



UNIVERSIDADE FEDERAL DA GRANDE DOURADOS  
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA - PROFMAT

**POLINÔMIOS E APROXIMAÇÃO DE  
FUNÇÕES: UMA ABORDAGEM DA  
EDUCAÇÃO BÁSICA AO ENSINO SUPERIOR**

Autor:  
Miqueias Augusto Ferreira Nantes

Orientadora:  
Profa. Dra. Laís Corrêa

Dourados - MS

2018



Miqueias Augusto Ferreira Nantes

**POLINÔMIOS E APROXIMAÇÃO DE FUNÇÕES:  
UMA ABORDAGEM DA EDUCAÇÃO BÁSICA  
AO ENSINO SUPERIOR**

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, UFGD, como exigência parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientadora: Profa. Dra. Laís Corrêa

Dourados, MS

2018

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP).

N192p Nantes, Miqueias Augusto Ferreira

POLINÔMIOS E APROXIMAÇÃO DE FUNÇÕES: UMA ABORDAGEM DA EDUCAÇÃO BÁSICA AO ENSINO SUPERIOR [recurso eletrônico] / Miqueias Augusto Ferreira Nantes. -- 2019.

Arquivo em formato pdf.

Orientadora: Laís Corrêa.

Dissertação (Mestrado em Matemática)-Universidade Federal da Grande Dourados, 2018.

Disponível no Repositório Institucional da UFGD em:

<https://portal.ufgd.edu.br/setor/biblioteca/repositorio>

1. Funções polinomiais. 2. Aproximação de funções. 3. Polinômios no currículo escolar. I. Corrêa, Laís. II. Título.

Ficha catalográfica elaborada automaticamente de acordo com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).

©Direitos reservados. Permitido a reprodução parcial desde que citada a fonte.



MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO  
FUNDAÇÃO UNIVERSIDADE FEDERAL DA GRANDE DOURADOS  
FACULDADE DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLOGIA  
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE  
NACIONAL - PROFMAT

---

**Termo de Aprovação**

Após a apresentação, arguição e apreciação pela banca examinadora, foi emitido o parecer **APROVADO**, para a dissertação intitulada: **“Polinômios e Aproximação de Funções: Uma Abordagem da Educação Básica ao Ensino Superior”**, de autoria de **Miquéias Augusto Ferreira Nantes**, apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática da Universidade Federal da Grande Dourados.

*Laís Corrêa*

Profa. Dra. Laís Corrêa  
Presidente da Banca Examinadora

*Selma Helena Marchiori Hashimoto*

Profa. Dra. Selma Helena Marchiori Hashimoto  
Membro Examinador (UFTM)

*Josuel K. Rogenski*

Prof. Dr. Josuel Kruppa Rogenski  
Membro Examinador (UTFPR)

Dourados/MS, 28 de novembro de 2018



*A minha esposa Roseane Nantes, por acreditar em mim,  
pela paciência e apoio, e não mediu esforços  
para que eu chegasse a esta etapa da minha vida.  
As minhas filhas, Maria Clara e Beatriz,  
minhas fontes de busca e inspiração.*



# Agradecimentos

Agradeço a Deus pelo fortalecimento e discernimento em todas as etapas de minha vida, e por ter colocado pessoas tão especias em meu caminho.

A minha esposa, Roseane Nantes, por ser tão importante na minha vida. Sempre me apoiando, incentivando e fazendo acreditar que posso mais que imagino. Devido a cumplicidade, amizade, paciênciа, carinho, dedicação e amor, este trabalho pôde ser concluído. Obrigado por fazer do meu sonho o nosso sonho!

As minhas filhas, Maria Clara e Beatriz, por completarem nossas vidas, trazendo alegria e muito amor.

A minha sogra, Paulina Giovelli Cargnin, pelo incentivo, carinho que tem por mim e por minhas filhas, que por diversas vezes abdicou de seu tempo para ficar com elas enquanto me dedicava aos estudos.

Aos colegas de mestrado, pelo incentivo, com os quais trocamos conhecimentos e experiências.

A Marcia Aparecida Garcia Teixeira, pois foi mais que uma colega de mestrado, foi uma amiga, companheira, minha segunda mãe. Obrigado pelo incentivo!

Aos professores da UFGD que atuam no PROFMAT, pelas instruções oferecidas, apoio e compreensão nos momentos difíceis.

A professora Laís Corrêa pela presteza, orientação, disponibilidade de acompanhamento, e acreditar que conseguíramos. Obrigado pela forma que me conduziu, e principalmente pela paciência, afinal, não medi esforços, nem tempo para que esse trabalho fosse concluído. Muito obrigado!

A Robison Cardoso Aguilera, proprietário da Escola de Educação “Cativante” - Sistema Objetivo, por sempre entender as minhas ausências e acreditar no meu potencial.

# **Lista de Figuras**

2.1	Representação geométrica do produto notável $(x + a)(x + b)$ . . . . .	30
2.2	Representação geométrica dos termos $xa$ e $xb$ . . . . .	30
2.3	Representação geométrica da situação de aprendizagem aplicável ao 8º ano. . . . .	31
3.1	População brasileira entre os anos de 1950 e 2010. . . . .	38
3.2	Gráfico do polinômio interpolador obtido pela Fórmula de Lagrange no Exemplo 1. . . . .	42
3.3	Gráfico do polinômio interpolador obtido pela Interpolação Linear no Exemplo 2. . . . .	44
3.4	Gráfico do polinômio interpolador obtido pela Forma de Newton no Exemplo 3. . . . .	47
3.5	Comparação da função $f(x) = \frac{1}{1 + 25x^2}$ com seu polinômio interpolador obtido pela Forma de Newton. . . . .	50
3.6	Interpolação de $f(x)$ por uma função linear por parte, $S_1(x)$ . . . . .	51
3.7	Interpolação de $f(x)$ por uma função Spline Linear Interpolante. . . . .	54
3.8	Interpolação de Lagrange para $f(x)$ com $n = 3$ . . . . .	55
3.9	Interpolação de Lagrange para $f(x)$ com $n = 4$ . . . . .	55
3.10	Interpolação de Lagrange para $f(x)$ com $n = 6$ . . . . .	56
3.11	Interpolação linear para $f(x)$ com $x_0 = 0$ e $x_1 = 4$ . . . . .	57
3.12	Interpolação linear para $f(x)$ com $x_0 = 2$ e $x_1 = 4$ . . . . .	57
3.13	Interpolação linear para $f(x)$ com $x_0 = 0$ e $x_1 = 1$ . . . . .	58
3.14	Interpolação linear para $f(x)$ com $x_0 = 1$ e $x_1 = 3$ . . . . .	58

3.15 Interpolação de Newton para $f(x)$ com $n = 3$ .	59
3.16 Interpolação de Newton para $f(x)$ com $n = 4$ .	60
3.17 Interpolação de Newton para $f(x)$ com $n = 6$ .	60
3.18 Interpolação de Newton para $g(x)$ com $n = 3$ .	61
3.19 Interpolação de Newton para $g(x)$ com $n = 4$ .	62
3.20 Interpolação de Newton para $g(x)$ com $n = 6$ .	62
3.21 Interpolação de Newton para $g(x)$ com $n = 8$ .	63
3.22 Interpolação de Lagrange para $h(x)$ com $n = 3$ .	64
3.23 Interpolação de Lagrange para $h(x)$ com $n = 5$ .	64
3.24 Interpolação de Lagrange para $h(x)$ com $n = 7$ .	65
3.25 Interpolação de Lagrange para $h(x)$ com $n = 9$ .	66
3.26 Interpolação de Lagrange para $h(x)$ com $n = 11$ .	66
3.27 Interpolação de Spline linear para $h(x)$ com $n = 5$ .	67
3.28 Interpolação de Spline linear para $h(x)$ com $n = 7$ .	68
3.29 Interpolação de Spline linear para $h(x)$ com $n = 9$ .	69
3.30 Interpolação de Spline linear para $h(x)$ com $n = 11$ .	69

# **Lista de Tabelas**

2.1	Conteúdos e habilidades nos currículos do Estado de Mato Grosso do Sul - 7º ano. . . . .	9
2.2	Conteúdos e habilidades nos currículos do Estado de Mato Grosso do Sul - 8º ano. . . . .	11
2.3	Conteúdos e habilidades nos currículos do Estado de Mato Grosso do Sul - 1ª série do Ensino Médio. . . . .	13
2.4	Conteúdos e habilidades nos currículos do Estado de Mato Grosso do Sul - 3ª série do Ensino Médio. . . . .	14
3.1	População brasileira entre os anos de 1950 e 2010. . . . .	37



*A persistência é o caminho para o êxito*  
*(Charles Chaplin)*



# Resumo

Este trabalho tem como objetivo o aperfeiçoamento do professor de Matemática, especificamente, em relação ao conteúdo de funções polinomiais. Na busca de atingir tal objetivo, apresenta-se um estudo sobre o conceito, operações e propriedades das funções polinomiais a nível de Ensino Superior, buscando aprofundar seu conhecimento no assunto e, mais ainda, buscando com que esse aperfeiçoamento do professor reflita de maneira positiva no processo ensino-aprendizagem, trazendo uma melhora para o mesmo. Nesse sentido, é apresentado também um levantamento dos anos do Ensino Básico nos quais os conteúdo sobre funções polinomiais são estudados, bem como suas habilidades, tanto para o Currículo do Estado de Mato Grosso do Sul, quanto para a BNCC (Base Nacional Comum Curricular). Ambos são comparados com uma discussão/análise feita pela SBM (Sociedade Brasileira de Matemática) sobre os conteúdos e habilidades nos anos do Ensino Básico, levando o professor à uma reflexão sobre o assunto. Para ilustrar a importância das funções polinomiais, apresenta-se um estudo sobre aproximação de funções utilizando polinômio. Esta técnica foi desenvolvida há muitos anos atrás e é utilizada até os dias de hoje. Há inúmeras vantagens em, ao invés de manipular uma função complexa, aproxima-la por um polinômio, o qual é dado por uma expressão simples, com derivada e integral fáceis de serem calculadas, assim como suas raízes. Para tanto, diferentes métodos de interpolação foram estudados neste trabalho, a saber: método de Lagrange, Interpolação linear, método de Newton e Spline.

**Palavras-chave:** Funções polinomiais; Aproximação de funções; Polinômios no currículo escolar.



# Abstract

This work has as main objective the improvement of the Mathematics teacher, specifically in relation to the content of polynomial functions. In pursuit of this objective, a study is presented on the concept, and properties of polynomial functions at the level of Higher Education, deepen their knowledge of the subject and, moreover, improvement of the teacher reflects positively in the process teaching-learning, bringing an improvement for the same. In this sense, it is also presented a survey of the years of Basic Education in which the contents about polynomial functions are studied, as well as their abilities, both for the Curriculum of the State of Mato Grosso do Sul, and for the BNCC (Base Nacional Comum Curricular). Both are compared to a discussion/analysis by the SBM (Sociedade Brasileira de Matemática) about contents and skills in the years of Basic Education, leading the teacher to a reflection on this subject. To illustrate the importance of polynomial functions, we present approximation of functions using polynomials. This technique was developed many years ago and is used nowadays. There are numerous advantages in, instead of manipulating a complex function, to approximate it by a polynomial, which is given by a simple expression, with derivate and integral easy to be calculated as well as their roots. Therefore, different interpolation methods were studied in this work, namely: Lagrange method, linear Interpolation, Newton method and Spline.

**Keywords:** Polynomial functions; Approximation of functions; Polynomials in school curriculum.



# Sumário

<b>Lista de Figuras</b>	<b>ix</b>
<b>Lista de Tabelas</b>	<b>xi</b>
<b>1 Introdução</b>	<b>1</b>
<b>2 Funções Polinomiais</b>	<b>3</b>
2.1 Análise de livros didáticos . . . . .	3
2.2 Currículo de Matemática na Educação Básica . . . . .	6
2.2.1 Currículo Escolar - 7º ano . . . . .	9
2.2.2 Currículo Escolar - 8º ano . . . . .	10
2.2.3 Currículo Escolar - 1ª série do Ensino Médio . . . . .	12
2.2.4 Currículo Escolar - 3ª série do Ensino Médio . . . . .	14
2.3 Funções Polinomiais . . . . .	16
2.3.1 Derivada de Polinômios . . . . .	23
2.3.2 Polinômios e suas raízes . . . . .	26
2.4 Resolução de Problemas . . . . .	28
<b>3 Aproximações Polinomiais</b>	<b>37</b>
3.1 Introdução . . . . .	37
3.2 Fórmula de Lagrange . . . . .	40
3.3 Interpolação Linear . . . . .	42
3.4 Forma de Newton . . . . .	44

3.5	Estudo do Erro na Interpolação	47
3.5.1	Limitante para o Erro	48
3.5.2	Estimativa para o Erro	48
3.6	Fenômeno de Runge	50
3.7	Funções Splines em Interpolação	51
3.7.1	Spline Linear Interpolante	52
3.8	Resultados Numéricos	54
<b>4</b>	<b>Conclusão</b>	<b>71</b>
	<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>73</b>

# 1 Introdução

As funções polinomiais representam uma das classes mais importantes de função, pois modelam diversos problemas, desde os mais simples até os mais complexos, nas diferentes áreas. Pode-se utilizar funções polinomiais, por exemplo, no mercado de ações para prever como a variação dos preços irá afetar sua venda, ou até mesmo na Física, para descrever a trajetória de um projétil.

Sua importância baseia-se também na simplicidade de sua expressão, sendo muito utilizada para aproximar funções mais complexas. A aproximação de uma função qualquer por uma função polinomial, o que chamamos de interpolação polinomial, é uma das ideias mais antigas da Análise Numérica e é muito utilizada até hoje. A vantagem em se fazer isto está no fato de que as funções polinomiais são de simples e fácil manipulação, suas derivadas e integrais são fáceis de serem calculadas, já que também são polinômios, e suas raízes podem ser encontradas com relativa facilidade. Tem-se ainda a vantagem no armazenamento de informação, visto que, é computacionalmente mais "barato" armazenar os coeficientes de um polinômio do que armazenar um conjunto de dados.

Devido à sua importância, as funções polinomiais são estudadas em diferentes anos do ensino fundamental e médio. Seu estudo inicia-se no 7º ano, em que o aluno aprende a identificar os dados de um problema e como traduzi-lo em linguagem Matemática para uma equação do 1º grau, e segue até a 3ª série do ensino médio, em que os alunos desenvolvem o conhecimento algébrico aprendem a identificar os polinômios, definindo conceitos e propriedades, além de realizar operações com polinômios.

Desenvolveu-se este trabalho com o objetivo de aprimorar e contribuir na formação

continuada do professor de Matemática do Ensino Fundamental, Médio e Superior. Esta motivação surgiu da necessidade de obter melhores resultados no processo ensino-aprendizagem, em particular, sobre funções polinomiais, desde uma correta definição do conceito até a resolução de problemas nos diferentes anos do ensino básico.

Inicialmente, faz-se uma pequena revisão bibliográfica sobre funções polinomiais. Em seguida, apresenta-se onde o assunto se encaixa no Currículo da Educação Básica, em que é feita uma análise comparando o Currículo do Estado de Mato Grosso do Sul, a BNCC (Base Nacional Comum Curricular) e uma discussão elaborada pela SBM (Sociedade Brasileira de Matemática).

Apresenta-se, então, um estudo sobre funções polinomiais, mostrando sua definição, propriedades e operações de forma bem detalhada e aprofundada, a nível de Ensino Superior. O objetivo desta seção é aprofundar o conhecimento do professor de Matemática em funções polinomiais.

É apresentada ainda, uma seção sobre Resolução de Problemas, em que propõe-se diversas situações-problema para serem trabalhadas com os alunos nos diferentes anos do Ensino Básico.

Por fim, para ilustrar a importância e o uso de funções polinomiais, apresenta-se um capítulo sobre aproximação de funções por funções polinomiais, em que vários métodos de interpolação são estudados e comparados.

Espera-se, com este trabalho, contribuir para a formação continuada do professor de Matemática do Ensino Básico, tendo, por consequência, uma melhoria no processo ensino-aprendizagem envolvendo o conteúdo de funções polinomiais.

## 2 Funções Polinomiais

Neste capítulo, faz-se uma abordagem sobre funções polinomiais. Primeiramente, apresenta-se uma breve revisão bibliográfica sobre funções polinomiais, em seguida, faz-se uma análise do currículo Escolar de Matemática no ensino fundamental e médio. Apresenta-se, então, uma breve teoria dos conceitos relacionados com funções polinomiais: definição, operações, propriedades, derivada e suas raízes. Por fim, apresenta-se uma seção de resolução de problemas, em que são propostos alguns problemas envolvendo funções polinomiais, os quais podem ser trabalhados em sala de aula nos diferentes anos da Educação Básica.

### 2.1 Análise de livros didáticos

De acordo com os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs):

O ensino da matemática é sistematizado em três eixos: álgebra (números e funções), geometria e medidas, e análise de dados. Então podemos nos ater apenas ao primeiro eixo que diz respeito a álgebra, e ainda, principalmente no que diz respeito ao estudo de funções. O estudo de funções permite ao aluno adquirir a linguagem algébrica como a linguagem das ciências, para expressar a relação entre grandezas e modelar situações-problemas, construindo modelos descritivos de fenômenos e permitindo várias conexões dentro e fora da própria matemática. Assim, a ênfase do estudo das diferentes funções deve estar no conceito de função e em suas propriedades em relação às operações na interpretação de seus gráficos e nas aplicações dessas funções.

Com relação à álgebra, há ainda o estudo das equações polinomiais e de sistemas lineares. Esses dois conteúdos devem receber um tratamento que enfatize sua importância cultural, isto é, estender os conhecimentos que os alunos possuem sobre a resolução de equações de primeiro e segundo graus sobre a resolução de sistemas de duas equações e de duas incógnitas para sistemas de 3 por 3, aplicando esse estudo à resolução de problemas simples de outras áreas dos conhecimentos. Uma abordagem mais qualitativa e profunda deve ser feita dentro da parte flexível do currículo, como opção específica de cada escola. (PCNs, Ensino Médio, pág. 119)

Nota-se que, segundo os PCNs, polinômios, equações polinomiais e funções polinomiais devem constar na parte flexível do currículo, apesar da suma importância que o assunto tem para o desenvolvimento das ciências.

Em seu livro *A Matemática no Ensino Médio* [1], Elon traz um capítulo sobre Funções Polinomiais, expondo suas características e propriedades. O autor ressalta também algumas particularidades de uma função polinomial, como por exemplo o fato de que uma função polinomial de grau  $n$  não pode ter mais que  $n$  raízes. Além disso, o autor coloca a diferença entre o conceito de função polinomial e o conceito de polinômios:

existe uma correspondência biunívoca onde não há necessidade de fazer distinção entre polinômio  $p$  e a função polinomial  $p$ .

Elon também traz alguns tópicos referentes à aproximações polinomiais, em que apresenta, por exemplo, a fórmula de interpolação de Lagrange.

Em seu outro livro, *Matemática do Ensino Médio* [2], Elon dedica um capítulo aos estudos das Equações Algébricas, em que um dos objetivos do mesmo é expor a ideia de estudar equações do tipo  $p(x) = 0$ , onde  $p$  é uma função polinomial. São apresentados também diversos exemplos de aplicações deste tipo de equação.

No livro *Polinômios e Equações Algébricas* [3], aborda-se os polinômios no contexto da Álgebra, expondo um estudo detalhado, enfatizando suas propriedades básicas. Os autores enfatizam também que o estudo dos polinômios deveria ser mais desenvolvido na educação básica, em especial no Ensino Médio.

Em sua dissertação de mestrado, *Números complexos e polinômios: estratégias de ensino para aplicação por meio de GeoGebra*, [4], o autor expõe o assunto de números complexos e polinômios, abordando sua relevância para o ensino da Matemática na educação básica. Expõe ainda a teoria dos números complexos e polinômios sob o ponto

de vista analítico, utilizando como recurso didático o programa computacional GeoGebra. Desenvolveram-se atividades com os alunos do 3º ano do ensino médio, fazendo do trabalho uma investigação Matemática.

No livro Fundamentos de Álgebra II [5], a autora expõe a definição de polinômios como uma expressão algébrica composta por uma soma que envolve potências positivas de uma incógnita e coeficientes em um conjunto. Ressalta ainda que esse conjunto pode ser o conjunto dos números reais, complexos, entre outros. Expõe também que, devido a sua simplicidade, eles são utilizados em diversas áreas da Matemática, assim como as funções polinomiais e as equações algébricas. Aborda ainda que a determinação de raízes de polinômios, consiste em um dos problemas mais antigos da Matemática, no entanto, alguns polinômios não possuem raízes no conjunto dos números reais, abrangendo assim o conjunto dos números complexos, e enunciando o teorema fundamental da álgebra.

Em sua dissertação de mestrado, Ajuste de curvas por polinômios com foco no currículo de ensino médio [7] o autor propõe alternativas ao currículo de Matemática atual, aprofundando o assunto apresentado ao aluno. Expõe ainda diferentes técnicas de ajustes voltadas ao estudo de funções e expõe o tema de ajuste de curvas por polinômios e por funções logarítmicas e exponenciais, abordando a interpolação polinomial e o método dos mínimos quadrados.

Em seu livro Matemática contexto e aplicações [12], Dante busca que os alunos atinjam os pré-requisitos para dar continuidade no ensino superior. O autor inicia o tema com alguns exemplos de aplicações, relacionando o estudo dos polinômios com o das funções polinomiais, introduzindo o assunto com a exploração do cálculo de áreas de figuras planas e áreas totais de sólidos geométricos. Essas aplicações vêm com o intuito de mostrar que algo, muitas vezes conhecido como fórmula, pode ser entendido como um polinômio. Dante expõe também alguns exemplos com a finalidade de o professor explorar as definições de uma expressão polinomial, ou polinômio, fazendo assim a generalização do conceito. A sequência didática exposta no livro é apresentada da seguinte maneira: funções polinomiais e, consequentemente, o polinômio, definindo os conceitos de grau do polinômio e polinômio identicamente nulo. Uma vez que isso foi definido, o autor

sugere partir para a determinação do valor numérico de um polinômio. Com isso, alguns exemplos são explorados, até que sejam avaliadas as condições necessárias para a igualdade de polinômios. É feita também a discussão do conceito de raiz de um polinômio e ainda, as operações com polinômios são apresentadas a partir de exemplos, retomando as operações com expressões algébricas como adição, subtração, multiplicação e divisão.

Ainda no trabalho de Dante, a divisão de polinômios também é abordada de forma bem superficial, sendo relacionada com a divisão de números naturais. O autor ainda coloca que muitos alunos podem apresentar dificuldades na compreensão desta operação pelo método da chave, então sugere o caso da divisão por  $(x - a)$ , o dispositivo prático de Briot-Ruffini.

