CINTIA MELO DOS SANTOS

POSSIBILIDADES E LIMITAÇÕES DE MICROPERCURSOS DE ESTUDO E PESQUISA EM GEOMETRIA: uma experiência de formação continuada com professores da rede pública

UNIVERSIDADE FEDERAL DE MATO GROSSO DO SUL – UFMS
CAMPO GRANDE/MS
2019

CINTIA MELO DOS SANTOS

POSSIBILIDADES E LIMITAÇÕES DE MICROPERCURSOS DE ESTUDO E PESQUISA EM GEOMETRIA: uma experiência de formação continuada com professores da rede pública

Tese apresentada como exigência final para a obtenção do grau de Doutora em Educação Matemática à Comissão Julgadora do Programa de Pós-graduação em Educação Matemática – *stricto sensu* - da Universidade Federal de Mato Grosso do Sul, sob a orientação do professor Dr. José Luiz Magalhães de Freitas.

UNIVERSIDADE FEDERAL DE MATO GROSSO DO SUL – UFMS
CAMPO GRANDE/MS
2019

COMISSÃO JULGADORA

Prof. Dr. José Luiz Magalhães de Freitas (UFMS)

Prof. Dr. José Messildo Viana Nunes (UFPA)

Prof[a]. Dr[a]. Paula Moreira Baltar Bellemain (UFPE)

Prof[a]. Dr[a]. Marilena Bittar (UFMS)

Prof[a]. Dr[a]. Aparecida Santana de Souza Chiari (UFMS)

AGRADECIMENTOS

Agradeço, primeiramente, a Deus, que me deu força e perseverança para concluir o doutorado, e, acima de tudo, pela proteção no trajeto de Dourados a Campo Grande.

À minha família, ao meu esposo Claudinei, aos meus filhos Laura, Miguel e Mirela, e aos meus pais, Dionísio e Dalva, pelo amor incondicional, apoio e ajuda excessiva nessa etapa da minha vida, também pela compressão dos momentos ausentes. Não há dúvida que, sem a presença de vocês na minha vida, eu não teria conseguido, vocês são a base da minha existência/da minha luta/ dos meus esforços. Obrigada!

Ao professor José Luiz, por aceitar orientar-me, pela paciência, amizade, dedicação e ensinamentos que me ajudam a crescer profissionalmente. Que Deus continue te abençoando e te preserve assim, uma pessoa humilde e generosa.

A todos os professores do Programa PPGEduMat - UFMS, em especial à professora Marilena Bittar, que sempre me incentivou e não mediu esforços para ajudar-me, oportunizando a participação em momentos de estudos na sua residência e na medida do possível uma co-orientação neste trabalho, agradeço as valiosas contribuições. Obrigada!

À minha amiga tão especial, Tatiani Garcia Neves, que foi meu porto seguro durante os quatro anos de doutorado, que me acalmou nos momentos de nervosismo e que sempre se dispôs a ajudar-me.

Às professoras dessa pesquisa, que disponibilizaram o seu tempo para participar da formação continuada. Obrigada, professoras!

Aos professores Messildo, Aparecida e Paula, que aceitaram participar da minha banca, agradeço imensamente as valiosas contribuições para o meu trabalho.

Ao grupo de pesquisa DDMat e colegas da segunda turma de doutorado em Educação Matemática – PPGEduMat, pelos momentos de discussão e estudo.

Enfim, a todos os amigos e familiares que fazem parte da minha vida e acreditaram em mim.

RESUMO

O objetivo principal desta pesquisa é investigar possibilidades do desenvolvimento de micro Percursos de Estudo e Pesquisas (PEP) por meio de um estudo praxeológico, desenvolvido em uma formação continuada de professores de matemática. A formação foi realizada com um grupo de doze professores atuantes na educação básica, no qual trabalhamos com sistemas didáticos intrínsecos aos estudos dos conteúdos geométricos amparados pela metodologia do PEP. Todas as sessões foram gravadas em áudio e vídeo, e, posteriormente, foram transcritas para a análise da produção dos dados. Para o estudo e desenvolvimento do PEP, buscamos compreensões da Teoria Antropológica do Didático (TAD), com ênfase no paradigma didático *questionamento do mundo* e dos níveis de codeterminação, identificando condições e restrições que permeiam as práticas pedagógicas dos professores participantes da pesquisa. Ao analisar os sistemas didáticos, pudemos perceber que os professores são dependentes dos livros didáticos e que esse recurso tem direcionado as suas práticas pedagógicas. Vimos também o quanto as condições impostas nas suas formações acadêmicas acabam sendo refletidas no modo como conduzem as suas práticas em sala de aula, reproduzindo um ensino direcionado pelo paradigma *visita às obras* no que diz respeito ao ensino de Geometria. Além disso, observamos a necessidade dos professores em estudar e buscar mais informações em torno dos conceitos abordados e o quanto suas praxeologias estão no bloco fazer, com poucas justificativas teóricas e tecnológicas. Nesse cenário, vimos que o PEP provocou nos professores uma desestabilização praxeológica dos seus conhecimentos geométricos, assim como o desenvolvimento de cada percurso depende fortemente dos sujeitos envolvidos no processo, ressaltando que a realidade brasileira no desenvolvimento de formações não propicia a permanência dos professores em formações continuadas, sendo uma busca mais individual de cada professor.

Palavras-chave: Formação de professores. Educação Básica. Ensino de Geometria. Estudo praxeológico

ABSTRACT

The main objective of this research it's to investigate micro-PEP development's possibilities through a praxeological study, developed in a mathematics teachers' continuous formation. The formation was fulfilled with a group of twelve teachers acting in basic education, in which we worked with didactic systems intrinsic to the geometric contents' study supported by PEP methodology. All sessions were recorded in audio and video, and later transcribed for data production's analysis. For the PEP's study and development, we seek understandings of the Anthropological Theory of Didactic (TAD), with emphasis on the didactic paradigm question of the world and the levels of codetermination, identifying conditions and restrictions that permeate the pedagogical practices of the teachers participating in the research. When analyzing the didactic systems, we could see that the teachers are dependent on the textbooks and that this resource has directed their pedagogical practices. We also saw how the conditions imposed on their training's academic are reflected in the way they conduct their practices in the classroom, reproducing a teaching guided by the paradigm visit to the works with reguard to Geometry teaching. In addition, we observed the need of teachers in studying and seeking more information around the concepts covered and how much their praxeologies are in the block to do, with few theoretical and technological justifications. In this scenario, we saw that PEP provoked in teachers a praxeological destabilization of their geometrical knowledge, as the development of each route depends strongly on the subjects involved in the process, emphasizing that the brazilian reality in the development of formations does not allow the permanence of teachers in formations continuous, being a more individual search of each teacher.

Keywords: Teacher formation. Basic Education. Geometry teaching. Praxeological study

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

DDMat	Grupo de Estudos em Didática da Matemática
ENEM	Exame Nacional do Ensino Médio
FP	Formação de Professores
MEC	Ministério da Educação
MED	Modelo Epistemológico Dominante
MER	Modelo Epistemológico de Referência
OD	Organização Didática
OM	Organização Matemática
PEP	Percurso de Estudos e Pesquisas
PNAIC	Programa Nacional de Alfabetização na Idade Certa
TAD	Teoria Antropológica do Didático
UESC	Universidade Estadual de Santa Cruz
UEMS	Universidade Estadual do Mato Grosso do Sul
UFAC	Universidade Federal do Acre
UFBA	Universidade Federal da Bahia
UFCG	Universidade Federal de Campina Grande
UFGD	Universidade Federal da Grande Dourados
UFMS	Universidade Federal do Mato Grosso do Sul
UFPA	Universidade Federal do Pará
UFRB	Universidade Federal do Recôncavo da Bahia
UFRPE	Universidade Federal Rural de Pernambuco
UNESPAR	Universidade Estadual do Paraná
PCN	Parâmetros Curriculares Nacionais
PNLD	Programa Nacional do Livro Didático
PUC/SP	Pontifícia Universidade Católica de São Paulo
QR	Questões-Respostas
SBEM	Sociedade Brasileira de Educação Matemática
BNCC	Base Nacional Comum Curricular

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE QUADROS

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

Como professora no curso de Licenciatura Plena em Matemática da Universidade Federal da Grande Dourados (UFGD), entendo que, na formação inicial, o aluno deve ser instigado, na qualidade de futuro professor, a continuar o estudo, a pesquisa, o diálogo com seus pares, compreendendo que a graduação é apenas o início de um caminho. Coaduno com o entendimento de Mizukami (2002) que, ao tornar-se um profissional da educação, a formação deve ser contínua.

Ademais, deve desencadear uma inquietação no que tange ao futuro da profissão de professor, que é muito além de um mero emprego "Você pode ter um emprego como professor e exercê-lo bem, mas, se a escolha for de profissão, e não de mero emprego, o trabalho acadêmico vai, necessariamente, incluir a pesquisa, a investigação, a ousadia" (FREITAS, 2002, p. 1).

Nesse contexto, compreendo que, como professora de uma instituição superior, a responsabilidade na formação de professores não se limita apenas à formação inicial, é necessário à continuidade e ao auxílio do desenvolvimento de estudos em parcerias com os professores graduados, para que possamos desenvolver práticas que propiciem aos alunos ambientes instigantes, com situações que resultem na curiosidade, autonomia e criatividade. Por outro lado, tanto a formação continuada como a inicial representam ainda um grande desafio para os pesquisadores na área da Educação Matemática. Ambas implicam desenvolver espaços de estudos, nos quais todos os envolvidos tenham condições de participar efetivamente em um processo não verticalizado, com trocas de experiências e aprendizagens mútuas, tanto do formador quanto do professor em formação.

Durante a minha trajetória no ensino superior, recebi e ainda recebo diversos convites para realizar formações para os professores que ensinam matemática e participei de programas específicos do governo federal para formação de professores, como o Programa Nacional de Alfabetização na Idade Certa (PNAIC). A partir dessas vivências, é notória a necessidade de formações continuadas que atendam a realidade brasileira.

Primeiramente, compreendemos[1] que a formação deve ser permeada por aspectos intrínsecos ao sistema escolar, que, por vezes, impõe limitações a esses processos, pois, no Brasil, não existe uma política pública que garanta aos professores, durante a sua

[1] A partir desse momento, a escrita passa a ser no plural, por tratar-se de compreensões conjuntas entre a pesquisadora e o orientador.

prática profissional, espaços específicos para a sua formação. Os professores após uma jornada de 40 horas/aula de trabalho, com responsabilidade familiar e outros afazeres sociais, devem buscar a formação continuada por conta própria, salvo alguns municípios que propiciam espaços de formações continuadas em horários de trabalho, dispensando os alunos ou ainda organizando os horários de planejamento de aula dos professores de uma determinada área em um mesmo dia/horário, permitindo uma formação por área específica no horário de trabalho.

Por outro lado, compreendemos que os cursos de formação continuada devem promover espaços de estudo e pesquisa em torno dos conteúdos a serem ensinados, pensando em estratégias de ensino, quais conteúdos a ensinar e como ensinar, propiciando diálogo, troca de experiências, tanto nos espaços de aprendizagens, quanto com relação às especificidades de cada professor, aluno, turma e escola.

Como pesquisadores na área de Educação Matemática e integrantes do Grupo de Estudos em Didática da Matemática (DDMat)[2] atentamos para a importância das pesquisas e dos estudos em torno da formação continuada de professores (SANTOS, FREITAS, 2013). Assim sendo, partindo desses contextos formativos e mediante as mudanças educacionais, sociais e políticas nos tempos atuais, compreendemos, em consonância com Pais (2002), que a Didática da Matemática vem ao encontro dos anseios de formação dos professores de matemática, uma vez que esta é, nas palavras do autor:

> Uma das tendências da grande área da educação matemática, cujo objeto de estudo é a elaboração de conceitos e teorias que sejam compatíveis com a especificidade educacional do saber escolar matemático, procurando manter fortes vínculos com a formação de conceitos matemáticos, tanto em nível experimental da prática pedagógica, como no território teórico da pesquisa acadêmica. (PAIS, 2002, p.11).

O aporte teórico da Teoria Antropológica do Didático (TAD) (CHEVALLARD, 1992, 1994, 1998, 2001, 2002, 2003, 2007, 2009a, 2009b, 2009c, 2009d, 2009e, 2009f, 2009g, 2012) tem possibilitado analisar, investigar e refletir sobre o ensino de matemática, por meio do estudo de situações que estão presentes na sala de aula e em seu entorno – escola, pedagogia, sociedade - bem como, a análise de práticas pedagógicas. Diante do exposto, as reflexões remetem ao questionamento: *como desenvolver uma formação continuada de professores de matemática, a partir do desenvolvimento de micropercuros, de modo a provocar mudanças na prática pedagógica?*

---

[2]http://grupoddmat.pro.br/

Com base em relatos individuais de alguns professores sobre dificuldades dos alunos aprenderem, assim como deles trabalharem com conteúdo de geometria, bem como em pesquisas sobre praxeologias geométricas em livros didáticos (ANDRADE (2012); CORREIA E LOBO (2011)), fizemos essa escolha em afetar, de algum modo, a prática dos professores, que não seja uma formação que “indique receitas para a sala de aula” ou algo alheio à situação real da vivência escolar, como uma formação mecânica e somente teórica. Ao contrário, é preciso que, a partir do diálogo e inquietações dos próprios professores participantes, a formação desenvolva-se, possibilitando estudos e reflexões sobre as suas práticas por meio da troca de experiências. Assim, desenvolver uma formação continuada com professores de matemática que se interessam por discussões sobre tópicos de Geometria tornou-se objeto de estudo desta investigação.

A TAD compreende que toda atividade humana pode ser descrita por meio de praxeologia, significando a indissociabilidade entre o saber-fazer e o saber. Assim, numa sala de aula, por meio dessa teoria, podemos investigar a matemática ensinada – Organização Matemática (OM) – e como essa matemática é ensinada – Organização Didática (OD).

Para tanto, baseamo-nos nos estudos desenvolvidos por Chevallard (2012), nos quais o autor instiga a uma quebra de paradigmas. Neste sentido, ele destaca dois paradigmas denominados *visitas às obras* e *questionamento do mundo*. Segundo Chevallard (2012), *visitas às obras* é o paradigma que você observa a situação com pouco protagonismo e, no novo paradigma *questionamento do mundo*, você observa, analisa e questiona a situação, sendo uma pessoa ativa no processo de ensino e aprendizagem da matemática.

Amparado neste último paradigma, Chevallard (2009a) tem desenvolvido a metodologia denominada Percurso de Estudos e Pesquisas (PEP)[3], com intuito de desencadear práticas pedagógicas que levem os alunos e professores a questionar, a conjecturar, a autonomia, a parecerem um pesquisador, a serem, de fato, construtores de seus próprios conhecimentos. Cabe ressaltar ao leitor que, nesse momento, estamos contextualizando o desenvolvimento da nossa pesquisa e que, posteriormente, traremos uma discussão teórica mais detalhada sobre o assunto, pois esses paradigmas e a

[3] Estamos assumindo Percurso de Estudo e Pesquisa (PEP) que é a tradução na língua portuguesa. Na França, é Parcours d’Étude et de Recherche (PER) e, na Espanha, é Recorridos de Estudio e Investigación (REI).

metodologia utilizada na pesquisa não se resumem apenas ao que está sendo mencionado nessa parte introdutória.

Logo, temos como hipótese *que podemos promover mudanças nas praxeologias do professor de matemática da Educação Básica, relacionadas aos conteúdos geométricos na execução de PEP*.

Na proposta do PEP, ao formar um grupo de estudos em torno de um determinado tipo de problema, constitui-se uma relação didática entre os envolvidos no estudo. Essa relação considerada "aberta" consiste no desenvolvimento de uma proposta formativa, na qual os estudantes[4] não terão conhecimento de antemão dos problemas a serem respondidos ao longo do estudo e o orientador desse estudo não terá como prever todas as discussões ou dificuldades que poderão surgir no processo de estudo como afirmam os autores: "o ensino, como meio do processo didático, não deve pretender controlar de maneira absoluta o desenvolvimento desse processo. A relação didática é uma relação 'aberta'". (CHEVALLARD; BOSCH; GASCÓN, 2001, p.201).

Desse modo, tendo em vista o foco da pesquisa, definimos que o objetivo deste trabalho é: *Investigar possibilidades do desenvolvimento de micro-PEP na formação continuada de professores de matemática no estudo de conteúdos geométricos.* Esta pesquisa foi desenvolvida por meio de vários micro-PEP, em que o orientador do estudo, papel desenvolvido pela pesquisadora, em conjunto com professores de matemática, que estavam na posição de estudantes, realizaram estudos de questões que continham conteúdos de Geometria, orientados pelo paradigma *questionamento do mundo*.

