a base, mais algarismos são necessários, tornando-se menos prática quando se trata da representação de números grandes. Por outro lado, o fato de trabalhar com essa base, torna-se mais ágil quando realizamos as operações, pelo fato de não utilizar outros dígitos senão 0 e 1.

Os sistemas octal e hexadecimal, são sistemas que têm relação direta com o sistema binário, pois $8 = 2^3$ e $16 = 2^4$. Veja na tabela abaixo, a representação de alguns números em quatro bases diferentes (para melhor visualização, omitiremos a notação com parênteses que temos utilizado, nesta tabela):

Tabela 2: *Representação dos números em diferentes bases*

Hexadecimal	**Octal**	**Decimal**	**Binário**
0	0	0	0
1	1	1	1
2	2	2	10
3	3	3	11
4	4	4	100
5	5	5	101
6	6	6	110
7	7	7	111
8	10	8	1000
9	11	9	1001
A	12	10	1010
B	13	11	1011
C	14	12	1100
D	15	13	1101
E	16	14	1110

Veremos, a seguir, como podemos realizar conversões do sistema de base dois e outras como a base oito, a dezesseis e a decimal.

3.1 Conversão de Decimal para Binário

No item anterior, vimos algumas conversões de bases, e uma delas é através de divisões sucessivas, dividindo quantas vezes forem necessárias até chegarmos a um quociente igual a zero. A representação do número é feita tomando os restos de cada divisão em sequência, sendo que o último resto será o algarismo das unidades.

Exemplo 3.1: Vamos representar o número 37 na base dois.

Aplicamos o método das divisões euclidianas sucessivas por 2, pois é a base em que queremos representar o número 37. Começamos dividindo 37 por 2, o quociente dessa divisão dividimos por 2 novamente, e assim sucessivamente até o quociente ser zero.

$$\left.\begin{array}{rcl} 37 & = & 18\times 2 + \mathbf{1} \\ 18 & = & 9\times 2 + \mathbf{0} \\ 9 & = & 4\times 2 + \mathbf{1} \\ 4 & = & 2\times 2 + \mathbf{0} \\ 2 & = & 1\times 2 + \mathbf{0} \\ 1 & = & 0\times 2 + \mathbf{1} \end{array}\right\} \uparrow$$

Os restos das divisões de baixo para cima, formarão a representação do número na base dois. Assim, $37 = (100101)_2$.

Outra forma de conversão, é a subtração das potências de base 2. Dado um número no sistema decimal, queremos transformá-lo para a base 2. Para isso, podemos executar o seguinte procedimento:

1) Escolhemos a maior potência de 2 menor que o número dado;

2) Subtraímos o número dado da potência obtida no passo 1;

3) Do resultado obtido no passo 2, subtraia da maior potência de 2 menor do que esse número.

Continuamos o processo até chegarmos ao último número que pode ser representado pela base dois, depois fazemos a soma dessas potências. Veja o exemplo:

Exemplo 3.2: Representar o número 110 na base binária.

Fazendo as subtrações das potências de 2, temos:

$$\begin{aligned} 110 - 64 &= 46 \\ 46 - 32 &= 14 \\ 14 - 8 &= 6 \\ 6 - 4 &= 2 \\ 2 - 2 &= 0. \end{aligned}$$

Convertemos esses números, que são potências de base 2, para uma expansão da base binária. Logo:

$$110 = 64 + 32 + 8 + 4 + 2 = 1.2^6 + 1.2^5 + 0.2^4 + 1.2^3 + 1.2^2 + 1.2^1 + 0.2^0.$$

Consequentemente, o número 110 do sistema decimal representado na base dois é

$$110 = (1101110)_2 .$$

3.2 Conversão de Binário para Decimal

De acordo com o teorema 2.1, para converter de binário para decimal, devemos considerar os valores posicionais na base 2 e fazer a soma das potências, ou seja, vamos usar o método da soma dos pesos de cada dígito elevado à posição que ele ocupa. Assim, veremos que a soma do produto dos dígitos pelo valor das potências resulta no número representado na base 10. Vejamos no próximo exemplo.

Exemplo 3.3: Vamos expressar o número 1011, escrito na base dois, na base dez.

Temos que, $(1011)_2 = 1.2^3 + 0.2^2 + 1.2^1 + 1.2^0 = 8 + 2 + 1.$
Logo, $(1011)_2 = 11.$

3.3 Conversão de Binário para Octal

Para fazermos a conversão de um número binário ($a_n\, a_{n-1} \ldots\, a_2\, a_1\, a_0$) para octal, podemos proceder da seguinte forma:

1) Se o $n + 1$ não for múltiplo de 3, então acrescente zeros à esquerda do número, de forma que a quantidade de dígitos seja múltipla de 3;

2) Em seguida, separe os dígitos em blocos de três dígitos;

3) Cada sequência de três dígitos do passo 2 são números binários, representados por três dígitos, os quais correspondem a apenas um algarismo do sistema octal, veja a tabela 3.

Para entendermos esses passos da conversão de binário para octal, consideremos o número binário:

$$a_n a_{n-1} a_{n-2} \ldots a_2 a_1 a_0 = a_n 2^n + a_{n-1} 2^{n-1} + a_{n-2} 2^{n-2} + \ldots + a_2 2^2 + a_1 2^1 + a_0 2^0.$$

Subdividindo o segundo membro em grupos de três algarismos consecutivos cada, obtemos a expressão:

$$(a_n 2^n + a_{n-1} 2^{n-1} + a_{n-2} 2^{n-2}) + \ldots + (a_5 2^5 + a_4 2^4 + a_3 2^3) + (a_2 2^2 + a_1 2^1 + a_0 2^0),$$

no qual, o expoente da potência de base dois, que multiplica o último termo de cada parênteses, é sempre múltiplo de três. Colocando essas potências em evidência, temos

$$(a_n 2^2 + a_{n-1} 2^{n-1} + a_{n-2} 2^0) 2^{n-2} + ... + (a_5 2^2 + a_4 2^1 + a_3 2^0) 2^3 + (a_2 2^2 + a_1 2^1 + a_0 2^0).$$

Todas as potências colocadas em evidência são potências de 8 = 2^3. Assim, temos a expressão expandida da base octal.

$$(a_n 2^2 + a_{n-1} 2^{n-1} + a_{n-2} 2^0) 8^{\frac{n-2}{3}} + ... + (a_5 2^2 + a_4 2^1 + a_3 2^0) 8 + (a_2 2^2 + a_1 2^1 + a_0 2^0).$$

Agora, vamos fazer a conversão do sistema binário para octal. Agrupamos os dígitos 1 e 0 do número binário em grupos de três, começando pela direita (dependendo do número, o último grupo pode ficar com um ou dois dígitos, nesse caso, acrescentamos zero à esquerda do número para que todos os grupos fiquem com três dígitos), assim cada grupo de dígitos binários irá designar um número octal. Neste caso utilizamos a tabela abaixo:

Tabela 3: *Representação dos algarismos do Sistema Octal em Binário.*

Octal	**Binário**
0	000
1	001
2	010
3	011
4	100
5	101
6	110
7	111

Exemplo 3.4: Vamos converter $(1101101)_2$ para a base oito.

Dividindo em grupos de três dígitos, $\underline{1}$ $\underline{101}$ $\underline{101}$, teremos

$$(001)_2 = 1$$
$$(101)_2 = 5$$
$$(101)_2 = 5$$

Logo, $(1101101)_2 = (155)_8$.

3.4 Conversão de Octal para Binário

Essa conversão é feita com a mesma ideia da anterior, só que de forma contrária, basta convertermos facilmente cada dígito octal em um conjunto de três dígitos binários. Quando o número binário correspondente for formado por um ou dois dígitos, acrescente zeros à esquerda do número. Depois, é só posicioná-los juntos e teremos o número representado na base dois.

Exemplo 3.5: Vamos converter o número $(523)_8$ para a base binária.

Separamos cada dígito e expressamos na base dois (não esquecendo de acrescentar os zeros, caso necessário, para completar três dígitos).

$$(5)_8 = (101)_2$$
$$(2)_8 = (010)_2$$
$$(3)_8 = (011)_2$$

Temos que: $(523)_8 = (101010011)_2$.

3.5 Conversão de Binário para Hexadecimal

Para justificar a expressão envolvendo o sistema hexadecimal, sem perda de generalidade, são efetuadas de modo similar ao sistema octal, exceto pelo fato de que o número binário deve ser subdividido em grupos de quatro algarismos consecutivos e o expoente da potência de dois que multiplica o último termo de cada parêntese, é sempre múltiplo de quatro, pois, $16 = 2^4$. Assim, temos a expressão expandida da base hexadecimal.

$$(a_n 2^3 + \ \dots + a_{n-3} 2^0)16^{\frac{n-3}{4}} + \dots + \ (a_7 2^3 + \dots + \ a_4 2^0)16 + \ (a_3 2^3 + \dots + \ a_0 2^0).$$

Portanto, para fazer a conversão de binário para hexadecimal devemos separar o número binário em grupos de quatro dígitos, da direita para a esquerda e fazer a conversão de cada grupo separadamente (dependendo do número, o último grupo pode ficar com um, dois ou três algarismos, como no sistema octal, acrescenta-se zeros à esquerda do número se for necessário). Assim, cada grupo de quatro dígitos binários irá designar um número hexadecimal. Neste caso utiliza-se a tabela abaixo:

Tabela 4: *Representação dos algarismos do Sistema Hexadecimal em Binário.*

Hexadecimal	**Binário**
0	0000
1	0001
2	0010
3	0011
4	0100
5	0101
6	0110
7	0111
8	1000
9	1001
10	1010
11	1011
12	1100
13	1101

14	1110
15	1111

Exemplo 3.6: Represente $(1010111001010)_2$ na base dezesseis.