Dante apresenta, em outro capítulo de seu livro, uma importante finalização de todo um ciclo de aprendizagem matemática, iniciado no ensino fundamental com as expressões algébricas, resolução de equações do 1º e 2º graus, produtos notáveis, em que o grau de complexidade foi aumentado de forma gradativa no ensino médio com o estudo das funções polinomiais. Após a sondagem desse conteúdo, observa-se o amadurecimento e a evolução do processo de aprendizagem dos alunos. Em seguida, apresenta definição do conceito de raiz de uma equação polinomial ou algébrica, sendo assim o autor enuncia também o Teorema Fundamental da Álgebra e as Relações de Girard, além de abordar as raízes racionais e complexas de uma equação algébrica.

## 2.2 Currículo de Matemática na Educação Básica

Nesta seção apresenta-se uma análise do Currículo do Estado de Mato Grosso do Sul e da Base Nacional Comum Curricular (BNCC), verificando os pontos em comum que ambos possuem. Faz-se ainda uma comparação de ambas com uma discussão sobre currículo elaborada pela a Sociedade Brasileira de Matemática (SBM), a qual aborda os conteúdos a serem trabalhados na educação básica.

Quando se fala de currículo, não se pode deixar de lembrar do trabalho realizado por Nélia Elaine W. Engster que, em seu livro, Educação e Currículo: Fundamentos Práticos

e Pedagógicos [14], expõe a importância e ressalta a trajetória do currículo ao longo da história. Afinal, ao tratarmos desse assunto, é importante reconhecer que as teorias do currículo:

- São compreendidas como modelos que selecionam temas e abordagens do trabalho escolar;
- Interferem na configuração do currículo efetivado pelos professores porque, à medida que o professor operacionaliza esse currículo na escola, ele o assume e o interpreta, promovendo interferências na opção curricular e na sua história de vida;
- Têm relação com a postura profissional de formação e comprometimento do professor;
- Configuram um aspecto de racionalidade às práticas pedagógicas.

As teorias trazem e desempenham alguns fatores bastante significativos no decorrer da história da educação, no entanto é importante observar a essência de cada uma delas, afinal todas têm o objetivo de, como e por que ensinar. Em seus estudos, Silva [15] expressa essa preocupação da seguinte forma:

O que deve se ensinar: as habilidades básicas de escrever, ler e contar; as disciplinas acadêmicas humanísticas; as disciplinas científicas; as habilidades práticas necessárias para ocupação profissional? Quais fontes principais do conhecimento a ser ensinado: o conhecimento acadêmico, as disciplinas científicas, os saberes profissionais do mundo ocupacional adulto? O que deve estar no centro do ensino: os saberes “objetivos” do conhecimento organizado ou as percepções e as experiências das crianças e dos jovens? Em termos sociais, quais devem ser as finalidades da educação: ajustar as crianças e os jovens à sociedade tal como ela existe ou prepará-los para transformá-la; a preparação econômica ou a preparação para democracia?

Esses questionamentos são importantes no decorrer em que se discute cada uma dessas teorias curriculares de modo que possamos identificar como cada uma enfoca o processo de ensino e aprendizagem. As teorias tradicionais do currículo têm uma característica pela descrição dos conteúdos, isto é, a escola oferece aos professores uma listagem dos conteúdos que devem ser ministrados.

De acordo com Engster [14], podemos observar que as teorias tradicionais se aproximam ao modelo tecnicista, também conhecido como cienticista, onde a efetivação do currículo escolar acontece. Como por exemplo, a linha de produção de uma fábrica onde há a preocupação centrada no “o que, quanto e como ensinar”. Nas teorias tradicionais, o “que e quanto ensinar” era conhecido e questionável, no entanto a preocupação maior está em como executá-lo de forma a garantir a transmissão do conhecimento.

Organizar uma lista de conteúdos de matemática a serem trabalhados na educação básica é, com certeza, a parte menos complicada da tarefa, que tem como objetivo produzir um documento que trate de diretrizes para o ensino da matemática. O difícil é elencar e integrar as habilidades a serem desenvolvidas pelos alunos no momento de aprendizagem dos diferentes conteúdos. Existem diferentes diretrizes curriculares, como por exemplo a do Estado de Mato Grosso do Sul e ainda, podemos citar a Base Nacional Comum Curricular (BNCC), que buscam detalhar as habilidades. Tais documentos devem estar diretamente ligados, pois têm os mesmos objetivos.

O detalhamento da apresentação dos conteúdos neste trabalho tem como principal finalidade ajudar o professor na organização das suas aulas. Um assunto recorrente nas reuniões de professores é a questão da falta de tempo para cumprir a grade de conteúdos. Dependendo do número de horas semanais de aulas de matemática que o professor tem à disposição, a falta de tempo realmente torna-se um aspecto a ser considerado e, assim sendo, conteúdos mais importantes para a formação dos alunos precisam ser priorizados.

Segundo o material elaborado pela SBM, que realizou uma discussão sobre o currículo, podemos observar que os conteúdos foram organizados nos eixos temáticos: número, aritmética e álgebra; geometria, medida e álgebra; estatística e probabilidade. Vamos nos ater aos eixos que envolvem a álgebra, visto que nosso foco são os polinômios.

## 2.2.1 Currículo Escolar - 7º ano

### Referencial curricular do Estado de Mato Grosso do Sul

Conteúdo	Habilidade
✓ Linguagem matemática;  ✓ Equação do 1º grau.	✓ Identificar os dados de um problema usando a linguagem matemática;  ✓ Utilizar equações para traduzir linguagem matemática e resolvê-las;  ✓ Identificar uma equação do 1º grau;  ✓ Determinar o valor desconhecido de uma equação do 1º grau.

Tabela 2.1: Conteúdos e habilidades nos currículos do Estado de Mato Grosso do Sul - 7º ano.

**A BNCC** aborda os conteúdos para essa série como: linguagem algébrica: variável e incógnita; equivalência de expressões algébricas: identificação da regularidade de uma sequência numérica; equações polinomiais do 1º grau. As habilidades a serem desenvolvidas são: compreender a ideia de variável, representada por letra ou símbolo, para expressar relação entre duas grandezas, diferenciando-a da ideia de incógnita; classificar sequências em recursivas e não recursivas, reconhecendo que o conceito de recursão está presente não apenas na matemática, mas também nas artes e na literatura, utilizando a simbologia algébrica para expressar regularidades encontradas em sequências numéricas, além reconhecer se duas expressões algébricas obtidas para descrever a regularidade de uma mesma sequência numérica são ou não equivalentes; e ainda resolver e elaborar problemas que possam ser representados por equações polinomiais de 1º grau, redutíveis à forma, fazendo uso das propriedades da igualdade.

**Segundo a discussão elaborada pela SBM**, a partir do 7º ano, os alunos começam a ter o primeiro contato, de fato, com a introdução da linguagem algébrica. As habilidades a serem desenvolvidas com esse primeiro contato são: observar padrões e generalizar usando a linguagem da álgebra em exemplos, modelar e resolver problemas usando a linguagem da álgebra com uma e/ou duas variáveis inteiras, além de resolver e

efetuar manipulações algébricas simples em equações algébricas de uma variável de grau 1.

**Comentários:** A discussão elaborada pela SBM aborda o conteúdo do 7º ano como introdução à linguagem da álgebra e uma das habilidades a serem desenvolvidas é a modelagem de problemas usando a linguagem algébrica com duas variáveis inteiras e resolver através de inspeção, no entanto o Currículo do estado de Mato Grosso do Sul e a BNCC não explanam a ideia de duas variáveis para essa etapa de ensino. Por outro lado, a BNCC aborda um dos conteúdos do 7º ano como equivalência de expressões algébricas, ou seja, a identificação da regularidade de uma sequência numérica, onde os outros dois materiais não enfatizam dessa forma, nem nos conteúdos e nem nas habilidades.

## 2.2.2 Currículo Escolar - 8º ano

### Referencial curricular do Estado de Mato Grosso do Sul

Conteúdo	Habilidade
✓ Fatoração; ✓ Expressões algébricas; ✓ Equação do 1º Grau com uma incógnita; ✓ Polinômios; ✓ Monômio ou termo algébrico; ✓ Fatoração de Polinômios; ✓ Produtos notáveis; ✓ Frações algébricas; ✓ Simplificação de frações algébricas; ✓ Equação fracionária; ✓ Equação e Inequação de 1º grau com uma incógnita;	✓ Aplicar a fatoração na resolução de equações; ✓ Traduzir problemas do cotidiano para linguagem algébrica; ✓ Calcular expressões algébricas envolvendo as operações; ✓ Resolver problemas de expressões algébricas envolvendo as operações; ✓ Resolver equação do 1º Grau com uma incógnita, aplicando os princípios aditivos e multiplicativo de igualdade; ✓ Resolver problemas que envolvem equações do 1º grau; ✓ Identificar um polinômio; ✓ Reconhecer um monômio quadrado perfeito; ✓ Reconhecer um trinômio quadrado perfeito; ✓ Efetuar operações fundamentais que envolvem polinômios; ✓ Utilizar o critério da fatoração de polinômios em expressão algébrica;

<ul style="list-style-type: none"> <li>✓ Equação de 1º grau com duas incógnitas;</li> <li>✓ Sistema de Equação do 1º grau com duas incógnitas.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>✓ Resolver problemas envolvendo a fatoração de polinômios;</li> <li>✓ Escrever uma expressão dada sob a forma de produtos de polinômios;</li> <li>✓ Aplicar os casos de fatoração para determinar o M.M.C. (Mínimo Múltiplo Comum) de polinômios;</li> <li>✓ Reconhecer e calcular o quadrado da soma e da diferença de dois termos;</li> <li>✓ Reconhecer e calcular o produto da soma pela diferença de dois termos;</li> <li>✓ Observar a regularidade dos resultados do produto notável desenvolvido;</li> <li>✓ Resolver problemas do cotidiano envolvendo frações algébricas;</li> <li>✓ Simplificar e calcular expressões de frações algébricas;</li> <li>✓ Resolver problemas envolvendo equações e/ou inequações do 1º grau;</li> <li>✓ Verificar se um par ordenado <math>(x, y)</math> é ou não uma das soluções de uma equação do 1º grau com duas incógnitas;</li> <li>✓ Calcular sistema de equações com duas incógnitas, utilizando o método da substituição ou o método da adição.</li> </ul>
---	--

Tabela 2.2: Conteúdos e habilidades nos currículos do Estado de Mato Grosso do Sul - 8º ano.

**A BNCC** aborda os conteúdos para essa etapa do ensino fundamental como: valor numérico de expressões algébricas, além de associar uma equação linear de 1º grau a uma reta no plano cartesiano. Expõe ainda o sistema de equações polinomiais do 1º grau, enfatizando a resolução algébrica e sua representação no plano cartesiano. A BNCC expõe ainda que equações do 2º grau sejam abordadas nessa etapa, porém elas devem ser do tipo  $ax^2 = b$ .

**De acordo com a abordagem da SBM**, as relações de conteúdos iniciam com a álgebra e suas operações, pontuando também as propriedades dessas operações, tais como: decomposição em produtos, propriedades associativa e comutativa da adição e

multiplicação, além da propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição e subtração; aborda ainda a potenciação e produtos notáveis. Expõe de forma acessível a regularidade e leis de formação e linguagem algébrica. Além das expressões algébricas, tem-se a abordagem de valor de uma expressão. Temos ainda que as equações de 1º e 2º graus com uma incógnita também são abordadas no 8º ano e suas respectivas soluções. Associa-se uma equação linear de 1º grau a uma reta no plano cartesiano, além de expor a ideia de sistema de equações de 1º grau, ou seja, a resolução algébrica representada no plano cartesiano. Ainda sobre as equações polinomiais, temos a equação do 2º grau do tipo  $ax^2 = b$ . Além de entender as propriedades das operações no conjunto dos números reais através da linguagem algébrica, espera-se que os alunos entendam os símbolos e as hierarquias das operações, além de desenvolver habilidades para realizar manipulações algébricas. Espera-se também que saibam efetuar produtos notáveis por meio da álgebra e também por meio da relação de área, e ainda justificar algebraicamente as fórmulas dos produtos notáveis. Espera-se ainda que os alunos possam expressar regularidades da álgebra (contagem, leis de formação de sequências numéricas, relação entre variáveis), modelando problemas da vida real que envolvam equações do 1º e do 2º grau.

**Comentários:** Observa-se que os três materiais partem sempre de situações-problema, para que o aluno possa ampliar, aprofundar e construir novos sentidos para seus conhecimentos, entre eles, comparar, observar e inferir. Observa-se também que existe uma regularidade nos três materiais ao abordarem os conteúdos para esta etapa do ensino fundamental, porém o que os diferenciam é a exposição da equação do 2º grau, a qual é feita apenas pela BNCC.

### 2.2.3 Currículo Escolar - 1ª série do Ensino Médio

#### Referencial curricular do Estado de Mato Grosso do Sul

Conteúdo	Habilidade
✓ Funções;	✓ Entender o significado e as formas de representar os números, as relações entre eles e os diferentes sistemas numéricos;

<ul style="list-style-type: none"> <li>✓ Domínio e contradomínio;</li> <li>✓ Plano cartesiano;</li> <li>✓ Construção de gráficos;</li> <li>✓ Análise de gráficos;</li> <li>✓ Função afim ou do 1º grau;</li> <li>✓ Coeficientes da função;</li> <li>✓ Estudo dos sinais;</li> <li>✓ Inequações;</li> <li>✓ Funções quadráticas ou do 2º grau;</li> <li>✓ Raízes da equação;</li> <li>✓ Estudo dos sinais.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>✓ Ler, articular e interpretar símbolos e códigos em diferentes linguagens e representações: sentenças, equações, diagramas, tabelas, gráficos e representações geométricas;</li> <li>✓ Usar e interpretar modelos, perceber o sentido de transformações, buscar regularidade, conhecer o desenvolvimento histórico e tecnológico de parte de nossa cultura e adquirir uma visão sistematizada de parte do conhecimento matemático;</li> <li>✓ Compreender o conceito de funções, associando-o a exemplos da vida cotidiana.</li> <li>✓ Associar diferentes funções a seus gráficos e correspondentes.</li> </ul>
--	--

Tabela 2.3: Conteúdos e habilidades nos currículos do Estado de Mato Grosso do Sul - 1<sup>a</sup> série do Ensino Médio.

**A BNCC** propõe aos estudantes a oportunidade de desenvolver o pensamento algébrico, tendo em vista as demandas para identificar a relação de dependência entre duas grandezas em contextos significativos e comunicá-la utilizando diferentes escritas algébricas, resolver situações-problema por meio de equações e inequações; interpretar situações econômicas, sociais e das Ciências da Natureza que envolvem a variação de duas grandezas, pela análise dos gráficos das funções representadas e das taxas de variação com ou sem apoio de tecnologias digitais.

**A Discussão Curricular da SBM** aborda os conteúdos de forma sintetizada, sendo eles: função afim, função linear e função quadrática. Espera-se que os alunos possam identificar uma função afim a partir da sua representação algébrica ou geométrica, além de representar graficamente as funções afins e obter a representação algébrica. Espera-

se ainda que os alunos sejam capazes de identificar uma função linear e/ou quadrática a partir de suas representações gráficas ou algébricas, além de resolver problemas que envolvam máximos e mínimos de funções quadráticas.

**Comentários:** Os três materiais abordam o assunto de funções e gráficos partindo de uma situação-problema, onde priorizam conceitos e definições e sempre buscam associá-los a situações do cotidiano para uma melhor explanação do conteúdo. Existe uma sintonia considerável entre o Referencial Curricular do Estado de Mato Grosso do Sul e o material elaborado pela SBM, onde ambos abordam com mais intensidade os conteúdos de função afim e função quadrática.

#### 2.2.4 Currículo Escolar - 3<sup>a</sup> série do Ensino Médio

##### Referencial curricular do Estado de Mato Grosso do Sul

Conteúdo	Habilidade
✓ Polinômios e Equações algébricas; ✓ Operações com polinômios; ✓ Equações polinomiais.	✓ Avaliar propostas de intervenção na realidade utilizando conhecimentos algébricos; ✓ Relacionar o estudo de polinômios e equações polinomiais com estudo de funções; ✓ Tomar decisões diante de situações-problema, argumentando com base na interpretação das informações e nos conhecimentos sobre polinômios.

Tabela 2.4: Conteúdos e habilidades nos currículos do Estado de Mato Grosso do Sul - 3<sup>a</sup> série do Ensino Médio.

**A BNCC** enfatiza em uma de suas competências que os alunos devem ser capazes de investigar e estabelecer conjecturas a respeito de diferentes conceitos e propriedades matemáticas, empregando recursos e estratégias como observação de padrões, experimentações e tecnologias digitais, identificando a necessidade, ou não, de uma demonstração cada vez mais formal na validação das referidas conjecturas. Em particular, ele deve desenvolver algumas habilidades voltadas, por exemplo, aos polinômios, sendo elas: investigar relações entre números expressos em tabelas para representá-los no plano cartesiano.

siano, identificando padrões e criando conjecturas para generalizar e expressar algebricamente essa generalização, reconhecendo quando essa representação é de função polinomial de 1º grau; analisar as relações entre números expressos em tabelas para representá-los no plano cartesiano, identificando padrões e criando conjecturas para generalizar e expressar algebricamente essa generalização, reconhecendo quando essa representação é de função polinomial de 2º grau do tipo  $y = ax^2$ ; encontrar e analisar pontos de máximo ou de mínimo de funções quadráticas em contextos da Matemática Financeira ou da Cinemática, entre outros; identificar e associar sequências numéricas (PA) a funções afins de domínios discretos para análise de propriedades, incluindo dedução de algumas fórmulas e resolução de problemas; associar sequências numéricas (PG) a funções exponenciais de domínios discretos para análise de propriedades, incluindo dedução de algumas fórmulas e resolução de problemas.

**A Discussão Curricular da SBM** não aborda conteúdos relacionados aos polinômios na 3ª série do ensino médio. Em outras séries, orienta-se que seja realizado um trabalho com funções polinomiais com o auxílio de um ambiente virtual para uma melhor visualização, reconhecimento e construção de seus gráficos.

**Comentários:** Observa-se que, para a BNCC, as habilidades previstas para o ensino médio são essenciais para o letramento matemático dos alunos, e que se torne mais denso e eficiente, tendo em vista que nesta etapa da educação básica aprofundam e ampliam-se as habilidades desenvolvidas no ensino fundamental, tendo mais ferramentas para compreender a realidade e propor as ações de intervenção. Observa-se que o Referencial Curricular do MS aborda de forma sucinta as competências e habilidades abordadas pela BNCC, com isso sua adequação deve ser feita de forma gradativa por parte do professor. De modo geral, observa-se uma coerência entre os dois materiais.

Ao se pesquisar sobre Currículos de ensino, não se pode deixar de lado os livros didáticos, os quais também são um referencial para o professor, já que servem de apoio para que a proposta do Currículo seja cumprida. Observa-se ainda que a maioria dos livros didáticos utilizados nas escolas e/ou escolhidos pelo professor pouco diferem na disposição dos conteúdos. Inclusive, livros de diferentes autores apresentam diversos exercícios repe-

tidos.

## 2.3 Funções Polinomiais

Um polinômio  $f(x)$  com coeficientes em  $\mathbb{R}$  é uma expressão algébrica da forma:

$$f(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n = \sum_{j=0}^n a_jx^j,$$

onde  $n \in \mathbb{N}$ ,  $a_j \in \mathbb{R}$ , para  $0 \leq j \leq n$ .

Para  $0 \leq j \leq n$ , os elementos  $a_j$  são os coeficientes do polinômio  $f(x)$ , e os termos  $a_jx^j$ , tais que  $a_j \neq 0$ , são chamados monômios de grau  $j$  do polinômio  $f(x)$ . O coeficiente  $a_0$  é chamado termo constante e, por consequência,  $f(x) = a_0$  é chamado polinômio constante.

Dados os polinômios  $f(x)$  e  $g(x)$ , onde  $f(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$  e  $g(x) = b_0 + b_1x + \dots + b_nx^n$ , podemos dizer que eles são polinômios iguais se, e somente se,  $a_j = b_j$ , para todo  $0 \leq j \leq n$ . Com isso, escrevemos que  $f(x) = g(x)$ .

Quando  $f(x) = 0$ , dizemos que  $f(x)$  é o polinômio nulo, ou seja, todos os seus coeficientes são nulos, e ele pode ser escrito da forma  $f(x) = 0 + 0x + \dots + 0x^n$ , para qualquer  $n \in \mathbb{N}$ . Para esse polinômio não se define grau pois não possui nenhum coeficiente não nulo.

De modo geral, podemos estabelecer o grau de um polinômio. Desde que  $f(x) \neq 0$ , algum coeficiente deve ser diferente de zero, então há um maior índice  $n$ , tal que  $a_n \neq 0$ . Assim, definimos grau de um polinômio e denotamos por  $\text{gr}(f(x))$  como sendo  $n$ , em que  $a_n$  é chamado de coeficiente líder. Por exemplo,  $f(x) = 5x^4 + 3x^3 + 2x$  tem grau 4 e o polinômio  $f(x) = 6$  tem grau zero, pois corresponde a  $f(x) = 6x^0$ .

De acordo com Lima [2], é indiferente nos referirmos à função polinomial  $f(x)$  ou ao polinômio  $f(x)$ , já que existe uma correspondência biunívoca entre ambas: a toda função polinomial  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  corresponde um polinômio real.

As operações de polinômios em  $\mathbb{R}$  são definidas a partir das operações em  $\mathbb{R}$ .

Sejam  $f(x) = \sum_{j=0}^n a_j x^j$  e  $g(x) = \sum_{j=0}^n b_j x^j$  em  $\mathbb{R}$ , podemos definir operação de adição desses polinômios como:

$$f(x) + g(x) = \sum_{j=0}^n c_j x^j,$$

onde  $c_j = a_j + b_j$ , para  $0 \leq j \leq n$ . O resultado da adição de dois polinômios é chamado soma.

Segue ainda que na adição de polinômios valem as propriedades a seguir:  $f(x) \neq 0, g(x) \neq 0$  e  $f(x) + g(x) \neq 0$ , então  $\text{gr}(f(x) + g(x)) \leq \max\{\text{gr}(f(x)), \text{gr}(g(x))\}$ , valendo a igualdade sempre que  $\text{gr}(f(x)) \neq \text{gr}(g(x))$ .