No desenvolvimento dos micro-PEP, realizamos estudos de diferentes praxeologias com os professores de matemática, relativas a conteúdos geométricos, permeadas pelas trocas de experiências, e buscamos compreender possibilidades em produzir PEP na formação de professores, pois, para Chevallard (2009a), trabalhar coletivamente sobre praxeologias permite aos professores discutirem como acontece o processo de ensino e aprendizagem de um determinado conceito e é a ferramenta essencial para combater o ensino rotineiro em sala de aula.

Entre o rol de conteúdos matemáticos para o desenvolvimento dos micro-PEP, a Geometria, entre outros campos da matemática, constitui uma área de investigação que propicia a exploração de uma diversidade de recursos materiais e atividades, que

[4] Estamos utilizando a palavra "estudantes" no sentido de serem pessoas envolvidas num percurso de estudos, podendo ser professores, alunos, gestores, administradores ou qualquer outro grupo de pessoas que participem do PEP.

vislumbram a descoberta, a experimentação, a produção de conjecturas e o desenvolvimento do raciocínio lógico, que instigam o desenvolvimento de PEP e, além disso, representam uma particularidade dos pesquisadores em continuar o desenvolvimento de pesquisas nesse campo investigativo (SANTOS; FREITAS, 2013).

Na pesquisa de Santos e Freitas (2013), investigamos praxeologias mobilizadas por uma professora indígena ao ensinar os conteúdos de Geometria Plana e Espacial. Para tanto, acompanhamos *in loco* a professora em sala de aula e as suas escolhas pedagógicas nos momentos dos seus planejamentos, bem como realizamos estudos conjuntos sobre outras possibilidades de ensino em torno do conteúdo que seria ensinado.

Na investigação, vimos que, na prática em sala de aula, apesar da discussão e do diálogo com os pesquisadores na preparação de suas aulas, a professora expôs os conteúdos um após o outro, trabalhando de uma forma que Chevallard (2002) denomina como fila indiana. Identificamos, assim, um distanciamento com relação ao discurso e à prática da professora, visto que, em vários encontros de planejamento, ela manifestou intenção de realizar uma metodologia diferente daquela com que estava habituada, porém, não ensinou como o planejado.

Considerando o nosso objetivo geral, temos como objetivos específicos:

1) Investigar e analisar conteúdos geométricos mobilizados pelos professores durante a formação continuada.

Diante disso, os PEP ocorreram em torno do estudo de um objeto matemático, por meio de questões representado pela letra (Q) e perpassou estudos e pesquisas sobre conteúdos de geometria plana e espacial. Durante esses estudos, os professores explanaram praxeologias mobilizadas em torno dos conceitos geométricos, possibilitando identificar aspectos conceituais envolvendo os conteúdos estudados. Além disso, observamos a apropriação dos conceitos pelos professores, bem como identificamos e analisamos a continuidade e funcionamento dos PEP a partir de suas próprias inquietações em torno dos conteúdos geométricos a serem abordados em sala de aula.

2) Investigar e analisar organizações didáticas relacionadas aos conteúdos geométricos mobilizados pelos professores durante a formação continuada.

Ao realizar um estudo praxeológico dos conceitos mobilizados pelos professores, identificamos e analisamos as escolhas metodológicas que eles têm priorizado em suas práticas, ao relatarem como ministraram determinados conteúdos para os alunos. Desse modo, investigamos as suas organizações didáticas, a partir dos estudos desenvolvidos nos PEP em torno dos conceitos geométricos. Nesse sentido, acreditamos que as OM e as

OD estão totalmente imbricadas e ao propiciar o estudo dos conteúdos por meio dos micro-PEP consigamos ter uma representatividade das OD.

3) Identificar e analisar condições e restrições identificadas durante a formação continuada.

No cenário da formação, existem situações vivenciadas pelos professores que estão diretamente relacionadas com questões que permeiam a formação acadêmica, vida familiar, vida social entre outros fatores que não se limitam apenas à sala de aula. Nessas situações, podem existir fatores que favoreçam a participação dos professores na formação, bem como restrições que são situações impostas aos professores e impossíveis de serem modificadas, que lhes impossibilita participarem de formações continuadas. Assim, foi necessário analisar condições e restrições que pesam sobre os professores na sua prática profissional.

Neste sentido, por meio das OD e OM mobilizadas pelos professores, bem como das condições e restrições de fatores que não se limitam à sala de aula e das práticas pedagógicas e , podemos investigar se é possível ou não desenvolver micro-PEP para a formação continuada de professores de matemática e ainda em quais condições a formação é viável. Cabe ressaltar que estamos compreendendo que a formação continuada é um momento de estudo, de troca entre os pares, de diálogo e que o estudo da matemática é imprescindível nesse espaço.

O presente trabalho está organizado em quatro capítulos. No primeiro capítulo, intitulado “Percurso de Estudo e Pesquisa: paradigma do questionamento do mundo”, buscamos apresentar ao leitor um estudo teórico dos principais elementos da TAD que nortearam a nossa pesquisa. Primeiramente, apresentamos um estudo dos temas primitivos, como *objetos O*, *pessoas X* e *instituições I*, que são fundamentais para entender os conceitos básicos dessa teoria. Na sequência, abordamos um novo paradigma didático (CHEVALLARD, 2012), que o autor denomina como o paradigma *questionamento do mundo*, que surge em contraposição ao paradigma *visita às obras*. O paradigma *questionamento do mundo* tem como foco oferecer um processo de estudo no qual tanto o professor quanto o aluno são protagonistas do processo de ensino e aprendizagem da Matemática.

Além disso, realizamos um estudo sobre o PEP e as condições para que um percurso exista, tratando-se de um grupo de pessoas que busca respostas para uma obra matemática, que pode ser orientado por um coordenador de estudo. Esse é o principal objeto de estudo desta pesquisa, de modo que esperamos, ao final deste trabalho, identificar possibilidades de desenvolver micro-PEP na formação continuada de professores de matemática. Para finalizar este capítulo, apresentou-se um estudo teórico do que seria as praxeologias matemáticas e didáticas na TAD.

O segundo capítulo, “A Formação Continuada de Professores: Diálogo entre Diferentes Perspectivas”, centra-se na discussão sobre diferentes concepções de formação de professores e, principalmente, na compreensão a partir de pesquisadores da área de Educação Matemática sobre formação continuada e profissionalização do professor. Apresentaremos ainda alguns levantamentos bibliográficos, focalizando, especialmente, as pesquisas que tinham como objetivo investigar a formação continuada de professores de matemática.

A partir desse levantamento, identificamos trabalhos de diversos pesquisadores espanhóis e franceses que tiveram as suas pesquisas em torno da formação de professores e que são referências nos estudos desenvolvidos no Brasil. Assim, ainda no segundo capítulo, apresentamos um estudo de alguns artigos e pesquisas desenvolvidas por esses pesquisadores, a fim de nos aproximarmos do estudo da TAD na formação de professores em nível internacional.

O terceiro capítulo, “Apresentando os percursos da pesquisa”, é destinado aos processos que conduziram a nossa pesquisa, um estudo de cada PEP desenvolvido, bem como uma descrição praxeológica das questões abordadas, realizando um estudo dos principais conceitos matemáticos e didáticos das questões estudadas pelo grupo de professores.

No quarto e último capítulo intitulado, “Análise do processo de formação continuada por meio dos micro-PEP”, apresentamos os resultados da pesquisa, identificando, a partir dos diálogos e das atividades propostas, o estudo desenvolvido pelos professores e os principais elementos destacados durante os PEP.

Em suma, a presente pesquisa visa à realização e análise de um processo de estudo, por meio de micro-PEP, para que, ao final, possamos ter alguns direcionamentos para a condução de formações continuadas para professores que ensinam matemática.

CAPÍTULO I – PERCURSO DE ESTUDO E PESQUISA: PARADIGMA DO QUESTIONAMENTO DO MUNDO

É postulado a partir da TAD que a profissão de professor de matemática é uma profissão em construção, deve equipar recursos próprios de natureza didático-matemática, que constituem infra-estrutura necessária para enfrentar as dificuldades, problemas e desafios que surgem continuamente no exercício do ensino.
(Olarría e Sierra)[5]

Neste capítulo, abordamos um estudo da Teoria Antropológica do Didático (TAD) e os conceitos que nortearam a pesquisa, de modo que o leitor, no decorrer dos capítulos subsequentes, possa compreender os elementos teóricos (nomenclaturas, conceitos) próprios da teoria.

1.1 A Teoria Antropológica do Didático (TAD)

É necessário apresentar alguns conceitos primitivos que norteiam a teoria, para que o leitor possa ter uma melhor compreensão, como praxeologia, OM, e OD entre outros, e, principalmente, sobre as possibilidades de desenvolver pesquisas na apropriação dessa teoria. A TAD, desenvolvida por Yves Chevallard, tem possibilitado estudar qualquer atividade humana - práticas pedagógicas, andar de bicicleta, ler um livro, formação continuada - enfim, qualquer que seja a atividade, esta pode ser descrita por meio de praxeologias, resultantes das relações pessoais e institucionais.

Assim, um dos conceitos básicos da TAD está em entender as relações pessoais e institucionais, recorrentes das definições dos temas primitivos *objetos O*, *pessoas X* e *instituições I*. Para Chevallard (1992), os objetos, na teoria, são a base de toda a construção teórica e, nessa perspectiva, podemos considerar que "todas as coisas são objetos" (CHEVALLARD, 1992, p.86). O objeto só existe a partir do instante que uma pessoa X ou uma instituição I reconhece-o, ou ainda se a pessoa ou a instituição tiver uma

[5] Em todos os capítulos deste trabalho, iniciaremos com uma epígrafe, cada uma delas tem como intenção levar o leitor a refletir sobre a formação de professores, em especial, a formação continuada. Nesta, o autor já inicia mencionando que a profissão do professor é uma profissão em construção, estamos caminhando nesse processo de construção, que é dinâmico e ao mesmo tempo desafiante.

relação com esse objeto, respectivamente, representado por R(X, O), R_I (O), em que se lê relação pessoal com O ou ainda a relação institucional com O, e obviamente a relação R(X, O) ≠ Ø e R_I (O) ≠ Ø.

Para Chevallard, a teorização desse conceito compreende que "[...] a função logarítmica é, evidentemente, um objeto (matemático), mas existe igualmente o objeto escola, o objeto professor, o objeto apreender, o objeto saber, o objeto dor de dentes, o objeto fazer xixi, etc." (CHEVALLARD, 1992, p.87). Por certo, na nossa pesquisa, buscaremos a compreensão dos objetos que compõem as práticas escolares e o seu entorno.

Com relação a esse conceito fundante da TAD, podemos ainda mencionar que a pessoa X pode conhecer O, ou I conhecer O, e que o fato de conhecer significa que X tem algum conhecimento sobre O, porém, as relações da pessoa ou da instituição com o objeto são diferentes. Por exemplo, posso conhecer o jogo de futebol, (nomeio o 'jogo de futebol' como objeto), mas a minha relação com o jogo é de principiante, eu não tenho qualquer conhecimento sobre o jogo de futebol (quantos jogadores, como se joga, suas regras, competições, times, patrocinadores, estádios). Assim, conforme eu vou buscando aprender sobre o 'jogo de futebol' as minhas relações com esse objeto vão se modificando, ou seja, as relações de X com O e de I com O podem ser modificadas, isso é , definido na teoria como antropologia do conhecimento ou antropologia cognitiva. Por certo, as minhas relações com o jogo de futebol podem ser modificadas e fazerem com que me torne uma especialista em jogo de futebol.

Neste sentido, uma pessoa X é o conjunto formado por um indivíduo e suas relações pessoais R(X, O), compreendendo que, com o passar do tempo, alguns objetos deixam de existir para X e outros aparecem, sendo uma relação totalmente dinâmica. Logo, os sistemas de relações de X modificam-se. E quando X conhece O, temos o que o autor denomina de Universo Cognitivo U(X), o conjunto U (X) = {(*O*, R (X, O)) / R (X, O) ≠ ∅}, no sentido de representar todos os objetos que fazem parte do universo cognitivo de uma pessoa X.

Um outro conceito fundamental na teoria está em compreender o que é uma instituição I, que deve ser entendida como "um dispositivo social" (CHEVALLARD, 2003, p. 2). *A priori*, podemos mencionar que "uma escola é uma instituição, tal como o é uma sala de aula; mas existe igualmente a instituição trabalhos orientados, a instituição curso, a instituição família". (CHEVALLARD, 1992, p. 88). Para cada instituição I, há um conjunto de objeto O_I (objetos institucionais para I), na qual existe uma relação institucional R_I (O), assim, o conjunto O_I é dependente do *tempo institucional* t_I, pois a cada momento podem surgir novos objetos institucionais e outros desaparecerem, o que afeta diretamente I.

Na nossa pesquisa, desenvolvemos processos de estudos em uma instituição I = formação continuada, em que os sujeitos (professores de Matemática) de I pudessem discutir, avaliar e reconstruir as suas práticas em torno dos conteúdos geométricos, para que tais práticas pudessem ser desenvolvidas em uma outra instituição, no caso, a instituição escolar I_E. Também poderíamos pensar que cada nível escolar pode ser considerado como uma instituição, no caso, instituição sexto ano I_6, assim, podemos elencar diferentes instituições presentes na formação continuada. Nesse sentido, podemos compreender que na formação continuada temos diferentes assujeitamentos que devem ser considerados para uma participação ativa de todos os envolvidos.

Para uma instituição I, uma pessoa X torna-se *sujeito* de I quando sujeita-se a I, em um sentido figurado. Em outras palavras, X torna-se sujeito de I entrando em I, logo, sempre que tivermos O como um objeto institucional para I, esse objeto O começa a existir para X sob o assujeitamento da relação institucional R_I (O), assim, vai se desenvolver ou alterar uma relação pessoal R(X,O) sob o assujeitamento de R_I(O).

Assim, os professores de matemática participantes dessa pesquisa tornaram-se sujeitos da formação continuada e o objeto 'é o conjunto de todos os objetos que compõem as práticas escolares e seu entorno', logo, os professores a partir de alguns assujeitamentos da instituição I = formação continuada, modificam as suas relações com o objeto.

Neste sentido, o objeto O poderia existir ou não para X, antes da sua entrada na instituição I nos casos em que o objeto O não existe para X, ao entrar na instituição I, a relação que não existia começa a existir, logo, a relação R(X, O) modifica-se, implicando aprendizagem para X em relação ao objeto O, em outras palavras, quando a relação R(X, O) altera-se, existe aprendizagem, caso contrário X nada aprendeu. No entanto, é importante ressaltar que as relações pessoais são compostas por diversas relações institucionais, mas que uma relação institucional não tem a intenção de apagar outras relações institucionais.

A instituição I tem como intenção fazer com que as relações de X com O alterem-se ou modifiquem, X tornando-se sujeito de I, existem "alterações cognitivas – que, eventualmente, farão de X um sujeito adequado de I" (CHEVALLARD, 1992, p. 90). Precisamos, assim, entender o que seria o "bom" sujeito inserido em I. Para Chevallard

(1992), quando a relação pessoal R(X, O) é conforme a relação $R_I(O)$, temos um "bom" sujeito de I, ao contrário, teremos um sujeito inadequado, que não se insere no contrato institucional C_I. Além disso, essa concepção de conformidade com a instituição significa que o sujeito está atendendo as expectativas da instituição. Vale pontuar que na teoria, as relações não são estáticas, ao contrário, elas estão em movimento, assim, as relações de um sujeito inadequado pode trazer inovações a uma determinada instituição por fazer diferente, que vão novamente sendo constituídas para que possa atender a instituição.

Para ilustrar o que seria "bom" sujeito de I, temos que ao ensinar o conteúdo de polígono no sexto ano do Ensino Fundamental, para uma classificação inicial de figuras planas, buscamos que o aluno compreenda e saiba distinguir a diferença de um polígono em relação a outras figuras planas existentes na Geometria. Assim, existe uma relação institucional $R_I(O)$, na qual o objeto "Polígono" exista no ensino de matemática para o sexto ano do Ensino Fundamental, se o aluno (X) tiver uma relação com o objeto "Polígono" de acordo com a Instituição = I_6 sexto ano do Ensino Fundamental, ele é um "bom" sujeito, pois compreende o conceito de acordo com a instituição.