Dividindo em grupos de quatro dígitos, 1 0101 1100 1010, teremos

$$(0001)_2 = 1$$
$$(0101)_2 = 5$$
$$(1100)_2 = C$$
$$(1010)_2 = A.$$

Portanto, $(1010111001010)_2 = (15CA)_{16}$.

3.6 Conversão de Hexadecimal para Binário

Essa conversão é feita com a mesma ideia da anterior, só que de forma contrária, basta convertermos facilmente cada dígito hexadecimal em um conjunto de quatro dígitos binários, se necessário acrescentamos 0 a esquerda do número binário para que esse número possua quatro dígitos, depois é só posicioná-los juntos e teremos o número representado na base dois.

Exemplo 3.7: Represente o número 4A05 expresso na base 16 em binário.

$$(4)_{16} = (0100)_2$$
$$(A)_{16} = (1010)_2$$
$$(0)_{16} = (0000)_2$$
$$(5)_{16} = (0101)_2$$

Assim, $(4A05)_{16} = (100101000000101)_2$.

Observe que omitimos o primeiro zero à esquerda do número já que seria desnecessário.

Depois de fixarmos todos esses passos de conversões da base binária, para as conversões de octal para hexadecimal e hexadecimal para octal, é mais simples fazer a conversão para binário e em seguida converter de binário para a base desejada, sempre usando o sistema binário como ponte, a conversão contrária é análoga. Veja os exemplos a seguir.

Exemplo 3.8: Expresse $(127)_8$ em hexadecimal.

$$(127)_8 = (\underline{1}\,\underline{010}\ \underline{111})_2 = (1010111)_2 = (\underline{0101}\ \underline{0111})_2 = (57)_{16}.$$

Exemplo 3.9: Expresse $(C3)_{16}$ em octal.

$$(C3)_{16} = (\underline{1100}\ \ \underline{0011})_2 = (1100\,0011)_2 = (\underline{11}\ \underline{000}\ \underline{011})_2 = (303)_8.$$

3.7 Operações Aritméticas No Sistema Binário

As operações aritméticas no sistema de numeração posicional de qualquer base *b* são análogas àquelas que estamos acostumados na base decimal. Assim, as mesmas regras que usamos para a adição e multiplicação no sistema decimal são válidas para números escritos em qualquer outro sistema de uma base *b* qualquer.

Por exemplo: 6 + 2 = 8 na base dez, mas na base oito $6 + 2 = (6)_8 + (2)_8 = (10)_8$.

No sistema binário, apenas dois números, 0 e 1, estão envolvidos, o número 10 (dois) representa a unidade da próxima ordem. As regras das operações com os números escritos no sistema binário também são muito simples. Veremos agora, como realizamos as operações fundamentais na base binária. Nesta seção omitiremos a notação com parênteses para indicar a base, já que estamos trabalhando apenas com a binária.

3.7.1 Adição

Para adicionarmos dois ou mais números utilizaremos o mesmo algoritmo da adição que aprendemos na escola básica. Assim, colocamos as parcelas em uma coluna de forma que os dígitos de mesma ordem fiquem alinhados, como abaixo. Para ilustrar o algoritmo, realizaremos a operação 11100 + 11010.

$$
\begin{array}{r}
1\,1\,1\,0\,0 \\
+\;\underline{1\,1\,0\,1\,1}
\end{array}
$$

É costume colocar uma barra para separar as parcelas do resultado e o sinal de adição ao lado. Começamos as operações pela menor ordem (a direita) e em seguida para a ordem posterior, continuamos com esse processo até o término da operação. Vamos destacar, a seguir, os quatro casos que podem acontecer, quando olhamos para a mesma ordem, na adição de duas parcelas:

$0 + 0 = 0$
$0 + 1 = 1$
$1 + 0 = 1$
$1 + 1 = 10$, nesse caso o transporte de "1" é imediatamente para a próxima posição.

Pode-se verificar que no último caso o resultado da soma não tem apenas um dígito, pois o resultado é 10 (dois), que no sistema binário representa uma ordem superior. Assim, como no algoritmo que conhecemos da base decimal, consideramos o dígito da unidade “0” e transportamos o “1” (o famoso “vai um”), que na verdade representa 10 (dois), para a ordem imediatamente superior. O mesmo acontece quando adicionamos mais de duas parcelas, como é o caso de (1 + 1 + 1) que o resultado é 11 (três), consideramos o dígito da unidade que nesse caso é “1” e passa-se o “outro 1”, que vale 10 (dois) para a próxima ordem superior. Levando em conta essas considerações vamos efetuar a soma anterior.

$$
\begin{array}{r}
{}^{1\,1}\;\;\; \\
1\,1\,1\,0\,0 \\
+\;\; 1\,1\,0\,1\,0 \\
\hline
1\,1\,0\,1\,1\,0
\end{array}
$$

Logo, 11100 + 11010 = 110110.

3.7.2 Subtração

A subtração de dois números binários, também é semelhante a operação com os números em decimal. Como estamos trabalhando apenas com os números naturais, então as subtrações são realizadas apenas quando o minuendo for maior que o subtraendo. Para ilustrar o algoritmo, realizaremos a operação 111100 – 1011.

$$
\begin{array}{r}
1\,1\,1\,1\,0\,0 \\
-\quad 1\,0\,1\,1 \\
\hline
\end{array}
$$

Subtrai-se as colunas da direita para a esquerda, tal como uma subtração no sistema decimal (se desejar, pode-se igualar as casas com zeros à esquerda do número). Quando o dígito superior numa coluna for 0 e o dígito inferior for 1, aplica-se o caso do "empréstimo". Abaixo, temos algumas regras que facilitam nas operações quando olhamos para os dígitos de mesma ordem, analogamente ao que fizemos na adição.

$0 - 0 = 0$
$1 - 0 = 1$
$1 - 1 = 0$
$0 - 1$, neste caso, a operação será $10 - 1 = 1$, sendo que o "empréstimo" é igual a 1.

Nesse último caso, para realizar a operação, vamos pedir "emprestado" um dígito à esquerda para solucionar a coluna "0", e como nesse sistema contamos de dois em dois, a cada duas unidades da 1ª ordem, equivalem a uma unidade da 2ª ordem, então, na operação de

“0 – 1” esse empréstimo para o dígito 0 vem valendo 10 (dois). Vamos efetuar a operação acima aplicando os passos destacados acima.

$$\begin{array}{r} {\scriptstyle 0\ \ \overset{1}{1\cancel{0}}\ \ 10} \\ 1\,1\,1\,\cancel{1}\,\cancel{0}\,\cancel{0} \\ -\qquad 1\,0\,1\,1 \\ \hline 1\,1\,0\,0\,0\,1 \end{array}$$

Logo, 111100 – 1011 = 110001.

3.7.3 Multiplicação

O algoritmo da multiplicação entre binários, assim como na adição, é similar ao algoritmo utilizado para multiplicar os números do sistema decimal. Após realizarmos as multiplicações de cada ordem do multiplicador, seguimos as regras da adição de binários no momento de somar os produtos resultantes. Observe abaixo, a tabuada da multiplicação onde vamos nos basear para efetuar essa operação.

$$\begin{array}{c} 0 \times 0 = 0 \\ 0 \times 1 = 0 \\ 1 \times 0 = 0 \\ 1 \times 1 = 1. \end{array}$$

Assim, as multiplicações no sistema binário são bem menores que o sistema decimal, o que torna uma vantagem ainda maior na realização de operações aritméticas. Portanto, percebemos que é extremamente fácil realizar multiplicações com esse sistema, mesmo para aqueles que “se atrapalham” com a tabuada. Veja a seguir, como calculamos o produto de 10011 × 111.

$$
\begin{array}{r}
10011 \\
\times \quad 111 \\
\hline
10011 \\
+\ 10011 \\
10011 \\
\hline
10000101
\end{array}
$$

Logo, 10011 × 111 = 10000101.

3.7.4 Divisão

Assim, como as outras operações, o algoritmo da divisão entre números binários, também é similar ao usado no sistema decimal. Como essa operação é inversa à multiplicação, no algoritmo utilizamos apenas multiplicação (lembrando que divisão é a multiplicação pelo inverso). Assim, para ter habilidade na divisão, basta ser hábil na multiplicação.

Vamos dividir 11011 por 11 para ilustrar o processo.

$$
11011 \;\underline{|\,11\quad}
$$

Como no algoritmo da base decimal, vamos preenchendo os dígitos do quociente da esquerda para a direita. Observamos que, o resultado de cada dígito do quociente e dos restos das divisões só poderá ser 0 ou 1, o que torna essa operação ainda mais simples no sistema binário. Efetuando a operação, teremos:

$$
\begin{array}{rl}
11011 & \underline{|\,11\quad} \\
\underline{-11} & \ \ 1001 \\
00011 & \\
\underline{-11} & \\
00 &
\end{array}
$$

Assim, $11011 \div 11 = 1001$.

Veja um outro exemplo onde o resto da divisão é diferente de zero.

$$
\begin{array}{rl}
1\,1\,0\,1\,1 & \underline{|\,100\quad} \\
\underline{-1\,0\,0} & 1\,1\,0\,0 \\
0\,1\,0\,1 & \\
\underline{-1\,0\,0} & \\
0\,0\,1\,1 &
\end{array}
$$

Estes algoritmos, também são válidos para números escritos em qualquer outra base do sistema de numeração posicional.