Dados os polinômios  $f(x) = \sum_{j=0}^n a_j x^j$ ,  $g(x) = \sum_{j=0}^n b_j x^j$  e  $h(x) = \sum_{j=0}^n c_j x^j$  em  $\mathbb{R}$ , temos as seguintes propriedades para a adição de polinômios em  $\mathbb{R}$ :

**i) Associativa:**  $[f(x) + g(x)] + h(x) = f(x) + [g(x) + h(x)]$

*Demonstração:* pela propriedade associativa da soma em  $\mathbb{R}$ , temos:

$$\begin{aligned} [f(x) + g(x)] + h(x) &= \sum_{j=0}^n (a_j + b_j)x^j + \sum_{j=0}^n c_j x^j \\ &= \sum_{j=0}^n [(a_j + b_j) + c_j] x^j \\ &= \sum_{j=0}^n [a_j + (b_j + c_j)] x^j \\ &= \sum_{j=0}^n a_j x^j + \sum_{j=0}^n (b_j + c_j) x^j \\ &= f(x) + [g(x) + h(x)]. \end{aligned}$$

**ii) Comutativa:**  $f(x) + g(x) = g(x) + f(x)$

*Demonstração:* pela propriedades da soma em  $\mathbb{R}$ , a soma dos coeficientes de cada parcela de mesma potência é comutativa, isto é,  $c_j = a_j + b_j = b_j + a_j = d_j$ , para

todo  $0 \leq j \leq n$ :

$$\begin{aligned}
f(x) + g(x) &= \sum_{j=0}^n a_j x^j + \sum_{j=0}^n b_j x^j \\
&= \sum_{j=0}^n (a_j + b_j) x^j \\
&= \sum_{j=0}^n (b_j + a_j) x^j \\
&= \sum_{j=0}^n b_j x^j + \sum_{j=0}^n a_j x^j \\
&= g(x) + f(x).
\end{aligned}$$

iii) **Elemento Neutro:**  $f(x) + 0 = f(x)$

*Demonstração:* Seja  $c(x) = \sum_{j=0}^n c_j x^j$ , vamos tomar que  $f(x) + c(x) = f(x)$  para qualquer  $f(x) = \sum_{j=0}^n a_j x^j$ . Observamos que os coeficientes das parcelas de mesma potência devem satisfazer  $a_j + c_j = a_j$ , logo  $c_j = 0$ , para todo  $0 \leq j \leq n$ . Com isso, temos que o elemento neutro para adição de polinômios é o polinômio nulo  $c(x) = 0$ .

iv) **Elemento Simétrico:** Se  $f(x) = \sum_{j=0}^n a_j x^j$ , o simétrico de  $f(x)$  é o polinômio  $-f(x) = \sum_{j=0}^n (-a_j) x^j$

*Demonstração:* Seja  $q(x) = \sum_{j=0}^n a'_j x^j$ , vamos tomar que  $f(x) + q(x) = 0$  para qualquer  $f(x) = \sum_{j=0}^n a_j x^j$ . Observe que os coeficientes das parcelas de mesma potência devem satisfazer  $a_j x^j + a'_j x^j = 0$ , logo  $a_j x^j = -a'_j x^j$ , para todo  $0 \leq j \leq n$ . Com isso, concluímos que o elemento simétrico para  $f$  é o  $-f(x) = \sum_{j=0}^n (-a_j) x^j$ .

A partir da propriedade do elemento simétrico, definimos também a subtração entre dois polinômios  $f$  e  $g$  como sendo a soma de  $f$  com o oposto de  $g$ , ou seja,  $f - g = f + (-g)$ , o que resulta em:

$$(f - g)(x) = (a_0 - b_0) + (a_1 - b_1)x^1 + \dots + (a_n - b_n)x^n.$$

Dados os polinômios  $f(x) = \sum_{j=0}^n a_j x^j$  e  $g(x) = \sum_{j=0}^m b_j x^j$ , definimos a multiplicação desses polinômios como segue:

$$f(x) \cdot g(x) = \sum_{j=0}^{n+m} c_j x^j,$$

onde

$$\begin{aligned} c_0 &= a_0 \cdot b_0 \\ c_1 &= a_0 \cdot b_1 + a_1 \cdot b_0 \\ c_2 &= a_0 \cdot b_2 + a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_0 \\ &\vdots \\ c_j &= a_0 \cdot b_j + a_1 \cdot b_{j-1} + \dots + a_j \cdot b_0 = \sum_{\lambda+\mu=j} a_\lambda b_\mu \\ &\vdots \\ c_{n+m} &= a_n \cdot b_m. \end{aligned}$$

O grau do polinômio que resulta da multiplicação entre os polinômios  $f(x)$  e  $g(x)$ , ambos não nulos, e tendo como coeficientes líderes  $a_n$  e  $b_m$ , é  $\text{gr}(f(x) \cdot g(x)) = \text{gr}(f(x)) + \text{gr}(g(x))$ , o que é conhecido como propriedade multiplicativa do grau, em que o coeficiente líder de  $f(x) \cdot g(x)$  é  $a_n \cdot b_m$ .

O resultado da multiplicação entre dois polinômios é chamado de produto. Temos ainda, da definição acima, que:

- i) Para quaisquer  $j, k \in \mathbb{N}$ , vale:  $x^j \cdot x^k = x^{j+k}$ ;
- ii) Se  $f(x) = a$  e  $g(x) = b_0 + b_1 x + \dots + b_m x^m$ , então:

$$\begin{aligned} f(x) \cdot g(x) &= a \cdot g(x) \\ &= a \cdot \left( \sum_{k=0}^m b_k x^k \right) \\ &= \sum_{k=0}^m (a \cdot b_k) x^k \\ &= (a \cdot b_0) + (a \cdot b_1) x + \dots + (a \cdot b_m) x^m, \end{aligned}$$

Dados os polinômios  $f(x) = \sum_{j=0}^n a_j x^j$ ,  $g(x) = \sum_{j=0}^n b_j x^j$  e  $h(x) = \sum_{j=0}^n c_j x^j$  em  $\mathbb{R}$ , temos as seguintes propriedades que envolvem a multiplicação de polinômios em  $\mathbb{R}$ :

**(i) Associativa:**  $[f(x) \cdot g(x)] \cdot h(x) = f(x) \cdot [g(x) \cdot h(x)]$

*Demonastração:*

$$\begin{aligned}
 [f(x) \cdot g(x)] \cdot h(x) &= \left[ \left( \sum_{j=0}^n a_j x^j \right) \cdot \left( \sum_{j=0}^n b_j x^j \right) \right] \cdot \left( \sum_{i=0}^n c_i x^i \right) \\
 &= \left[ \sum_{j=0}^n \left( \sum_{i=0}^n a_{j-i} b_i \right) x^j \right] \cdot \left( \sum_{i=0}^n c_i x^i \right) \\
 &= \sum_{j=0}^n \left[ \sum_{s=0}^j \left( \sum_{i=0}^s a_{s-i} b_i \right) c_{j-s} \right] x^j \\
 &= \sum_{j=0}^n \left[ \sum_{s=0}^j \left( \sum_{i=0}^s a_{s-i} b_i c_{j-s} \right) \right] x^j \\
 &= \sum_{j=0}^n \left[ \sum_{i=0}^s \left( \sum_{s=0}^j a_{s-i} b_i c_{j-s} \right) \right] x^j \\
 &= \sum_{j=0}^n \left[ \sum_{i=0}^s a_{s-i} \left( \sum_{s=0}^j b_i c_{j-s} \right) \right] x^j \\
 &= \left( \sum_{j=0}^n a_j x^j \right) \cdot \left[ \sum_{j=0}^n \left( \sum_{s=0}^j b_s c_{j-s} \right) x^j \right] \\
 &= \left( \sum_{j=0}^n a_j x^j \right) \cdot \left[ \left( \sum_{j=0}^n b_j x^j \right) \cdot \left( \sum_{i=0}^n c_i x^i \right) \right] \\
 &= f(x) \cdot [g(x) \cdot h(x)]
 \end{aligned}$$

**ii) Comutativa:**  $f(x) \cdot g(x) = g(x) \cdot f(x)$

Para demonstração desta propriedade consideraremos  $g(x) = \sum_{j=0}^m b_j x^j$ .

*Demonstração:*

$$\begin{aligned}
f(x) \cdot g(x) &= \sum_{j=0}^n a_j x^j \cdot \sum_{j=0}^m b_j x^j \\
&= \sum_{j=0}^{n+m} \left( \sum_{j=\lambda+\mu} a_\lambda b_\mu \right) x^j \\
&= \sum_{j=0}^{n+m} \left( \sum_{j=\lambda+\mu} b_\mu a_\lambda \right) x^j \\
&= \sum_{j=0}^n a_j x^j \cdot \sum_{j=0}^m b_j x^j \\
&= g(x) \cdot f(x)
\end{aligned}$$

pois  $a_\lambda \cdot b_\mu = b_\mu \cdot a_\lambda$  para  $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$ .

iii) **Distributiva:**  $f(x) \cdot [g(x) + h(x)] = f(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot h(x)$

*Demonstração:*

$$\begin{aligned}
f(x) \cdot [g(x) + h(x)] &= \left( \sum_{j=0}^n a_j x^j \right) \cdot \left( \sum_{j=0}^m (b_j + c_j) x^j \right) \\
&= \sum_{j=0}^{n+m} \left( \sum_{j=\lambda+\mu} a_\lambda \cdot (b_\mu + c_\mu) \right) x^j \\
&= \sum_{j=0}^{n+m} \left( \sum_{j=\lambda+\mu} a_\lambda \cdot b_\mu + a_\lambda \cdot c_\mu \right) x^j \\
&= \sum_{j=0}^{n+m} \left( \sum_{j=\lambda+\mu} a_\lambda \cdot b_\mu \right) x^j + \sum_{j=0}^{n+m} \left( \sum_{j=\lambda+\mu} a_\lambda \cdot c_\mu \right) x^j \\
&= f(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot h(x)
\end{aligned}$$

iv) **Elemento Neutro:**  $f(x) \cdot 1 = f(x)$

*Demonstração:* seja  $c(x) = \sum_{j=0}^n c_j x^j$ , vamos tomar que  $f(x) \cdot c(x) = f(x)$  para qual-

quer  $f(x) = \sum_{j=0}^n a_j x^j$ . Observamos que os coeficientes dos fatores devem satisfazer  $a_j \cdot c_j = a_j$ , logo  $c_j = 1$ , para todo  $0 \leq j \leq n$ . Logo podemos concluir que o elemento neutro para a multiplicação de polinômios é o polinômio constante  $c(x) = 1$ .

Vamos agora introduzir o conceito de divisibilidade entre polinômios reais: sejam  $f(x)$  e  $g(x)$  polinômios reais. Quando existe um polinômio real  $h(x)$ , tal que  $f(x) = g(x) \cdot h(x)$ , podemos dizer que  $f(x)$  é múltiplo de  $g(x)$ . Se  $g(x) \neq 0$ , podemos dizer ainda que  $g(x)$  divide  $f(x)$ .

Por outro lado, temos que, se  $g(x)$  divide  $f(x)$ , então  $\text{gr}(g(x)) \leq \text{gr}(f(x))$ . Observe: Como  $g(x)$  divide  $f(x)$  e ambos são não nulos, existe um  $h(x)$  tal que  $f(x) = g(x) \cdot h(x)$ . Pela propriedade multiplicativa do grau, temos que:

$$\begin{aligned}\text{gr}(f(x)) &= \text{gr}(g(x) \cdot h(x)) \\ &= \text{gr}(g(x)) + \text{gr}(h(x)) \geq \text{gr}(g(x)).\end{aligned}$$

Temos ainda que, dividir o polinômio  $f(x)$  por  $g(x)$ , significa encontrar dois polinômios reais,  $q(x)$  e  $r(x)$  que satisfaçam as seguintes condições:

- i)  $f(x) = g(x) \cdot q(x) + r(x)$ ;
- ii) o grau de  $r(x)$  não pode ser igual nem maior de  $g(x)$  ou então  $r(x) = 0$ .

Assim, dizemos que o polinômio  $g(x)$  divide o polinômio  $f(x)$  quando  $r(x) = 0$ . Chamamos  $f(x)$  de dividendo,  $g(x)$  de divisor,  $q(x)$  de quociente e  $r(x)$  de resto.

Para efetuar a divisão de polinômios pode-se utilizar o método da chave, semelhante ao empregado para números inteiros:

$$\begin{array}{c|c} f(x) & g(x) \\ \hline & q(x) \\ & \vdots \\ & \hline r(x) \end{array}$$

Para ilustrar o uso deste método, apresenta-se o exemplo a seguir:

**Exemplo:** efetue a divisão de  $f(x) = 12x^3 + 4x^2 - 8x$  por  $g(x) = 4x$  pelo método da

chave.

$$\begin{array}{r}
 12x^3 & +4x^2 & -8x & | & 4x \\
 -12x^3 & & & | & 3x^2 + x - 2 \\
 \hline
 0 & +4x^2 & & | & \\
 & -4x^2 & & | & \\
 \hline
 0 & -8x & & | & \\
 & +8x & & | & \\
 \hline
 0 & & & | & 
 \end{array}$$

### 2.3.1 Derivada de Polinômios

O objetivo neste trabalho é apresentar a derivada apenas para funções polinomiais. No entanto, para isso, é preciso de uma definição formal de derivada para uma função real qualquer.

Seja  $y = f(x)$  uma função definida em um intervalo aberto. A derivada da função  $f(x)$ , denotada por  $f'(x)$ , é definida pela seguinte função:

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h},$$

caso este limite exista. Se o limite existir, dizemos que a função  $f$  é uma função derivável.

Segundo [3], temos que a derivada de um polinômio real  $f(x)$  é o polinômio definido por:

$$f'(x) = D(f(x)) = \sum_{j=1}^n j a_j x^{j-1} = a_1 + 2a_2 x + \dots + n a_n x^{n-1}.$$

Sejam  $f(x)$  e  $g(x)$  funções em  $\mathbb{R}$  e  $a \in \mathbb{R}$ , temos as seguintes propriedades para a derivada:

i)  $D(f(x) + g(x)) = D(f(x)) + D(g(x))$

*Demonastração:*

$$\begin{aligned}
 (f + g)(x + h) - (f + g)(x) &= f(x + h) + g(x + h) - (f(x) + g(x)) \\
 &= (f(x + h) - f(x)) + (g(x + h) - g(x))
 \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
D(f(x) + g(x)) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(f+g)(x+h) - (f+g)(x)}{h} \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} \left[ \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \right] \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \\
&= D(f(x)) + D(g(x))
\end{aligned}$$

ii)  $D(f(x) \cdot g(x)) = D(f(x)) \cdot g(x) + f(x) \cdot D(g(x))$

*Demonstração:*

Observe que:

$$\begin{aligned}
f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x) &= \\
&= f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x+h) + f(x)g(x+h) - f(x)g(x).
\end{aligned}$$

Reorganizando os termos, temos que:

$$f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x) = (f(x+h) - f(x))g(x+h) + f(x)(g(x+h) - g(x)).$$

Pela definição de derivada, temos:

$$\begin{aligned}
D(f(x) \cdot g(x)) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x)}{h} \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(f(x+h) - f(x))g(x+h)}{h} + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x)(g(x+h) - g(x))}{h} \\
&= \left( \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(f(x+h) - f(x))}{h} \right) g(x) + \left( \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(g(x+h) - g(x))}{h} \right) f(x) \\
&= D(f(x)) \cdot g(x) + f(x) \cdot D(g(x)).
\end{aligned}$$

iii)  $D(af(x)) = aD(f(x))$

*Demonstração:* se  $a$  é uma constante e  $f$  é derivável, temos pela propriedade anterior, que:

$$D(af(x)) = D(a) \cdot f(x) + a \cdot D(f(x)).$$

Como a derivada da constante é 0, temos que:

$$D(af(x)) = aD(f(x))$$

$$\text{iv)} \ D\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{D(f(x))g(x) - f(x)D(g(x))}{g^2(x)}$$

*Demonstração:* seja  $h(x) = \frac{f(x)}{g(x)} \Rightarrow f(x) = h(x) \cdot g(x)$ . Pela propriedade ii, temos que:

$$D(f(x)) = D(g \cdot h)(x) = D(g(x)) \cdot h(x) + g(x) \cdot D(h(x))$$

$$\begin{aligned} g(x) \cdot D(h(x)) &= D(f(x)) - D(g(x)) \cdot h(x) \\ D(h(x)) &= \frac{D(f(x)) - D(g(x)) \cdot h(x)}{g(x)}. \end{aligned}$$

Como  $h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ , temos que:

$$\begin{aligned} D\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) &= \frac{D(f(x)) - D(g(x)) \cdot \frac{f(x)}{g(x)}}{g(x)} \\ &= \frac{\frac{D(f(x))g(x) - D(g(x)) \cdot f(x)}{g(x)}}{g(x)} \\ &= \frac{D(f(x)) \cdot g(x) - f(x) \cdot D(g(x))}{g^2(x)}. \end{aligned}$$

$$\text{v)} \ D(f(x)) = D(x^n) = nx^{n-1}$$

*Demonstração:* dada a função  $f(x) = x^n$  é derivável para todo  $x \in \mathbb{R}$  se  $n \geq 0$  e derivável para  $x \in \mathbb{R}^*$  se  $n < 0$ . Se  $n = 0$  o resultado segue imediatamente, pois  $x^0 = 1$ , cuja derivada é 0. Provaremos o caso  $n > 0$  por indução. Vale para  $n = 1$ , pois:

$$f(x) = x^1 = x \Rightarrow D(f(x)) = 1 = 1 \cdot x^{1-1}$$

Suponha que o resultado vale para  $n = k$ , ou seja,  $f(x) = x^k$  é derivável e  $D(f(x)) = k \cdot x^{k-1}$ , então, aplicando a regra do produto, temos que  $g(x) = x^{k+1} = x \cdot x^k$  é derivável e

$$(x^{k+1}) \cdot (x \cdot x^k)' = x' \cdot x^k + x \cdot (x^k)' = x^k + kx \cdot x^{k-1} = x^k + kx^k = (k+1) \cdot x^k,$$

o que completa a prova do caso  $n > 1$ . Agora suponha  $n < 0$ , e tome  $n = -m$  com  $m > 0$ , temos que

$$x^n = x^{-m} = \frac{1}{x^m}$$

Se  $x \neq 0$ , então pela derivada do quociente,  $\frac{1}{x^m}$  é derivável e temos que

$$\left(\frac{1}{x^m}\right)' = \frac{1'(x^m) - 1(x^m)'}{(x^m)^2} = \frac{-mx^{m-1}}{x^{2m}} = -mx^{-m-1} = nx^{n-1}$$

### 2.3.2 Polinômios e suas raízes

Nesta seção são apresentados alguns resultados interessantes sobre a relação entre polinômios e suas raízes.

Seja  $f(x)$  um polinômio em  $\mathbb{R}$ , então  $\beta \in \mathbb{R}$  é uma raiz de  $f(x)$  se, e somente se,  $x - \beta$  divide  $f(x)$ . Para provarmos essa afirmação vamos supor que  $f(\beta) = 0$ . Pela divisão de  $f(x)$  por  $x - \beta$ , existem os polinômios  $q(x), r(x) \in \mathbb{R}$ , tais que:

$$f(x) = q(x)(x - \beta) + r(x),$$

onde  $r(x) = 0$  ou  $\text{gr}(r(x)) < \text{gr}(x - \beta) = 1$ . Assim  $r(x) = r$  pertence a  $\mathbb{R}$  e  $f(x) = q(x)(x - \beta) + r$ . Analisando  $f(x)$  em  $\beta$ , temos que:

$$0 = f(\beta) = q(\beta)(\beta - \beta) + r = r \Rightarrow r = 0,$$

mostrando que  $x - \beta$  divide  $f(x)$ . Reciprocamente, suponhamos que  $x - \beta$  divide  $f(x)$ , então existe  $q(x) \in \mathbb{R}$  tal que  $f(x) = q(x)(x - \beta)$ . Portanto:

$$f(\beta) = q(\beta)(\beta - \beta) = q(\beta) \cdot 0 = 0.$$

Esta proposição é conhecida como teste da raiz. A seguir, veremos uma propriedade que nos dá uma limitação sobre o número de raízes de um polinômio.

Seja  $f(x)$  um polinômio em  $\mathbb{R}$ , se  $f(x)$  tem grau  $n$ , então  $f(x)$  tem no máximo  $n$  raízes em  $\mathbb{R}$ . Faremos a demonstração desta preposição por indução sobre  $n = \text{gr}(f(x))$ :

Se  $n = 0$ , então  $f(x) = a \neq 0$  não tem raízes em  $\mathbb{R}$  e o resultado é válido.

Seja  $n \geq 0$ . Suponhamos o resultado verdadeiro para polinômios de grau  $n$  e seja  $f(x)$  um polinômio com  $\text{gr}(f(x)) = n + 1$ . Se  $f(x)$  não tem raízes em  $\mathbb{R}$ , nada há a demonstrar. Seja  $\beta \in \mathbb{R}$  uma raiz de  $f(x)$ . Então pela propriedade anterior, sabemos que  $x - \beta$  divide  $f(x)$ , logo existe  $q(x)$  real, tal que

$$f(x) = q(x)(x - \beta), \text{ com } \text{gr}(q(x)) = n.$$

Por hipótese de indução,  $q(x)$ , tem no máximo  $n$  raízes em  $\mathbb{R}$ . Observe que:

$$\begin{aligned} \alpha \in \mathbb{R} \text{ é raiz de } f(x) &\Leftrightarrow 0 = f(\alpha) = q(\alpha)(\alpha - \beta) \\ &\Leftrightarrow q(\alpha) = 0 \text{ ou } \alpha - \beta = 0 \\ &\Leftrightarrow \alpha \text{ é raiz de } q(x) \text{ ou } \alpha = \beta. \end{aligned}$$

Portanto,  $f(x)$  tem no máximo  $n + 1$  raízes em  $\mathbb{R}$ .

Como exemplo de aplicação desta propriedade, apresentaremos a seguir o polinômio interpolador de Lagrange, o qual será utilizado na próxima seção para fazer as aproximações de funções.

Sejam  $a_j, b_j \in \mathbb{R}$ ,  $j = 1, 2, \dots, n$ , com  $a_j$  dois a dois e os  $b_j$ , não nulos, temos o seguinte polinômio:

$$p_j(x) = b_j \cdot \frac{(x - a_1) \cdots (x - a_{j-1})(x - a_{j+1}) \cdots (x - a_n)}{(a_j - a_1) \cdots (a_j - a_{j-1})(a_j - a_{j+1}) \cdots (a_j - a_n)}, \quad j = 1, 2, \dots, n,$$

o qual é conhecido como polinômio interpolador de Lagrange.

Segue que  $p(x) = \sum_{j=1}^n p_j(x)$  é o único polinômio de grau menor que  $n$ , tal que  $p(a_j) = b_j, j = 1, \dots, n$ . De fato, o polinômio  $p(x)$  tem grau menor do que  $n$ , tal que  $p(a_j) = b_j$ , pois:

$$p_j(a_k) = \begin{cases} 0, & \text{se } j \neq k \\ b_j, & \text{se } j = k. \end{cases}$$

Para provar a unicidade, suponhamos que  $q(x)$  seja um polinômio que satisfaça as mesmas condições de  $p(x)$ . Logo,  $p(x) - q(x)$  se anula em  $a_1, \dots, a_n$ . Como esse polinômio tem grau menor do que  $n$  e tem  $n$  raízes, ele é nulo, logo  $p(x) = q(x)$ .

Outra proposição que associa polinômios e suas raízes é apresentada a seguir.

Seja  $f(x)$  um polinômio real, com  $\text{gr}(f(x)) = n \geq 1$ . Então existem  $\beta_1, \dots, \beta_n \in \mathbb{R}$ , não necessariamente distintos, e  $a \in \mathbb{R}$  tais que:

$$f(x) = a(x - \beta_1) \cdots (x - \beta_n).$$

Para provarmos essa proposição, vamos usar indução sobre o grau de  $f(x)$ . Se  $\text{gr}(f(x)) = 1$ , então  $f(x) = ax + b$ , com  $a, b \in \mathbb{R}$  e  $a \neq 0$ , logo  $f(x) = a(x + a^{-1}b)$  e  $\beta_1 = -a^{-1}b$ .