A relação $R_I(O)$ não é única, uma vez que, entre os objetos de I, existe uma particularidade de objetos, denominados "posições em I, que será aqui denotada por P_I" (CHEVALLARD, 1992, p. 92), pois, para cada posição p, em I, existe uma relação institucional com O "para os sujeitos de I em posição p" (CHEVALLARD, 1992, p. 92), denotada por $R_I(p, O)$. Assim posto, na sala de aula (que é uma instituição), temos dois sujeitos em posições (p) diferentes, o professor e o aluno.

Chevallard (1992) menciona que existem instituições particulares, que o autor denomina como instituições didáticas:

> Seja[6] I uma instituição e seja p = e uma posição em I, que designaremos, por convenção, por posição do aluno (no seio de I). Diremos que I é didática relativamente à posição e se existir um conjunto não vazio $E_I(e)$ incluído em O_I, cujos elementos são chamados desafios didáticos para os sujeitos em posição e, tal que I manifesta a intenção de tornar R(X,O) conforme a $R_I(e, O)$, para todo X em posição e para todo O em $E_I(e)$. (CHEVALLARD, 1992, p. 90)

[6] Soit I une institution et soit p = e une position au sein de I qu'on désignera par convention comme position d'élève (au sein de I). On dirá que I est didactique relativement à la position e s'il existe un ensemble non vide $E_I(e)$ inclus dans O_I, dont les éléments sont appelés enjeux didactiques pour les sujets en position e, tel que I manifeste l'intention de rendre R(X,O) conforme à $R_I(e,O)$ pour tout X en position e et pour tout O dans $E_I(e)$.

Para uma determinada instituição, seja didática ou não, denomina-se educação institucional determinada por I "ao conjunto das alterações operadas nas relações pessoais R(X,O), em que O é um objeto institucional de I, quando X torna um sujeito de I". (CHEVALLARD, 1992, p. 91). Todo o Universo Cognitivo U(X) de X são resultados dos assujeitamentos de X em diferentes posicionamentos institucionais, Chevallard (2003) afirma que qualquer pessoa X é resultado dos assujeitamentos de uma variedade de instituições conhecidas por meio de diferentes obras. Neste sentido, a pessoa emerge de vários assujeitamentos do passado e do presente e não se reduz apenas a uma instituição I, por mais que tenha sempre presente alguma instituição I dominante.

Neste aspecto, o autor afirma que a prática do professor ao ensinar um determinado conteúdo é resultado de diferentes assujeitamentos nos quais o professor assujeitou-se ou assujeita-se, sendo um processo coletivo entre as instituições e o próprio professor. O mesmo acontece com os alunos. Para o autor, é um equívoco pensar que o aluno é o "bom sujeito", que está disposto a entrar na instituição I que o professor quer formar, no caso a escola, uma vez que, para o aluno, podem existir outras instituições externas muito mais importantes e que, em alguns casos, certos assujeitamentos, sem intenção, acabam por enfraquecer ou destruir outros assujeitamentos que os alunos têm como mais importante.

Para o autor, toda relação institucional é potencialmente destruidora de algumas relações na construção de novas relações institucionais, sendo que qualquer ensino deve, *a priori*, identificar os assujeitamentos que são obstáculos ou apoiam o ensino proposto. Assim, um ensino diferenciado consiste na identificação desses assujeitamentos, no sentido de analisar as condições que facilitem a mudança cognitiva, para aquele que está querendo aprender algo. Neste sentido, é importante destacar que quando se estuda o cognitivo na TAD, o sujeito deve querer aprender, ele deve entrar no jogo para que as relações modifiquem-se, caso contrário, o sujeito pode manter-se alheio à instituição e nenhuma relação será modificada.

Chevallard (2003) assinala que um dos caminhos para que a mudança cognitiva aconteça nos assujeitamentos é o trabalho em grupo. "A mudança cognitiva surge como um processo em que todos ajudam o outro a assumir a mudança, porque todos mudam juntos" (CHEVALLARD, 2003, p. 12). Pode acontencer, que para alguns, a mudança aconteça de modo solitário, mas a grande maioria e mesmos os grandes estudiosos realizaram estudos e pesquisas em grupo.

Na Educação Matemática, o termo "didático" não se resume apenas ao estudo de práticas de ensinar e aprender conteúdos, resultante da relação entre professor e aluno em sala de aula. Segundo Chevallard, Bosch e Gascón (2001, p. 39), "a didática da matemática é a ciência que estuda os processos didáticos, os processos de estudo de questões matemáticas" e, certamente, a TAD possibilita estudar a matemática desenvolvida no conjunto de atividades humanas e de instituições sociais. Desse modo, a TAD propicia o estudo de todos os objetos relacionados ao processo de ensino e aprendizagem da Matemática por meio das praxeologias: "toda atividade humana regularmente realizada pode descrever-se como um modelo único, que se resume aqui com a palavra praxeologia" (CHEVALLARD, 1998, p. 1).

A palavra "praxeologia" provém de dois radicais: praxis, que significa "prática", e logos, que significa "estudo". Assim, a terminologia da palavra significa o estudo da prática. No entanto, essa palavra, na teoria, significa a indissociabilidade entre o saber e o saber-fazer, é a necessidade de que esses dois componentes estejam presentes e interligados, como pontua Chevallard (2007):

> A[7] partir daí surgiu a noção de praxeologia, sendo esta palavra escolhida para designar **a união** de um bloco prático-técnico $\Pi = [T/\tau]$, formado por um tipo de tarefas T e uma técnica τ para executar tarefas do tipo T, com uma unidade teórica tecnológica $\Lambda = [\theta/\Theta]$, constituída uma tecnologia θ justificando a técnica τ e uma teoria Θ justificando a tecnologia θ. (CHEVALLARD, 2007, p. 9)

Neste sentido, essa teoria possibilita ao pesquisador investigar as práticas desenvolvidas por diferentes instituições, como essas práticas estão sendo propostas (saber) e efetivadas (saber-fazer). A praxeologia $[T/\tau/\theta/\Theta]$ é composta dos seguintes elementos: tipo de tarefas (T), técnica (τ), tecnologia (θ) e teoria (Θ), e, com isso, as atividades humanas fundamentam-se em realizar uma tarefa t de certo tipo T, por meio de uma técnica τ, amparada por uma tecnologia θ, que se justifica por uma teoria Θ.

A TAD propicia investigar as práticas docentes por meio da praxeologia. Para tanto, são necessárias as seguintes atividades: observar, descrever e analisar os aspectos didáticos e matemáticos. Por conseguinte, é preciso entender a matemática realizada em

[7] De là sortit la notion de *praxéologie*, ce mot étant choisi pour désigner l'union d'un bloc pratico-technique $\Pi = [T/\tau]$, formé d'un type de tâches *T* et d'une technique τ pour accomplir les tâches du type *T*, avec un bloc technologico-théorique $\Lambda = [\theta/\Theta]$, constitué d'une technologie θ justifiant la technique τ et d'une théorie Θ justifiant la technologie θ.

sala de aula em torno de um tema estudado, que pode ser analisado por meio da Organização Matemática (OM) – que é um campo de estudo dos conceitos matemáticos e das possibilidades de modelar a matemática e que visa identificar quais conteúdos são valorizados e edificados pelos professores em sua prática. A OM caracteriza o estudo do objeto matemático em um esboço praxeológico das atividades matemáticas, que podem ser descritas por meio das quatro componentes: tipo de tarefas (T), técnica (τ), tecnologia (θ) e teoria (Θ).

Referir-se a tipo de tarefas (T) significa dizer que existem tarefas (t) que fazem parte desse grupo maior (T), ou seja, as tarefas (t) são mais particulares e o tipo de tarefas (T) abrange as várias tarefas que possuem técnicas comuns de resolução. As tarefas (t) são expressas geralmente por um verbo que designa ação e está associado a um objeto. Como esclarece Chevallard (1998, p. 2), "calcular o valor de uma função num ponto é um tipo de tarefa, mas calcular, simplesmente, é o que chamamos de gênero de tarefas, que pede um determinado substantivo".

Ao realizar um tipo de tarefas (T), existe uma "maneira de fazer", como realizar essa tarefa (t), denominada técnica – ou seja, para toda tarefa a ser cumprida, existe uma técnica utilizada. Uma única técnica, no entanto, em geral, não é suficiente para realizar todas as tarefas contidas em um tipo de tarefas (T), uma técnica não resolve todas as tarefas de determinado tipo, mas é possível que, para um tipo de tarefa específica, exista uma única técnica que a resolva. Cabe ressaltar que Chevallard (1998, p. 3) pondera que "a técnica não é necessariamente de natureza algorítmica". Um exemplo prático dessas praxeologias pode ser esclarecido por Bittar (2017)

> Passar uma saia, por exemplo, é uma tarefa; passar uma calça é outra tarefa que tem semelhanças com a anterior. Podemos, então, falar em tarefas que são de um mesmo tipo: Passar roupa. Cada tarefa desse conjunto demanda uma técnica que depende do tecido de que a roupa é feita e da roupa em si: passar uma saia de pregas é definitivamente diferente de passar uma calça jeans que pode ser semelhante a passar uma bermuda jeans! O tipo de tarefa é definido (descrito) por um verbo de ação (passar) e um complemento (roupa); percebe-se assim a necessidade do complemento para que o tipo de tarefas esteja bem definido. As técnicas mobilizadas para resolver tarefas desse tipo podem ser justificadas – nem sempre explicitamente pelas pessoas que as mobilizam – por leis físicas. (BITTAR, 2017, p. 367).

Ainda de acordo com Bittar (2017, p. 375), "[...] o que é tarefa em um momento pode ser técnica posteriormente. Por exemplo, fatorar uma expressão algébrica pode ser uma tarefa ou pode compor uma técnica para resolver uma equação algébrica".

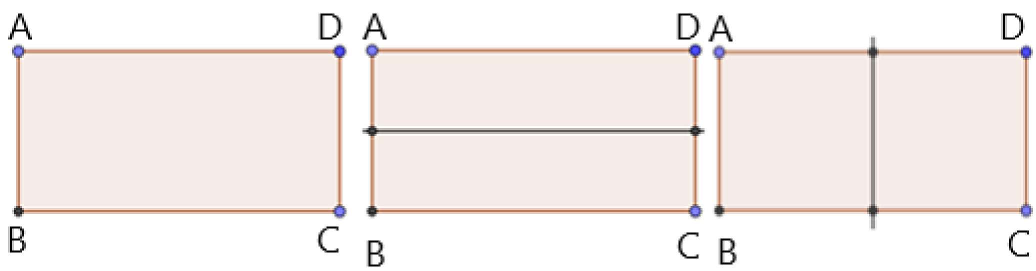
A tecnologia (θ) tem como objetivo clarificar e explicar a técnica utilizada para realizar determinado tipo de tarefa (T) – para qualquer tipo de tarefa (T), existe uma técnica, justificada por uma tecnologia. Dependendo da instituição analisada, uma determinada técnica pode ser uma tecnologia (θ), pois pode variar conforme o nível de escolaridade em torno da organização matemática (OM) analisada, como menciona Bittar (2017, p. 378): "é preciso lembrar a instituição na qual o objeto vive, mesmo porque o que pode ser aceito como justificativa em dado nível escolar pode não ser em outro nível".

Assim sendo, em determinado ano escolar, uma tecnologia (θ) que justifica a técnica utilizada pode, em outra etapa da aula ou em outro ano escolar, passar a ser uma técnica. Pode também ocorrer que a tecnologia esteja integrada à técnica, ou seja, a técnica é ao mesmo tempo uma tecnologia, pois autojustifica-se. A teoria (Θ) é de natureza abstrata, podendo comparecer em uma instituição de forma explícita ou implícita; tratam-se de demonstrações e outras provas, constituindo a justificação da tecnologia (θ), porém, com rigor maior com relação à justificativa da tecnologia (θ) sobre a técnica, como afirma Chevallard (1998, p. 4): "Passa-se então a um nível superior de justificação-explicação-produção, o da teoria (Θ), que retoma, em relação à tecnologia, o papel que esta última tem com respeito à técnica".

Para exemplificar o quarteto praxeológico no estudo de Simetria, podemos identifica-lo na seguinte atividade:

Figura 1 – Retângulo e seus eixos de simetria

Atividade: Indique o número de eixos de simetria do Retângulo ABCD, a seguir:



Fonte: Construção própria no Geogebra

Tarefa (T): Identificar os eixos de simetria do polígono; Técnica (τ): Traçar retas que passam pelos pontos médios de dois lados opostos; Tecnologia (θ): Propriedades da ortogonalidade e equidistância; Teoria (Θ) Geometria Euclidiana. Neste sentido, o quarteto praxeológico exposto [T, τ, θ, Θ] é composto por dois blocos: o bloco [T, τ] é denominado do bloco do saber-fazer; e o bloco [θ, Θ] é denominado bloco do saber, sendo que o bloco saber-fazer é justificado pelo bloco saber.

No desenvolvimento da OM, o professor faz as suas escolhas sobre como conduzir a sua aula, quais os conceitos valorizados e as atividades tidas como essenciais, como fazer com que os alunos participem da aula, como introduzir o conteúdo (jogos, situações problemas, software), entre outras escolhas, que são compreendidas por meio da Organização Didática (OD), ou seja, as escolhas metodológicas da forma de apresentação ou da aula de matemática. Os autores Bosch e Gascón (2010) afirmam que toda organização praxeológica didática (OD), que vive em determinada instituição, está apoiada e fortemente sustentada por um modelo epistemológico da matemática dominante naquela instituição. Logo, é necessário identificar e desenvolver modelos epistemológicos, para que possam surgir novas propostas de OD. Para exemplificar uma OD, consideremos

> [...] uma aula dada por um professor sobre o teorema de Pitágoras no 8º ano do ensino fundamental. Ele precisará decidir que propriedades e definições irá apresentar e também como irá apresentar: serão propostas atividades para que os alunos consigam conjecturar o teorema que depois será enunciado formalmente ou irá optar por uma abordagem mais clássica de apresentação de definições e resultados a serem aplicados pelos alunos? Em outras palavras, ao preparar uma aula o professor realiza escolhas matemáticas e didáticas. A atividade do professor também pode ser modelada por meio do quarteto praxeológico: sua tarefa é 'Ensinar o teorema de Pitágoras'. Para resolver essa tarefa didática é preciso fazer escolhas didáticas como as enunciadas acima. Tem-se, assim, a praxeologia didática ou organização didática (OD) (BITTAR, 2017, p. 9)

Assim, a OD pode ser estudada por meio da análise dos seis momentos didáticos, ou por meio do quarteto praxeológico [T, τ, θ, Θ], propostos por Chevallard (1998), que ajudam a descrevê-la e possibilitam identificar aspectos priorizados pelo professor em diferentes momentos sobre a sua prática em sala de aula.

Os momentos didáticos, segundo Chevallard (1998, p. 20), constituem "uma realidade funcional do estudo" e proporcionam ao professor uma análise de seus processos didáticos. Assim, em uma única OM (localizada em instituições diferentes), podemos ter diferentes OD, ou seja, o professor pode proceder didaticamente de forma diferenciada ao trabalhar com um mesmo conteúdo em salas diferentes. De modo geral, existem práticas pedagógicas em que alguns momentos didáticos são mais valorizados.

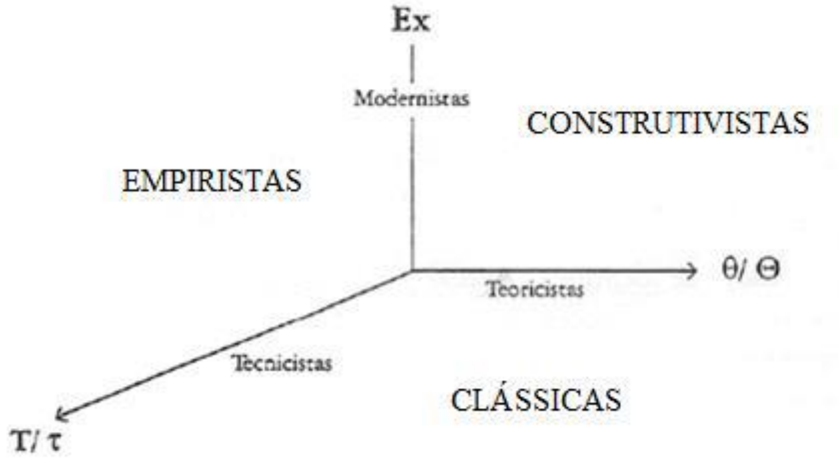
O primeiro momento é o encontro com a organização matemática, que pode ocorrer de várias maneiras, como quando o professor inicia um novo conteúdo apresentando conceitos e definições, ou por meio de algum tipo T de tarefa, partindo de uma situação problema para iniciar o conteúdo. O segundo momento é o da exploração do tipo de tarefa e da elaboração de uma técnica. O terceiro é o da constituição do ambiente tecnológico-teórico relativo à técnica.