3.8 Números Racionais em Binários

O processo de conversão de um número fracionário, do sistema decimal para o binário, é dividido em duas etapas, primeiro faremos a conversão da parte inteira, como já estudamos, em seguida, faremos a conversão da parte fracionária.

A conversão de números decimais (números com vírgula escritos na base dez) menores que um, para binários, é feita algarismo a algarismo, da esquerda para a direita. Para melhor compreensão desse processo, apresentaremos o seguinte exemplo.

Exemplo 3.10: Expresse o número decimal 8,125 na base binária.

$8{,}125 \rightarrow$ temos que 8 é a parte inteira e 0,125 a parte fracionária.

Convertemos a parte inteira do número conforme já mostramos anteriormente. Então, obtemos,

$$8 = (1000)_2 .$$

O próximo passo é converter a parte fracionária, utilizando o método das multiplicações sucessivas, procedemos da seguinte maneira:

- ✓ Primeiro, multiplica-se a parte fracionária pelo coeficiente da base, que no caso é 2; do resultado, separa-se a parte inteira.

- ✓ Segundo, repete-se a multiplicação para a parte fracionária restante, sempre multiplicando pela base em uso; do resultado, separa-se novamente a parte inteira.

Repetimos este o processo até que a parte fracionária do último produto seja igual a zero ou até que os dígitos comecem a se repetir (neste exemplo que estamos trabalhando teremos um binário finito). Veja a aplicação nas multiplicações abaixo:

$$\left.\begin{array}{l} 0{,}125 \times 2 = 0{,}250 = \mathbf{0} + 0{,}250 \\ 0{,}250 \times 2 = 0{,}500 = \mathbf{0} + 0{,}500 \\ 0{,}500 \times 2 = 1{,}000 = \mathbf{1} + 0{,}000 \end{array}\right\rangle \downarrow$$

Pegamos os inteiros, que foram separados nas multiplicações, de cima para baixo e teremos o número binário fracionário que, quando fazemos a junção com a parte inteira, representa o número dado.

Assim, $8{,}125 = (1000{,}001)_2$.

O método acima pode ser utilizado na conversão de qualquer número decimal fracionário para uma base binária, calculando cada parte inteira e fracionária separadamente.

Aos números decimais em que há repetição periódica e infinita de um ou mais algarismos, dá-se o nome de decimais periódicos ou dízimas periódicas. Agora, veremos um exemplo em que os resultados das multiplicações começam a se repetir.

Exemplo 3.11: Represente o número 0,1 na base binária.

Em binário, esse número é um decimal periódico. Realizando as multiplicações, temos:

$$
\begin{aligned}
0,1 \times 2 &= 0,2 = 0 + 0,2 \\
0,2 \times 2 &= 0,4 = 0 + 0,4 \\
0,4 \times 2 &= 0,8 = 0 + 0,8 \\
0,8 \times 2 &= 1,6 = 1 + 0,6 \\
0,6 \times 2 &= 1,2 = 1 + 0,2 \\
0,2 \times 2 &= 0,4 = 0 + 0,4 \\
0,8 \times 2 &= 1,6 = 1 + 0,6...
\end{aligned}
$$

Podemos observar que no número 0,4 as sequências começam a repetir, é nesse momento que podemos parar. Logo, separando a parte inteira dos resultados das multiplicações, de cima para baixo, teremos a sua representação em binário,

$$0,1 = (0,00011001\ldots)_2 \,.$$

Sabemos que um número racional, escrito na base decimal, terá representação finita se, e somente se, o número, escrito na forma de fração irredutível, possui denominador com fatores 2 e/ou 5. Analogamente, um número racional, escrito na base binária, terá representação finita se, e somente se, o número, escrito na forma de fração irredutível, possui denominador com apenas fatores 2. Portanto, toda dízima em decimal será dízima em binário, mas a recíproca não é verdadeira. Por exemplo, $0,2 = (0,001100110011\ldots)_2$.

Exemplo 3.12: Vamos sugerir agora, converter o número decimal 0,3333... para a base binária.

$$
\begin{aligned}
0,3333... \times 2 &= 0,6666... \\
0,6666... \times 2 &= 1,3333... \\
0,3333... \times 2 &= 0,6666... \\
0,6666... \times 2 &= 1,3333...
\end{aligned}
$$

Assim, $0,333... = (0,1010...)_2$.

Desta forma, podemos usar esse método para qualquer outra base, bastando mudar os divisores e multiplicadores para a base que desejamos trabalhar. Assim, para conversão de base decimal para outras bases, temos:

- ✓ Parte inteira - Divisões sucessivas por (b);
- ✓ Parte fracionária - Multiplicações sucessivas por (b).

A seguir, vamos realizar as conversões de um número binário para decimal, utilizando o teorema 2.1. Para a parte inteira, usamos potências positivas de base 2 e para a parte fracionária, potências negativas de base 2.

Exemplo 3.13: Vamos converter o número $(110,11)_2$ para a base decimal.

Nesse exemplo, utilizamos o teorema 2.1. Segue que:

$$R = a_n b^n + a_{n-1} b^{n-1} + \ldots + a_1 b^1 + a_0 b^0 + \ldots + a_{-1} b^{-1} + \ldots + a_{-n} b^{-n}.$$

Logo,

$$(110,11)_2 = 1.2^2 + 1.2^1 + 0.2^0 + 1.2^{-1} + 1.2^{-2} = 4 + 2 + 0,5 + 0,25 = 6,75.$$

Portanto, $(110,11)_2 = 6,75.$

Para somarmos e subtrairmos duas representações binárias contendo vírgula, basta alinharmos as vírgulas e aplicarmos o mesmo algoritmo de adição ou subtração binária mencionada anteriormente. Podemos também, fazer multiplicações com números fracionários; basta realizarmos a operação como se fosse um número inteiro, depois somamos os produtos, contamos o número de unidades fracionárias após a vírgula e aplicamos no resultado.

4 REPRESENTAÇÃO BINÁRIA DOS NÚMEROS INTEIROS

No nosso sistema de numeração decimal, representamos qualquer número negativo com o sinal "–", mas, como adicionar um símbolo a um número binário se o computador só entende os dígitos 0 e 1? Para representarmos os números binários no conjunto dos números inteiros, atribuímos um "bit de sinal" à esquerda do número. Esse "bit de sinal", é um dígito indicador utilizado para representar o sinal, positivo ou negativo, de um número binário: 0 para indicar um valor positivo, 1 para indicar um valor negativo, os outros dígitos representam o módulo do número.

Veja a representação de dois números inteiros com o mesmo módulo e sinal contrário.

$$(+\ 62) = \left(\underset{+}{\mathbf{0}}\ \underbrace{111110}_{\text{módulo}}\right)_2 \quad \rightarrow \quad \text{Sinal positivo representamos com 0.}$$

$$(-\ 62) = \left(\underset{-}{\mathbf{1}}\underbrace{111110}_{\text{módulo}}\right)_2 \quad \rightarrow \quad \text{Sinal negativo representamos com 1.}$$

Desta forma, quando representamos um número binário com um bit de sinal, temos que desconsiderar o primeiro dígito à esquerda como valor numérico, pois esse representa apenas o sinal do número binário. Consideramos o número de maior módulo olhando o seu dígito mais significativo.

Veja abaixo, como fica representado os números com três bits:

Positivos	*Negativos*
$(0) = (\mathbf{0}00)_2$	$(0) = (\mathbf{1}00)_2$
$(+1) = (\mathbf{0}01)_2$	$(-1) = (\mathbf{1}01)_2$
$(+2) = (\mathbf{0}10)_2$	$(-2) = (\mathbf{1}10)_2$
$(+3) = (\mathbf{0}11)_2$	$(-3) = (\mathbf{1}11)_2$

Note que, temos duas representações para o número zero e, essas duas representações podem apresentar alguma confusão na hora de realizarmos as subtrações. Assim, caso o resultado da operação seja zero, desconsideramos o bit de sinal. Nos resultados diferentes de zero, esse bit é o que vai determinar o sinal do número na sua representação dos números inteiros. Em binários com sinal, podemos aplicar o algoritmo da soma, análogo ao decimal, de números inteiros:

- ✓ Se os sinais forem diferentes, subtraímos o número de menor módulo do número de maior módulo, em seguida, atribuímos ao resultado o sinal do número de maior módulo.
- ✓ Se os sinais forem iguais, somamos e conservamos o bit de sinal dos módulos.

Assim, para realizar operações dos números binários com sinal, devemos olhar para o primeiro bit, se for 0, efetuamos a soma e se for 1, efetuamos a subtração. Basta lembrar que a subtração de dois números inteiros é dada por:

$$a_1 - a_2 = a_1 + (-a_2).$$

Então, aplicando o algoritmo da soma de inteiros nas parcelas acima, temos:

$$(+62)+(-62)=(\mathbf{0}111110)_2 - (\mathbf{1}111110)_2 = (\underline{\mathbf{1}}000000)_2 = (000000)_2.$$

Observe que, na operação dos binários acima, desconsideramos o primeiro dígito (análogo ao sistema decimal, pois o zero não carrega sinal).

Nos exemplos abaixo, vamos realizar as operações dos números com módulos diferentes (quando as quantidades de dígitos das parcelas não são iguais, preenchemos com zeros à esquerda do módulo até que os bits de sinal fiquem alinhados).

Exemplo 4.1: Calcule ($\mathbf{0}1010)_2$ + ($\mathbf{1}1101$).

Como os sinais são diferentes, realizamos a subtração dos módulos.

$$(\mathbf{1}1101)_2 - (\mathbf{0}1010)_2 = (\mathbf{1}0011)_2.$$

Podemos desconsiderar os zeros após o bit de sinal.