Seja  $n \geq 1$  e suponhamos o resultado válido para polinômios de grau  $n$ . Seja  $f(x)$  tal que  $\text{gr}(f(x)) = n + 1$ . Por hipótese,  $f(x)$  tem uma raiz  $\beta \in \mathbb{R}$ . Como visto anteriormente,  $f(x) = q(x) \cdot (x - \beta)$ , para algum  $q(x)$  real e  $\text{gr}(q(x)) = n$ . Por hipótese de indução, existem  $a, \beta_1, \dots, \beta_n \in \mathbb{R}$ , com  $a \neq 0$ , tais que  $q(x) = a(x - \beta_1) \cdots (x - \beta_n)$ .

Logo,

$$f(x) = a(x - \beta_1) \cdots (x - \beta_n)(x - \beta).$$

Tomando  $\beta_{n+1} = \beta$ , concluímos a demonstração.

Observe que, na proposição anterior,  $a$  é o coeficiente líder de  $f(x)$ . Além disso,  $\beta_1, \dots, \beta_s$ ,  $1 \leq s \leq n$ , são suas raízes distintas e  $\beta_j$  ocorre com multiplicidade  $r_j$ , para cada  $j = 1, \dots, s$ , da forma:

$$f(x) = a(x - \beta_1)^{r_1} \cdots (x - \beta_s)^{r_s}$$

onde  $r_1 + \dots + r_s = n$ .

## 2.4 Resolução de Problemas

A resolução de problemas tem sido apontada como forma de desenvolver nos alunos a capacidade de pensar matematicamente, com isso faremos uma análise de algumas

situações que envolvem polinômios e/ou funções polinomiais em diferentes anos do ensino fundamental e médio.

**i) Situação de aprendizagem aplicável ao 7º ano do Ensino Fundamental**

Escreva a equação que representa o problema e descubra a resposta, se houver:  
“Qual o é o número cujo o triplo somado com 5 resulta em 17?”

*Resolução:*  $3x + 5 = 17$ . O valor do número desejado é 4.

O objetivo desta situação de aprendizagem é introduzir alguns procedimentos para resolver equações de primeiro grau com uma incógnita. A existência da letra cujo valor se quer descobrir (incógnita) faz da equação uma pergunta na linguagem corrente. O aluno é capaz de responder a esta pergunta usando apenas um raciocínio aritmético, ou seja, ele pode pensar que se o triplo de um número somado com 5 resulta em 17, então o triplo deste número é 12 e, portanto, a resposta é o 4. Mentalmente, o aluno consegue realizar essa operação inversa em equações simples, com coeficientes inteiros. A ideia que está por trás do raciocínio é desfazer a equação por meio de operações inversas até se obter o valor da incógnita.

**ii) Situação de aprendizagem aplicável ao 8º ano do Ensino Fundamental**

Represente geometricamente o produto notável  $(x + a)(x + b)$  e encontre uma expressão equivalente.

*Resolução:* A ideia inicial seria propor aos alunos que interpretem esse produto como sendo a área de um retângulo de lados  $x + a$  e  $x + b$ , posteriormente pede-se para os alunos analisarem os lados como sendo uma soma de um lado cujo a medida é  $x$  e mais uma quantia mede  $a$ , enquanto o outro lado mede  $x$  e mais uma quantidade mede  $b$ . A partir disso deve-se observar que temos um quadrado de lado  $x$ , um retângulo de lados  $a$  e  $b$ , um retângulo de lados  $a$  e  $x$ , um retângulo de lados  $b$  e  $x$  e outro retângulo de lado  $a$  e  $b$  como na Fig. 2.1.

Ao verificar geometricamente o produto notável, temos que a área do retângulo é dada pela expressão  $x^2 + xb + xa + ab$ , com isso levamos os alunos a observar que a área total

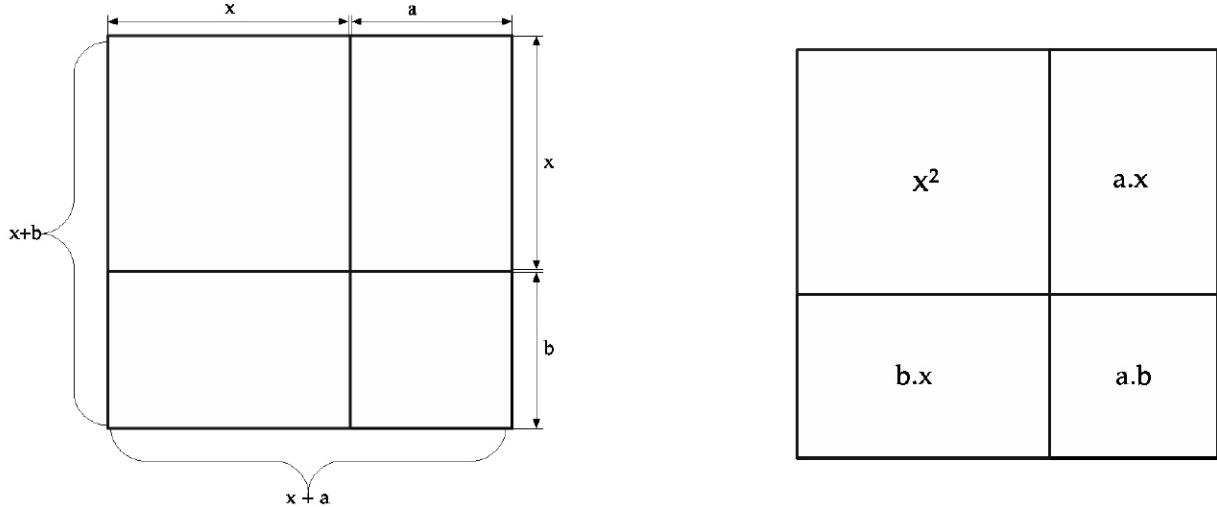


Figura 2.1: Representação geométrica do produto notável  $(x + a)(x + b)$ .

é a soma de quatro áreas menores. E ainda temos que a expressão  $xa + xb$ , pode ser escrita (interpretada) como  $x(a + b)$ , pois conforme a ementa curricular, o conteúdo de produtos notáveis é anterior a este, levando os alunos a concluir que  $(x+a) \cdot (x+b) = x^2 + x(a+b) + ab$ .

Por outro lado, podemos reorganizar a figura acima com os retângulos de áreas  $xa$  e  $xb$ , os quais juntos formam um retângulo de lados  $x$  e  $a + b$ , como mostra a Fig. 2.2.

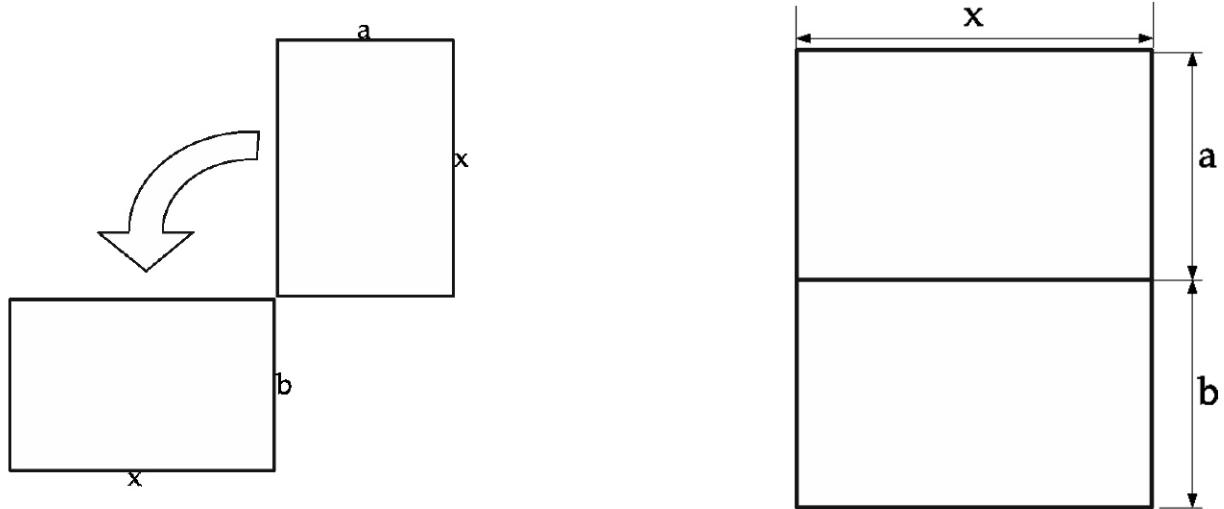


Figura 2.2: Representação geométrica dos termos  $xa$  e  $xb$ .

Uma observação importante é que na expansão do produto  $(x+a) \cdot (x+b)$  o coeficiente de  $x$  é a soma de  $a + b$  e o termo independente é o produto dos mesmos termos  $ab$ . Esse

resultado também pode ser retomado quando for trabalhado soluções de equação do 2º grau.

Outra situação que pode ser trabalhada é a relação do trinômio quadrado perfeito. Para isso, seja  $a = b$ . Temos que  $(x+a)^2 = x^2 + 2xa + a^2$  e que a representação geométrica é semelhante a anterior.

**iii) Situação de aprendizagem aplicável ao 8º ano do Ensino Fundamental**

Um canteiro na forma de um quadrado foi reduzido de modo a ser contornado por uma calçada com 3 metros de largura, conforme a Fig. 2.3. Com isso, sua área passou a ser de  $169 \text{ m}^2$ . Qual era a medida da área original desse canteiro?

*Resolução:* Seja  $x$  a medida do lado do quadrado original. Reduzindo 3m de cada lado, o quadrado interno terá  $(x - 6)\text{m}$  como medida de lado, como mostra a Fig. 2.3:

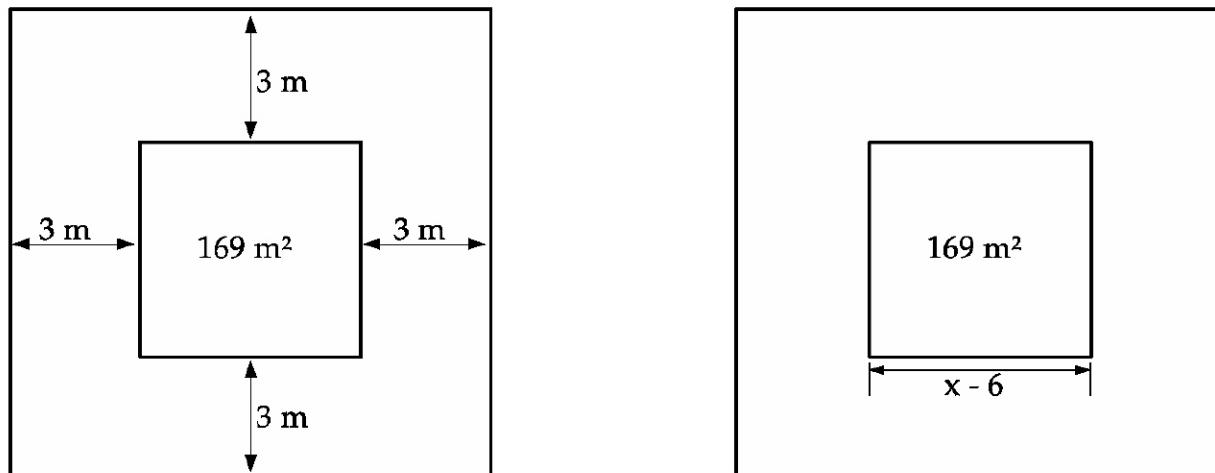


Figura 2.3: Representação geométrica da situação de aprendizagem aplicável ao 8º ano.

Logo, é possível escrever a seguinte equação:  $(x-6)^2 = 169$ , a qual pode ser resolvida por meio de cálculo mental. Perceba que 169 é o quadrado de 13, assim,  $x - 6 = 13$ , logo  $x = 19\text{m}$ . Portanto, a área do canteiro original é de 361 metros ao quadrado.

Temos ainda que esclarecer que  $(-13)^2 = 169$ , no entanto esse resultado não serve por se tratar de medida de comprimento.

**iv) Situação de aprendizagem aplicável ao 8º ano do Ensino Fundamental**

(ESPM-SP) Do ano de 2000 ( $x = 0$ ) até o ano de 2006 ( $x = 6$ ), o número de

automóveis numa cidade variou conforme a função  $V(x) = 9x + 100$ , enquanto a população variou, nesse mesmo período, segundo o polinômio  $P(x) = 1,8x^2 + 47x + 300$ , sendo  $V(x)$  e  $P(x)$  dados em milhares de unidades. Determine a função que melhor representa a variação do número de habitantes por automóvel nesse período:

*Resolução:* queremos obter a variação do número de habitantes por automóveis, ou seja, o quociente entre  $P(x)$  e  $V(x)$ . Utilizando o método da chave visto anteriormente, temos:

$$\begin{array}{r} 1,8x^2 & 47x & +300 & | 9x + 100 \\ -1,8x^2 & -20x & & | 0,2x + 3 \\ \hline 27x & +300 & & \\ -27x & -300 & & \\ \hline 0 & & & \end{array}$$

Como vimos o resto da divisão é igual a 0, ou seja  $P(x)$  é divisível por  $V(x)$ . Logo, a melhor função que representa a variação do número de habitantes por automóveis no período indicado é  $y = 0,2x + 3$ .

v) **Situação de aprendizagem aplicável a 1<sup>a</sup> série do Ensino Médio**

(PUC-BH) A função  $R(t) = at + b$  expressa o rendimento  $R$ , em milhares de reais, de certa aplicação. O tempo  $t$  é contado em meses.  $R(1) = -1$  e  $R(2) = 1$ . Nessas condições, determine o rendimento obtido nessa aplicação em quatro meses.

*Resolução:* como  $R(1) = -1$ , então  $R(1) = a \cdot (1) + b \Rightarrow -1 = a + b \Rightarrow a + b = -1$ .

Temos ainda que  $R(2) = 1$ , então  $R(2) = a \cdot (2) + b \Rightarrow 1 = 2a + b \Rightarrow 2a + b = 1$ .

Com isso podemos construir o seguinte sistema de equações:

$$\begin{cases} a + b = -1 \\ 2a + b = 1 \end{cases}$$

Isolando  $b$  na 1<sup>a</sup> equação, temos que:  $a + b = -1 \Rightarrow b = -1 - a$ . Em seguida, substituindo

o valor de  $b$  na 2<sup>a</sup>, temos que:

$$\begin{aligned}2a + b &= 1 \\2a + (-1 - a) &= 1 \\2a - 1 - a &= 1 \\a &= 1 + 1 \\a &= 2.\end{aligned}$$

Substituindo o valor de  $a$  na 1<sup>a</sup> equação, temos que:

$$\begin{aligned}b &= -1 - a \\b &= -1 - 2 \\b &= -3.\end{aligned}$$

Portanto, a função será dada pela seguinte lei de formação  $R(t) = 2t - 3$ . Fazendo  $R(4)$ , temos:

$$\begin{aligned}R(4) &= 2 \cdot 4 - 3 \\R(4) &= 8 - 3 \\R(4) &= 5.\end{aligned}$$

Com isso, concluímos que o rendimento obtido nessa aplicação será de R\$5000,00.

**vi) Situação de aprendizagem aplicável a 3<sup>a</sup> série do Ensino Médio**

Seja  $f(x) = 3x^3 - 3x^2 + 4x + 5$ ,  $g(x) = 2x^2 - 6x - 1$  e  $h(x) = 3x^3 + 5x^2 - 3x + 2$ , determine  $f(x) + g(x)$ ,  $f(x) + h(x)$  e  $g(x) + h(x)$ :

Resolução:

$$\begin{aligned}
 f(x) + g(x) &= (3 - 0)x^3 + (-3 + 2)x^2 + (4 + (-6))x + (5 + (-1)) \\
 &= 3x^3 - x^2 - 2x + 4
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 f(x) + h(x) &= (3 + (-3))x^3 + (-3 + 5)x^2 + (4 + (-3))x + (5 + 2) \\
 &= 0x^3 + 2x^2 + x + 7 \\
 &= 2x^2 + x + 7
 \end{aligned}$$

A adição de polinômios pode ser feita facilmente escrevendo os polinômios numa tabela, onde nas primeiras linhas estão cada um dos polinômios, com as potências  $x^j$  em ordem decrescente, e na última linha o resultado da adição, de maneira similar à adição de números reais. Observe como fica o cálculo de  $g(x) + h(x)$  através desta tabela:

$$\begin{array}{r}
 & 2x^2 & -6x & -1 \\
 (+) & -3x^3 & +5x^2 & -3x & +2 \\
 \hline
 & -3x^3 & +7x^2 & -9x & +1
 \end{array}$$

Logo,  $g(x) + h(x) = -3x^3 + 7x^2 - 9x + 1$ .

**vii) Situação de aprendizagem aplicável a 3<sup>a</sup> série do Ensino Médio**

Seja  $g(x) = x^2 + 2x + 3$  e  $h(x) = -2x^3 - x + 2$ , determine  $h(x) \cdot g(x)$ :

Resolução:

$$\begin{array}{r}
 (1) & -2x^3 & -0x^2 & -x & +2 \\
 (2) & (x) & & x^2 & 2x & +3 \\
 \hline
 (3) & & -6x^3 & +0x^2 & -3x & 6 \\
 (4) & (+) & -4x^4 & 0x^3 & -2x^2 & 4x \\
 (5) & & -4x^5 & +0x^4 & -2x^3 & +4x^2 \\
 \hline
 (6) & & -4x^5 & -4x^4 & -8x^3 & +2x^2 & +x & +6
 \end{array}$$

Escrevemos  $h(x)$  na primeira linha (1) e  $g(x)$  na segunda (2), com as potências de  $x$  em ordem decrescente. Em seguida, é feita a multiplicação usando a propriedade

distributiva e calculando a multiplicação de cada termo do polinômio  $g(x)$  pelo polinômio  $h(x)$ , em ordem crescente das potências de  $x$ , organizando os resultados na tabela, nas linhas subsequentes, em ordem crescente das potências de  $x$ .

Em (3) está o cálculo de  $3 \cdot (-2x^3 - x + 2)$ ; em (4) o cálculo de  $2x \cdot (-2x^3 - x + 2)$ ; em (5), o cálculo de  $x^2 \cdot (-2x^3 - x^2 + 2)$ . A última linha da tabela (6) é a adição (3) + (4) + (5) das parcelas obtidas. Portanto, temos que:

$$h(x) \cdot g(x) = -4x^5 - 4x^4 - 8x^3 + 2x^2 + x + 6.$$



# 3 Aproximações Polinomiais

Neste capítulo será abordado o assunto de aproximação de funções por polinômios, que é uma das estratégias mais antigas da Análise Numérica, sendo muito utilizada até hoje. A vantagem em se usar polinômios para aproximar funções mais complexas está no fato de que os polinômios são facilmente computáveis, pois suas derivadas e integrais são novamente polinômios e suas raízes são relativamente fáceis de se encontrar. Portanto, é vantajoso substituir uma função complicada por um polinômio que a represente.

## 3.1 Introdução

A Tabela 3.1 fornece a população brasileira entre 1950 e 2010:

Ano ( $t$ )	Fonte: IBGE [17]						
	1950	1960	1970	1980	1990	2000	2010
População ( $P(t)$ ) (em milhares)	51941	70070	93139	119002	146825	169799	190732

Tabela 3.1: População brasileira entre os anos de 1950 e 2010.

Será que esses dados podem fornecer uma estimativa para a população, por exemplo, em 1965? Ou 2007?

Este tipo de aproximação pode ser obtida por uma função que ajuste os dados fornecidos, processo este denominado interpolação. De acordo com Burden [16], a classe de funções mais utilizada para interpolação são as funções polinomiais e, por isso, estudaremos aqui interpolação polinomial.

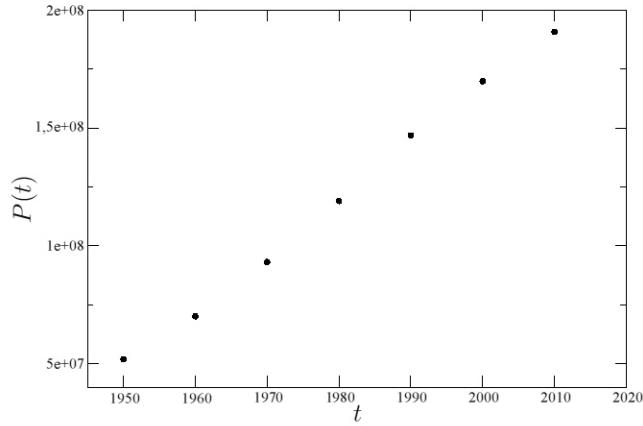


Figura 3.1: População brasileira entre os anos de 1950 e 2010.

Segundo Franco [6], o Teorema de Weirstrass nos garante que toda função contínua pode ser arbitrariamente aproximada por um polinômio. Tais métodos podem ser utilizados nas seguintes situações:

- i) a expressão analítica de  $f(x)$  não é conhecida, isto é, sabemos apenas seu valor em alguns pontos  $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$ . Esta situação acontece frequentemente quando trabalha-se com dados experimentais, e necessita-se manipular  $f(x)$ , como, por exemplo, calcular seu valor num ponto ou sua integral num determinado intervalo, entre outros;
- ii) quando a  $f(x)$  tem uma expressão analítica tal que operações como a diferenciação e integração são difíceis (ou até mesmo impossíveis) de serem realizadas.

A interpolação polinomial consiste em, dados  $n + 1$  pontos distintos da função  $y = f(x)$ ,  $(x_0, y_0), (x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$ , obter um polinômio  $P_n(x)$ , de grau menor ou igual a  $n$ , que aproxima  $f(x)$ , tal que:

$$P_n(x_0) = y_0, P_n(x_1) = y_1, P_n(x_2) = y_2, \dots, P_n(x_n) = y_n.$$

Pode-se provar que  $P_n(x)$  existe e é único, desde que os pontos  $x_0, x_1, \dots, x_n$  sejam distintos.