O quarto momento é dedicado ao trabalho com a técnica: trata-se de testar e melhorar a técnica, verificando o seu alcance e se resolve todas as tarefas t, para um tipo T de tarefa, com o intuito de deixá-la mais eficaz e confiável. O quinto momento é o da institucionalização. Nesse momento, o professor define aquilo que realmente o aluno deve saber sobre o conteúdo proposto depois de realizar as tarefas solicitadas. O sexto e último momento é o de avaliação da praxeologia estudada em relação à instituição, no sentido de examinar o que, de fato, foi desenvolvido no trabalho com as praxeologias e o que foi aprendido. Esse momento articula-se com o momento de institucionalização, o professor analisa a praxeologia com os alunos, bem como os seus limites e possibilidades de utilização, podendo este sexto momento ocorrer ou não, a depender da escolha do professor.

A construção da OD por meio dos momentos de estudo, realizada pelo professor, tem como finalidade o ensino e a aprendizagem de uma OM. Para tanto, é necessário associar uma praxeologia a esse saber matemático. Para Chevallard (1992), o saber matemático é um produto da ação humana em determinada instituição. Neste sentido, a ecologia dos saberes (estudo das condições e restrições da existência de um saber em uma determinada instituição) permite compreender como o saber é vivenciado nessa instituição, conforme veremos no tópico seguinte e, certamente, as praxeologias matemáticas (OM) e as praxeologias didáticas (OD) possibilitam descrever e analisar escolhas matemáticas e didáticas priorizadas em determinadas instituições.

Gascón (2003) resume as organizações didáticas em um espaço tridimensional com os seguintes eixos: *teoricista*, *tecnicista* e *modernista* (Figura 1).

Figura 2 - Modelo epistemológico de organizações didáticas, segundo Gascón.



Fonte: Gascón (2003, p. 21).

No eixo teoricista, temos o bloco tecnológico-teórico (θ/Θ), composto pelas tecnologias e teorias. Um modelo de prática pedagógica que prioriza o teoricismo compreende que aprender matemática significa aprender teorias, ou seja, realizar organizações dedutivas envolvendo definições, postulados, demonstrações, tautologias e outras provas. Um exemplo desse modelo é o proposto na obra clássica *Os elementos*, de Euclides, escrita por volta de 300 a.C. No eixo tecnicista, temos o bloco prático (T, τ), composto pelas tarefas e técnicas. A organização didática tecnicista compreende que aprender matemática resulta do trabalho com diversas tarefas e técnicas, o que ocorre por meio da repetição de vários exercícios do mesmo tipo, que conduzem à memorização de regras e procedimentos.

Ambos os eixos, teoricista e tecnicista, compreendem um processo didático totalmente mecânico, considerando o aluno, respectivamente, como uma "caixa vazia", que aprende conforme as informações recebidas, e como um "autômata", que aprende mediante o domínio de técnicas repetitivas. O terceiro eixo, denominado modernista, é composto de experimentação. A prática valorizada nesse eixo está na exploração de problemas não triviais. Segundo Gascón (2003), nessa prática, aprende-se matemática mediante exploração (tentar técnicas diversas, aplicar algum resultado conhecido, buscar problemas semelhantes, formular conjecturas, buscar contraexemplos).

Ao combinar os momentos do bloco tecnológico-teórico (θ/Θ) com os do bloco prático (T, τ), temos uma abordagem clássica, que considera que o processo de ensino é totalmente controlado pelo professor. Da combinação dos momentos do bloco prático (T,

τ) com a experimentação, temos a abordagem empirista, que considera que aprender matemática é um processo indutivo baseado em imitar o modelo proposto de atividade por meio de várias práticas. Da articulação entre a experimentação e a valorização do bloco tecnológico-teórico (θ/Θ), temos a abordagem construtivista, que se propõe a contextualizar a atividade, considerando que aprender matemática significa um processo ativo de construção do conhecimento.

De fato, esse modelo de organizações didáticas proposto por Gáscon (2003) remete a analisar que a OD do professor perpassa pelos diferentes eixos expostos, que ora podemos valorizar mais o bloco prático (T, τ), ora o bloco tecnológico-teórico (θ/Θ), porém, o mais importante é entender que, a cada aula, a cada semana, o universo cognitivo do aluno altera-se e o quanto é necessário entender as relações institucionais para a compreensão das relações pessoais, assim como a aprendizagem nessa teoria é um trabalho assumido em conjunto, professor e aluno.

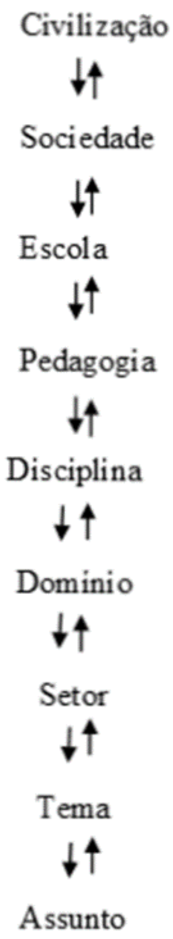
Em suma, podemos verificar ao longo desse tópico o quanto o modelo teórico da TAD permite investigar as relações pessoais e as relações institucionais, possibilitando um estudo das relações entre os objetos, sujeitos e instituições, resultando numa melhor compreenssão dos fenomenos didáticos. Certamente, essa tem sido uma teoria com uma visão ampla para pesquisar sobre formações de professores e todos os elementos que compõem o âmbito escolar, entendendo que, além de possuir ferramentas para analisar o ensino de matemática, possui possibilidades de compreender o entorno da prática escolar, como a própria escola, pedagogia, sociedade, como veremos no tópico seguinte.

1.2 Níveis de codeterminação

Na pesquisa realizada por Santos e Freitas (2013), identificamos, ao analisar a prática pedagógica *in loco*, que existe uma diversidade de fatores que não estão somente presentes na sala de aula, ou na escola, mas em um meio mais amplo, como na Sociedade, e que interferem diretamente no contexto em sala de aula e, principalmente, na prática pedagógica. Nesse viés, a TAD, por meio dos níveis de codeterminação, propicia entender esses fatores (sejam didáticos ou não) que perpassam o âmbito escolar.

As concepções de praxeologia na TAD permitem afirmar que "a didática se dedica a estudar as condições e restrições sob as quais as praxeologias começam a viver, migrar, mudar, operar, perecer, desaparecer, renascer, etc. dentro dos grupos humanos", isto é, nas instituições sociais. " (CHEVALLARD, 2007, p. 14). Para estabelecer uma praxeologia relacionada com o saber matemático, esse saber deve estar associado a uma escala hierárquica, na qual cada nível corresponde a uma realidade e determina os hábitats[8] e nichos[9] das OM e OD, conforme aponta Chevallard (2009a, p. 12):

Figura 3 - Níveis de Codeterminação



Fonte: Chevallard (2009a, p. 12)

Para Chevallard (2009b, p. 1): “a didática é a ciência das condições e restrições de difusão social das praxeologias”, ou seja, a didática é a ciência do estudo, na qual uma pessoa ou uma instituição quer fazer algo para que a outra pessoa ou instituição aprenda sobre algo. Certamente, é importante entender a singularidade das palavras “condições” e “restrições”. Conforme Chevallard, “no princípio tudo é condição” (2009a, p. 12). Uma condição passa a ser restrição para uma instituição ou pessoa, no momento em que essa

[8] Para Chevallard (1994): O hábitat de um objeto matemático refere-se à instituição na qual se encontra o saber, o lugar seu endereço.
[9] O nicho corresponde à relação do saber com o objeto de estudo, determinando a função do saber, ou seja, seu nicho. (CHEVALLARD, 1994)

condição não pode ser modificada pela instituição ou pessoa, entretanto, as condições não são restrições quando são modificáveis. (CHEVALLARD, 2009a).

Assim, as condições e restrições que são os seus objetos de estudos, e que não podem ser enumeradas *a priori*, bem como a compreensão de seu papel na difusão de uma determinada entidade praxeológica[10] $\wp$, são os objetivos das pesquisas em didática. Cada nível dessa escala é fonte de algumas condições que são como restrições em outros níveis, são possíveis de serem questionadas ou analisadas, mas não modificadas.

Ao definir didática, Chevallard (2007), primeiramente, afirma que, para que exista didática – e não apenas aprendizagem - deve existir alguma intenção didática e o portador dessa intenção didática seja uma pessoa ou instituição, que procura modificar ou criar condições e restrições para alcançar a intenção, mas pode necessariamente não alcançar. No entanto, nessa perspectiva, não é possível ficar limitado somente às condições e restrições que surgem em uma determinada intenção didática:

> Para[11] estudar, por exemplo, a eficácia de tal sistema de condições e restrições - isto é, de tal organização didática – criada em uma classe por um professor, pode-se ter que levar em conta as condições e restrições que não foram criadas pelo professor, e que não respondem a nenhuma intenção didática claramente identificável. (CHEVALLARD, 2007, p. 16).

Neste sentido, vale salientar, segundo Chevallard (2007), que ao observar o efeito de condições e restrições sobre os mecanismos de difusão das praxeologias, podemos nos deixar levar por considerar que tais condições e restrições são exteriores ao campo de estudo do didático e que o professor deve interessar-se somente pelas condições e restrições que supõe fazerem parte da classe escolar. Conforme o autor, o papel do professor vem sendo historicamente construído nessa perspectiva e ele questiona: "quando um professor de matemática encontra (oficialmente) os pais de um aluno, o didático está em jogo? " (CHEVALLARD, 2007, p. 16).

Para Chevallard (2007), os pais são evidentemente portadores de condições e restrições, nas quais alguns procedem explicitamente a sua intenção didática em "fazer qualquer coisa" para o êxito escolar do seu filho. Certamente, o professor a partir de uma

---

[10]As entidades praxeológicas cuja notação genérica $\wp$ são um tipo de obra, que admitem casos especiais como saber e saber-fazer da cultura comum. (CHEVALLARD, 2009a)

[11] pour étudier par exemple l'efficacité de tel système de conditions et de contraintes – c'est-à-dire de telle *organisation didactique* – créé dans une classe par un professeur, on peut être amené à prendre en compte des conditions et contraentes qui, elles, n'ont pas été créées par le professeur, et qui ne répondent à aucune intention didactique clairement identifiable

intenção didática pode mudar e confrontar algumas condições e restrições, criar novas intenções didáticas entrando no campo da investigação do didático e saindo das fronteiras tradicionais de ensinar. Por outro lado, o professor não deve ignorar que o próprio aluno é portador de um heterogêneo campo de condições e restrições sensíveis ao conteúdo estudado. Assim sendo, o professor não deve atribuir aos seus alunos estudos independentes dos conteúdos, ou seja, sem considerar a realidade que vivencia seu aluno.

Podemos compreender os níveis de codeterminação subdivididos em dois subníveis, conforme Chevallard (2002): níveis superiores (Civilização, Sociedade, Escola e Pedagogia) e níveis inferiores (Disciplina, Domínio, Setor, Tema e Objeto), em que, nessa escala, a seta dupla representa que a criação ou modificação de uma condição em um determinado nível pode fazer a diferença nos demais níveis. Para os níveis superiores, temos a seguinte escala:

Figura 4- Níveis superiores de codeterminação

Civilização

$\downarrow\uparrow$

Sociedade

$\downarrow\uparrow$

Escola

$\downarrow\uparrow$

Pedagogia

$\downarrow\uparrow$

Fonte: Chevallard (2009a, p. 12)

Os níveis superiores correspondem às condições e restrições impostas por situações para além da sala de aula, que não foram criadas pelo professor, mas afetam diretamente na execução das suas praxeologias. Nesse cenário, podemos exemplificar diferentes situações, entre elas, imaginemos uma escola na qual a pedagogia fundamenta-se em preparar os alunos para os vestibulares nas maiores Universidades Brasileiras e para o Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM). Para tal instituição, a pedagogia implica que a prática do professor deve ser guiada pelo sistema apostilado (fornecido pela escola) e atividades apresentadas pelos exames anteriores do ENEM e das provas dos vestibulares fornecidas pelas universidades.

Esse modelo determina, diretamente, restrições para a prática do professor, visto que ele não pode deixar de seguir esses procedimentos metodológicos, porque, acompanhando o apostilado, ele deve desenvolver todas as atividades das apostilas, assim como a execução de diferentes atividades de vestibulares. São situações que se apresentam como restrições, que não podem ser modificadas.

Assim, podemos observar que, no ambiente escolar, são diferentes situações correlacionadas aos níveis superiores que implicam diretamente a prática do professor em sala de aula, cabendo aos pesquisadores em didática compreender que são situações que precisam ser analisadas mesmo que não possam ser modificadas, como afirma Chevallard (2009a):

> [...] Cabe[12] aos pesquisadores didáticos levar em conta tanto quanto é possível em um determinado momento todas as condições que eles suspeitam que pesam na difusão praxeológica estudada, embora não tenham capacidade para ~~ob~~ter essas condições ~~sejam~~ modificadas de uma maneira eventualmente desejada. (CHEVALLARD, 2009a, p. 13).

Desse modo, os níveis de codeterminação representam, em cada nível, os assujeitamentos de X em relação às Instituições I_i. Entendemos que a TAD permite compreender as relações pessoais R(X, O) e as institucionais $R_I(O)$ e, além disso, podemos, por meio desssa teoria, analisar as relações entre o sujeito X e a instituição I, a qual envolve os assujeitamentos de X à I e as condições e restrições de I à X. Nessa vertente, podemos pensar nas relações R(X, R(I, O); R(I, R(X, O) e, ainda, analisarmos cada relação dependendo da instituição I. No caso, as relações modificam-se ou alteram, ao assumirmos I= Escola, ou I= Sociedade, I= Classe, ou ainda, I= Y (orientador do estudo), bem como ao assumirmos os diferentes sujeitos X envolvidos nessas relações.

Com relação aos níveis de codeterminação inferiores (Disciplina, Domínio, Setor, Tema e Objeto), temos:

[12] il appartient aux chercheurs en didactique de prendre en compte autant qu'il est possible à un moment donné l'ensemble des conditions dont ils soupçonnent qu'elles pèsent sur la diffusion praxéologique étudiée, quand bien même ils n'auraient pas la capacite d'obtenir que ces conditions soient modifiées d'une manière éventuellement souhaitée.

Figura 5- Níveis inferiores de codeterminação

Disciplina
↓↑
Domínio
↓↑
Setor
↓↑
Tema
↓↑
Assunto

Fonte: Chevallard (2002, p .9)

Chevallard (2002) menciona que estes correspondem ao estudo das praxeologias, mas não necessariamente um estudo de forma fragmentada, localizada em cada nível, ao contrário, os estudos dos níveis inferiores devem propiciar a motivação para o estudo de diferentes tarefas, como assinala:

> O[13] principal déficit criado pelo atual estado de coisas que prevalece hoje no colégio e no liceu preocupa primeiro as organizações matemáticas realmente implementadas em classes: esse déficit é sentido na ausência de motivação dos tipos T de tarefas estudadas. Muito geralmente, as tarefas ‘motivadoras’ estão faltando e, no limite, ninguém sabe mais nem onde procurá-las! [...] os tipos de tarefas motivadoras são encontrados em níveis mais altos de determinação de organizações matemáticas - setores e domínios. (CHEVALLARD, 2002, p. 4).

Nesse viés, os níveis de codeterminação têm como objetivo desvencilhar-se da matemática de *visita às obras*, trabalhando “silenciosamente em substituir uma tradição secular, onde o aluno espera sem piscar, segundo o imemorial problema de copiar as obras e mimetismo cultural, que o professor ensina - isto é, mostra o que é, como fazê-lo e o por quê fazê-lo dessa maneira. ” (CHEVALLARD, 2002, p. 1). Para o autor, a ausência de vínculo entre os níveis Assunto e Tema com os níveis Setores e Domínio, e ainda, o

[13] Le principal déficit qu’engendre l’état de choses qui prévaut aujourd’hui au collège et au lycée concerne d’abord les organisations mathématiques effectivement mises en place dans les classes: ce déficit s’y fait sentir dans *l’absence de motivation des types de tâches T étudiés*. Très généralement, les tâches « motivantes » 3 *manquent*, et, à la limite, nul ne sait plus même où les chercher ! Or le travail de synthèse que l’on vient d’évoquer en suivant Bouligand fait que, très généralement, les types des tâches motivantes se trouvent *dans les niveaux supérieurs* de détermination des organisations mathématiques – secteurs et domaines

nível de Disciplina, resulta na impossibilidade de pensar em tarefas motivadoras, além disso, a organização do estudo considerando todos os níveis deixou de ser matematicamente viável, que, no geral, os professores perpassam somente os níveis do Tema e Assunto.