Portanto, $(\mathbf{1}0011)_2 = (\mathbf{1}11)_2$.

Exemplo 4.2: Calcule $(\mathbf{1}101)_2$ + $(\mathbf{1}1010)$.

Como os sinais são iguais, alinhamos os bits de sinal e realizamos a soma dos módulos.

$$(\mathbf{1}101)_2 + (\mathbf{1}1010)_2 = (\mathbf{1}0101)_2 + (\mathbf{1}1010)_2 = (\mathbf{1}1111)_2.$$

Para as operações aritméticas, como multiplicação e divisão, não utilizamos nenhuma regra específica diferente das mesmas regras básicas das operações binárias, destacadas no capítulo anterior. Por exemplo, para multiplicar *A* por *n*, basta somar *A* com *A* *n* vezes.

A seguir, veremos outra forma para representação dos números negativos na base binária.

4.1 Complemento de 1

Uma outra alternativa de representação de números inteiros, é conhecida como complemento de 1. A representação dos positivos é idêntica a representação de números positivos com sinal, usando apenas o "bit de sinal". Na representação dos números negativos, os bits são alterados, invertendo todos os dígitos do módulo, onde seria 0 fica 1, e onde seria 1 fica 0. Assim, por exemplo, o inverso (representado por seis bits) de 000011 é 111100.

Veja abaixo, como fica alguns números nessa representação.

Positivos	*Negativos*
$(0) = (\mathbf{0}00)_2$	$(0) = (\mathbf{1}11)_2$
$(+1) = (\mathbf{0}01)_2$	$(-1) = (\mathbf{1}10)_2$
$(+2) = (\mathbf{0}10)_2$	$(-2) = (\mathbf{1}01)_2$
$(+3) = (\mathbf{0}11)_2$	$(-3) = (\mathbf{1}00)_2$

Note que ainda temos duas representações para o número zero. Na prática, este zero negativo, quando detectado é transformado em zero normal. Observe como fica a representação de dois números com o mesmo módulo e com sinais contrários:

$$(011001)_2 = (+25)$$
$$(100110)_2 = (-25).$$

Em complemento de 1, podemos converter um número binário em decimal aplicando a seguinte expansão abaixo.

$$\underline{d_n} d_{n-1} ... d_2 d_1 d_0 = d_{n-1} ... d_1 d_0 - \underline{d_n} (2^{n-1} - 1).$$

O registro de d_{n-1} até d_0, representa o número inteiro, isso quer dizer que o primeiro dígito à esquerda "d_n", que representa o sinal, é desconsiderado como valor numérico. Vamos mostrar, como funciona essa expansão nos números citados acima.

Na representação dos números inteiros, $(011001)_2$ e $(100110)_2$, na base decimal, temos:

$$(011001)_2 = 1.2^4 + 1.2^3 + 0.2^2 + 0.2^1 + 1.2^0 - 0.(2^{6-1} - 1) = 16 + 8 + 1 = (+25)$$
$$(100110)_2 = 0.2^4 + 0.2^3 + 1.2^2 + 1.2^1 + 0.2^0 - 1.(2^{6-1} - 1) = 4 + 2 - (32 - 1) = (-25).$$

Para adicionarmos dois números inteiros, representados com o complemento de 1, aplicamos o processo convencional da adição binária, mas, é necessário adicionar o "vai-um" no resultado da operação para a que a soma fique correta. Veremos, a seguir, o por que isso é necessário. Considere o caso da adição $(\mathbf{1}10)_2$ + $(\mathbf{0}10)_2$.

Como estamos usando três dígitos, logo a resposta também será representada por três dígitos.

$$
\begin{array}{r}
{}^{1}\\
+\ \mathbf{1}\,1\,0\\
\mathbf{0}\,1\,0\\
\hline
(1)\ 0\,0\,0\\
+1\\
\hline
\mathbf{0}\,0\,1
\end{array}
\quad \rightarrow \text{Soma do "vai um"}
$$

Assim, $(\mathbf{1}10)_2 + (\mathbf{0}10)_2 = (\mathbf{0}01)_2$, pois a soma feita no sistema decimal seria, (-1) + (+2) = (+1).

4.2 Complemento de 2

Outra forma de representar os números negativos no sistema binário e a mais usada na computação é o complemento de 2. Os números positivos continuam inalterados (análogo as representações anteriores), para os negativos, primeiramente representamos os números aplicando-lhes a regra do complemento de 1 e, em seguida, somamos 1. Assim, por exemplo, o inverso do número binário 000011 é 111101. Veja como funciona:

$$(+25) = (\mathbf{0}11001)_2$$
$$(-25) = (\mathbf{1}00111)_2$$

$\mathbf{0}11001 \rightarrow$ invertemos todos os bits e somamos 1

$$
\begin{array}{r}
100110\\
+\ 1\\
\hline
\mathbf{1}00111
\end{array}
$$

Veja abaixo, como ficam alguns números representados com complemento de 2.

Positivos	*Negativos*
$(0) = (000)_2$	$(0) = (000)_2$
$(+1) = (\mathbf{0}01)_2$	$(-1) = (\mathbf{1}11)_2$
$(+2) = (\mathbf{0}10)_2$	$(-2) = (\mathbf{1}10)_2$
$(+3) = (\mathbf{0}11)_2$	$(-3) = (\mathbf{1}01)_2$

Note que, o zero tem apenas uma representação. Uma observação importante é que só usamos a regra do complemento de 1 e de 2, quando o bit de sinal for 1, ou seja, nos binários negativos. A representação genérica do complemento de 2 pode ser generalizada pela seguinte fórmula:

$$\underline{d_n}d_{n-1}...d_2d_1d_0 = d_{n-1}...d_1d_0 - \underline{d_n}2^{n-1}$$

Veja a representação dos números inteiros, $(\mathbf{0}10)_2$ e $(\mathbf{1}10)_2$, na base decimal, usando a expansão acima.

$$(\mathbf{0}10)_2 = 1.2^1 - 0.\left(2^{3-1}\right) = 2 - 0 = +2$$
$$(\mathbf{1}10)_2 = 1.2^1 - 1.\left(2^{3-1}\right) = 2 - 4 = -2.$$

Exemplo 4.3: Tomando o valor $(\mathbf{0}101101)_2$, vamos representar o seu inverso aditivo como um inteiro negativo na base dez, usando a representação genérica de complemento de 2.

$$\left(\mathbf{0}101101\right)_2 = (+45)$$
$$(0101101)_2,\ \text{inverte todos os dígitos, em seguida soma 1}$$
$$(1010010)_2 + (1)_2 = \left(\mathbf{1}010011\right)_2$$
$$\left(\mathbf{1}010011\right)_2 = 2^4 + 2^1 + 2^0 - 2^{7-1} = 16 + 2 + 1 - 64 = -45$$
$$\left(\mathbf{1}010011\right)_2 = \left(-45\right).$$

Uma vantagem do uso do complemento de 2 é trazer uma única representação ao número zero. Desta forma, a adição de números em complemento de 2 e complemento de 1, é a mesma que a adição convencional de um par de números sem sinal. As operações são feitas normalmente sem se preocupar com sinal. Voltamos ao exemplo do item anterior, onde calculamos a soma de (+ 62) + (– 62). Agora, aplicamos o complemento de 2 e comparamos as operações.

$$(+62) = (\mathbf{0}111110)_2 \quad \text{e}$$

$$(-62) = (\mathbf{1}000001)_2 + (1)_2 = (\mathbf{1}000010)_2$$

Assim,

$$\begin{array}{r} {\scriptstyle 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ \ \ \ } \\ 0\,1\,1\,1\,1\,1\,0 \\ +\ \ 1\,0\,0\,0\,0\,1\,0 \\ \hline (1)\ 0\,0\,0\,0\,0\,0\,0 \end{array}$$

Como estamos trabalhando com o complemento de 2, temos que observar a quantidade de bits, no caso dessa operação com sete bits, vimos que houve um estouro de bits, portanto, o bit mais significativo (decorrente do último "vai um") deve ser desprezado. Uma vez que o complemento de dois foi formado, o computador pode realizar a operação de dois números binários com sinais contrários, fazendo a adição do subtraendo com minuendo. Não esquecendo de ignorar o último transporte da adição.

5 APLICANDO O ALGORITMO DA RAIZ QUADRADA EM UM BINÁRIO

Para dar início ao nosso aprendizado sobre raiz quadrada, vamos utilizar a tabela abaixo e seguir o processo passo a passo, onde define um procedimento finito.

$$\begin{array}{l|l} \text{Coluna 1} & \text{Coluna 2} \\ \sqrt{\text{Radicando}} & \underline{\text{resultado}} \\ & \\ & \end{array}$$

Exemplo 5.1: Encontre a raiz quadrada do número $(1010001)_2$ pelo método do Algoritmo da raiz quadrada.