Seja

$$P_n(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$$

um polinômio de grau no máximo  $n$ , com coeficientes  $a_0, a_1, \dots, a_n$  a serem determinados. Assim, podemos montar o seguinte sistema:

$$\left\{ \begin{array}{l} a_0 + a_1 x_0 + \dots + a_n x_0^n = y_0 \\ a_0 + a_1 x_1 + \dots + a_n x_1^n = y_1 \\ \vdots \\ a_0 + a_1 x_n + \dots + a_n x_n^n = y_n \end{array} \right.$$

o qual é um sistema linear para os coeficientes  $a_0, a_1, \dots, a_n$ , cujo determinante, conhecido como determinante de Vandermonde, é dado por:

$$V = V(x_0, x_1, \dots, x_n) = \begin{vmatrix} 1 & x_0 & \dots & x_0^n \\ 1 & x_1 & \dots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & \dots & x_n^n \end{vmatrix} \quad (3.1)$$

Temos ainda que, para calcular  $V$ , devemos considerar  $V(x)$  uma função definida da seguinte maneira:

$$V(x) = V(x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x) = \begin{vmatrix} 1 & x_0 & \dots & x_0^n \\ 1 & x_1 & \dots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_{n-1} & \dots & x_{n-1}^n \\ 1 & x & \dots & x^n \end{vmatrix} \quad (3.2)$$

Com isso,  $V(x)$  é um polinômio de grau menor ou igual a  $n$ . Temos ainda que  $V(x)$  se anula em  $x_0, x_1, \dots, x_{n-1}$ , logo, podemos escrever  $V(x)$  como:

$$V(x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x) = A(x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_{n-1}),$$

onde  $A$  depende de  $x_0, x_1, \dots, x_{n-1}$ .

Para calcular  $A$ , desenvolvemos (3.2) em função dos elementos da última linha e, observando que o coeficiente de  $x^n$  é  $V(x_0, x_1, \dots, x_{n-1})$ , então:

$$V(x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x) = V(x_0, x_1, \dots, x_{n-1})(x - x_0) \cdots (x - x_{n-1}).$$

Substituindo  $x$  por  $x_n$ , temos a seguinte recorrência:

$$V(x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x_n) = V(x_0, x_1, \dots, x_{n-1})(x_n - x_0) \dots (x_n - x_{n-1}).$$

Observe que  $V(x_0, x_1) = x_1 - x_0$  e que  $V(x_0, x_1, x_2) = (x_1 - x_0)(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)$ , e assim sucessivamente, temos que:

$$V(x_0, x_1, \dots, x_n) = \prod_{i>j} (x_i - x_j).$$

Como, por hipótese,  $x_0, x_1, \dots, x_n$  são pontos distintos, então  $V \neq 0$  e o sistema (??) possui uma e somente uma solução,  $a_0, a_1, \dots, a_n$ . Portanto, dados  $n + 1$  pontos distintos  $x_0, x_1, \dots, x_n$  e  $n+1$  valores  $f(x_0) = y_0, f(x_1) = y_1, \dots, f(x_n) = y_n$  de uma função  $y = f(x)$ , existe um e somente um polinômio  $P_n(x)$  de grau no máximo  $n$ , tal que:

$$P_n(x_k) = f(x_k), \quad k = 0, 1, \dots, n.$$

A seguir, apresenta-se os métodos de interpolação polinomial que foram estudados neste trabalho, a saber: Fórmula de Lagrange, Interpolação Linear, Fórmula de Newton (Diferenças Divididas) e Spline.

## 3.2 Fórmula de Lagrange

Dados  $x_0, x_1, \dots, x_n, n + 1$  pontos distintos e  $y_i = f(x_i), i = 0, 1, \dots, n$ , queremos que, para cada  $i$ , a condição  $P_n(x_i) = y_i$  seja satisfeita, ou seja:

$$P_n(x_i) = y_0 L_0(x_i) + y_1 L_1(x_i) + \dots + y_n L_n(x_i) = y_i. \quad (3.3)$$

Temos que, uma forma mais simples de satisfazer esta condição é estabelecer que:

$$L_k(x_i) \begin{cases} 0, & \text{se } k \neq i \\ 1, & \text{se } k = i. \end{cases} \quad (3.4)$$

Para isso, vamos definir  $L_k(x)$  por:

$$L_k(x) = \frac{(x - x_0) \cdot (x - x_1) \cdots (x - x_{k-1}) \cdot (x - x_{k+1}) \cdots (x - x_n)}{(x_k - x_0) \cdot (x_k - x_1) \cdots (x_k - x_{k-1}) \cdot (x_k - x_{k+1}) \cdots (x_k - x_n)}. \quad (3.5)$$

Podemos verificar que  $L_k(x_k) = 1$  e que  $L_k(x_i) = 0$ , se  $i \neq k$ . Temos ainda que o numerador da expressão (3.5) é um produto de  $n$  fatores  $(x - x_i)$ ,  $i = 0, 1, \dots, n, i \neq k$ . Logo,  $L_k(x)$  é um polinômio de grau  $n$  e, consequentemente,  $P_n(x)$  é um polinômio de grau menor ou igual a  $n$ .

Ainda, para  $x = x_i$ ,  $i = 0, 1, \dots, n$ , temos que:

$$P_n(x_i) = \sum_{k=0}^n y_k L_k(x_i) = y_i L_i(x_i) = y_i.$$

Portanto, a forma de Lagrange para o polinômio interpolador é dada por:

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^n y_k L_k(x).$$

### Exemplo 1

Considere a tabela a seguir:

$x$	0	3	6
$f(x)$	5	0	5

Determine o polinômio de interpolação para os pontos da tabela utilizando a fórmula de Lagrange.

*Solução:* Como temos 3 pontos, vamos obter um polinômio de grau 2. Pela fórmula de Lagrange, temos que:

$$P_2(x) = y_0 L_0(x) + y_1 L_1(x) + y_2 L_2(x),$$

onde

$$\begin{aligned} L_0(x) &= \frac{(x - x_1) \cdot (x - x_2)}{(x_0 - x_1) \cdot (x_0 - x_2)} = \frac{(x - 3) \cdot (x - 6)}{(0 - 3) \cdot (0 - 6)} = \frac{x^2 - 9x + 18}{18} \\ L_1(x) &= \frac{(x - x_0) \cdot (x - x_2)}{(x_1 - x_0) \cdot (x_1 - x_2)} = \frac{(x - 0) \cdot (x - 6)}{(3 - 0) \cdot (3 - 6)} = \frac{x^2 - 6x}{-9} \\ L_2(x) &= \frac{(x - x_0) \cdot (x - x_1)}{(x_2 - x_0) \cdot (x_2 - x_1)} = \frac{(x - 0) \cdot (x - 3)}{(6 - 0) \cdot (6 - 3)} = \frac{x^2 - 3x}{18} \end{aligned}$$

Assim, pela fórmula de Lagrange, o polinômio de interpolação é dado por:

$$P_2(x) = 5 \cdot \left( \frac{x^2 - 9x + 18}{18} \right) + 0 \cdot \left( \frac{x^2 - 6x}{-9} \right) + 5 \cdot \left( \frac{x^2 - 3x}{18} \right)$$

Ordenando os termos semelhantes, temos que  $P_2(x) = \frac{5x^2}{9} - \frac{10x}{3} + 5$ .

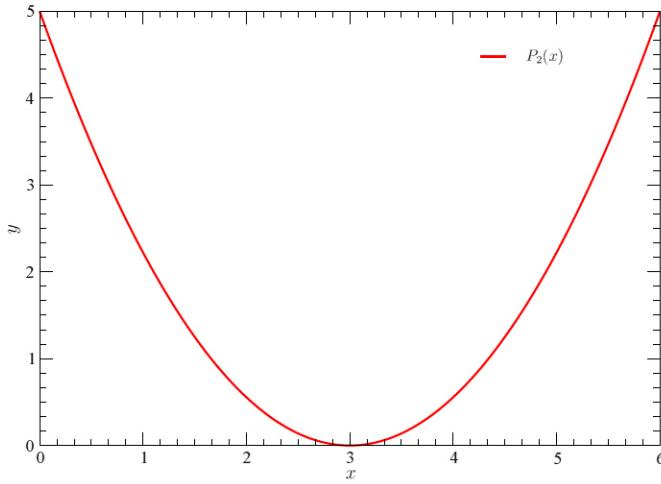


Figura 3.2: Gráfico do polinômio interpolador obtido pela Fórmula de Lagrange no Exemplo 1.

### 3.3 Interpolação Linear

Sejam dois pontos distintos  $(x_0, y_0)$  e  $(x_1, y_1)$ . Uma interpolação passando por esses dois pontos fornecerá um polinômio de grau 1,  $P_1(x)$ , já que  $n = 1$ , a qual chamamos de Interpolação Linear. Pela fórmula de Lagrange (3.3), como  $n = 1$ , temos:

$$P_1(x) = y_0 L_0(x) + y_1 L_1(x), \quad (3.6)$$

onde

$$\begin{aligned} L_0(x) &= \frac{(x - x_1)}{(x_0 - x_1)}, \\ L_1(x) &= \frac{(x - x_0)}{(x_1 - x_0)}. \end{aligned}$$

Com isso, temos que:

$$P_1(x) = y_0 \frac{(x - x_1)}{(x_0 - x_1)} + y_1 \frac{(x - x_0)}{(x_1 - x_0)}.$$

Ordenando os termos, temos que:

$$P_1(x) = \frac{(x_1 - x)y_0 + (x - x_0)y_1}{(x_1 - x_0)}.$$

### Exemplo 2

Considere a tabela a seguir:

$x$	0	3
$f(x)$	5	0

Determine a interpolação linear que passa por esses dois pontos.

*Solução:*

$$\begin{aligned} P_1 &= y_0 L_0(x) + y_1 L_1(x). \\ L_0(x) &= \frac{(x - x_1)}{(x_0 - x_1)} = \frac{(x - 3)}{(0 - 3)} = \frac{x - 3}{-3} \\ L_1(x) &= \frac{(x - x_0)}{(x_1 - x_0)} = \frac{(x - 0)}{(3 - 0)} = \frac{x}{3} \end{aligned}$$

Portanto, a interpolação linear é dada por:

$$P_1(x) = 5 \cdot \frac{(x - 3)}{-3} + 0 \cdot \frac{x}{3}$$

Rearranjando os termos, tem-se:

$$P_1(x) = -\frac{5}{3}x + 5.$$

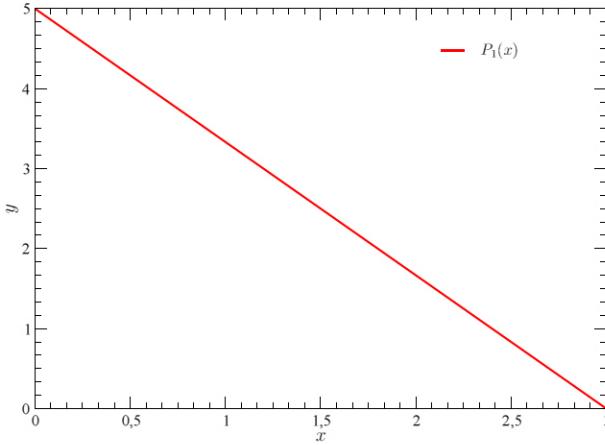


Figura 3.3: Gráfico do polinômio interpolador obtido pela Interpolação Linear no Exemplo 2.

### 3.4 Forma de Newton

Uma desvantagem da fórmula de Lagrange para interpolar  $y = f(x)$  sobre os pontos  $x_0, x_1, \dots, x_n$ , surge quando pretende-se passar de um polinômio de grau  $p$  ( $p+1$  pontos) para um polinômio de grau  $p+1$  ( $p+2$  pontos), pois todos os cálculos precisam ser refeitos acrescentando-se o novo ponto. Já com a Forma de Newton para interpolação, que veremos a seguir, conhecido o polinômio de grau  $p$ , consegue-se o polinômio de grau  $p+1$  apenas acrescentando-se mais um termo.

Seja  $f(x)$  uma função contínua e que possua derivadas contínuas em  $[a, b]$ . Sejam  $n+1$  pontos distintos de  $f(x)$  em  $[a, b]$ ,  $x_0, x_1, \dots, x_n$ , temos que o polinômio interpolador  $P_n(x)$  pela Forma de Newton é dado por:

$$\begin{aligned}
 P_n(x) &= f[x_0] + f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1) + \dots + \\
 &+ f[x_1, x_2, \dots, x_n](x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{n-1}).
 \end{aligned} \tag{3.7}$$

Os coeficientes  $f[x_0]$ ,  $f[x_0, x_1]$ , ...,  $f[x_1, x_2, \dots, x_n]$  são obtidos através do operador

das diferenças divididas, o qual é definido por meio de uma fórmula de recorrência:

$$\begin{aligned}
 f[x_0] &= f(x_0) \\
 f[x_0, x_1] &= \frac{f[x_1] - f[x_0]}{x_1 - x_0} = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} \\
 f[x_0, x_1, x_2] &= \frac{f[x_1, x_2] - f[x_0, x_1]}{x_2 - x_0} \\
 &\vdots \\
 f[x_0, x_1, \dots, x_n] &= \frac{f[x_1, x_2, \dots, x_n] - f[x_0, x_1, \dots, x_{n-1}]}{x_n - x_0}.
 \end{aligned}$$

Com isso, dada uma função  $f(x)$ , conhecendo-se os valores que  $f(x)$  assume em  $x_0, x_1, \dots, x_n, n+1$  pontos distintos, construímos a tabela das diferenças divididas:

$x$	ordem 0	ordem 1	ordem 2	ordem 3	...	ordem $n$
$x_0$	$f[x_0]$					
		$f[x_0, x_1]$				
$x_1$	$f[x_1]$		$f[x_0, x_1, x_2]$			
			$f[x_1, x_2]$			$f[x_0, x_1, x_2, x_3]$
$x_2$	$f[x_2]$		$f[x_1, x_2, x_3]$			$\ddots$
			$f[x_2, x_3]$			$f[x_1, x_2, x_3, x_4]$
$x_3$	$f[x_3]$		$f[x_2, x_3, x_4]$		$\vdots$	$f[x_0, x_1, x_2, \dots, x_n]$
			$f[x_3, x_4]$		$\vdots$	
$x_4$	$f[x_4]$			$f[x_{n-3}, x_{n-2}, x_{n-1}, x_n]$	$\ddots$	$\ddots$
		$\vdots$	$f[x_{n-2}, x_{n-1}, x_n]$			
$\vdots$	$\vdots$		$f[x_{n-1}, x_n]$			
$x_n$	$f[x_n]$					

Seja  $P_0(x)$  o polinômio de grau 0 que interpola  $f(x)$  em  $x = x_0$ . Então,  $P_0(x) = f(x_0) = f[x_0]$ .

Temos que para todo  $x \in [a, b]$ ,  $x \neq x_0$ :

$$f[x_0, x] = \frac{f[x] - f[x_0]}{x - x_0} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \Rightarrow f(x) = f(x_0) + f[x_0, x](x - x_0).$$

Como  $f(x_0) = P(x_0)$ , temos que o erro cometido ao se aproximar  $f(x)$  por  $P_0(x)$  é  $E_0(x) = f(x) - P_0(x) = f[x_0, x](x - x_0)$ .

### Exemplo 3

Seja a tabela:

$x$	0	3	6
$f(x)$	5	0	5

Obtenha o polinômio que interpola os dados da tabela pela forma de Newton.

*Solução:*

$$P_2(x) = f(x_0) + (x - x_0) \cdot f[x_0, x_1] + (x - x_0) \cdot (x - x_1) \cdot f[x_0, x_1, x_2]$$

Construindo a tabela das diferenças divididas, tem-se:

$x$	ordem 0	ordem 1	ordem 2
0	5		
3	0	$-\frac{5}{3}$	$\frac{10}{18}$
6	5	$\frac{5}{3}$	

Com isso, temos que o polinômio interpolador pela Forma de Newton é dado por:

$$P_2 = 5 + (x - 0)\left(-\frac{5}{3}\right) + (x - 0)(x - 3)\frac{10}{18}.$$

Rearranjando os termos semelhantes, temos que  $P_2(x) = \frac{5x^2}{9} - \frac{10x}{3} + 5$ .

Pode-se observar que o polinômio interpolador obtido neste exemplo pela forma de Newton é o mesmo obtido pelo método de Lagrange no Exemplo 1, já que em ambos os exemplos considerou-se para interpolação um polinômio de grau 2.

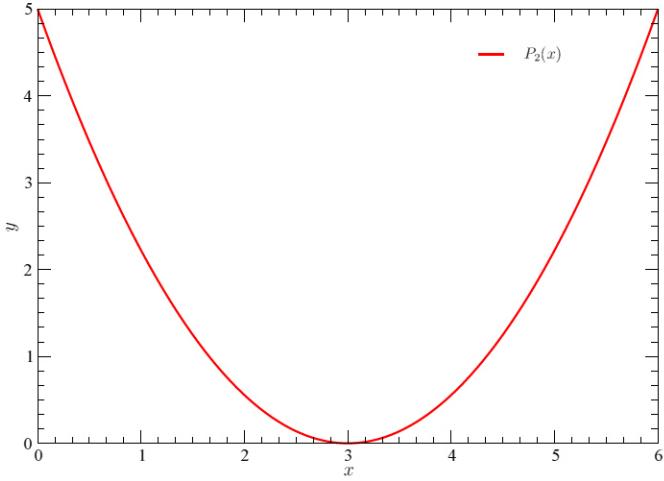


Figura 3.4: Gráfico do polinômio interpolador obtido pela Forma de Newton no Exemplo 3.

### 3.5 Estudo do Erro na Interpolação

Como sabemos, ao aproximar uma função  $f(x)$  por um polinômio interpolador de grau  $\leq n$ , comete-se um erro  $E_n(x) = f(x) - P_n(x)$  para todo  $x$  no intervalo  $[x_0, x_n]$ . A análise do erro é importante, pois assim podemos saber o quanto próximo  $f(x)$  está de  $P_n(x)$ .

Sejam  $x_0 < x_1 < \dots < x_n$ ,  $n+1$  pontos distintos. Seja  $f(x)$  com derivadas até ordem  $n+1$  para todo  $x$  pertencente ao intervalo  $[x_0, x_n]$ .

Seja  $P_n(x)$  o polinômio interpolador de  $f(x)$  nos pontos  $x_0, x_1, \dots, x_n$ . Assim, em qualquer ponto  $x \in [x_0, x_n]$ , é possível demonstrar que o erro da interpolação é dado por:

$$E_n(x) = f(x) - P_n(x) = (x - x_0).(x - x_1) \dots (x - x_n) \cdot \frac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!}, \quad (3.8)$$

onde  $\xi_x \in (x_0, x_n)$ . Para mais detalhes, ver Ruggiero [13].

Com isso, podemos observar que, ao aproximar a função  $f(x)$  por um polinômio interpolador de grau  $\leq n$ , o erro está relacionado também à derivada de ordem  $n+1$  da função  $f(x)$ .

### 3.5.1 Limitante para o Erro

Como a fórmula para o erro (3.8) tem um uso limitado na prática, já que são raras as situações em que conhecemos  $f^{(n+1)}(x)$  e o ponto  $\xi_x$  nunca será conhecido, a importância da fórmula exata para  $E_n(x)$  é apenas teórica, uma vez que usamos para obter estimativas do erro para a interpolação, diferenciação e integração numérica.

Assim, faremos uma relação do erro com um limitante de  $f^{(n+1)}(x)$ . Observe que:

$$|E_n(x)| = |f(x) - P_n(x)| \leq |(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_n)| \cdot \frac{M_{n+1}}{(n+1)!}, \quad (3.9)$$

onde  $M_{n+1} = \max |f^{(n+1)}(x)|$ .

De fato,  $M_{n+1}$  existe, pois temos que por hipótese,  $f^{(n+1)}(x)$  é contínua em  $[x_0, x_n]$ .

Então:

$$|E_n(x)| \leq |(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_n)| \cdot \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} \quad (3.10)$$

Tendo as hipóteses anteriores e os pontos igualmente espaçados, ou seja,

$$x_1 - x_0 = x_2 - x_1 = \dots = x_n - x_{n-1} = h,$$

então:

$$|f(x) - P_n(x)| < \frac{h^{n+1} M_{n+1}}{4(n+1)}. \quad (3.11)$$

Observe que  $\frac{h^{n+1} M_{n+1}}{4(n+1)}$  não depende do ponto  $x$  considerado,  $x \in [x_0, x_n]$ .

### 3.5.2 Estimativa para o Erro

Quando a função  $f(x)$  não é conhecida, mas alguns de seus pontos o são, o erro cometido na interpolação,  $E_n(x)$ , só pode ser estimado, já que não é possível calcular  $M_{n+1}$ . No entanto, ao construir a tabela de diferenças divididas até a ordem  $n+1$ , pode-se considerar o maior valor em módulo destas diferenças como uma aproximação para  $\frac{M_{n+1}}{(n+1)!}$  no intervalo  $[x_0, x_n]$ :

$$|E_n(x)| \approx |(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_n)| (\max |\text{diferenças divididas de ordem } n+1|)$$

### Exemplo 4

Considere a tabela a seguir:

$x$	0,2	0,34	0,4	0,52	0,6	0,72
$f(x)$	0,16	0,22	0,27	0,29	0,32	0,37

Determine  $f(0,47)$  utilizando um polinômio de grau 2 e calcule uma estimativa para o erro.

*Solução:*

$x$	ordem 0	ordem 1	ordem 2	ordem 3
0,2	0,16			
		0,4286		
0,34	0,22		2,0235	
		0,8333		-17,8963
$x_0 = 0,4$	0,27		-3,7033	
		0,1667		18,2494
$x_1 = 0,52$	0,29		1,0415	
		0,0375		-2,6031
$x_2 = 0,6$	0,32		0,2085	
		0,4167		
0,72	0,37			

Deve-se escolher três pontos de interpolação, e como  $0,47 \in (0,4, 0,52)$ , então 0,4 e 0,52 devem ser escolhidos. O outro ponto pode ser 0,34 ou 0,6. Com isso, escolhemos os seguintes pontos:  $x_0 = 0,4$ ,  $x_1 = 0,52$  e  $x_2 = 0,6$ .

Assim,

$$\begin{aligned}
 P_2(x) &= f(x_0) + (x - x_0)f[x_0, x_1] + (x - x_0)(x - x_1)f[x_0, x_1, x_2] \\
 &= 0,27 + (x - 0,4)0,1667 + (x - 0,4)(x - 0,52)(1,0415).
 \end{aligned}$$

Com isso, temos que:

$$P_2(0,47) = 0,2780 \approx f(0,47).$$

A estimativa para o erro é dada por:

$$|E(0,47)| \approx |(0,47 - 0,4)(0,47 - 0,52)(0,47 - 0,6)| \cdot |18,2492| \approx 8,303 \cdot 10^{-3}.$$

## 3.6 Fenômeno de Runge

Um questionamento que surge é se a sequência de polinômios de interpolação  $P_n(x)$  converge para a função  $f(x)$  em  $[x_0, x_1]$  quando  $[x_0, \dots, x_n]$  cobre o intervalo  $[a, b]$ , isto é, quando  $n \rightarrow \infty$ .

O exemplo a seguir, o qual considera os pontos  $x_i$  igualmente espaçados, ilustra o fato de que o polinômio interpolador pode divergir de  $f(x)$ , o qual é conhecido como Fenômeno de Runge.

### Exemplo 5

Considere a função  $f(x) = \frac{1}{1 + 25x^2}$ , no intervalo de  $x \in [-1, 1]$ . O gráfico abaixo mostra a curva de  $f(x)$  e seu polinômio interpolador  $P_n(x)$  em pontos igualmente espaçados, o qual foi obtido pela Forma de Newton com  $n = 11$ .