Para esclarecer, o modo como podemos mencionar as praxeologias por meio dos níveis inferiores, na pesquisa de Santos e Freitas (2013), ao analisar as práticas pedagógicas no ensino da Geometria plana e espacial, identificamos a seguinte praxeologia relacionada aos níveis inferiores: "Disciplina (matemática), Domínio (geometria plana e espacial), Setor (identificação e classificação de sólidos geométricos e cálculo de área de figuras planas), Tema (prismas e pirâmides) e Objeto (cálculo da área da superfície de um prisma)" (SANTOS e FREITAS, 2017, p. 56) .

Os níveis inferiores permitem compreender como o saber matemático vive em uma determinada instituição, pois, em cada instituição, existem as condições e restrições que devem ser consideradas para que o saber possa existir nela. Um exemplo dessa situação pode ser esclarecido por Bittar (2017):

> Vamos tomar como exemplo o conceito de área, presente em todos os níveis da escolaridade básica e em muitos cursos universitários de exatas. No 4º ano do ensino fundamental, por exemplo, o cálculo de área de figuras planas é explorado por meio da ideia de pavimentação. Essa ideia aparece, implicitamente, no estudo da multiplicação, no 1º ou 2º ano. Nos anos finais do ensino fundamental esse mesmo conceito é estudado de modo um pouco mais formal com a apresentação de fórmulas para o cálculo da área de polígonos que podem ser justificadas, quase sempre, com congruência de triângulos. Se nos anos iniciais a ideia de área é explorada de forma intuitiva, nos anos finais começa a ter espaço uma ideia mais formal do objeto matemático área de figuras planas e, em um curso de cálculo diferencial e integral, o conceito é expandido ao cálculo de figuras planas quaisquer com a apresentação da integral de Riemann. Em cada uma dessas instituições é necessário realizar adaptações para que a ideia de área possa existir; tais adaptações são consequência das condições e restrições impostas pela própria instituição. (BITTAR, 2017, p. 367).

Nesse exemplo, temos as condições e restrições do saber matemático, conforme as instituições nas quais ele está inserido. Por certo, fica evidente que uma prática pedagógica desenvolvida em sala de aula não está baseada apenas na execução de um estudo feito por professores ou um grupo de professores, as questões didáticas e matemáticas perpassam condições e restrições determinadas pelos níveis de codeterminação.

Portanto, segundo Chevallard (2009a), o professor na qualidade de profissional da educação, deve entender, primeiramente, que a didática evolui. No entanto, somente a evolução da didática não basta, são necessários, no sistema escolar, para além das imposições políticas e administrativas, estudos em torno do objeto, para atender as particularidades de cada disciplina. O professor deve buscar esse estudo, identificando as praxeologias úteis e as dispensáveis para o exercício da profissão, praxeologias resultantes das condições e restrições, no caso da disciplina de matemática, que podem ser impostas pelos níveis superiores (escola, pedagogia, sociedade e civilização) e inferiores (tema, assunto, setor, domínio e disciplina).

1.3 Paradigma Questionamento do Mundo

Para Chevallard (1992), a concepção de instituição didática conduz a uma antropologia didática do conhecimento, a qual compreende que “qualquer instituição é, em certa medida, uma instituição didática” (CHEVALLARD, 1992, p. 92). Nesse viés, surge o seguinte questionamento: como modelizar a intenção didática presente em uma determinada instituição I? Para o autor, para modelizar essa intenção didática, é necessário desenvolver a formação de instituições, denominadas de Sistemas Didáticos (SD). (CHEVALLARD, 1992).

Para qualquer interação didática, Chevallard (2009a) afirma que temos o sistema didático (SD): $S(X, Y, \wp)$, no qual X é uma pessoa querendo aprender algo, Y é o orientador do estudo sobre uma praxeologia $\wp$, por exemplo, na composição do sistema $S(\{x\}, \{y\}, \wp_1)$, um estranho (x) ao perguntar sobre a localização de uma rua a outra pessoa, já temos o SD em que x ajuda y a encontrar a localização da rua $\wp_1$, ou ainda outro exemplo pode ser o caso da mãe querendo ajudar seu filho na tarefa escolar. Nesses casos apresentados, pode ser um mapa ou um GPS que ajuda a pessoa a procurar o endereço desejado, ou ainda podem ser os livros, materiais extracurriculares que a mãe busca para auxiliar o seu filho nas suas tarefas.

Para o autor, no ambiente escolar, de modo geral, temos um conjunto de condições e restrições, produzidas pela sociedade, que regem os SD, composto pelo terceto $S(X, Y, \wp)$, no qual X representa os alunos; Y representa o orientador do estudo, alguém que ajuda X a aprender; $\wp$ a praxeologia a ser estudada, que, na didática da matemática, refere-se ao estudo relacionado à matemática. Vale ressaltar que, em alguns casos, no sistema didático Y=Ø, não é necessário ter sempre um orientador de estudo para X aprender (CHEVALLARD, 2009a).

Na execução de um SD, é relevante entender o papel de Y na condução de X no estudo de respostas para $\wp$: Como orientar o estudo de X? O que X deve aprender sobre $\wp$? Como Y deve conduzir X? Como fazer para que o SD funcione? Tais questionamentos dependem dos alunos X, das praxeologias $\wp$ estudadas e, principalmente, o que a escola está esperando de Y ao ensinar X sobre $\wp$.

Para Chevallard (2009b), podemos entender primeiramente Y como um reprodutor de uma "pedagogia regente", em que a função de Y está em reproduzir os conteúdos dispostos nos livros didáticos, o professor expõe os conceitos e a sua prática está em ajudar X a entender os conteúdos dispostos no livro, sem qualquer interferência nos conteúdos que ali estão expostos. Como afirma Chevallard (2009g): "Nesta 'pedagogia regente', o trabalho é estudado em livros e Y está lá apenas para impulsionar este estudo". O papel de Y sempre foi designado como auxiliar de estudos, tanto que a palavra "pedagogo" originou-se da função do escravo que conduzia a criança até a escola e, posteriormente, tornou-se tutor do seu pupilo.

Para Chevallard (2009g), o desenvolvimento da "pedagogia regente" levou, no final do século XIX, ao desenvolvimento de uma "pedagogia de estudo", na qual a palavra estudo significa "trabalho em estudo" (CHEVALLARD, 2009g, p. 2), a aula entendida como uma controladora dos estudos e, por conseguinte, dos novos conteúdos a serem estudados. Ademais, Chevallard (2009b, 2009g) menciona Y como um reprodutor de uma "pedagogia do professor", que, comparado à "pedagogia regente", não se restringe em apenas reproduzir o que está exposto no livro didático, mas apresenta, em sua prática, conhecimentos priorizados por Y, no entanto, ele enfatiza que o ensino é uma "palestra" (CHEVALLARD, 2009g, p. 3). Logo, tanto na "pedagogia regente", "pedagogia do estudo" ou na "pedagogia do professor", o que Y deve fazer está limitado.

Na segunda metade do século XX, houve uma mudança na prática do professor, que busca inserir em suas ações o "método ativo". Nessa pedagogia, existe um comprometimento em dar espaço para o aluno, que o professor deve propiciar aos alunos diferentes questões, e não a imposição de um estudo praxeólogico $\wp$, ou seja, uma Pedagogia que valorize ação do trabalho em equipe, para que o aluno tenha espaço para os questionamentos, atitudes receptivas frente às questões a serem estudadas, tendo como foco a possibilidade de construir ou reconstruir conhecimentos, com ajuda de Y.

Nesse caso, o professor incorpora as outras pedagogias: "pedagogia regente", "pedagogia do estudo" e "pedagogia do professor", de modo que Y passa a ser um impulsionador do estudo, tornando-se, assim, uma pedagogia híbrida presente na pedagogia escolar (CHEVALLARD, 2009g). No entanto, segundo o autor, essas pedagogias vêm sendo estabelecidas por meio de fronteiras, ou seja, em desuso, e esse tem sido o grande problema da pedagogia escolar.

Para Chevallard (2009g), o trabalho em fronteiras está correlacionado à profissão do professor, os professores, na sua maioria, não o reconhece como um profissional, mas como um semiprofissional[14], sendo que ele pontua: "o que este estado semiprofissional não permite é atravessar a fronteira em que a profissão de professor estagnou durante décadas". (CHEVALLARD, 2009g, p. 19). Assim, certamente, a pedagogia de Y tem sido norteada por condições e restrições que permeiam o sistema didático e que direcionam toda a pedagogia escolar.

Nesse cenário, Chevallard (2009g, 2012) tem desenvolvido o paradigma *questionamento do mundo*. Esse novo paradigma surge em oposição ao que o autor denomina paradigma *visita às obras*, no qual os alunos apenas estudam as praxeologias $\wp$ impostas pelo orientador de estudo, em um ensino totalmente direcionado. Os paradigmas denominados "velhos" organizam-se em torno de doutrinas e sistemas da matemática, em que o conhecimento é fragmentado e trabalhado como *visitas de trabalho* ou *visitas a monumento*. Visitar uma obra basicamente resume-se em ver um relatório ou uma história feita pelo professor, que guia o aluno sobre o monumento visitado. Por exemplo, a fórmula de Heron para a área de um triângulo é abordada como um monumento que fica sobre si mesmo. Os estudantes são meros espectadores e todo o conhecimento ensinado pode ser esquecido ou, mais exatamente, ignorado, assim que as provas encerrarem.

Assim posto, o SD a partir desse novo paradigma passa por processo de transformação (CHEVALLARD, 2009a)

[14] Critérios de uma semi-profissão: 1. Mais baixo em status ocupacional; 2. Períodos de treinamento mais curtos; 3. Falta de aceitação da sociedade de que a natureza do serviço e/ou o nível de especialização justificam a autonomia que é concedida às profissões; 4. Um corpo de conhecimentos e habilidades menos especializado e menos desenvolvido; 5. Marcadamente menos ênfase em bases conceituais e conceituais para a prática; 6. Uma tendência para que o indivíduo se identifique com a instituição de emprego mais e com a profissão menos; 7. Mais sujeitos a vigilância e controle administrativos e de supervisão; 8. Menos autonomia na tomada de decisões profissionais, com responsabilidade aos superiores em vez da profissão. 9. Gestão por pessoas que foram preparadas e servidas em semi-profissão. 10. Preponderância de mulheres; 11. Ausência do direito de comunicação privilegiada entre cliente e profissional e 12. Pouco ou nenhum envolvimento em assuntos de vida ou morte. (CHEVALLARD, 2009g, p. 17)

$$S(X, Y, \wp) \rightarrow S(X, Y, Q)$$

No primeiro SD, estuda-se uma praxeologia “dada”, no segundo SD estuda-se uma questão “dada”. Nessa circunstância, o SD será desenvolvido por meio de questões Q impulsionadoras, sendo que o professor é um mediador, um impulsionador de estudo (CHEVALLAD, 2009a). Neste sentido, Chevallard afirma que:

> No[15] paradigma da escola atual, o da visita às obras, o que conta é $\wp$ e não Q. E o professor é julgado sobre as obras, o conhecimento que ele tem conduzido o estudo em sua classe. No que eu nomeio o paradigma do questionamento do mundo, o professor é julgado pelas perguntas que ele terá liderado o estudo. (CHEVALLARD, 2009g, p. 27)

Desse modo, Chevallard (2012) apresenta o paradigma *questionamento do mundo*, baseado em quatro conceitos inter-relacionados, que são o da "inquisição", o do ser "herbatiano", o "procognitivo" e o "exotérico". Nesse novo paradigma, Chevallard (2012) considera que a educação é um processo longo e que deve ser trabalhado com pessoas em diferentes idades. Neste sentido, o X no terceto (X, Y, Q) pode ser tanto uma criança quanto um adulto. Assim, no novo paradigma, é importante avaliar como as pessoas do atual momento e os futuros cidadãos (diferentes idades) estão aprendendo e como isso está acontecendo.

Um segundo princípio desse novo paradigma considera que, para aprender algo sobre alguma obra O, X tem que estudar sobre O, muitas vezes, com a ajuda de algum Y. Logo, para aprender a resolver uma equação cúbica, a pessoa não aprende pela sorte; é preciso parar e considerar a questão proposta, ou seja, X não é obrigado a saber tudo sobre situações que envolvem os problemas da situação que ele nunca conheceu ou nunca solucionou. Assim, no paradigma *questionamento do mundo*, quer-se que o futuro cidadão torne-se um ser herbatiano – termo que faz referência ao filósofo alemão e fundador da pedagogia Johann Friedrich Herbart (1776-1841), referindo-se à atitude receptiva com relação a questões não respondidas e problemas não resolvidos, que é normalmente a atitude do cientista em seu campo de pesquisa e que deve tornar-se atividade de todo cidadão.

[15] Dans l’actuel paradigme scolaire, celui *de l’inventaire des*, ce *oeuvres* qui compte est $\wp$, non *Q*; et le professeur est jugé sur les oeuvres – les savoirs – dont il aura impulsé l’étude dans sa classe. Dans ce que je nomme le paradigme *du questionnement du monde*, le professeur est jugé sur les *questions* dont il aura dirigé l’étude.

Por outro lado, o paradigma *questionamento do mundo* exige uma atitude muito distinta, uma atitude procognitiva, no sentido de que a pessoa busca comportar-se como se o conhecimento fosse algo essencialmente a ser descoberto e ainda conquistado – ou seja, há possibilidades de redescobrir e conquistar coisas novas. O autor aponta ainda que não podemos ter a ideia fantasiada de um "exotérico", no sentido que as pessoas já possuem todo o conhecimento necessário para a vida, como vislumbram algumas pessoas no que diz respeito aos historiadores, matemáticos, entre outros. Por outro lado, Chevallard (2012) afirma que:

> Um[16] exotérico tem que estudar e aprender indefinidamente, e nunca alcançarás status indescritível de exotérico. De fato, todos os verdadeiros estudiosos são exotéricos e devem permanecer assim a fim de permanecer estudiosos: o exoterismo, como eu o defino aqui, é uma fábula. (CHEVALLARD, 2012, p.182).

No paradigma *questionamento do mundo*, encontrar novos conhecimentos ou reencontrar os velhos torna possível um longo caminho de pesquisa, um caminho de estudo, que é os meios pelos quais o orientador ou pesquisador aprende e reaprende. Nesse contexto, os conteúdos aprendidos não são planejados com antecedência: ao contrário do que é habitual no paradigma *visita às obras*, nesse novo paradigma, o conteúdo é determinado por dois fatores: pela pergunta Q a ser estudada, no primeiro momento, e, em seguida, pela pesquisa e caminho de estudo percorrido para a solução da pergunta Q, sendo que, no decorrer desse trajeto, surgem mais questões a partir da pergunta geradora Q.

Segundo Chevallard (2012), o paradigma *questionamento do mundo* e as investigações que o tornam uma realidade devem ter uma base na sociedade e na escola, salientando que a relevância do chamado esquema herbatiano estende-se a toda a sociedade e não está restrito somente à escola. Para Chevallard (2009b), é preciso que o professor comece a ser independente e buscar autonomia na condução de sua prática.

Contudo, diante de tantas mudanças sociais, econômicas e políticas, o papel do professor tornou-se algo mais complexo, o professor não é apenas um "professor regente" ou um reprodutor da "pedagogia dos professores" ou "pedagogia do estudo". A sua prática engloba uma diversidade de situações, que envolve tanto o conhecimento a ser ensinado como o conhecimento para ensinar. Assim sendo, acreditamos que dialogar

---

[16] By contrast, an exoteric has to study and learn indefinitely, and will never reach the elusive status of esoteric. Indeed, all true scholars are exoteric and should remain so in order to remain scholars: esotericism, as I define it here, is a fable.

sobre diferentes praxeologias permeadas pelas trocas de experiências, de alguma forma, pode contribuir para a formação continuada.