Para ao cálculo, seguiremos os seguintes passos:

1º - Separamos o número em classes de dois algarismos, começando da direita para a esquerda (veja o desenvolvimento do exemplo):

$$\begin{array}{l|l} \sqrt{1.01.00.01} & \underline{\qquad\quad} \\ & \end{array}$$

2º - Encontramos o primeiro algarismo, que seu quadrado seja menor ou igual a primeira classe à esquerda. No exemplo acima, temos o número 1, pois $1^2 = 1$, e colocamos o número encontrado na segunda coluna, que será o primeiro algarismo do resultado. Em seguida, subtraímos o quadrado deste número pela primeira classe da esquerda, na coluna 1.

$$
\begin{array}{l|l}
\sqrt{1.01.00.01} & \underline{\;1\;\;\;\;\;\;} \\
-\underline{1} & \\
\;\;0 & 1^2 = 1
\end{array}
$$

3º - À direita da diferença, escreve-se o seguinte grupo de algarismos 01 e debaixo de 1 escreve-se o seu dobro, que é 10. Em seguida, de 001, separa-se o algarismo da direita, que é 1, e divide-se o número à esquerda, que é 00 por 10, obtendo-se 0. Coloca-se este valor à direita de 10 e multiplica-se o número obtido pelo mesmo valor do quociente, o 0.

$$
\begin{array}{l|l}
\sqrt{1.01.00.01} & \underline{\;1\;\;\;\;\;\;} \\
-\underline{1} & \\
\;\;0\,01 & 10
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{l|l}
\sqrt{1.01.00.01} & \underline{\;1\;\;\;\;\;\;} \\
-\underline{1} & \\
\;\;0\,01 & 100 \times 0 = 000
\end{array}
$$

O produto obtido tem de ser menor ou igual ao número que se encontra à esquerda. Em seguida, efetuamos a subtração do número da esquerda pelo produto e aceita-se o 0 como o segundo número da raiz quadrada. Caso contrário, temos de ir diminuindo o valor do quociente até encontrarmos um produto que seja inferior.

$$
\begin{array}{l|l}
\sqrt{1.01.00.01} & \underline{\;10\;\;\;\;\;\;} \\
-\underline{1} & \\
\;\;0\,01 & \\
-\underline{000} & 100 \times 0 = 000 \\
\;\;001 &
\end{array}
$$

4º - Agora, acrescentamos 00 como o próximo grupo de números, à direita de 001 e o dobro dos dois algarismos que encontramos no resultado. Repete-se os mesmos procedimentos do 3º passo até encontrarmos o resultado da raiz quadrada. Veja o restante do desenvolvimento.

$$
\begin{array}{l|l}
\sqrt{1.01.00.01} & \underline{10\qquad} \\
-\underline{1} & \\
\quad 0\,01 & \\
-\underline{000} & 100 \\
\quad 00100 &
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{l|l}
\sqrt{1.01.00.01} & \underline{100\qquad} \\
-\underline{1} & \\
\quad 0\,01 & \\
-\underline{000} & \\
\quad 00100 & 1000\times 0 = 0000 \\
\quad -\underline{0000} & \\
\qquad 0100 &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{l|l}
\sqrt{1.01.00.01} & \underline{100\qquad} \\
-\underline{1} & \\
\quad 0\,01 & \\
-\underline{000} & \\
\quad 00100 & 1000 \\
\quad -\underline{0000} & \\
\qquad 0100\,01 &
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{l|l}
\sqrt{1.01.00.01} & \underline{1001\qquad} \\
-\underline{1} & \\
\quad 0\,01 & \\
-\underline{000} & \\
\quad 00100 & 10001\times 1 = 10001 \\
\quad -\underline{0000} & \\
\qquad 010001 & \\
\qquad -\underline{10001} & \\
\qquad\quad 00000 &
\end{array}
$$

Logo, a raiz quadrada de 1010001 é 1001.

6 CRITÉRIOS DE DIVISIBILIDADE EM OUTRAS BASES

Inicialmente vamos destacar como funciona a paridade de um número no sistema posicional, fato que irá nos proporcionar no entendimento de alguns critérios de divisibilidade.

Dado um inteiro N, quando dividido por 2, temos:

$N = 2k + \mathrm{r}$, para algum inteiro k, onde o resto $0 \leq \mathrm{r} < 2$.

Se r = 0, temos $N = 2k$ e N é um número par.

Se r = 1, temos $N = 2k + 1$ e N é ímpar.

Denominamos números pares todos os inteiros da forma $2k$, onde k é algum inteiro, e denominamos números ímpares todos os inteiros da forma $2k + 1$, onde k é algum número inteiro. Assim, o conjunto dos números inteiros se divide em dois grupos, o dos números pares e o dos números ímpares.

Na expansão binária, como vimos anteriormente, um número natural N se escreve de modo único como soma de potências distintas de 2. Portanto,

$$N = a_n 2^n + a_{n-1} 2^{n-1} + \ldots + a_1 2^1 + a_0 2^0 = 2(a_n 2^{n-1} + a_{n-1} 2^{n-2} + \ldots + a_1 2^0) + a_0 2^0,$$

ou seja, se $a_0 = 0$, temos que se N é par, e se $a_0 = 1$, N é ímpar. Portanto, para determinar se um número é par ou ímpar na base 2, basta observar o dígito das unidades.

Por exemplo, o número 13, escrito na base decimal, em binário é 1101, veja que o dígito mais à direita é 1 e, nesse caso, indica que é um número ímpar, já o número 14, em binário é 1110, o dígito mais à direita é 0 e indica um número par. Dizemos que dois inteiros têm a mesma paridade quando ambos forem pares ou ambos forem ímpares.

Os critérios de divisibilidade podem ser estipulados para qualquer base, nos permitindo verificar se um determinado número inteiro A é divisível por um inteiro B baseado nas propriedades da sua representação. Como no exemplo abaixo, a representação do número 85, escrito no sistema de base oito e na base decimal.

$$(144)_8 = 1.8^2 + 4.8 + 4 = 64 + 32 + 5 = 85.$$

Observe que a soma dos algarismos de 144 (nove), na base oito, é divisível por 3 ou por 9, mas 85 no sistema decimal não é divisível por 3 ou 9. Portanto, os critérios de divisibilidade relacionados ao sistema de uma base, em geral, não são aplicáveis em outro sistema de numeração.

Exemplo 6.1: (OBMEP - aula 17) Qual a condição para que o número $(ABC)_6$ seja divisível por 5?

Para resolver o exemplo, observe que, estamos trabalhando com um número escrito na base 6 e testando a divisibilidade por um número de base imediatamente menor. Como o número está escrito na base 6, podemos escrevê-lo como uma soma de potências de 6, escrevemos 6 = 5 + 1. Temos que,

$$\begin{aligned}
&(ABC)_6 = A.6^2 + B.6^1 + C.6^0 \\
&(ABC)_6 = A.(5+1)^2 + B.(5+1)^1 + C. \\
&(ABC)_6 = 25A^2 + 10A + A + 5B + B + C \\
&(ABC)_6 = 5(5A^2 + 2A + B) + A + B + C \\
&\text{Como } 5 / (5A^2 + 2A + B), \text{ temos que} \\
&5 / ABC \text{ se, e somente se, } 5 / (A + B + C).
\end{aligned}$$

O que mostra que o número $(ABC)_6$ é múltiplo de 5 se, e somente se, a soma de seus algarismos for múltiplos de 5.

Neste exemplo, obtém-se um critério de divisibilidade por n – 1 para números escritos na base n. Esse critério é similar ao critério de divisibilidade por nove na base dez. No próximo exemplo, vamos generalizar esse método para uma base n qualquer.

Lema 6.1: para quaisquer *a* e *n* naturais, existe um natural *k* tal que $(a + 1)^n = ka + 1$.

Demonstração: Por indução sobre *n*.

Para cada $n \in N$, existe um $k \in Z$ tal que $(a + 1)^n = ka + 1$.

Para $n = 1$, temos $(a + 1)^1 = a + 1$, logo vale o resultado, pondo $k = 1$.

Suponhamos que exista um k' tal que $(a + 1)^n = k'a + 1$.

Multiplicando ambos os membros por $(a + 1)$, obtemos:

$$(a + 1)^{n+1} = (a + 1)(k'a + 1) = k'a^2 + k'a + a + 1 = a(k'a + k' + 1) + 1,$$

donde a expressão é verdadeira para $n + 1$, tomando $k = (k'a + k' + 1)$.

Logo, pelo princípio de indução $(a + 1)^n = ka + 1$, para algum inteiro *k* natural.

□

Preposição 6.1: Um número *N*, escrito na base *n* é divisível por *n* – 1 se, e somente se, a soma dos seus algarismos for um múltiplo de *n*.

Demonstração: Considere o número $(A_rA_{r-1}A_{r-2}...A_2A_1A_0)$, escrito na base *n*. Escrevendo esses números como soma de potências de *n*, temos:

Escrevendo esses números na base *n*, temos:

$$(A_rA_{r-1}A_{r-2}...A_2A_1A_0)_n = A_rn^r + A_{r-1}n^{r-1} + A_{r-2}n^{r-2} + ... + A_2n^2 + A_1n^1 + A_0.$$

$$(A_rA_{r-1}A_{r-2}...A_2A_1A_0)_n = A_r\left[(n-1) + 1\right]^r + A_{r-1}\left[(n-1) + 1\right]^{r-1} + ... + A_1\left[(n-1) + 1\right]^1 + A_0.$$

Segue do lema 6.1, que, existe $k, k_1, k_2, ..., k_n \in Z$, tais que

$$(A_rA_{r-1}A_{r-2}...A_2A_1A_0)_n = A_rk(n-1) + A_r + A_{r-1}k_1(n-1) + A_{r-1} + ... + A_1k_n(n-1) + A_1 + A_0$$

$$(A_rA_{r-1}A_{r-2}...A_2A_1A_0)_n = A_rk(n-1) + A_{r-1}k_1(n-1) + ... + A_1k_n(n-1) + Ar + A_{r-1} + ... + A_1 + A_0$$

$$(A_rA_{r-1}A_{r-2}...A_2A_1A_0)_n = (n-1).(A_rk + A_{r-1}k_1 + ... + A_1k_n) + (A_r + A_{r-1} + ... + A_1 + A_0).$$

Observamos que temos um múltiplo de *n* – 1 acompanhado da soma de seus algarismos.