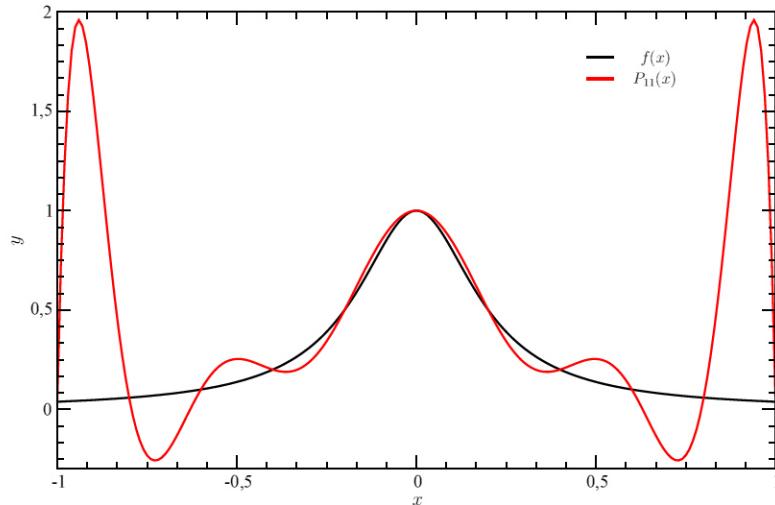


Figura 3.5: Comparação da função  $f(x) = \frac{1}{1 + 25x^2}$  com seu polinômio interpolador obtido pela Forma de Newton.

Com isso, não podemos garantir que o polinômio interpolador  $P_n$  converge para  $f(x)$  quando aumentamos o número de pontos. Com efeito, pode-se mostrar que  $\max_{x \in [x_0, x_n]} |f(x) - P_n(x)|$  torna-se arbitrariamente grande para certas funções  $f$ , em especial a do exemplo anterior.

Para tanto, existem várias alternativas para resolver este fenômeno numérico. Vamos nos ater apenas em uma delas: usar funções splines para fazer a interpolação, onde temos convergência garantida.

### 3.7 Funções Splines em Interpolação

Como vimos na seção anterior, ao aproximar uma função  $f(x)$  em  $n + 1$  pontos por um polinômio interpolador  $P_n(x)$ , este pode divergir de  $f(x)$ .

Uma alternativa para este problema é interpolar  $f(x)$  em grupos com poucos pontos, obtendo funções polinomiais com menor grau, e que sejam contínuas e tenham derivadas contínuas até certa ordem.

Para ilustrar essa ideia, a Fig. 3.6 mostra a interpolação de  $f(x)$  por uma função linear por partes, chamada  $S_1(x)$ .

Fonte: Ruggiero [13]

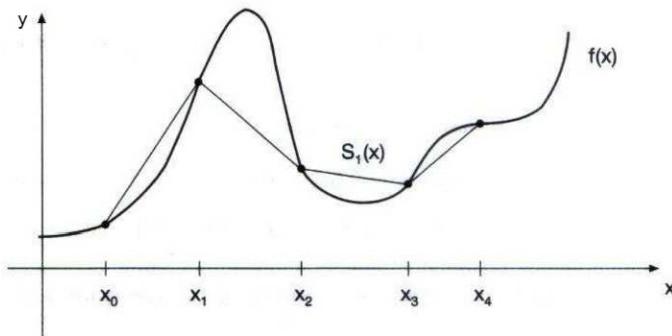


Figura 3.6: Interpolação de  $f(x)$  por uma função linear por parte,  $S_1(x)$ .

Nota-se que a função  $S_1(x)$  é contínua, no entanto não é derivável em todo o intervalo  $(x_0, x_4)$ , uma vez que  $S'_1(x)$  não existe para  $x = x_i$ ,  $1 \leq i \leq 3$ .

Por outro lado, se a cada três pontos,  $x_i, x_{i+1}, x_{i+2}$ , passar um polinômio de grau 2, teremos também garantia apenas da continuidade da função que vai aproximar  $f(x)$ .

A ideia das funções splines é aproximar a função tabelada em cada subintervalo  $[x_i, x_{i+1}]$ , por um polinômio de grau  $p$ , com algumas imposições sobre a função, conforme a definição a seguir:

Considere a função  $f(x)$  tabelada nos pontos  $x_0 < x_1 < \dots < x_n$ . Uma função  $S_p(x)$  é denominada spline de grau  $p$  com nós nos pontos  $x_i$ ,  $i = 0, 1, \dots, n$ , se satisfazer as seguinte condições:

- i) em cada subintervalo  $[x_i, x_{i+1}]$ ,  $i = 0, 1, \dots, (n - 1)$ ,  $S_p(x)$  é um polinômio de grau  $p : s_p(x)$ ;
- ii)  $S_p(x)$  é contínua e tem derivada contínua até a ordem  $(p - 1)$  em  $[a, b]$ ;
- iii)  $S_p(x_i) = f(x_i)$ ,  $i = 0, 1, \dots, n$ , então denomina-se spline interpolante.

### 3.7.1 Spline Linear Interpolante

Chama-se  $S_1(x)$  de função spline linear interpolante de  $f(x)$ , nos nós  $x_0, x_1, \dots, x_n$ , a qual pode ser representada em cada subintervalo  $[x_{i-1}, x_i]$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , por:

$$S_i(x) = f(x_{i-1}) \frac{x_i - x}{x_i - x_{i-1}} + f(x_i) \frac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}}, \quad \forall x \in [x_{i-1}, x_i]$$

Pode-se verificar as condições de Spline:

- i)  $S_1(x)$  é polinômio de grau 1 em cada subintervalo  $[x_{i-1}, x_i]$ ;
- ii)  $S_1(x)$  é contínua em  $[x_{i-1}, x_i]$ , e nos nós  $x_i$ ,  $S_1$  está bem definida, pois:  
 $s_i(x_i) = s_{i+1}(x_i) = f(x_i) \Rightarrow S_1(x)$  é contínua em  $[a, b]$ ;
- iii)  $S_1(x) = s_i(x_i) = f(x_i) \Rightarrow S_1(x)$  é spline linear interpolante de  $f(x)$  nos nós  $x_0, x_1, \dots, x_n$ .

### Exemplo 6

Considere a tabela a seguir:

$x$	1	2	5	7
$f(x)$	1	2	3	2,5

Determine a função spline linear que interpola a função tabelada.

*Solução:*

$$\begin{aligned}
 s_1(x) &= f(x_0) \frac{x_1 - x}{x_1 - x_0} + f(x_1) \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} + f(x_1) \\
 &= 1 \frac{2 - x}{2 - 1} + 2 \frac{x - 1}{2 - 1} \\
 &= 2 - x + 2x - 2 = x, \quad x \in [1, 2].
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 s_2(x) &= f(x_1) \frac{x_2 - x_1}{x_2 - x_1} + f(x_2) \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} \\
 &= 2 \frac{5 - x}{5 - 2} + 3 \frac{x - 2}{5 - 2} \\
 &= \frac{2}{3}(5 - x) + x - 2 = \frac{1}{3}(x + 4), \quad x \in [2, 5].
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 s_3(x) &= f(x_2) \frac{x_3 - x}{x_3 - x_3} + f(x_3) \frac{x - x_2}{x_3 - x_2} \\
 &= 3 \frac{7 - x}{7 - 5} + 2,5 \frac{x - 5}{7 - 5} \\
 &= \frac{1}{4}(17 - x), \quad x \in [5, 7].
 \end{aligned}$$

Fonte: Ruggiero [13]

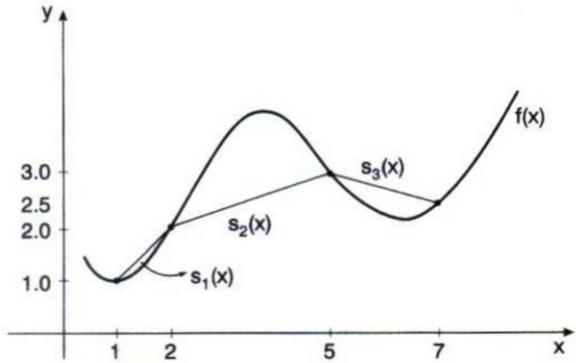


Figura 3.7: Interpolação de  $f(x)$  por uma função Spline Linear Interpolante.

## 3.8 Resultados Numéricos

Nesta seção faz-se uma apresentação de alguns resultados numéricos obtidos utilizando-se os métodos de aproximação polinomial estudados neste trabalho: Fórmula de Lagrange, Interpolação Linear, Forma de Newton e Spline Linear. Faz-se também algumas observações e comparações dos métodos utilizados.

Para tanto, considerou-se as funções  $f(x) = -2x^3 + 2x^2 - x + 5$  com  $x \in [0, 4]$ ,  $g(x) = \frac{e^x}{3/2 - \cos(x)}$  com  $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$  e  $h(x) = \frac{1}{1 + 25x^2}$  com  $x \in [-1, 1]$ .

**Teste 1:** considerou-se a função  $f(x) = -2x^3 + 2x^2 - x + 5$ , com  $x \in [0, 4]$ , e o método de Lagrange para analisarmos o comportamento do polinômio interpolador em diferentes pontos, sendo eles:

- para  $n = 3$ , escolhemos os pontos  $x_0 = 0$ ,  $x_1 = 2$  e  $x_2 = 4$ . Os resultados obtidos estão apresentados na Fig. 3.8, em que a figura à esquerda mostra uma comparação entre a função  $f(x)$  e o polinômio interpolador de Lagrange, e a figura à direita mostra o erro cometido na interpolação, em escala logarítmica.

Podemos observar que o polinômio interpolador é igual a função nos pontos de

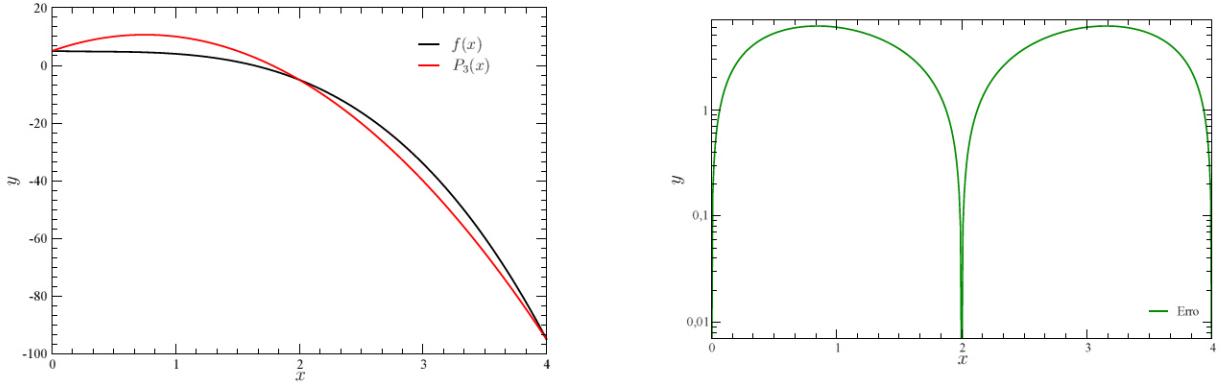


Figura 3.8: Interpolação de Lagrange para  $f(x)$  com  $n = 3$ .

interpolação, no entanto comete um erro considerável nas vizinhanças dos pontos  $x = 1$  e  $x = 3$ .

- ii) para  $n = 4$ , escolhemos os pontos  $x_0 = 0$ ,  $x_1 = 1$ ,  $x_2 = 2$  e  $x_3 = 3$ . Os resultados obtidos estão apresentados na Fig 3.9, em que a figura à esquerda mostra uma comparação entre a função  $f(x)$  e o polinômio interpolador de Lagrange, e a figura à direita mostra o erro cometido na interpolação.

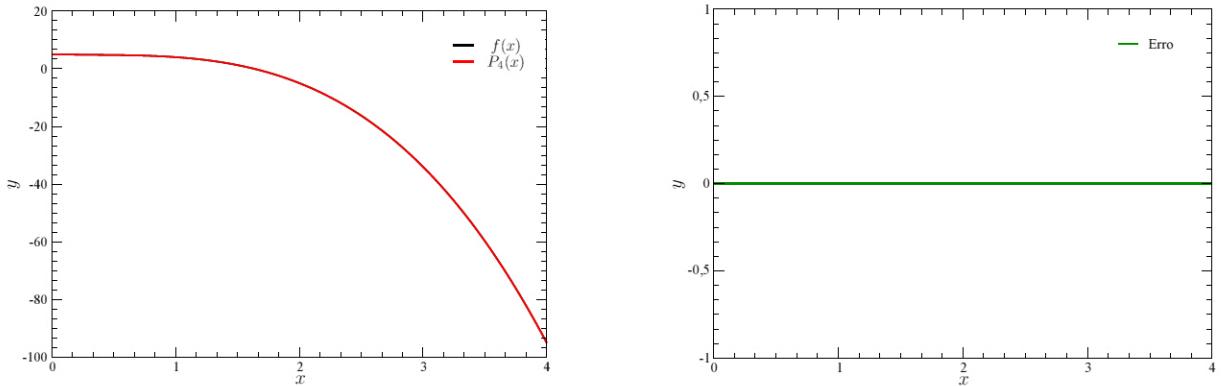


Figura 3.9: Interpolação de Lagrange para  $f(x)$  com  $n = 4$ .

Podemos observar que, com 4 pontos, o polinômio interpolador obtido pela Fórmula de Lagrange coincidiu com a função  $f(x)$ , levando à inexistência do erro.

- iii) para  $n = 6$ , escolhemos os pontos  $x_0 = 0$ ,  $x_1 = 1$ ,  $x_2 = 1,5$ ,  $x_3 = 2,5$ ,  $x_4 = 3$  e  $x_5 = 4$ . Os resultados obtidos estão apresentados na Fig. 3.10, em que a figura à

esquerda mostra uma comparação entre a função  $f(x)$  e o polinômio interpolador de Lagrange, e a figura à direita mostra o erro cometido na interpolação.

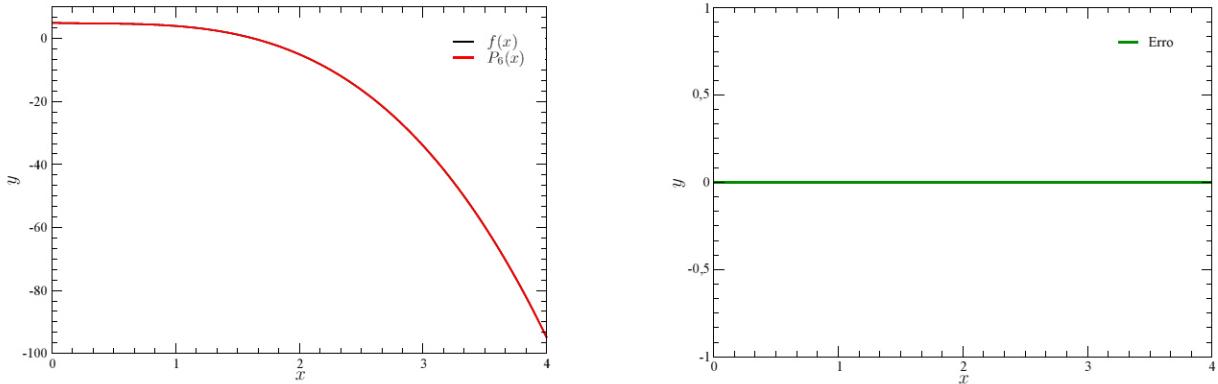


Figura 3.10: Interpolação de Lagrange para  $f(x)$  com  $n = 6$ .

Novamente, como era de se esperar, o polinômio interpolador coincidiu com a função  $f(x)$ , cometendo erro nulo.

Concluímos que, conforme aumentamos o grau do polinômio interpolador, menor é o erro cometido, até que, a partir de um certo  $n$ , o polinômio interpolador coincide com a função e o erro cometido é nulo.

**Teste 2:** considerou-se a função  $f(x) = -2x^3 + 2x^2 - x + 5$ , com  $x \in [0, 4]$ , e o método de Interpolação Linear para analisarmos o comportamento do polinômio interpolador em diferentes pontos, sendo eles:

- i)  $x_0 = 0$  e  $x_1 = 4$ . Os resultados obtidos estão apresentados na Fig. 3.11, em que a figura à esquerda mostra uma comparação entre a função  $f(x)$  e o polinômio da Interpolação Linear, e a figura à direita mostra o erro cometido na interpolação, em escala logarítmica.

Observe que o comportamento do polinômio interpolador se aproxima da função apenas nos pontos escolhidos, no entanto comete um erro considerável no restante do intervalo, sendo maior nas vizinhanças do ponto  $x = 2$ .

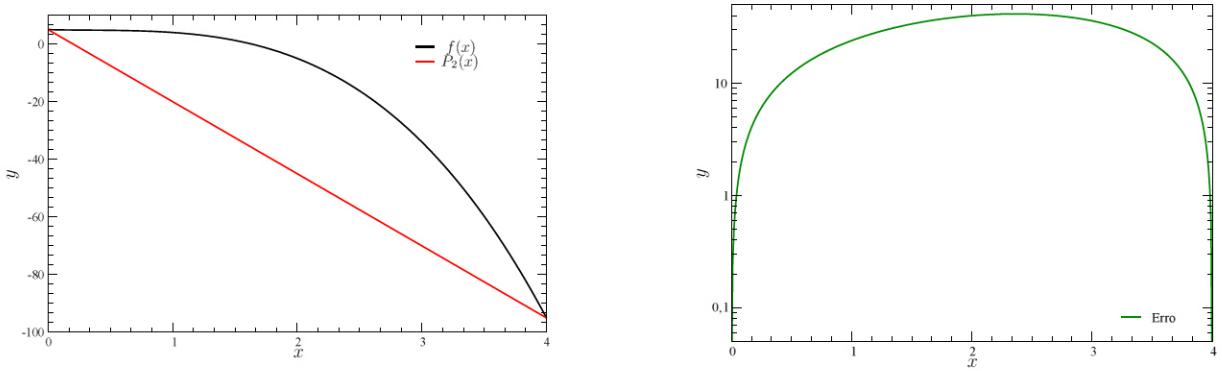


Figura 3.11: Interpolação linear para  $f(x)$  com  $x_0 = 0$  e  $x_1 = 4$ .

- ii)  $x_0 = 2$  e  $x_1 = 4$ . Os resultados obtidos estão apresentados na Fig 3.12, em que a figura à esquerda mostra uma comparação entre a função  $f(x)$  e o polinômio da Interpolação Linear, e a figura à direita mostra o erro cometido na interpolação, em escala logarítmica.

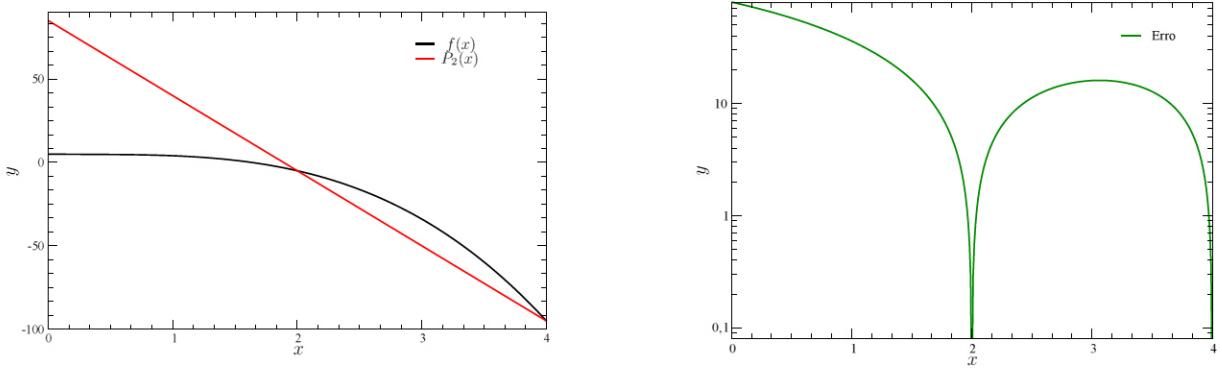


Figura 3.12: Interpolação linear para  $f(x)$  com  $x_0 = 2$  e  $x_1 = 4$ .

Neste caso, comete-se maior erro no início do intervalo, que é a região mais distante dos pontos considerados para a interpolação. O erro é menor nas vizinhanças dos pontos  $x_0 = 2$  e  $x_1 = 4$ , como era de se esperar.

- iii)  $x_0 = 0$  e  $x_1 = 1$ . Os resultados obtidos estão apresentados na Fig. 3.13, em que a figura à esquerda mostra uma comparação entre a função  $f(x)$  e o polinômio da Interpolação Linear, e a figura à direita mostra o erro cometido na interpolação, em escala logarítmica.

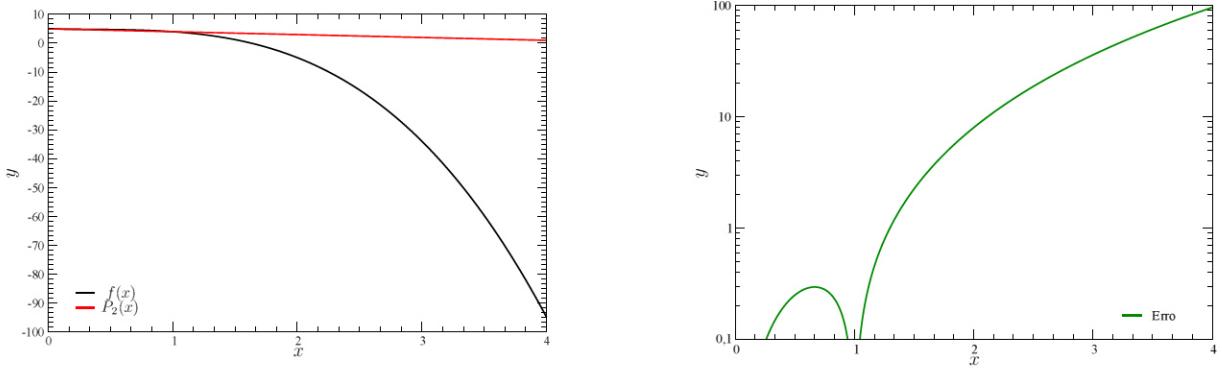


Figura 3.13: Interpolação linear para  $f(x)$  com  $x_0 = 0$  e  $x_1 = 1$ .

Semelhante ao caso ii, neste caso, como os pontos escolhidos agora estão no início e no meio do intervalo, comete-se maior erro no final do intervalo, onde não foi considerado nenhum ponto na interpolação, sendo menor o erro cometido nas vizinhanças de  $x_0$  e  $x_1$ .

iv)  $x_0 = 1$  e  $x_1 = 3$ . Os resultados obtidos estão apresentados na Fig. 3.14, em que a figura à esquerda mostra uma comparação entre a função  $f(x)$  e o polinômio da Interpolação Linear, e a figura à direita mostra o erro cometido na interpolação, em escala logarítmica.