1.4 Percurso de Estudo e Pesquisa (PEP)

No desenvolvimento de sistemas didáticos S(X, Y, Q) a partir de questões geradoras, Chevallard (2009g) tem trabalhado a pedagogia Atividades de Estudo e Pesquisa (AEP[17]), em que, uma vez apresentada a questão em seu estado "bruto", elaborada pelo professor, inicia-se um estudo, com intuito de evoluir e "refinar" a questão geradora pelos envolvidos no sistema didático. A pedagogia do AEP visa questionar a pedagogia clássica dos professores que organizam o estudo da matemática a partir da apresentação de elementos teóricos seguidos de exercícios. (BOSCH; GASCÓN, 2010). Desse modo, "a integração de dispositivos didáticos baseados em AEP promove uma epistemologia 'funcionalista' que concebe a matemática como um instrumento para fornecer respostas a problemas que surgem no mundo (e não apenas na escola)". (BOSCH; GASCÓN, 2010, p. 79).

Segundo Chevallard (2009g), a pedagogia do AEP tem sua origem na Teoria das Situações Didáticas[18] (BROSSEAU, 1986) e busca a reconstrução do conhecimento matemático a partir do conceito de situação fundamental[19], que tem como objetivo, conforme Bosch e Gascón, "situar a 'razão de ser' e o 'sentido' do dito conhecimento no próprio coração do processo de estudo. " (BOSCH; GASCÓN, 2010, p. 77). Nessa proposta, a pedagogia do AEP visa à constituição de um modelo didático que possa construir OM. Para tanto, tem se apoiado nos diferentes momentos didáticos, logo

> Durante[20] o desenvolvimento de uma AEP, surgirão momentos em que um repertório de 'exercícios' deverá ser realizado de forma sistemática, de forma que iniciem o momento do trabalho da técnica, provocando assim o desenvolvimento da OM pontual considerada. (BOSCH; GASCÓN, 2010, p. 78)

---

[17] Estamos assumindo Atividades de Estudo e Pesquisa (AEP) que é a tradução na língua portuguesa. Na França, é Activités d'Étude et de Recherche (AER) e, na Espanha, é Actividad de Estudio e Investigación (AEI).

[18] "Modelo teórico desenvolvido na França por Guy Brousseau (1986), que trata de formas de apresentação, a alunos, do conteúdo matemático, possibilitando melhor compreender o fenômeno da aprendizagem Matemática". (MACHADO, et al. 2008, p. 77)

[19] "[...] *situação fundamental*, específica de um determinado conhecimento e caracterizada por um conjunto mínimo de situações *adidáticas.*" (MACHADO, et al. 2008, p. 94)

[20] Así, a lo largo del desarrollo de uma AEI aparecerán momentos em los que deberán llevarse a cabo um repertorio de "ejercicios" de manera sistemática, de tal forma que pondrán en marcha el momento del *trabajo de la técnica*, provocando así el desarrollo de la OM pontual considerada.

A pedagogia do AEP constitui um dispositivo importante para o ensino da Matemática, porém, existem algumas limitações. A mais evidente é o quanto essa pedagogia é local, restringindo-se apenas ao estudo dos “temas” e não possuindo ferramentas necessárias “para questionar os aspectos da epistemologia da escola monumentalista que opera, pelo menos, no nível da disciplina e além” (BOSCH; GASCÓN, 2010, p. 80) Outro fator limitante da pedagogia do AEP é que se trata de questões propostas pelo professor por necessidades didáticas e que podem perder o sentido para os alunos no decorrer da construção das OM.

Neste sentido, houve a necessidade de construir um novo modelo didático, que pudesse integrar as AEP, de modo a ter um olhar mais amplo do ensino. A pedagogia do PEP surge então como um dispositivo que possibilita um estudo nos níveis de civilização, sociedade, pedagogia, escola, de modo a questionar e analisar condições e restrições que pesam sobre o ensino da matemática. Assim, segundo Chevallard (2009g):

> Indo[21] em direção a uma pedagogia dos PER supõe, portanto, que nós vamos em direção a um paradigma escolaridade do questionamento do mundo - do qual podemos ver que apenas certas partes escaparão à obrigação epistemológica de uma verdadeira co-disciplinaridade. (CHEVALLARD, 2009g, p.28)

O novo currículo, sob o paradigma *questionamento do mundo*, depende de oferecer ferramentas para inquirir ou fazer perguntas sobre questões geradas pelo currículo. Isso não mais depende de qualquer hierarquia estabelecida ou das disciplinas. Qualquer questão Q pode ser suplementada significativamente por uma ou uma série de "questões derivadas" Q*, que constituem o critério para controlar a qualidade e a profundidade da questão Q.

Assim, o esquema $S(X,Y,Q) \rightarrow R^{\heartsuit}$ propõe que, por meio de uma questão ou um conceito, conteúdo ou área, possam realizar-se estudos em torno do objeto a ser pesquisado. O expoente $^{\heartsuit}$ sobre o símbolo R indica que a resposta R foi produzida sob restrições. As praxeologias apresentam condições e restrições – ou seja, em vez de propor um planejamento rígido de atividades, cabe pensar nas escolhas priorizadas a partir do contexto da situação, entendendo que não existe uma resposta universal.

[21] Aller vers une *pédagogie des PER* suppose ainsi que l’on aille vers un *paradigme scolaire du questionnement du monde* – dont on voit bien que certaines parties eulement échapperont à l’obligation épistémologique d’une réelle *codisciplinarité*.

Para Chevallard (2009a), a elaboração de $R^{♥}$ a partir de uma questão Q desenvolve um meio (M), representado no esquema herbatiano $[S(X,Y,Q) \to M] \to R^{♥}$, logo SD S(X, Y, Q) reproduz o M (meio) a ser utilizado para desenvolver a resposta $R^{♥}$. Por certo, M é composto pelas diferentes respostas encontradas no decorrer do estudo e das obras que permitiram a construção dessas respostas. Logo, $[S(X,Y,Q) \to \{R_1^{\lozenge}, R_2^{\lozenge}, ..., R_n^{\lozenge}, O_{n+1}, .., O_m\}] \to R^{♥}$, temos $M = \{R_1^{\lozenge}, R_2^{\lozenge}, ..., R_n^{\lozenge}, O_{n+1}, .., O_m\}$, na qual $R_i^{\lozenge}$, para i=1,...n, são as respostas prontas assumidas para Q; O_j, j=n+1,..., m, são as obras que permitem elaborar as respostas $R^{♥}$ a partir de $R_i^{\lozenge}$.

Desse modo, conforme os autores Barquero, Bosch e Gascón (2011), o M é constituído pelas respostas $R_i^{\lozenge}$ prontas ou rotuladas (com diamante) para resolução da questão Q, que funciona como ferramenta para serem inseridas no meio para os estudos e, no decorrer desses estudos, vão surgindo as repostas R_i intermediárias, que são as respostas desenvolvidas no sistema didático, que instiga o processo de levantamento de novas questões Qj e precisam ser justificadas e validadas no decorrer do percurso.

Nessa vertente, Chevallard (2009a) começa a elucidar um Percurso de Estudo e Pesquisa, um PEP. Para que aconteça um PEP, é necessário que a organização didática manifeste um número de condições que afetam diretamente o que Chevallard (2009a) denomina de mesogênese, topogênese e cronogênese.

O funcionamento de um SD permite que alguns elementos pertencentes ao meio (M) sejam desestabilizados, alguns elementos deixarão de existir e outros poderão retornar ao M, após serem estabilizados. Nesse viés, o M "está em construção permanente" (CHEVALLARD, 1992, p. 95), processo definido pelo autor de mesogênese (de gênese do meio). Assim, o M não está definido ou pronto, ele é constituído a partir dos estudos produzidos pelo SD, e o funcionamento deste altera o desenvolvimento do M.

> [...] subjectivamente[22], o universo transparente, natural, estabilizado – isto é, o meio – em que o sujeito se habitou a viver se opacifique, se embaralhe e se encha subitamente de incertezas – antes de recuperar, eventualmente, a sua transparência subjectiva originária, critério de uma aprendizagem que terminou. (CHEVALLARD, 1992, p. 96).

Por conseguinte, $M = \{R_1^{\lozenge}, R_2^{\lozenge}, ..., R_n^{\lozenge}, O_{n+1}, .., O_m\}$ deve permitir, pelo menos, "(a) submeter cada resposta $R_1^{\lozenge}$ que compõe a resposta $R^{♥}$ em preparação, a prova de uma

[22] Subjectivement, l'univers transparente, allant de soi, stabilisé – c'est-à-dire le milieu- où le sujet s'est accoutumé à vivre, tout à coup s'opacifie, se brouille, se remplit d'incertitude- avant de retrouver éventuellement as transparence subjective originaire, critère d'un apprentissage termine.

dialética da mídia e do *milieu* necessário, e (b) oferecer materiais apropriados para construir uma resposta $R^{\heartsuit}$ válida satisfazendo as restrições impostas” (CHEVALLARD, 2009a, p. 23). Desse modo, o funcionamento de um SD e a sua produção são dependentes fortemente do M.

A mesôgenese está associada com a condição referida à topogênese. A topogênese refere-se ao “topos” do aluno ou do professor, que seria como um lugar no qual o indivíduo procede com autonomia. Neste sentido, no SD, o aluno X não apenas apresentaria uma resposta pessoal R_x para a questão Q apresentada, além disso, X poderia introduzir o estudo de qualquer questão Q que deseje. Por certo, são as relações didáticas envolvendo tanto professor Y e aluno X no SD, suas atitudes para o desenvolvimento das questões a serem respondidas, que serão integradas ao M.

Segundo Chevallard (2009a), a cronogênese refere-se ao estudo dos saberes proposto por Y. O trabalho de M para produzir $R^{\heartsuit}$ exigirá de Y um estudo das obras O_j, sendo esse estudo que conduz o sistema didático S (X, Y, Q). Em outras palavras, Y não pode apresentar ou “empurrar um estudo” de maneira artificial, ao contrário, deve propiciar ferramentas necessárias que instiguem a investigação do SD. Dessa forma, ao invés de um estudo de uma praxeologia imposta, tem-se um estudo de questões Q, que se refere ao tempo da construção praxeológica.

Resumidamente, Chevallard (2009e) descreve:

> **Cronogênese[23]:** Gênese do tempo didático, ou seja, o tempo da construção praxeológica.
> **Mesogênese.**: Gênese do meio didático, isto é, do sistema de recursos utilizados no processo de construção praxeológica.
> **Topogênese**. Gênese dos equipamentos praxeológicos[24] (e relações institucionais associadas) de acordo com as posições do aluno e do professor durante a construção praxeológica. O topos (o lugar, em grego antigo) do aluno (respectivamente do professor) é aquela parte da posição do aluno (respectivamente professor) em relação às entidades praxeológicas construídas ou em processo de construção na sala de aula. (CHEVALLARD, 2009e, p. 2-5).

[23] Chronogenèse. Genèse du temps didactique c’est-à-dire du temps de la construction praxéologique.
Mésogenèse. Genèse du milieu didactique, c’est-à-dire du système des ressources utilisées dans le processus de construction praxéologique.
Topogenèse. Genèse des équipements praxéologiques (et des rapports institutionnels associés) selon les positions d’élève et de professeur au cours de la construction praxéologique. Le topos (le lieu, en grec ancien) de l’élève (respectivement du professeur) est cette partie de la position d’élève (resp. de professeur) qui a trait aux entités praxéologiques construites ou en cours de construction dans la classe.

[24] [...] conjunto de praxeologias que a pessoa dispõe, do qual é equipada [...]: é o que nomeio de equipamento praxeológico da pessoa (CHEVALLARD, 2009c, p. 6).

No PEP, o que deve ser criado e divulgado é uma pedagogia de investigação pertinente ao paradigma *questionamento do mundo* e essa pedagogia deve permitir e favorecer o desenvolvimento da mesogênese, topogênese e cronogênese. A partir desse desenvolvimento, temos o PEP, que inicia com uma questão Q_0, denominada de questão geratriz, que evolui, surgindo novas questões: Q_1, Q_2, Q_3, ... Q_n. O estudo da questão Q_0 e suas questões derivadas conduz a um percurso de estudo em busca de respostas a essas questões, constituindo (Q_i, $R_i^{\lozenge}$) o conjunto de questões e respostas de Q, como afirma Chevallard:

> Uma[25] questão Q chama uma investigação, que se realiza em um certo percurso de estudo e de pesquisa. Uma mesma questão Q pode conduzir uma classe a reencontrar um complexo de obras que podem variar dependendo do percurso tomado (o que depende da atividade de X, das decisões de Y, mas também dos recursos praxeológicos $R_i^{\lozenge}$ e Oj atualmente acessíveis). (CHEVALLARD, 2009a, p. 28).

Nesse viés, a questão Q_0 impulsiona a busca por novas questões e diferentes respostas provisórias que impulsionam uma nova modelagem matemática, em busca da resposta $R^{\heartsuit}$, sendo a questão Q_0 que assegura a veracidade do percurso, possibilitando ainda, em cada PEP, uma "análise in vivo". No seu desenvolvimento, vamos analisando o percurso da investigação, envolvendo X e Y como protagonistas nesse processo.

Para Chevallard (2009d), é importante destacar três observações com relação ao PEP. A primeira refere-se ao desenvolvimento dos PEP, enfatizando que estes podem ser de extensões diversas, podendo ser curtos ou longos "[...] em uma aula da escola, digamos, talvez, então haveria, errático muitas vezes, mas profusa às vezes, PEP, micro-PEP, talvez, mesmo nano-PEP, mas PEP [...]" (CHEVALLARD, 2009d, p. 7).

Uma segunda observação importante para o autor com relação ao PEP é referente à questão Q, pois se o PEP a ser desenvolvido no S(X, Y, Q) for uma questão "problemática" para [X, Y], este será muito diferente do PEP, no qual o tipo de problema não seja "problemático" para [X, Y]. E, por último, o autor destaca a evolução das restrições de infraestrutura, pois, conforme expresso anteriormente, se [X,Y] não disponibilizar uma técnica para resolver o tipo de problema, estes [X,Y] terão que criar

[25] une question *Q* appelle une *enquête*, laquelle se concrétise en un certain *parcours d'étude et de recherche*. Une *même* question *Q* peut ainsi conduire une classe à encontrer um complexe d'oeuvres qui peut varier selon le parcours emprunté (lequel dépend de l'activité de *X*, des décisions de *Y*, mais aussi des ressources praxéologiques $R_i^{\lozenge}$et *Oj* actuellement accessibles);

essa técnica e essa criação será diferente em quantidade e espécie se o S(X,Y, Q) opera em 1960, ou nos dias atuais.

Nesta pesquisa, desenvolvemos micro-PEP[26] com os professores de matemática da rede pública de Dourados/MS, por meio de sistemas didáticos S(X, Y, Q), sendo os professores de matemática na posição de X, o pesquisador na posição de Y, em torno do estudo de questões Q relativas à Geometria. Como mencionado por Chevallard (2009d), os PEP podem ser curtos ou longos, assim optamos pelo desenvolvimento de micro-PEP, por ser uma condição das formações continuadas no Brasil, que não têm garantido aos professores espaços de estudo (formações e qualificações) durante o seu horário de trabalho. Os professores após uma jornada semanal de 40 horas/aula, responsáveis pelas suas famílias e outros afazeres sociais, têm que buscar uma formação continuada por conta própria, sem nenhum apoio institucional, desse modo, a participação efetiva na formação continuada perpassa, diferentes condições e restrições impostas ao professor que limitam o tempo e a participação no estudo. No decorrer do trabalho, abordaremos um estudo sobre essas restrições a partir de um questionário aplicado aos professores participantes da pesquisa.

Para o desenvolvimento PEP, podemos propor a seguinte questão em torno de conceitos geométricos Q_0 = *Como ensinar os conceitos de polígonos?* Foram identificadas algumas definições de polígono apresentadas em diferentes livros didáticos. As três primeiras definições foram encontradas em livros voltados ao 6.º ano do ensino fundamental e a quarta definição provém de um livro destinado ao ensino superior.

Definição 1 – Uma linha poligonal fechada e simples com sua região interna forma um polígono (Matemática, Departamento de Edições Educativas, São Paulo, Moderna, 2004). Observação: o autor define que uma linha do plano é chamada poligonal se for formada apenas por segmentos de reta, de maneira que os segmentos consecutivos são não colineares.

Definição 2 – Um polígono é uma figura geométrica plana com contornos retilíneos (Imenes & Lellis, Matemática, São Paulo, Scipione, 2001).