De maneira geral, concluímos que todo número *N*, escrito numa base *n* será divisível por *n* – 1 se, e somente se, a soma de seus algarismos for divisível por *n* – 1.

Vamos desenvolver agora alguns critérios de divisibilidade na base binária.

6.1 Critérios de divisibilidade por dois, quatro e oito na base Binária

Preposição 6.1.1: Um número binário é divisível por dois se o último algarismo que o representa for 0, como vimos anteriormente.

Demonstração: Considere um número *N* escrito na base binária.

$$N = a_n a_{n-1} ... a_2 a_1 a_0.$$

Podemos escrever *N* na forma:

$$N = a_n 2^n + a_{n-1} 2^{n-1} + a_{n-2} 2^{n-2} + ... + a_2 2^2 + a_1 2^1 + a_0$$
$$N = 2.\left(a_n 2^{n-1} + a_{n-1} 2^{n-2} + ... + a_2 2^1 + a_1\right) + a_0.$$
Temos que, $2.\left(a_n 2^{n-1} + a_{n-1} 2^{n-2} + ... + a_2 2^1 + a_1\right)$ é múltiplo de dois.

Como $a_0 = 0$ ou $a_0 = 1$, então, um número na base binária será divisível por dois se, e somente se, $a_0 = 0$.

□

Sabemos que, na base decimal um número será divisível por quatro se os números formados pelos dois últimos dígitos forem divisíveis por quatro. Na base binária teremos resultado semelhante.

Preposição 6.1.2: O número escrito em binário é divisível por quatro se os dois últimos dígitos, a_1 e a_0, forem iguais a 0.

Demonstração: Seja $N = (a_n\, a_{n-1}\, ...\, a_1\, a_0)_2$. Então,

$$N = a_n 2^n + a_{n-1} 2^{n-1} + a_{n-2} 2^{n-2} + ... + a_2 2^2 + a_1 2^1 + a_0. \text{ Assim,}$$
$$N = 2^2.\left(a_n 2^{n-2} + a_{n-1} 2^{n-3} + ... + a_2\right) + a_1 2^1 + a_0.$$

Então, um número binário será divisível por quatro se, e somente se, $a_1 2^1 + a_0$ também for. Como a_1 e a_0 só assumem os valores 0 e 1, portanto um número binário será divisível por quatro se, e somente se, $a_1 = a_0 = 0$.

□

Preposição 6.1.3: Um número em binário é divisível por oito se os três últimos dígitos, a_2, a_1 e a_0, forem todos iguais a 0.

Demonstração: Seja $N = (a_n a_{n-1} \ldots a_1 a_0)_2$. Então,

$$N = a_n 2^n + a_{n-1} 2^{n-1} + a_{n-2} 2^{n-2} + \ldots + a_2 2^2 + a_1 2^1 + a_0$$
$$N = 2^3.\left(a_n 2^{n-3} + a_{n-1} 2^{n-4} + \ldots\right) + a_2 2^2 + a_1 2 + a_0.$$

Então, um número binário será divisível por oito se, e somente se, $a_2 2^2 + a_1 2^1 + a_0$ também for. Como a_2, a_1 e a_0 só assumem os valores 0 e 1, concluímos que, um número binário será divisível por 8 se, e somente se, $a_2 = a_1 = a_0 = 0$.

□

6.2 Critério de divisibilidade por três na base Binária

Vamos desenvolver agora o critério de divisibilidade por três na base dois. Esse critério é análogo ao critério de divisibilidade por onze, na base decimal.

Preposição 6.2.1: Seja o número $N = (\text{abcde})_2$. Temos que, N é divisível por três se, e somente se, $(a + c + e) - (b + d)$, for divisível por três.

Demonstração: Considere um número N com cinco dígitos na base binária.

Se $N = abcde$ na base binária, podemos escrever N na forma:

$N = a.2^4 + b.2^3 + c.2^2 + d.2^1 + e.2^1$. Assim,

$N = a.16 + b.8 + c.4 + d.2 + e.$ Podemos escrever:

$$N = a.(15 + 1) + b.(9 - 1) + c.(3 + 1) + d.(3 - 1) + e$$
$$N = a.(3.5 + 1) + b.(3.3 - 1) + c.(3 + 1) + d.(3 - 1) + e$$
$$N = 3.(a.5) + a + 3.(b.3) - b + 3.c. + c + 3.d - d + e$$
$$N = 3.[(a.5) + (b.3) + c + d] + a - b + c - d + e$$
$$N = 3.[(a.5) + (b.3) + c + d] + (a + c + e) - (b + d).$$

Logo o número abcde, na base binária, só será divisível por três se a soma, [(a + c + e) – (b +d)], for divisível por três.

□

De maneira geral, um número é divisível por três na base dois se, e somente se, a soma dos dígitos binários das posições ímpares menos os dígitos das posições pares são divisíveis por três.

7 JOGO DO NIM

O jogo do NIM, é um jogo de estratégia que pode ser usado para motivar o aprendizado sobre a base binária. É importante, na aplicação de uma atividade lúdica, que ela passe da simples situação de brincadeira e entretenimento para uma ferramenta pedagógica com a orientação e planejamento de um professor, pois ao introduzir os jogos em sala preparamos os alunos e aprofundamos os conteúdos. Segundo Almeida e Carvalho (2016, p.19), *"o Jogo do Nim é um dos jogos mais antigos que se conhece, mas considera que este jogo deve ter se originado na China, apesar de ser jogado na Europa, desde o séc. XVI".*

Com este jogo, podemos trabalhar os conceitos de MMC e MDC, pois a estratégia ganhadora para o jogo é baseada na divisão. Pode ser jogado em duplas ou ser dividido em equipes. O jogo pode ser feito com palitos ou também com outros materiais (como moedas, botões ou grãos). De acordo com Abramo, (2016):

> Trata-se de um antigo jogo de palitos, supostamente chinês, jogado por duas pessoas. Este jogo foi objeto em 1901, de um artigo científico na prestigiada revista Annals of Mathematics, de autoria de C. L. Bouton, que batizou de Nim, mostrando que há uma estratégia que, se adotada por um dos jogadores, fará com que ele sempre saia vencedor (ABRAMO, 2016, p. 67).

Um motivo para se utilizar o Jogo do Nim é que, ele permite a construção de estratégias para se garantir a vitória. Por ser um jogo simples, envolvendo uma competição com um adversário, ele permite a disputa entre os alunos. As estratégias, deverão explorar o raciocínio dedutivo, buscando soluções e regularidades para descrever um modelo. Outra vantagem desse jogo é que podemos aplicar em escolas que possuem poucos recursos financeiros, podendo ser trabalhado com palitos e, caso não possuir os palitos, apenas com papel, lápis e borracha. Segundo Abramo (2016), há várias versões desse jogo, cada uma com uma estratégia própria. A seguir, vamos destacar duas versões, em uma delas, utilizamos da base binária para escrevermos as quantidades de palitos.

Uma das versões é considerada, por diversos autores, a versão original do Jogo, ou seja, a sua forma mais simples em termos de regras e de estratégias. A seguir, vamos destacar as regras do jogo:

- ✓ Dispõe-se uma quantidade N qualquer de palitos em fila numa mesa;
- ✓ Os dois jogadores jogam alternadamente;
- ✓ Cada jogador retira de 1 a n palitos, a sua escolha. O número n deve ser previamente fixado no início da partida;
- ✓ Perde a partida quem retirar o último palito.

Vamos agora analisar um exemplo para entendermos melhor como funciona esse jogo.

Exemplo: Dada quantidade total de palitos sobre a mesa, $N = 50$, fixamos $n = 5$ a quantidade máxima de palitos que pode ser retirada por cada participante.

O primeiro jogador deve estar atento e traçar uma estratégia de forma que lhe deixe em vantagem para que na penúltima jogada garanta a vitória, ou seja o primeiro jogador deve deixar um palito para o adversário retirar na última rodada. O jogo segue da seguinte forma:

Quantidades de palitos $N = 50$, número máximo de palitos a retirar $n = 5$.

Jogador A e B.

O jogador A, inicia a partida traçando uma estratégia para que na sua penúltima jogada deixe $(n + 1) + 1$ palito para o jogador B retirar em sua penúltima jogada. Logo ele só poderá retirar de 1 a n palitos, mas de qualquer forma, na jogada seguinte, o jogador A poderá retirar o número de palitos suficientes para deixar 1 palito para o jogador B. Assim, aplicando a mesma estratégia nas jogadas anteriores, conclui-se que, em cada rodada, devem ser retirados $n + 1$ palitos para que o jogador A vença. Ou seja, o jogador A, para vencer, deve deixar um número de palitos que seja igual a um palito mais um múltiplo de n+1. No caso de 50 palitos com n = 5 o jogador A deve deixar 49 palitos. Portanto, o jogador que inicia a partida nesta configuração sempre estará em situação favorecida. Observe a configuração a seguir dos 50 palitos inicial:

$$\underset{1^a\ \textit{jogada}}{\mathrm{l}}\quad \underbrace{\mathrm{llllll}}_{6\ \textit{palítos}}\quad \underbrace{\mathrm{llllll}}_{6\ \textit{palítos}}\quad \underbrace{\mathrm{llllll}}_{6\ \textit{palítos}}\quad \underbrace{\mathrm{llllll}}_{6\ \textit{palítos}}\quad \underbrace{\mathrm{llllll}}_{6\ \textit{palítos}}\quad \underbrace{\mathrm{llllll}}_{6\ \textit{palítos}}\quad \underbrace{\mathrm{llllll}}_{6\ \textit{palítos}}\quad \underbrace{\mathrm{llllll}}_{6\ \textit{palítos}}\quad \underbrace{\mathrm{l}}_{\textit{última jogada}}$$

1ª jogada: l, jogador A;

2ª jogada: n +1 palitos, jogador B + jogador A;

3ª jogada: n +1 palitos, jogador B + jogador A;

4ª jogada: n +1 palitos, jogador B + jogador A;

5ª jogada: n +1 palitos, jogador B + jogador A;

6ª jogada: n +1 palitos, jogador B + jogador A;

7ª jogada: n +1 palitos, jogador B + jogador A;

8ª jogada: n +1 palitos, jogador B + jogador A;

9ª jogada: n +1 palitos, jogador B + jogador A.