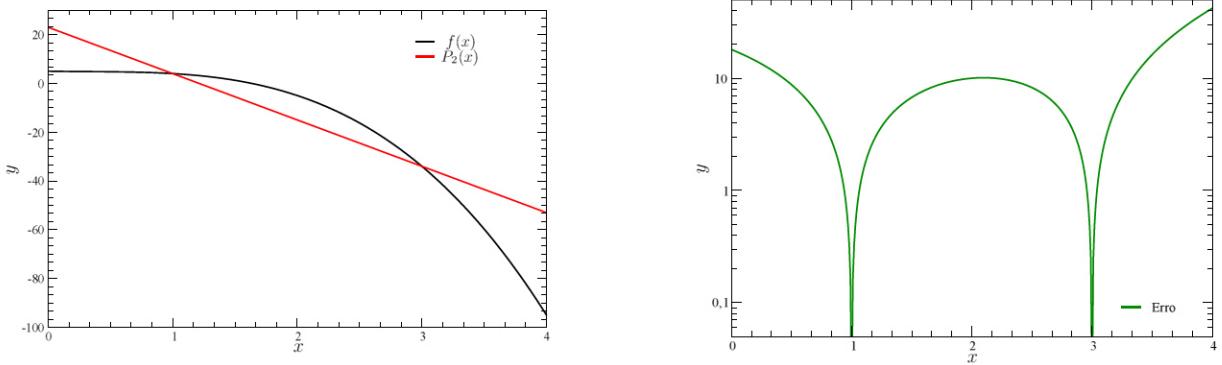


Figura 3.14: Interpolação linear para  $f(x)$  com  $x_0 = 1$  e  $x_1 = 3$ .

Observa-se que o polinômio interpolador está muito próximo da função nas vizinhanças dos pontos escolhidos, no entanto, conforme se afasta destes pontos, maior vai sendo o erro cometido.

Pode-se concluir que, no caso da interpolação linear, o polinômio interpolador se aproxima da função apenas nas vizinhanças dos dois pontos escolhidos, no entanto, no

restante do domínio, comete um erro considerável. Isso se deve ao fato de que a função resultante da interpolação linear representa uma reta a qual não é capaz de acompanhar o comportamento da função em todo domínio considerado.

**Teste 3:** considerou-se a função  $f(x) = -2x^3 + 2x^2 - x + 5$ , com  $x \in [0, 4]$ , e a Forma de Newton para analisarmos o comportamento do polinômio interpolador em diferentes pontos, sendo eles:

- i) para  $n = 3$ , escolhemos os pontos  $x_0 = 0$ ,  $x_1 = 2$  e  $x_2 = 4$ , os mesmos utilizados na Forma de Lagrange, assim podemos analisar o comportamento do polinômio interpolador e ainda comparar os dois métodos. Os resultados obtidos estão apresentados na Fig. 3.15, em que a figura à esquerda mostra uma comparação entre a função  $f(x)$  e o polinômio interpolador de Newton, e a figura à direita mostra o erro cometido na interpolação, em escala logarítmica.

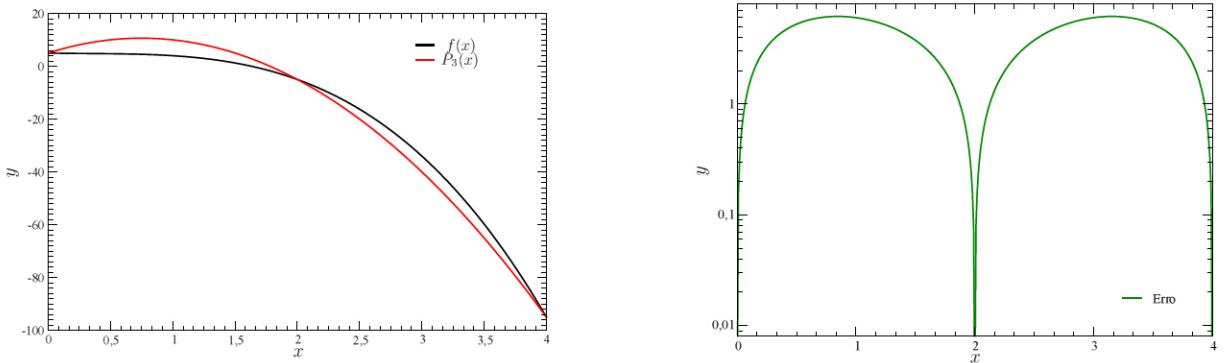


Figura 3.15: Interpolação de Newton para  $f(x)$  com  $n = 3$ .

O comportamento do polinômio interpolador é o mesmo obtido pela Forma de Lagrange no Teste 1. Inclusive, o erro apresenta os mesmo valores, sendo maior nas vizinhanças dos pontos  $x = 1$  e  $x = 3$ .

- ii) para  $n = 4$ , escolhemos os pontos  $x_0 = 0$ ,  $x_1 = 1$ ,  $x_2 = 2$  e  $x_3 = 3$ , os mesmos utilizados na Forma de Lagrange. Os resultados obtidos estão apresentados na Fig. 3.16, em que a figura à esquerda mostra uma comparação entre a função  $f(x)$  e o

polinômio interpolador de Newton, e a figura à direita mostra o erro cometido na interpolação.

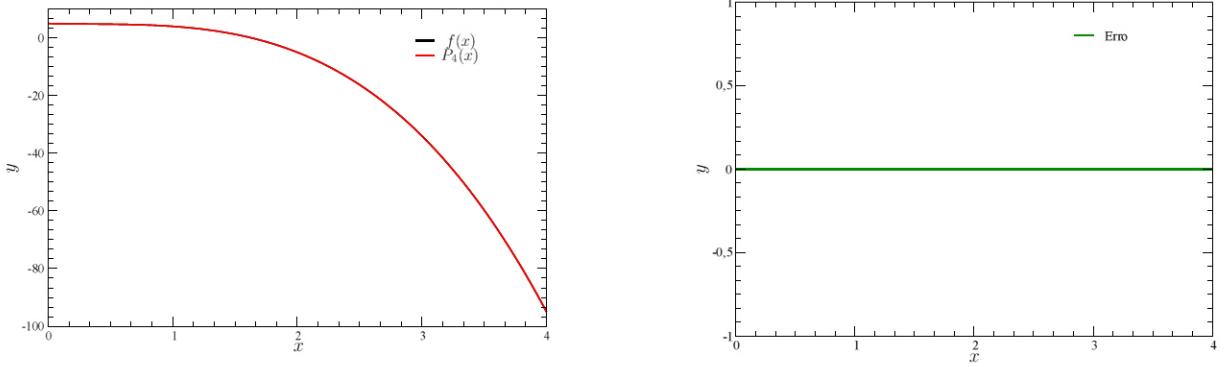


Figura 3.16: Interpolação de Newton para  $f(x)$  com  $n = 4$ .

Observamos que, assim como para polinômio interpolador de Lagrange, o polinômio de Newton coincidiu com  $f(x)$ , obtendo erro nulo.

- iii) para  $n = 6$ , escolhemos os pontos  $x_0 = 0$ ,  $x_1 = 1$ ,  $x_2 = 1,5$ ,  $x_3 = 2,5$ ,  $x_4 = 3$  e  $x_5 = 4$ , os mesmos utilizados na Forma de Lagrange. Os resultados obtidos estão apresentados na Fig. 3.17, em que a figura à esquerda mostra uma comparação entre a função  $f(x)$  e o polinômio interpolador de Newton, e a figura à direita mostra o erro cometido na interpolação.

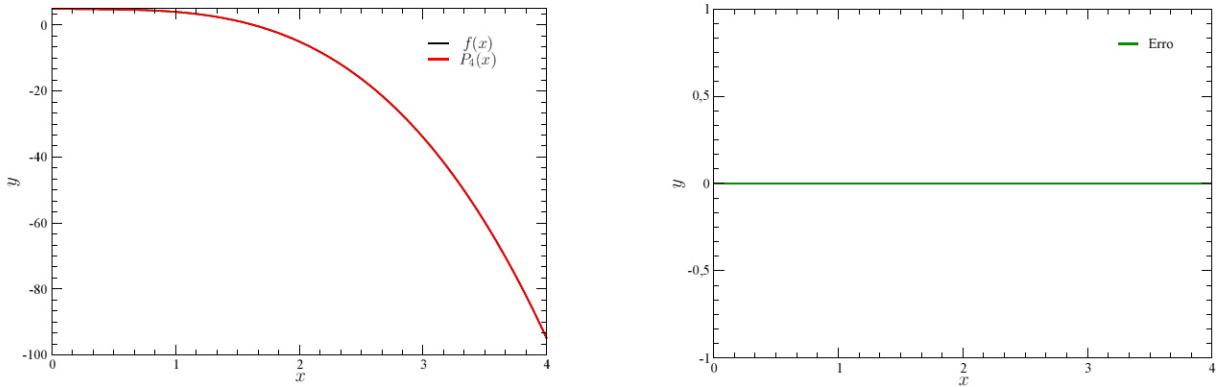


Figura 3.17: Interpolação de Newton para  $f(x)$  com  $n = 6$ .

Observamos que, assim como para  $n = 4$ , o polinômio interpolador coincidiu com  $f(x)$ , sem cometer erro.

Concluímos que, conforme aumentamos o grau para determinar o polinômio interpolador, menor é o erro cometido, até que, a partir de um certo  $n$ , o polinômio interpolador coincide com a função e o erro cometido é nulo.

**Teste 4:** considerou-se a função  $g(x) = \frac{e^x}{3/2 - \cos(x)}$ , com  $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ , e a Forma de Newton para analisarmos o comportamento do polinômio interpolador em diferentes pontos, sendo eles:

- i) para  $n = 3$ , escolhemos os pontos  $x_0 = 0$ ,  $x_1 = \frac{\pi}{4}$  e  $x_2 = \frac{\pi}{2}$ . Os resultados obtidos estão apresentados na Fig. 3.18, em que a figura à esquerda mostra uma comparação entre  $g(x)$  e o polinômio interpolador de Newton, e a figura à direita mostra o erro cometido na interpolação, em escala logarítmica.

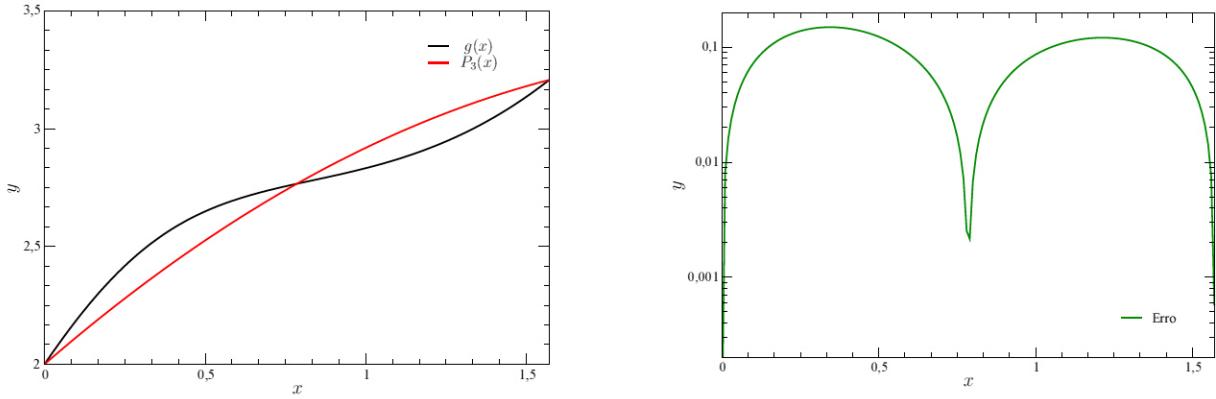


Figura 3.18: Interpolação de Newton para  $g(x)$  com  $n = 3$ .

Podemos observar que o polinômio interpolador se aproxima da função nas vizinhanças dos pontos escolhidos, no entanto comete um erro considerável nas regiões distantes dos mesmo.

- ii) para  $n = 4$  escolhemos os pontos  $x_0 = 0$ ,  $x_1 = \frac{\pi}{6}$ ,  $x_2 = \frac{\pi}{3}$  e  $x_3 = \frac{\pi}{2}$ . Os resultados obtidos estão apresentados na Fig. 3.19, em que a figura à esquerda mostra uma comparação entre  $g(x)$  e o polinômio interpolador de Newton, e a figura à direita mostra o erro cometido na interpolação, em escala logarítmica.

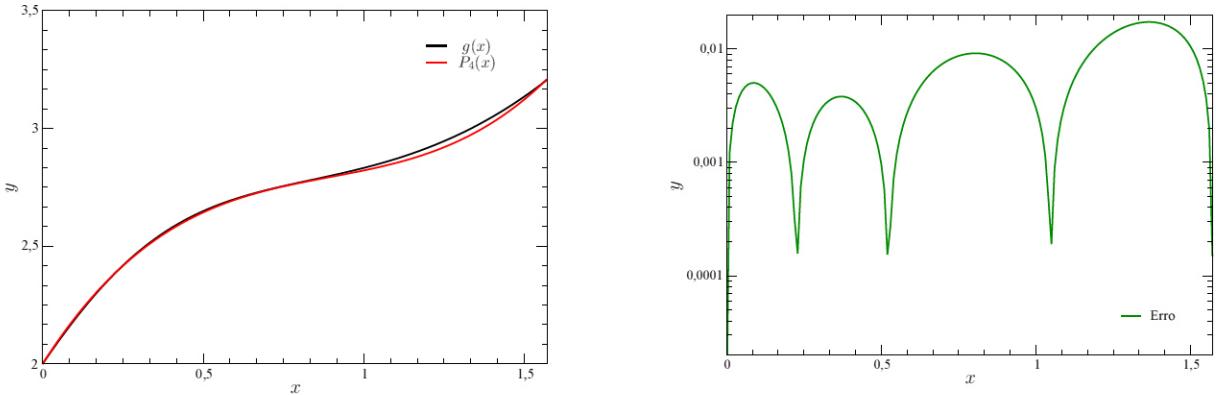


Figura 3.19: Interpolação de Newton para  $g(x)$  com  $n = 4$ .

Observa-se que, comparado com o erro obtido na interpolação para  $n = 3$ , o erro para  $n = 4$  diminuiu na ordem de uma casa decimal, sendo maior no intervalo  $\left[\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right]$ .

- iii) para  $n = 6$  escolhemos os pontos  $x_0 = 0$ ,  $x_1 = \frac{\pi}{10}$ ,  $x_2 = \frac{\pi}{5}$ ,  $x_3 = \frac{3\pi}{10}$ ,  $x_4 = \frac{2\pi}{5}$  e  $x_5 = \frac{\pi}{2}$ . Os resultados obtidos estão apresentados na Fig. 3.20, em que a figura à esquerda mostra uma comparação entre  $g(x)$  e o polinômio interpolador de Newton, e a figura à direita mostra o erro cometido na interpolação, em escala logarítmica.

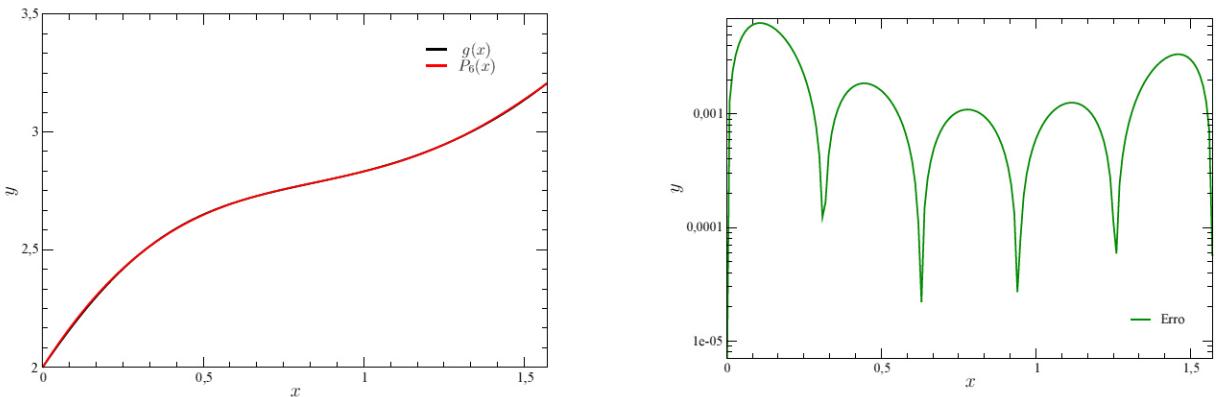


Figura 3.20: Interpolação de Newton para  $g(x)$  com  $n = 6$ .

Podemos observar que, com 6 pontos, o polinômio interpolador obtido pela Forma de Newton está muito próximo da função  $g(x)$ , cometendo um erro relativamente pequeno.

iv) para  $n = 8$  escolhemos os pontos  $x_0 = 0$ ,  $x_1 = \frac{\pi}{14}$ ,  $x_2 = \frac{\pi}{7}$ ,  $x_3 = \frac{3\pi}{14}$ ,  $x_4 = \frac{2\pi}{7}$ ,  $x_5 = \frac{5\pi}{14}$ ,  $x_6 = \frac{3\pi}{7}$  e  $x_7 = \frac{\pi}{2}$ . Os resultados obtidos estão apresentados na Fig. 3.21, em que a figura à esquerda mostra uma comparação entre  $g(x)$  e o polinômio interpolador de Newton, e a figura à direita mostra o erro cometido na interpolação, em escala logarítmica.

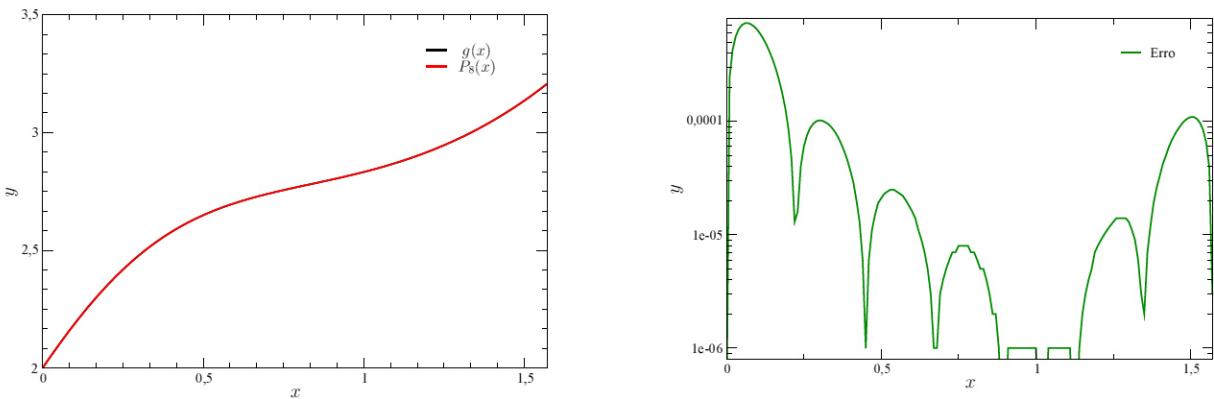


Figura 3.21: Interpolação de Newton para  $g(x)$  com  $n = 8$ .

Podemos observar que, com 8 pontos, o polinômio interpolador obtido pela Forma de Newton está muito próximo da função  $g(x)$ , cometendo erro relativamente pequeno, da ordem de  $10^{-4}$ .

Concluímos que conforme aumentamos o grau para determinar o polinômio interpolador, menor é o erro cometido, até que, a partir de um certo  $n$ , o polinômio coincide com a função e o erro é praticamente nulo.

**Teste 5:** neste teste, vamos analisar o comportamento do polinômio interpolador de Lagrange para função  $h(x) = \frac{1}{1 + 25x^2}$  com  $x \in [-1, 1]$ . Nos testes anteriores verificamos que, ao aumentar o número de pontos, as aproximações foram ficando cada vez mais próximas das funções, fato este que não ocorre para funções do tipo da função  $h(x)$ , conforme vimos na Seção 3.5, a qual trata sobre o fenômeno de Runge.

i) para  $n = 3$ , escolhemos os pontos  $x_0 = -1$ ,  $x_1 = 0$  e  $x_2 = 1$ . Os resultados obtidos estão apresentados na Fig. 3.22, em que a figura à esquerda mostra uma

comparação entre a função  $h(x)$  e o polinômio interpolador de Lagrange, e a figura à direita mostra o erro cometido na interpolação, em escala logarítmica.

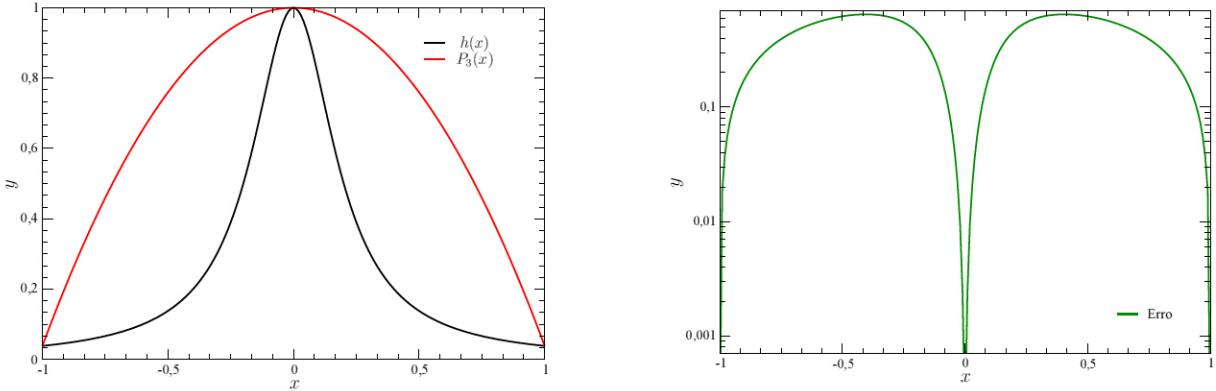


Figura 3.22: Interpolação de Lagrange para  $h(x)$  com  $n = 3$ .

Podemos observar que o polinômio interpolador se aproxima da função apenas nos pontos escolhidos, porém comete um erro considerável nas demais regiões do intervalo considerado.

- ii) para  $n = 5$  escolhemos os pontos  $x_0 = -1, x_1 = -0,6, x_2 = 0, x_3 = 0,6$  e  $x_4 = 1$ . Os resultados obtidos são apresentados na Fig. 3.23, em que a figura à esquerda mostra uma comparação entre a função  $h(x)$  e o polinômio interpolador de Lagrange, e a figura à direita mostra o erro cometido na interpolação, em escala logarítmica.