Definição 3 – Polígonos são figuras que têm seu contorno formado apenas por segmentos de retas (Bianchini & Miani, construindo conhecimento em matemática, São Paulo, Moderna, 2000).

[26] Nesta pesquisa, só ocorreram micro-PEP, mas, por economia de palavra, em alguns momentos vamos chamá-los também de PEP.

Definição 4 – Seja A_1, A_2, A_3, ..., A_n, $n \geq 3$, uma sequência de n pontos distintos tais que os segmentos A_1A_2, A_2A_3, ..., A_nA_1 têm as seguintes propriedades:

1. Nenhum par de segmentos se intersecciona a não ser em suas extremidades.

2. Nenhum par de segmentos com extremidade comum está na mesma reta.

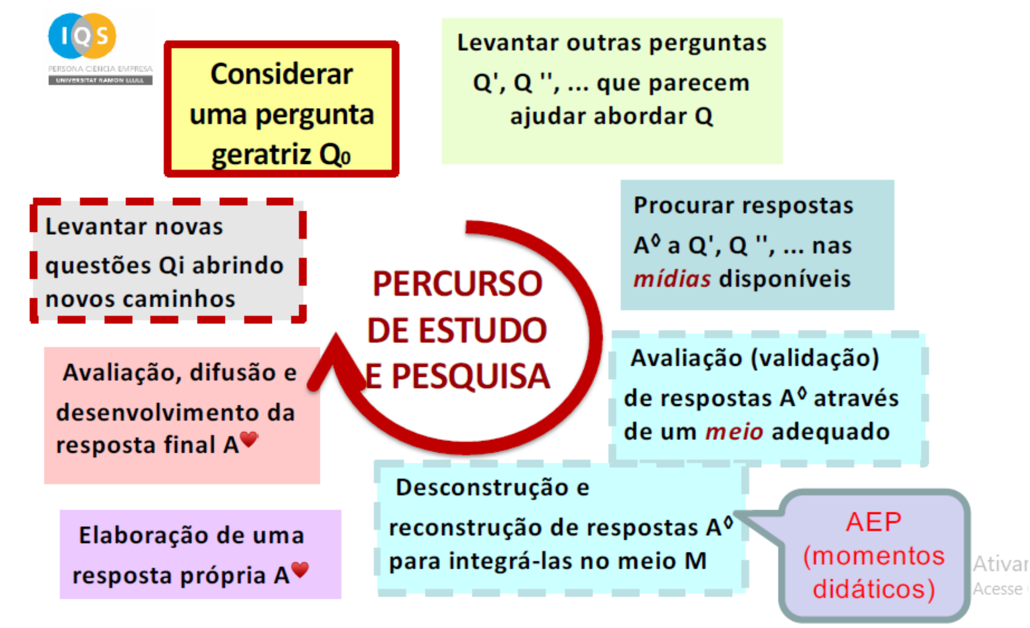
3. Um polígono é o conjunto formado dos pontos do plano pertencentes ao conjunto A_1A_2 U A_2A_3 U ... U A_nA_1.

Buscando-se compreender a questão Q_0, como exemplo de uma questão geradora de um percurso, podem surgir outras questões, tais como: *Q_1: Polígono é uma figura unidimensional? Q_2: Polígono é uma figura bidimensional? Q_3: Quais são os elementos (vértice, lados, ângulo) do polígono? Q_4: O que é um polígono simples? Q_5: O que são um polígono convexo e um polígono côncavo? Q_6: O que é uma figura? Q_7: O que é uma superfície poligonal ou região poligonal? Q_8: Como se calcula o perímetro de um polígono? Q_9: O que é um polígono regular? Q_{10}: Como determinar as diagonais de um polígono? Q_{11}: Como determinar a soma dos ângulos internos de um polígono convexo? Q_{12}: Como determinar a soma dos ângulos externos de um polígono convexo?*

Assim, ao trabalhar com o PEP, podemos ter o estudo de atividades já previamente conhecidas de [X,Y], que necessitam de um aprofundamento ou, ainda, atividades desconhecidas de [X,Y], que o PEP deve levar X a conhecer. No exemplo apresentado, podemos inferir que a questão Q_0 possibilita a X (re) construir diferentes conceitos geométricos essenciais à compreensão de outros conteúdos no campo da Geometria e para outros campos da matemática.

Nessa vertente, o PEP está pautado no paradigma *questionamento do mundo*, proporcionando um olhar mais amplo para o ensino, de modo a considerar condições e restrições que estão externas à sala de aula e que interferem diretamente na prática pedagógica. Para Bosch (2018), podemos visualizar uma estrutura do PEP da seguinte maneira:

Figura 6 - descrição do PEP



Fonte: Bosch (2018)

De acordo com Bosch (2018), durante o percurso, teremos situações nas quais será necessário trabalhar com os momentos didáticos (AEP), entre eles, o trabalho com a técnica, que, por sua vez, direciona o estudo para um desenvolvimento mais tecnicista (GASCÓN, 2003). Certamente, tais estudos são necessários para construir uma praxeologia da resposta almejada e permitem compreender que podemos ter situações durante o percurso que não serão, necessariamente, orientadas pelo paradigma *questionamento do mundo*.

Para Ruiz (2015), a estrutura de um PEP está sempre aberta e indeterminada em seu início, uma vez que é o processo em si que vai delinear as formas possíveis para o percurso (com muitos contratempos, desvios e atalhos, conforme necessário) e, ainda, ao longo do PEP, a questão geradora Q evolui e transforma-se em uma ou mais questões novas. Para essa autora, a noção de PEP surge da necessidade de ter organizações educacionais, como a escola ou qualquer outra instituição, numa epistemologia verdadeiramente funcional, que aparecem como máquinas de produção de conhecimento útil para a criação de respostas R a perguntas Q.

Na pesquisa de Lucas (2015), foi desenvolvido um PEP com alunos de um curso de medicina nuclear, visando alcançar uma possível razão de ser do cálculo diferencial elementar. Para essa autora, o PEP é constituído, primeiramente, por um Modelo Epistemológico Dominante (MED), que é verificado por meio de análise de livro didático e dos referenciais prescritos. A partir dessas análises, o pesquisador verifica desarticulações entre as tarefas e técnicas desenvolvidas em torno de determinado conteúdo ou ainda que as praxeologias apresentadas não permitem uma construção de praxeologias com um nível de complexidade crescente. Assim, o pesquisador terá necessidade de desenvolver um Modelo Epistemológico de Referência (MER) em torno do conteúdo analisado. Logo, por meio de experiências pessoais do professor, de pesquisas relacionadas ao tema e de livros didáticos, paradidáticos, entre outros recursos, o professor constrói um MER, um estudo aprofundado sobre o conteúdo.

Dessa forma, o MER serve para a elaboração de novas propostas de OD, desenvolvidas por meio do PEP. No entanto, esses modelos devem ser considerados como sistemas de referência relativos e provisórios para o pesquisador, pois, como expõem Bosch e Gascón (2010, p. 7), "a teoria da transposição didática nos ensina que não há nenhum sistema de referência privilegiado para analisar as diferentes etapas da transposição didática".

Para Andrade (2012, p. 36), o PEP:

> [...] se constitui em um Percurso de Formação de Professores, na formação inicial e continuada, à medida que vem constituir processos de estudos para o enfrentamento do problema praxeológico da instituição docente, de questões que emanam das e nas práticas docentes, das condições e restrições impostas a essas problemáticas, eliminando riscos de se querer formar professores a partir de um EP imutável que se deixaria sob a responsabilidade do professor para mobilizá-lo em situações concretas.

Assumimos, assim, curtos ou micro-PEP, com o propósito de investigar e analisar suas contribuições e limitações enquanto proposta metodológica para a formação continuada de professores de matemática. Trabalhamos com um grupo de doze professores, todos atuantes no ensino público dos anos finais do Ensino Fundamental, iniciando com um estudo sobre comparações de definições, tendo, como ponto de partida, o conceito de polígono. A questão Q_0 apresentada anteriormente foi reformulada nela abordamos o conceito particular do trapézio, ela foi desenvolvida com esse grupo de professores, visando identificar a existência ou não de divergências entre os conceitos, bem como observar conhecimentos geométricos mobilizados por esses professores e o modo como são desenvolvidos esses conteúdos em sala de aula.

Certamente, o PEP configura-se como procedimentos que podem propiciar aos professores a vivência de processos investigativos em torno de demandas de suas próprias OM e OD e constitui uma proposta para os professores na busca e valorização de outros momentos didáticos, bem como a inserção de outras práticas pedagógicas no decorrer da sua prática profissional.

Assim, os procedimentos metodológicos do Percurso de Estudos e Pesquisas (PEP) parecem viáveis no trabalho com a formação continuada, pois o desenvolvimento de sistemas didáticos, norteados pelo paradigma *questionamento do mundo*, possibilita um estudo mais amplo de condições e restrições que surgem a partir dos níveis superiores de codeterminação, direcionando todo o âmbito escolar, sejam as práticas escolares, a coordenação, o currículo, entre outros. Assim, o PEP propicia realizar pesquisa não somente com a formação de professores, mas com a aprendizagem e com as diferentes realidades do âmbito escolar. Apesar desse estudo teórico surgir na realidade francesa, acreditamos que o PEP vem ao encontro da necessidade de mudança de direcionamentos da educação brasileira.

CAPÍTULO II – A FORMAÇÃO CONTINUADA DE PROFESSORES: DIÁLOGO ENTRE DIFERENTES PERSPECTIVAS

Acreditamos que os professores vão continuar a ocupar um lugar importante na educação?
Acreditamos que ser professor é uma profissão?
Acreditamos que o professor é uma profissão baseada no conhecimento?
A formação de professor deve ser realizada na Universidade?
(António Nóvoa)

Neste capítulo, o foco será discutir a formação de professores a partir de alguns conceitos sobre essa temática e de estudos envoltos nas Diretrizes Curriculares Nacionais para a Formação Inicial e Continuada em Nível Superior de Profissionais do Magistério para a Educação Básica, bem como da compreensão de alguns pesquisadores na área da Educação sobre formação continuada e profissionalização do professor. Traremos ainda um estudo de pesquisas desenvolvidas a partir de diferentes correntes teóricas em diálogo com uma revisão bibliográfica em torno de pesquisas norteadas pela TAD.

2.1 Formação continuada e profissionalização docente: algumas concepções

É fato que a nossa sociedade tem visto, na Educação, um meio de transformação e melhorias que instiga uma mudança, na busca de mais conhecimentos e saberes, com o propósito de alcançar uma civilização mais participativa, diversificada, solidária e integradora. Nessa conjuntura, "o papel da instituição escolar é criar e manter um ambiente social que possibilite ao aluno relacionar-se com o outro e com o conhecimento, visando a formação e inserção, na sociedade, de cidadãos bem informados e críticos, que saibam compreender o mundo em que vivem e nele atuar". (SANTOS; FREITAS, 2017, p. 1).

Nesse contexto, o professor tem um papel crucial na instituição escolar para a formação de seus alunos, tanto que têm se intensificado, nos últimos anos, pesquisas em torno da formação docente. Temos vivenciado discussões em torno da formação inicial, formação continuada, prática reflexiva, desenvolvimento profissional, saberes e competência para a docência, crenças dos professores, entre outras temáticas, que visam buscar dispositivos para tornar o ambiente escolar cada vez mais próximo daquele almejado pela sociedade.

Diante da diversidade e complexidade dessas temáticas que permeiam a formação docente, neste trabalho, vamos discutir a formação continuada, buscando identificar quais as compreensões sobre essa temática a partir de pesquisadores da área da Educação, bem como da profissionalização do professor, pois, ao abordarmos a formação continuada, o desafio é fazer com que os professores tornem-se protagonistas na construção de conhecimentos para aprimorarem permanentemente as suas práticas.

Ao nos depararmos com a palavra "formação" no dicionário brasileiro[27] temos, entre diferentes definições: "Ato ou efeito de formar ou de se formar". Analogamente, Nóvoa (1992), no seu artigo intitulado "Formação de Professores e Profissão Docente", evidencia as palavras "formar" e "formar-se", fazendo-nos compreender que "formar" refere-se à atuação do profissional, enquanto que "formar-se" concerne à busca de cursos por esse profissional.

Assumindo a palavra "formação" como o ato de formar-se, compreendemos que nenhuma pessoa forma-se no vazio, a formação ocorre nas diferentes trocas de experiências, interações sociais, pela história de vida, enfim por diferentes relações vivenciadas. Tardif e Raymond (2000) apontam que a formação do professor inicia desde a sua vida escolar, enquanto aluno, que o "ser professor" provém de experiências ao longo da sua trajetória escolar e pontuam que "os professores são trabalhadores que foram imersos em seu lugar de trabalho durante aproximadamente 16 anos (em torno de 15.000 horas) antes mesmo de começarem a trabalhar" (TARDIF; RAYMOND, 2000, p. 216-217).

Ao refletir sobre os processos de formação de professores, Nóvoa (1992) pontua que: "A formação de professores tem ignorado, sistematicamente, o desenvolvimento pessoal, confundindo 'formar' e 'formar-se', não compreendendo que a lógica da actividade educativa nem sempre coincide com as dinâmicas próprias da formação". (p. 13). Certamente, para o autor, na formação de professores, devemos considerar as experiências, o desenvolvimento pessoal e seus valores. Ele ainda reforça a necessidade

[27] "formação", in Dicionário Priberam da Língua Portuguesa [em linha], 2008-2013, https://dicionario.priberam.org/forma%C3%A7%C3%A3o [consultado em 01-04-2019].

das formações estarem em diálogo com os projetos escolares, para que ocorra o desenvolvimento profissional.

Para Nóvoa (1992), as formações de professores devem propiciar espaços nos quais os professores possam compartilhar experiências, saberes, e que eles possam desempenhar ao mesmo tempo a função de formando e formador, reafirmando-se a importância do trabalho em grupo para o exercício da profissão:

> [...] O diálogo entre os professores é fundamental para consolidar saberes emergentes da prática profissional. Mas a criação de redes coletivas de trabalho constitui, também, um fator decisivo de socialização profissional e de afirmação de valores próprios da profissão docente. (NÓVOA, 1992, p.14)

Garcia (1999), ao apresentar um estudo sobre o conceito de "formação" por meio de diferentes autores, afirma que "a formação apresenta-se-nos como um fenómeno complexo e diverso, sobre o qual existem apenas escassas conceptualizações e ainda menos acordos em relação às dimensões e teorias mais relevantes para a sua análise". (GARCIA, 1999, p. 21). O autor compreende que a formação enquanto um conceito não se reconhece ou dissolve por meio de outros conceitos, como treino, educação, ensino, entre outros; que o conceito de formação abrange perspectivas pessoais de aperfeiçoamento humano e ainda que a formação é de responsabilidade única da pessoa para a propensão e vontade para a participação das formações, no entanto, isto não afirma que a formação seja "necessariamente autónoma" (GARCIA, 1999, p. 22).

Ao discutir especificamente a formação de professores, compreendemos, como em qualquer outra profissão, que o profissional da educação seja capacitado para exercer a função que lhe cabe (GARCIA, 1999). No entanto, os conceitos de formação de professores vêm sendo discutidos ao longo de vários anos, tendo sido construídas diferentes perspectivas, como aponta Veiga (2017) na sua tese doutorado, a qual apresenta um quadro resumo das principais definições descritas por Garcia (1999), como podemos ver:

Figura 7 - Conceitos de formação de professores

Quadro 1: Resumo de conceitos de formação de professores nas diversas perspetivas

Ferry (1991)	Processo pelo qual se adquire novos conhecimentos ou se aprimora capacidades.
Doyle (1990)	Conjunto de experiencias destinadas a manter o professor preparado para a lecionação.
Yarger e Smith (1990)	Processo de educação de indivíduos para se tornarem professores eficientes.
Medina e Domínguez (1989)	Preparação e emanciapação do professor para desenvolver o processo ensino/aprendizagem de forma crítica e significativa.
Honoré (1980)	Qualquer atividade de formação.

Fonte: Elaboração propria

Fonte: (VEIGA, 2017, p. 70)

A partir dos estudos de diferentes perspectivas sobre o conceito de formação de professores, Veiga (2017) compreende que a formação:

> [...] É a área de conhecimentos, investigação e de propostas teóricas e práticas que estuda os processos através dos quais os professores se envolvem individualmente ou em equipa com o fim de adquirirem conhecimentos e competências que lhes permitam intervir profissionalmente no desenvolvimento do ensino, do currículo e da escola, com o objetivo de melhorar a qualidade da educação dos seus alunos. (VEIGA, 2017, p. 70)

Corroboramos com a concepção de Veiga (2017), ao assumir que a formação é um espaço no qual os professores devem envolver-se de modo que alcancem conhecimentos que modifiquem a sua prática pedagógica. Na presente pesquisa, desenvolvida com um grupo de professores, nos inserimos numa perspectiva de formação, mais especificamente, com a formação continuada.