Última jogada: l, jogador B, consequentemente perde a partida retirando o último palito.

Analisando a estratégia acima, organizamos os palitos em q grupos de n + 1 palitos e um grupo menor r que será o resto da divisão de N por n + 1. Logo,

$$N = (n + 1).q + r.$$

Então,

$$N - r = (n + 1).q.$$

Para o nosso exemplo, teremos:

$$50 = (5 + 1) \times 8 + 2.$$

Após o primeiro jogador retirar o primeiro palito, teremos:

$$50 - 1 = (5 + 1) \times 8 + 1.$$

Assim o primeiro jogador estará em situação favorável, e para continuar em vantagem deverá sempre completar com a retirada do adversário o número de (n + 1) palitos, que nesse caso são 6, já que o seu adversário poderá tirar no máximo 5 palitos. Assim, se o segundo jogador retirar 1 palito o primeiro deverá retirar 5; se o segundo retirar 2 o primeiro deverá retirar 4; retirando sempre a quantidade que falta para completar 6 palitos.

Agora, vamos passar a um caso geral para que um jogador tenha uma estratégia para vencer o caso geral de uma partida que inicia com N palitos e que o máximo de palitos que podem ser retirados em cada jogada é n. Aplicando a divisão euclidiana, temos:

$$N = (n + 1).q + r, \text{ onde } 0 \leq r < q.$$

Agora, vamos analisar os restos das divisões, quando $r \neq 1$ e $r = 1$. Primeiro, analisamos o $r \neq 1$ e veremos que estratégia é favorável para o primeiro jogador, temos:

$$\begin{aligned} N &= (n + 1).q + r \\ N &= (n + 1).q + 1 + (r - 1) \\ N - (r - 1) &= (n + 1).q + 1 \qquad (I) \end{aligned}$$

Portanto, o jogador ao iniciar a jogada deverá retirar uma quantidade (r – 1) para ficar em uma posição segura. Vamos chamar de Z, a quantidade de palitos que o primeiro jogador deixará sobre a mesa e chegaremos a uma segunda equação:

$$Z = N - (r - 1) \qquad (II)$$

Substituindo *I* em *II*, temos:

$$Z = (n + 1).q + \mathrm{r} - (r - 1) \Rightarrow$$
$$Z = (n + 1).q + 1.$$

Nota-se que, em cada retirada do primeiro jogador, o segundo sempre estará em uma situação em que o $r = 1$, o que torna uma situação segura para o primeiro jogador vencer o jogo.

Quando $r = 1$, a estratégia vencedora está nas mãos do segundo jogador. De fato, para r = 1 temos,

$$N = (n + 1).q + 1.$$

Após a jogada do primeiro jogador, o segundo jogador analisa a quantidade de palitos que restaram, pois, a quantidade de palitos deixados sobre a mesa volta ao primeiro caso onde o resto é diferente de 1. Desta forma, o segundo jogador se for conhecedor das regras do jogo, deve-se fazer a sua primeira retirada lógica do jogo que continuará deixando-o em vantagem e nas próximas completando (n + 1) palitos nas demais jogadas do primeiro jogador.

Se r = 0, a posição também será segura para o jogador que iniciar a partida. Basta o primeiro jogador retirar a quantidade fixada de n palitos de um dos grupos de (n + 1) palitos, restando assim, q – 1 grupos de (n + 1) mais 1 palito para o segundo jogador. Desta forma, o segundo jogador, após a jogada inicial do primeiro jogador, estará em uma situação do caso em que $r = 1$.

Outra versão que vamos estudar agora, nos permitirá explorar o sistema binário para ajudar a criar uma estratégia vencedora. Nesta versão, quem retirar o último palito será o ganhador. Veja as regras desta segunda versão:

- ✓ Dispõe-se sobre a mesa um número N de palitos, separamos em n grupos, sendo n_1, n_2, n_3, ..., n_s de tal maneira que $N = n_1 + n_2 + n_1 + ... +, n_s$, de modo que $n_i \neq n_j$ se $i \neq j$.
- ✓ Os dois jogadores jogam alternadamente;
- ✓ Os jogadores, na sua vez, retiram um determinado número de palitos de apenas um dos grupos. Ele deve tirar no mínimo um palito em cada jogada, podendo retirar todos os palitos de um grupo.
- ✓ O vencedor será o jogador que retirar o último palito.

O objetivo é mostrar que, em um certo momento, um dos jogadores se encontrará em uma situação favorável e que, mantendo-se nessa situação, poderá vencer o jogo. Para entendermos essa estratégia, vamos ver um exemplo utilizando o sistema binário e criando uma situação favorável no jogo.

Exemplo: Em uma mesa com 19 palitos, dividimos em três grupos distintos, como abaixo:

1º grupo: 4 palitos.

2º grupo: 6 palitos.

3º grupo: 9 palitos.

Convertendo as quantidades em números binários, temos:

1º grupo: 4 palitos - 100.

2º grupo: 6 palitos - 110.

3º grupo: 9 palitos – 1001.

Colocamos os números binários alinhados, de modo que os algarismos das unidades se correspondam, temos:

$$
\begin{array}{r}
100 \\
+\ 110 \\
\underline{1001}
\end{array}
$$

Fazemos o somatório dos valores de cada coluna. Se o valor somado for ímpar, coloca-se *I*, se for par, coloca-se *P*.

$$
\begin{array}{r}
1\ 0\ 0 \\
+\quad 1\ 1\ 0 \\
\underline{1\ 0\ 0\ 1} \\
I\ P\ I\ I
\end{array}
$$

Afirmamos que uma posição será vencedora se, e somente se, todas as somas forem pares. Não faremos a demonstração disto aqui, mas os interessados podem consultar o livro de Aritmética (Abramo, 2016). Logo, o jogador que iniciar o jogo deverá deixar no 3º grupo um valor que resultará, no somatório de cada coluna, um par. Para que isso aconteça, devemos ter no 3º grupo um número binário 0010, para isso devemos tirar sete palitos do 3º grupo. Veja o esquema abaixo:

$$
\begin{array}{r}
1\ 0\ 0 \\
+\quad 1\ 1\ 0 \\
\underline{0\ 0\ 1\ 0} \\
P\ P\ P\ P
\end{array}
$$

De forma geral, chamaremos de posição segura à vitória, quando um jogador deixar sobre a mesa para seu adversário, um resultado com a combinação da soma das colunas apenas quantidades pares "*P*". Vence o jogo quem chegar primeiro em 0000 (retirando o último palito).

CONCLUSÃO

Concluímos, com a pesquisa dos temas abordados nas bibliografias pesquisadas, em livros e trabalhos na internet, que foi possível colocar de forma simples e objetiva a linguagem matemática. Proporcionamos um desenvolvimento dos tópicos para auxiliar nos estudos e compreensão do sistema de numeração posicional e principalmente da base binária. Observa-se, que a proposta deste trabalho e as atividades desenvolvidas através das demonstrações foram úteis para resolver as operações e problemas envolvendo outros sistemas de numeração posicional, promovendo uma aprendizagem diferente por se tratar de um trabalho onde se explorou bases de numeração diferente daquela que já estamos acostumados.

Muitas vezes os educandos estudam essa disciplina se preocupando apenas com os resultados se estão certos ou errados, não se dando conta do processo que seguem. Esse trabalho, teve a finalidade chamar a atenção para a construção do sistema numérico e a aplicação dos algoritmos das operações no sistema posicional. Destacamos os conhecimentos da história e o porquê da configuração numérica atual, a forma genérica e a aplicação em outras bases, das operações e métodos realizados e de alguns critérios de divisibilidade.

Diante disso, percebe-se que o assunto abordado, pode enriquecer a disciplina de matemática, pois trabalhar com sistema de numeração em diferentes bases proporciona aos professores, graduandos e educandos uma visão mais ampla dos algoritmos utilizados nas realizações das operações, não se restringindo apenas ao sistema decimal, mas que muitas vezes podem ser aplicados a qualquer outra base b, diferente do habitual.

Além das atividades destacadas, evidenciamos que, através da utilização do jogo do NIM, os alunos se sentirão motivados e desafiados a estudar e buscar resultados. Por se tratar de um jogo de estratégias, esses fatores nos mostram a necessidade de implementar atividades complementares para aprender e aprimorar seus conhecimentos junto às aulas de matemática.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ALMEIA, B. I. e CARVALHO, R. B. **A Matemática do Jogo do NIM em uma abordagem investigativa.** Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia Fluminense. Rio de Janeiro, 2016.

ALMEIA, M. A. **Codificando o Alfabeto por meio do Sistema de Numeração Binário**. Universidade Federal de São Carlos. São Carlos, 2013.

BOYER, C. B. **História da Matemática**. Edgar Blucher, 2ª ed. São Paulo, 2003.

EVES, Howard. **Introdução à História da Matemática**. Unicamp: Campinas, SP, 2004.