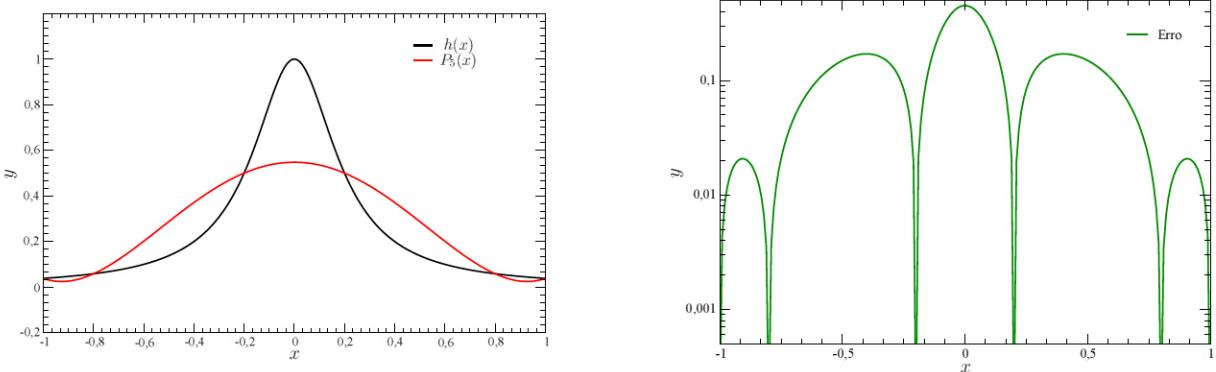


Figura 3.23: Interpolação de Lagrange para  $h(x)$  com  $n = 5$ .

Podemos observar que, novamente, o polinômio se aproxima da função apenas nos pontos escolhidos, cometendo um erro considerável no restante do intervalo, sendo este erro da mesma ordem de grandeza do caso i.

- iii) para  $n = 7$  escolhemos os pontos  $x_0 = -1, x_1 = -0,6, x_2 = -0,4, x_3 = 0, x_4 = 0,4, x_5 = 0,6$  e  $x_6 = 1$ . Os resultados obtidos estão representados na Fig. 3.24, em que a figura à esquerda mostra uma comparação entre a função  $h(x)$  e o polinômio interpolador de Lagrange, e a figura à direita mostra o erro cometido na interpolação, em escala logarítmica.

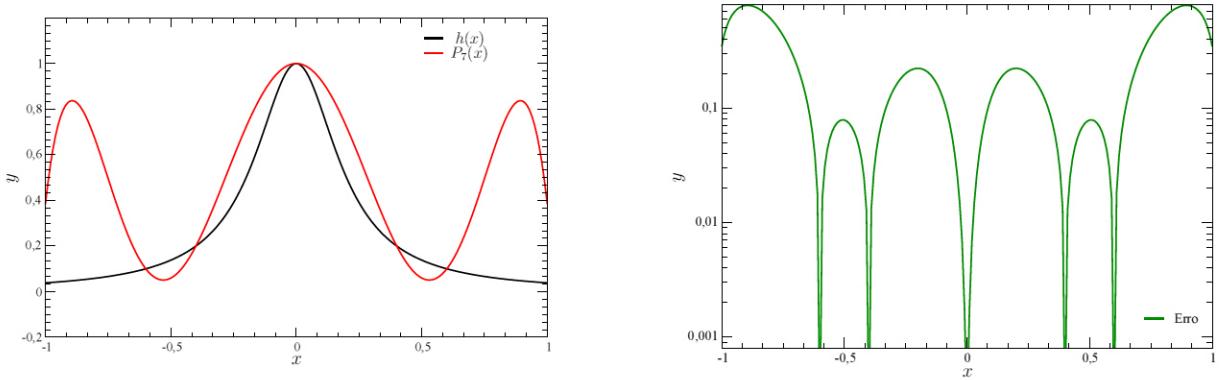


Figura 3.24: Interpolação de Lagrange para  $h(x)$  com  $n = 7$ .

Podemos observar que o polinômio interpolador apresentou grandes oscilações no início e no final do intervalo considerado, não acompanhando o comportamento da função. Ou seja, o polinômio interpolador não está convergindo para a função  $h(x)$ , apresentando um crescimento no erro conforme aumenta-se o número de pontos na interpolação.

- iv) para  $n = 9$  escolhemos os pontos  $x_0 = -1, x_1 = -0,8, x_2 = -0,6, x_3 = -0,2, x_4 = 0, x_5 = 0,2, x_6 = 0,6, x_7 = 0,8$  e  $x_8 = 1$ . Os resultados obtidos são apresentados na Fig. 3.25, em que a figura à esquerda mostra uma comparação entre a função  $h(x)$  e o polinômio interpolador de Lagrange, e a figura à direita mostra o erro cometido na interpolação, em escala logarítmica.

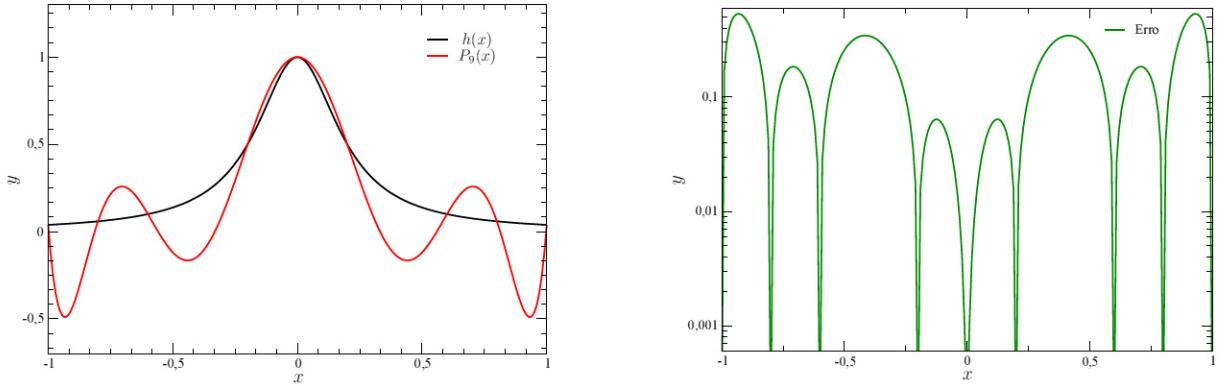


Figura 3.25: Interpolação de Lagrange para  $h(x)$  com  $n = 9$ .

Novamente, podemos observar o comportamento oscilatório apresentado pelo polinômio interpolador, mostrando não convergir para a função, obtendo, portanto, um erro considerável.

v) para  $n = 11$  escolhemos os pontos  $x_0 = -1$ ,  $x_1 = -0,8$ ,  $x_2 = -0,6$ ,  $x_3 = -0,4$ ,  $x_4 = -0,2$ ,  $x_5 = 0$ ,  $x_6 = 0,2$ ,  $x_7 = 0,4$ ,  $x_8 = 0,6$ ,  $x_9 = 0,8$  e  $x_{10} = 1$ . Os resultados obtidos são apresentados na Fig. 3.26, em que a figura à esquerda mostra uma comparação entre a função  $h(x)$  e o polinômio interpolador de Lagrange, e a figura à direita mostra o erro cometido na interpolação, em escala logarítmica.

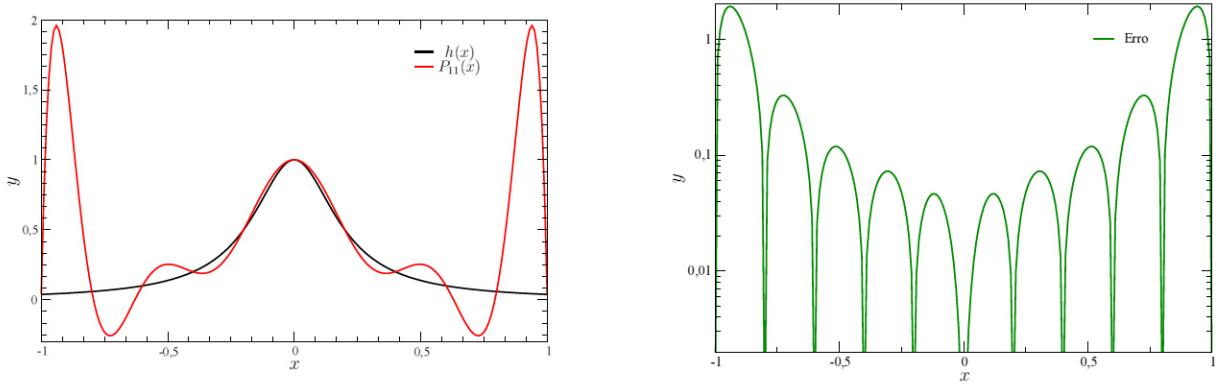


Figura 3.26: Interpolação de Lagrange para  $h(x)$  com  $n = 11$ .

Podemos observar que o polinômio interpolador apresentou uma maior oscilação no início e no fim do intervalo do que nos demais casos, mostrando divergir da função  $h(x)$ ,

já que conforme aumentamos o número de pontos na interpolação, o erro também foi aumentado consideravelmente, problema este denominado fenômeno de Runge.

Com isso, não podemos garantir que o polinômio interpolador convergirá para a função conforme  $n$  tende para o infinito.

O mesmo comportamento foi obtido utilizando-se o método de Newton, cujos resultados, por simplicidade, foram omitidos deste trabalho.

**Teste 6:** considerando os resultados obtidos no Teste 5, vamos agora aproximar a função  $h(x) = \frac{1}{1 + 25x^2}$  utilizando o método Spline linear, o qual possui convergência garantida, conforme visto na Seção 3.6. Para isso, diferentes números de pontos foram utilizados, a saber:

- para  $n = 5$  escolhemos os pontos  $x_0 = -1$ ,  $x_1 = -0,6$ ,  $x_2 = 0$ ,  $x_3 = 0,6$  e  $x_4 = 1$ . Os resultados obtidos são apresentados na Fig. 3.27, em que a figura à esquerda mostra uma comparação entre a função  $h(x)$  e o polinômio interpolador de Spline linear, e a figura à direita mostra o erro cometido na interpolação, em escala logarítmica.

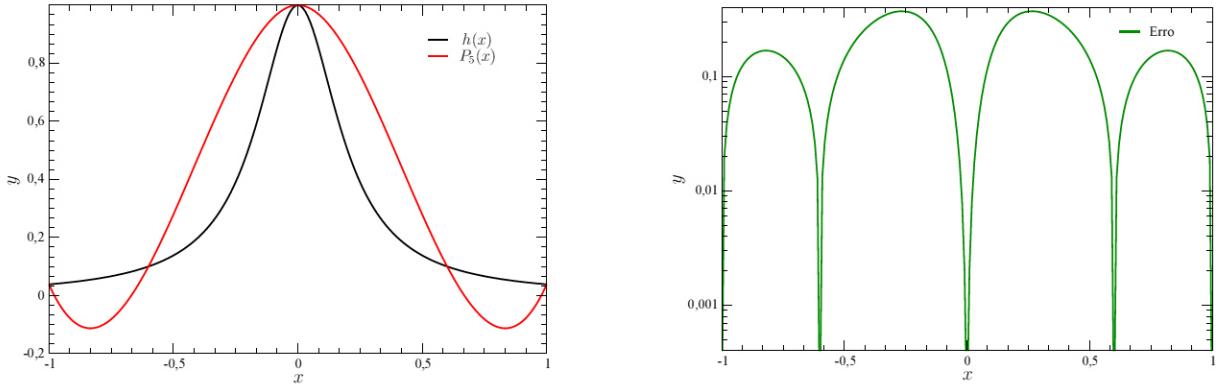


Figura 3.27: Interpolação de Spline linear para  $h(x)$  com  $n = 5$ .

Podemos verificar que o polinômio interpolador se aproxima da função  $h(x)$  nos pontos escolhidos, no entanto comete um erro considerável nos intervalos entre os pontos escolhidos.

ii) para  $n = 7$  escolhemos os pontos  $x_0 = -1$ ,  $x_1 = -0,4$ ,  $x_2 = -0,2$ ,  $x_3 = 0$ ,  $x_4 = 0,2$ ,  $x_5 = 0,4$  e  $x_6 = 1$ . Os resultados obtidos são apresentados na Fig. 3.28, em que a figura à esquerda mostra uma comparação entre a função  $h(x)$  e o polinômio interpolador de Spline linear, e a figura à direita mostra o erro cometido na interpolação, em escala logarítmica.

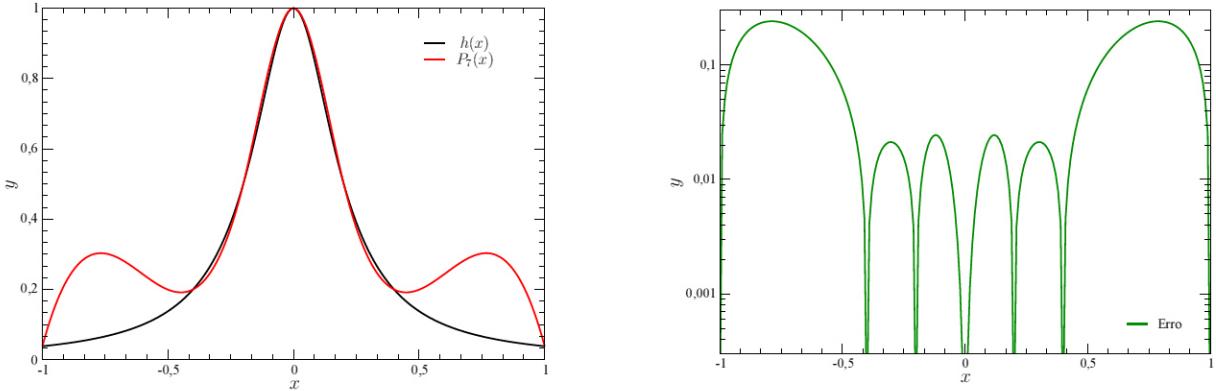


Figura 3.28: Interpolação de Spline linear para  $h(x)$  com  $n = 7$ .

Podemos observar que o polinômio interpolador se aproxima função  $h(x)$  no intervalo  $]-0,4, 0,4[$ , porém ainda comete erro considerável nos intervalos  $]-1, -0,4[$  e  $]0,4, 1[$ .

iii) para  $n = 9$  escolhemos os pontos  $x_0 = -1$ ,  $x_1 = -0,8$ ,  $x_2 = -0,6$ ,  $x_3 = -0,2$ ,  $x_4 = 0$ ,  $x_5 = 0,2$ ,  $x_6 = 0,6$ ,  $x_7 = 0,8$  e  $x_8 = 1$ . Os resultados obtidos são apresentados na Fig. 3.29, em que a figura à esquerda mostra uma comparação entre a função  $h(x)$  e o polinômio interpolador de Spline linear, e a figura à direita mostra o erro cometido na interpolação, em escala logarítmica.

Podemos observar que, com 9 pontos, o polinômio interpolador obtido pelo Spline linear mostra-se mais próximo da função  $h(x)$  que nos casos anteriores, cometendo, por consequência, um erro menor.

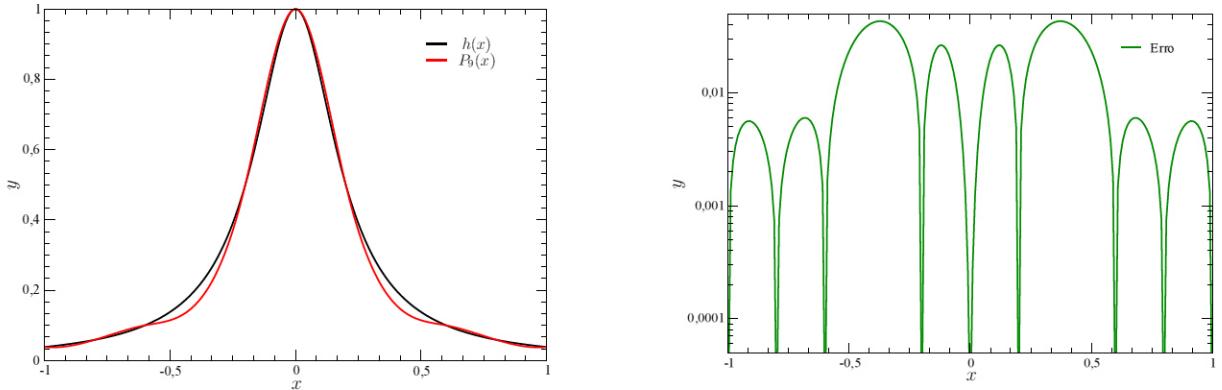


Figura 3.29: Interpolação de Spline linear para  $h(x)$  com  $n = 9$ .

- iv) para  $n = 11$  escolhemos os pontos  $x_0 = -1$ ,  $x_1 = -0,8$ ,  $x_2 = -0,6$ ,  $x_3 = -0,4$ ,  $x_4 = -0,2$ ,  $x_5 = 0$ ,  $x_6 = 0,2$ ,  $x_7 = 0,4$ ,  $x_8 = 0,6$ ,  $x_9 = 0,8$  e  $x_{10} = 1$ . Os resultados obtidos são apresentados na Fig. 3.30, em que a figura à esquerda mostra uma comparação entre a função  $h(x)$  e o polinômio interpolador de Spline linear, e a figura à direita mostra o erro cometido na interpolação, em escala logarítmica.

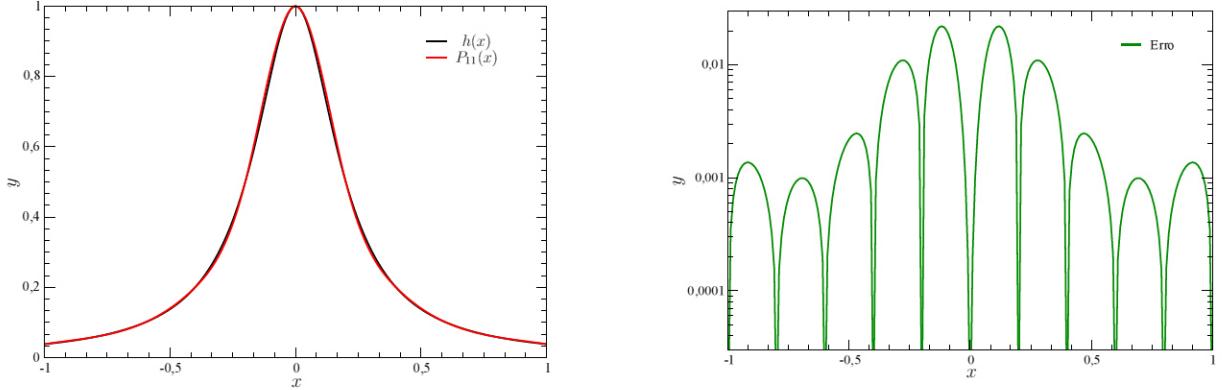


Figura 3.30: Interpolação de Spline linear para  $h(x)$  com  $n = 11$ .

Podemos observar que, com 11 pontos, o polinômio interpolador obtido pelo Spline linear se aproxima ainda mais da função  $h(x)$ , cometendo um erro consideravelmente pequeno.

Concluímos que, conforme aumenta-se o número de pontos para a interpolação com o método de Spline linear, mais próximo o polinômio interpolador vai ficando da função  $h(x)$ , convergindo para a mesma. Comportamento este contrário do apresentado pelos Métodos de Lagrange e Newton, os quais divergiram para algumas famílias de funções com o aumento de  $n$ .

## 4 Conclusão

Na busca de um aperfeiçoamento na formação continuada do professor de Matemática do Ensino Básico, desenvolveu-se esta dissertação de mestrado. Fez-se um estudo aprofundado sobre funções polinomiais, desde sua definição, até suas operações e propriedades, além de outros resultados importantes, os quais foram abordados de forma detalhada.

Apresentou-se também um levantamento dos anos em que o conteúdo referente à funções polinomiais aparece no Currículo Escolar de Mato Grosso do Sul e na Base Nacional Comum Curricular, comparando ambas com uma discussão sobre o tema elaborada pela Sociedade Brasileira de Matemática. Ainda dentro do assunto Currículo Escolar, para cada ano em que o conteúdo de funções polinomiais aparece, foram propostas situações-problema, acompanhadas de suas resoluções, adequadas para aquele ano do Ensino, as quais podem ser trabalhadas em aula pelo professor.

Por fim, para evidenciar a importância das funções polinomiais, apresentou-se um estudo sobre aproximações de funções usando polinômios. Alguns resultados numéricos foram obtidos a partir de diferentes métodos de interpolação polinomial, ilustrando o quanto boas podem ser tais aproximações.

Pretende-se, futuramente, levar até a sala de aula as aproximações de funções por polinômios. A ideia é desenvolver um trabalho com os alunos do Ensino Básico, reforçando o uso de ferramentas computacionais, celular, uso de calculadora. O objetivo é fazê-los enxergar as funções polinomiais como mais uma ferramenta Matemática para a resolução de diversos problemas do nosso dia a dia.



# Referências Bibliográficas

- [1] LIMA, E. L. **A Matemática no Ensino Médio V.1.** SBM. 11<sup>a</sup> Edição. Rio de Janeiro, 2016.
- [2] LIMA, E. L. **A Matemática no Ensino Médio V.3.** SBM. 6<sup>a</sup> Edição. Rio de Janeiro, 2006.
- [3] HEFEZ, A.; VILELA, M. L. T. **Polinômios e Equações Algébricas.** SBM. 1<sup>a</sup> Edição. Rio de Janeiro, 2012.
- [4] GOMES, R. **Números complexos e polinômios: estratégias de ensino para aplicação por meio de GeoGebra.** Dissertação (Mestrado) – Universidade Estadual de Maringá, Maringá, 2013.
- [5] VIEIRA, A. C. **Fundamentos de Álgebra II.** CAED-UFMG. Belo Horizonte, 2011.
- [6] FRANCO, N. B. **Cálculo Numérico,** Editora Pearson. São Paulo, 2006.
- [7] SANTOS, A. **Ajuste de curvas por polinômios com foco no currículo de ensino médio.** Dissertação (Mestrado) - Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2015.
- [8] BNCC, **Base Nacional Comum Curricular - Ensino Fundamental.** Ministério da Educação. 2017.
- [9] BNCC, **Base Nacional Comum Curricular - Ensino Médio: Educação é a base.** Ministério da Educação. 2018.

- [10] Secretaria de Estado de Educação (SED/MS), **Referencial Curricular da Rede Estadual de Ensino de Mato Grosso do Sul Ensino Fundamental**. Campo Grande, 2012.
- [11] Secretaria de Estado de Educação (SED/MS), **Referencial Curricular da Rede Estadual de Ensino de Mato Grosso do Sul Ensino Médio**. Campo Grande, 2012.
- [12] DANTE, L. R. **Matemática Contexto e Aplicações**. Editora Ática. 2<sup>a</sup> Edição. São Paulo, 2014.
- [13] RUGGIERO, M. A. G.; LOPES V. L. R. **Cálculo Numérico Aspectos Teóricos e Computacionais**. Editora Pearson Makron Books. 2<sup>a</sup> Edição. São Paulo, 1996
- [14] ENGSTER, N. E. W. **Educação e Currículo: Fundamentos Práticos e Pedagógicos**. Editora Know how. 1<sup>a</sup> Edição. São Paulo, 2009.
- [15] SILVA, L. T. **Documento de Identidade: uma introdução às teorias do currículo**. Editora Autêntica. Belo Horizonte, 1999.
- [16] BURDEN, R. L.; FAIRES, J. D. **Análise Numérica**. Editora Cengage Learning. Edição 8<sup>a</sup>. São Paulo, 2008.
- [17] Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE). Brasil. Disponível em: <https://www.ibge.gov.br>. Acessado em: 14 de setembro de 2018.