FRAZON, C. R. P. **A Característica universal de Leibniz: contextos, trajetórias e implicações**. Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho de São Paulo. Rio Claro, 2015.

FOMÍN, S. V. **Sistema de Numeracion**. Moscou, Rússia: Mir, 1984.

GUIMARÃES, F. **O sentido do zero**. Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. São Paulo, 2008.

HEFEZ, Abramo. **Aritmética.** SBM, 2013 (Coleção PROFMAT).

IFRAH, Georges. **História Universal dos Algarismos**. Nova Fronteira, Rio de Janeiro 1997.

KAPLAN, R. **O Nada que existe**: Uma história natural do Zero. 1ª ed. Rio de Janeiro: Rocco, 2001

LEIBNIZ, G. W. **Leibnizens mathematische Schriften**. C. I. Gerhardt, in Leibnizens gesammelte Werke. G. H. Pertz. H. W. Schmidt: Halle, 1859.

LIMA, E. L. **Um curso de análise**. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2012. V. 1 (Projeto Euclides).

MIYASCHITA, W. Y. **Sistemas de Numeração: Como funcionam e como são estruturados os números**. Bauru, 2002.

MOL, R. S. **Introdução à História da Matemática**. UFMG - Belo Horizonte, 2013.

MORGADO, A. C. **A matemática do ensino médio**. 6ª ed. Sociedade Brasileira de Matemática: Rio de Janeiro, 2006. v. 1.

PADRÃO, D. L. **A Origem do Zero**. Pontífica Universidade Católica de são Paulo. PUC/SP: São Paulo, 2008.

RODRIGUES, A. E. A. **Sistemas de Numeração: Evolução Histórica, Fundamentos e Sugestões para o Ensino.** Universidade Federal do Oeste do Para. Santarém PA, 2013.

ROQUE, T. e PITOMBEIRA, J. B. **Tópicos de História da Matemática**. SBM, 2012 (Coleção PROFMAT).

SANTANA, G. S. **Algoritmos utilizados para as Quatro Operações Elementares**. Universidade Federal de Goiás: Goiânia, 2016.

SANTOS, J. P. O. **Introdução à teoria dos números**. IMPA: Rio de Janeiro, 2007.

TORRES, T. H. S. **Contribuição dos jogos na compreensão de conceitos matemáticos**. Universidade de Brasília: Brasília, 2017.

Sites pesquisados:

http://www.leibniz-translations.com. Mantido por Lloyd Strickland.

http://www.archive.org/details/leibnizensmathe06leibgoog.

http://www.leibnizbrasil.pro.br. Mantido por Fernando L. B. G. Sousa.

http://www.fae.ufmg.br:8080/ebrapem/completos/07-02.

APÊNDICE

Sugestões de atividades que podem ser realizadas com os alunos do ensino fundamental e médio sobre diferentes bases numéricas. Como todo conteúdo matemático, bem como as diferentes bases numéricas, para aprender devemos realizar uma série de atividades. Assim, com o tempo se torna prático fazer conversões e operações de números escritos em outras bases.

Apêndice A – Aplicação de diferentes bases do Sistema de Numeração.

1. Considere 73 na base 10; em que base ele escrever-se-á 243?

2. Converter o número 241 em decimal para as bases.
   A. Binária
   B. Ternária
   C. Octal
   D. Hexadecimal

3. Converter os seguintes números para a base decimal.
   A. $(1101100)_2$
   B. $(217)_8$
   C. $(FB9)_{16}$

4. **(FUSAR – UFF 2012)** Os computadores utilizam o sistema binário, que é um sistema de numeração em que todas as quantidades se representam com os números (0 e 1). Em um computador o número 2012, em base decimal, será representado, em base binária, por:
   A. 110111.
   B. 11111011100.

C. 11110111000.
D. 111110111.
E. 1111010101.

5. **(CRF SC – IESES 2012)** Abaixo, apresentamos quatro números em suas representações binárias.

1) 0101001
2) 1101001
3) 0001101
4) 1010110

Assinale a alternativa que apresenta o somatório dos 4 números acima convertidos para o formato decimal.

A. 245
B. 101
C. 111
D. 267

6. Assinale certo ou errado.

A. No sistema binário, o resultado da multiplicação dos números $(101)_2$ e $(111)_2$ é o número $(100011)_2$.

( ) Certo ( ) Errado

B. Considerando-se as igualdades a seguir:

Sendo X = 106 (na base decimal) e T = E7 (na base hexadecimal). É correto afirmar que X + T = 521 (na base octal).

( ) Certo ( ) Errado

Apêndice B: Aplicação do Jogo do Nim.

1. **(UB - TORRES - 2017)** Seja *N* a quantidade de palitos e *n* a quantidade de palitos máxima a ser retirada em uma disputa do jogo do NIM, em que o jogador que retirar o último palito é o perdedor, indique em cada situação qual jogador terá estratégia ótima:

   A. N = 27 e n=4

   B. N = 25 e n=3

   C. N = 30 e n=5

   D. N = 41 e n=3

   E. N = 40 e n=4

2. Considere *N*, o número de palitos e *n*, o número máximo de retiradas em cada jogada. A partir daí, complete a tabela abaixo, de modo que, o perdedor será o jogador que retirar o último palito:

Número de palitos (N) em cada jogada	Número máximo de retiradas por jogada (n)	Número de palitos retirados na primeira jogada (r)
35	3	
19	4	
66	11	
N	N	

3. **(Abramo - 2016)** Determine qual das seguintes situações iniciais no Jogo de NIM permite ao primeiro jogador traçar uma estratégia vencedora.

   A. (12, 14, 15) B. (7, 9, 14) C. (7, 9, 15, 17)

SOLUÇÕES DAS ATIVIDADES (Apêndice A):

1. Supondo que a base procurada seja b, temos que $2b^2 + 4b + 3 = 73$, logo $b = 5$.

2.

   A. $241 = (11110001)_2$.

   B. $241 = (22221)_3$.

   C. $241 = (361)_8$.

   D. $241 = (F1)_{16}$.

3.

   A. $(1101100)_2 = 108$.

   B. $(217)_8 = 143$.

   C. $(FB9)_{16} = 560$

4. Letra B.

5. Letra A.

6.

   A. Certo.

   B. Certo.

SOLUÇÕES DAS ATIVIDADES (Apêndice B):

1.

A. Após realizar a divisão euclidiana obtém-se $27 = 5 \cdot 5 + 2$. Incide-se no caso geral com resto maior do que um. Verifica-se que o jogador 1 conseguirá a vitória ao adotar uma estratégia favorável em sua primeira jogada, retirando um palito e contrapondo as jogadas do segundo jogador, retirando a quantidade necessária para atingir 5 palitos, mantendo assim o resto igual a 1.

B. Após realizar a divisão euclidiana obtém-se $25 = 6 \cdot 4 + 1$, que incide no caso geral onde o resto é igual a um. Observa-se nessa situação que o jogador 1 não conseguirá obter a estratégia ótima e o jogador 2 terá a chance de vitória, basta analisar a quantidade de palitos que ficarão sobre o tabuleiro após a jogada do primeiro jogador e realizar análise do resto na divisão por 4.

C. Ao realizar a divisão euclidiana obtém-se o resto igual a zero, $30 = 5 \cdot 6 + 0$. Incide-se no caso geral onde o resto é diferente de 1. Verifica-se que o jogador 1 conseguirá a estratégia ótima retirando em sua primeira jogada a quantidade máxima de palitos, 5, e em seguida contrapor as jogadas do segundo jogador, de tal forma que a soma das retiradas do jogador 2 e jogador 1 seja igual a 6.

D. Esse exercício possui análise idêntica ao que foi exposto no item b), pois $41 = 10 \cdot 4 + 1$.

E. Esse exercício possui análise idêntica ao que foi exposto no item c), pois $40 = 10 \cdot 4 + 0$.

2.

Número de palitos (N) em cada jogada	Número máximo de retiradas por jogada (n)	Número de palitos retirados na primeira jogada (r)
35	3	2
19	4	3
66	11	5
N	N	r - 1

3.

A. Situação favorável:

$$\begin{array}{ll} Grupo\,1 & 1100 \\ Grupo\,2 & 1110 \\ \underline{Grupo\,3} & \underline{1111} \\ & 3321 \end{array}$$

Jogada a ser feita: retirar 13 palitos do Grupo 3, obtendo a configuração segura

$$\begin{array}{ll} Grupo\,1 & 1100 \\ Grupo\,2 & 1110 \\ \underline{Grupo\,3} & \underline{0011} \\ & 2221 \end{array}$$

B. Situação desfavorável:

$$\begin{array}{ll} Grupo\,1 & 0011 \\ Grupo\,2 & 1001 \\ \underline{Grupo\,3} & \underline{1110} \\ & 2222 \end{array}$$

C. Situação favorável:

$$\begin{array}{ll} Grupo\,1 & 00111 \\ Grupo\,2 & 01001 \\ Grupo\,3 & 01111 \\ \underline{Grupo\,4} & \underline{10001} \\ & 12224 \end{array}$$

Jogada a ser feita: retirar 16 palitos do Grupo 4, obtendo a configuração segura.

$$\begin{array}{ll} Grupo\,1 & 00111 \\ Grupo\,2 & 01001 \\ Grupo\,3 & 01111 \\ Grupo\,4 & 00001 \\ \hline & 02224 \end{array}$$

Nessas atividades, usamos algarismos na base decimal para o somatório das colunas em binários. Portanto, quando todos os algarismos são pares será chamada posição segura, enquanto que, quando pelo menos um dos algarismos da soma for ímpar, será uma posição insegura.