Nesse contexto, faz-se necessário entender o que as políticas públicas no Brasil compreendem por formação continuada, bem como algumas percepções de um quadro de pesquisadores na área da Educação e de algumas pesquisas desenvolvidas nesse âmbito. As Diretrizes Curriculares Nacionais para a Formação Inicial e Continuada em Nível Superior de Profissionais do Magistério para a Educação Básica, norteada pela Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional - LDB, Lei 9394/96 que, entre outras determinações, refere que formação continuada é um “componente essencial da profissionalização inspirado nos diferentes saberes e na experiência docente" (BRASIL, 2015, p.5), e que a formação continuada deve ser integrada no dia a dia da instituição educativa. Neste sentido, as DCN compreendem como formação continuada:

> [...] dimensões coletivas, organizacionais e profissionais, bem como o repensar do processo pedagógico, dos saberes e valores, e envolve atividades de extensão, grupos de estudos, reuniões pedagógicas, cursos, programas e ações para além da formação mínima exigida ao exercício do magistério na educação básica, tendo como principal finalidade a reflexão sobre a prática educacional e a busca de aperfeiçoamento técnico, pedagógico, ético e político do profissional docente. (BRASIL, 2015, p. 13)

Desse modo, a formação pode ser ministrada por meio de cursos de extensão, cursos de atualização, aperfeiçoamento, atividades formativas, especialização, mestrado e doutorado, de modo a acrescentar novos saberes e práticas, vinculados à área de atuação profissional, às políticas de gestão educacional e às instituições de educação básica. (BRASIL, 2015). Para Gatti (2008), a formação continuada é tudo que possibilita ao professor um momento de informação, discussão, reflexão e trocas que contribuam para o desenvolvimento profissional.

Para isso, as formações continuadas devem levar em conta os desafios e os problemas do contexto escolar; o acompanhamento das inovações tecnológicas associadas aos conhecimentos das ciências; o respeito ao espaço-tempo do professor, permitindo a reflexão crítica sobre a sua prática profissional, e o diálogo e parceria entre os diferentes participantes da formação continuada, além da constituição de novos patamares de qualidade para a sala de aula e instituição. (BRASIL, 2015)

A formação continuada tornou-se um campo de estudo forte no final do século XX nos países desenvolvidos, principalmente na área educacional com a finalidade de uma "atualização constante" para que a educação pudesse acompanhar as mudanças dos conhecimentos e das tecnologias. O Brasil tem se apropriado das ideias de formação continuada, no entanto, acaba-se direcionando a maioria das formações continuadas para suprir uma formação inicial precária e não para o desenvolvimento e a ampliação de conhecimentos (GATTI, 2008).

Nesse viés, Imbernón (2009) tem ressaltado a importância da busca de novos direcionamentos para a formação continuada dos professores, afastando de formações que estão distantes dos problemas práticos do professorado, caracterizando-se pelo caráter totalmente transmitida. Para o autor, o professor deve ser o protagonista da sua formação, a partir do seu contexto de trabalho, de modo a "combinar as decisões entre o prescrito e o real, aumentar seu autoconceito, sua consideração e seu *status* trabalhista e social" (IMBERNÓN, 2009, p. 37).

Assim, ao discutir a formação continuada, faz-se necessário pensar na profissionalização[28] docente, nas condições de trabalho que os professores vivenciam e os diversos fatores que interferem diretamente na formação continuada dos professores, como aponta Gatti (2016), indicando que os processos interpessoais, identidade profissional e profissionalidade são questões cruciais que devem ser discutidas no exercício da docência:

> Tomando as questões de profissionalismo na categoria de professores, lembramos que a educação se produz em processos interpessoais nos quais a identidade profissional e a profissionalidade (condições de cada docente para o exercício do seu trabalho) ocupam posição central. (GATTI, 2016, p. 168).

Desse modo, no desenvolvimento de formações continuadas, temos que discutir quais as condições de trabalho de cada docente, quais as especificidades do grupo de professores, mais precisamente como desenvolver uma formação, de modo que o professor possa participar mesmo com uma carga horária completa de aulas. Nesse viés, ficam evidentes as questões: Existe um horário específico na instituição escolar dedicado para as formações continuadas? Qual a carga horária dedicada para as formações continuadas? Qual a carga horária de trabalho do professor? São questões que precisam ser analisadas para desenvolver formação continuada considerando as diferentes diversidades, como explica Gatti (2016):

> Ter presente a diversidade de necessidades e de condições pode enriquecer a reflexão e orientar com mais segurança, a formação de base e a continuada de docentes, a qual merece se diversificar em formas curriculares variadas, próprias a uma sócio-culturalidade rica e múltipla como é a do Brasil. (GATTI, 2016, p. 170).

Por certo, entendemos que a formação é contínua por ser um espaço que agrega as concepções de sociedade, política, vida, escola, trajetórias profissionais, entre outros conceitos, que não ficam restritas a uma sala de aula, mas das experiências vivenciadas que possibilitam ao professor formar-se, compreendendo que o conhecimento é dinâmico e está em constante construção. Além disso, é importante ressaltar que, apesar das

---

[28] Para Veiga et. al (2005), o profissionalismo e a profissionalização são características específicas da profissão, em que profissionalismo remete à formação especializada e enquanto profissionalização trata-se das condições de trabalho, remuneração, entre outros.

diferentes concepções sobre formação continuada, não existe um modelo único. No entanto, é necessário que as formações levem em conta a realidade na qual o professor vivencia a sua profissionalização, se almejamos uma formação que auxilie na prática em sala de aula, bem como na busca de novos conhecimentos.

2.2 A formação continuada: um olhar para algumas pesquisas

Na condição de pesquisadores da Educação Matemática, fez-se necessário investigar como estão sendo desenvolvidas as formações continuadas no Brasil, quais direcionamentos e como estão sendo norteados. Como vimos anteriormente, as formações continuadas podem ser cursos de extensão, especializações, mestrado, doutorado, entre outros, entretanto, vamos nos concentrar nas formações continuadas desenvolvidas por pesquisadores da área da Educação Matemática, resultantes de pesquisas em nível mestrado e doutorado, uma vez que a nossa pesquisa visa olhar para as condições que as formações continuadas estão sendo desenvolvidas, ou seja, quais dias e em quais turno estão sendo oferecidas, como estão sendo constituídos os grupos de professores, enfim, quais as reais condições que as formações estão sendo ofertadas.

Ao fazer um levantamento de pesquisas brasileiras na área da Educação Matemática, no catálogo de teses e dissertações da CAPES[29] (Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior), utilizando na busca as seguintes palavras "Formação Continuada de Professores de Matemática", encontramos o total de 1.145.931(um milhão cento e quarenta cinco mil e novecentos e trinta e um) pesquisas. Diante do número extenso de pesquisas encontradas, decidimos restringir a nossa busca, visto que não tínhamos tempo para desenvolver esse trabalho. Assim, optamos por nos concentrar nas pesquisas desenvolvidas no Estado do Mato Grosso do Sul, estado no qual residimos e estamos trabalhando com a presente pesquisa, de modo, a ter um olhar mais específico sob quais condições as formações estão ocorrendo em nosso estado.

Ao refinar o nosso olhar para o Estado, especificamente para as instituições que desenvolvem pesquisas, temos o programa de Pós-Graduação em Educação Matemática, o PPGEduMat da Universidade Federal do Mato Grosso do Sul (UFMS), o Programa de Pós-Graduação em Educação Científica e Matemática - Mestrado Profissional da Universidade Estadual de Mato Grosso do Sul (UEMS) e ainda o Programa de Pós-

[29] Disponível em http://catalogodeteses.capes.gov.br/catalogo-teses/#!/. Acesso em abril de 2019.

Graduação em Educação da Universidade Federal do Mato Grosso do Sul (UFMS). No entanto, a fim de lapidar um pouco mais o nosso levantamento, optamos por olhar apenas para as pesquisas desenvolvidas no PPGEduMat, que tem como público alvo profissionais de matemática e de áreas afins que se interessem por pesquisa em Educação Matemática. Apesar de não pretender que o conjunto das pesquisas sobre formação de professores de matemática do PPGEduMat seja representativo da produção do país, ele é bastante diversificado, tanto em relação aos referenciais teóricos quanto metodológicos com pesquisas desenvolvidas desde 2009.

Ao selecionarmos as pesquisas, tivemos como intenção investigar quais são as compreensões dos pesquisadores sobre "formação continuada" e como essas têm sido desenvolvidas, ou seja, quais condições e restrições os professores vivenciaram na participação dessas formações (a periocidade das formações; em quais horários ocorriam; se puderam contar com apoio institucional; se proporcionaram um estudo do conteúdo matemático) e como aconteceram as participações desses professores no desenvolvimento das pesquisas.

No levantamento dos trabalhos desenvolvidos no PPGEduMat, encontramos o quantitativo de 44 pesquisas[30], que se configuram como pesquisas desenvolvidas na linha de formação continuada de professores, conforme quadro disponibilizado nos anexos.

Na leitura das pesquisas, num primeiro momento, olhamos para a concepção dos autores sobre formação continuada. Vimos que, no geral, as pesquisas abordaram a discussão de formação de professores a partir de uma discussão teórica tendo como referências alguns pesquisadores como Shulman (1986, 1987, 1989), Tardif (2002), Perrenoud (2000), Shon (1992), Nóvoa (1992), Sacristán (1995), Pimenta (1999), Garcia (1999, 2009), Mizukami (2004), Zeichner (2008), Boavida e Ponte (2002), Ponte (1995, 1997, 1998) , Libâneo (2004), Ibiapina (2008), enfatizando terminologias trabalhadas na formação de professores como: prática reflexiva; desenvolvimento profissional, saberes e competências para a docência, grupo colaborativo, crença de professores, identidade profissional, enfim, diferentes temáticas que permitiram desenvolver pesquisas com professores que ensinavam matemática, com diferentes tempos de atuação profissional e em diversas escolas públicas e privadas.

[30] É importante destacar que o levantamento foi realizado por meio dos dados disponibilizados no *site* do programa http://posgraduacao.ufms.br/portal/trabalhos/index/91?curso_id=91, com acesso em abril de 2019.

Nessas pesquisas, fica evidente que todos caminharam para que a formação continuada fosse um espaço de diálogo, estudo, que oportunizasse aos professores serem atuantes no processo de formação, compreendendo como um espaço mútuo de trocas de experiência entre formador e formando, de modo a esquivarem-se de situações que induzem a formação docente, com “o desconforto de práticas formativas baseadas em processos de um *expert* infalível ou acadêmico (em que o professorado é tido como um ignorante que assiste a sessões que pretendem “culturizá-lo profissionalmente”. (IMBERNÓN, 2009, p. 21)

Algumas pesquisas centraram-se em discutir formação continuada especificamente por meio da temática pesquisada, como é o caso de Coraça (2010), Oliveira (2012), De Oliveira (2012), Padilha (2013), Souza (2014), Carvalho (2014), Silva (2014), Vermieiro (2014), Souza (2016), que apresentaram uma discussão específica sobre formação de professores para o uso dos computadores, laptops, lousa digital, softwares e das salas de tecnologia. Entre as diferentes pesquisas desenvolvidas para discussão do uso de tecnologias, vimos que algumas foram desenvolvidas em momentos presenciais e a distância (modalidade Bimodal), podendo-se destacar as pesquisas de Oliveira (2012), que desenvolveu uma formação continuada na modalidade de Educação a Distância (EAD), e Padilha (2013). Estas foram as pesquisas que contemplaram o maior número de professores participantes ambas centraram os seus estudos em professores de matemática que atuavam nas salas de tecnologias educacionais.

No desenvolvimento das pesquisas, alguns pesquisadores tiveram um apoio institucional para a constituição dos grupos de formação, como Oliveira (2012), De Oliveira (2012), Padilha (2013), Santos (2013), que, por meio de projetos de extensão, via Universidades, realizaram uma certificação aos professores participantes da pesquisa, de modo a propiciar aproximações entre a escola e a Universidade. De um modo geral, as pesquisas desenvolvidas nas escolas com um grupo de professores ocorreram em horários após as aulas dos professores, visto a dificuldade de concentrar a participação de todos em um mesmo horário, pois muitos não ministram as suas aulas em uma única escola, possuindo carga horária de trabalho diversa, com exceção da pesquisa de Carvalho (2014) pois suas formações ocorreram no ambiente de trabalho (formação em serviço), no horário de planejamento dos professores. No entanto, vale ressaltar que, de modo geral, os pesquisadores tinham como intenção desenvolver suas pesquisas no horário de trabalho dos professores e por razões como incompatibilidade de horários, falta de infraestrutura, direcionavam outros métodos para as pesquisas. No caso das pesquisas desenvolvidas apenas com um professor, foram possíveis de serem realizadas nos momentos de planejamento do professor como é o caso de Santos (2013) e Neves (2015).

Alguns trabalhos, apesar de desenvolverem pesquisas na formação continuada, não tiveram a preocupação em apresentar uma discussão teórica sobre o que se compreende por formação continuada. No entanto, transcorrem algumas concepções de modo geral sobre formação de professores, enfatizando que, até alguns anos atrás, ela estava baseada na transmissão de conhecimento[31] e que tal concepção começa a ser substituída por abordagens de reflexão sobre a prática do professor.

As pesquisas de Esteves (2009), Oliveira (2010), Miola (2011), Batista (2012), Furoni (2014) discutem especificamente sobre os conhecimentos mobilizados pelos professores para o ensino de um determinado conteúdo matemático, com base na teoria de Lee Shulman. Algumas pesquisas, ao analisar os conhecimentos mobilizados por professores, investigaram, por exemplo, os conhecimentos adquiridos na formação inicial e suas relações com a prática pedagógica no início da docência, como foi o caso de Oliveira (2010), bem como as relações estabelecidas com o livro didático, no estudo de Furoni (2014).

A grande maioria dos trabalhos focou no estudo de algum conteúdo matemático para o desenvolvimento das suas formações, especificamente algumas pesquisas como Kichow (2009); Correa (2009) desenvolveram estudos a fim de compreender como os professores ensinavam determinados conteúdos. Para tanto, acompanharam *in loco* as aulas desses professores, realizaram entrevistas e tiveram acesso aos cadernos dos alunos. Desses trabalhos desenvolvidos com professores, apenas a pesquisa de Almeida (2009) foi realizada com professores do ensino superior, envolvendo três instituições diferentes.

As pesquisas de Pardim (2015), Jorge (2015), Borges (2018) e Miola (2018) destacam-se pela constituição de grupos colaborativos a partir de estudos e pesquisas de Ibiapina (2008), como um dispositivo para realizar formações continuadas, de modo que ressaltam a colaboração como um meio que possibilita compartilhar objetivos em comum e ajuda mútua, constituindo desenvolvimento profissional aos professores, fazendo com que o professor reflita sobre a sua própria prática.

Outro dispositivo destacado nos trabalhos de Britto (2015), Silva (2016), Santos (2016), Santana (2017), Novais (2017), Ovando (2017) e Silva (2018) são as análises das produções escritas em matemática, constituídas por um grupo de trabalho, que se apoiam

[31]Baseado no modelo da racionalidade técnica, no qual o professor é um técnico especialista que ensina por meio de teorias e técnicas.

nos estudos dos modelos dos campos semânticos de Lins (1999, 2012). Nessa vertente, a análise da produção escrita proporciona compreender e analisar os significados produzidos pelos alunos nos enunciados de questões e, por conseguinte, as suas resoluções, as estratégias e os conhecimentos mobilizados, assim, por meio dessas análises, o professor identifica indícios do seu trabalho em sala de aula, podendo repensar as suas práticas de ensino de acordo com a necessidade da turma.

Quanto às condições e restrições da participação dos professores nas formações, muitos começaram a participar das formações e, por motivos diversos (horário da formação coincidir com horário de aula; formação realizada fora do horário de trabalho; motivos pessoais, entre outros), desistiam. Alguns professores deslocaram-se até os cursos de formação, nas suas horas atividades (SILVA, 2015), outros participaram em grupos de pesquisas (Silva, 2009), (Souza, 2014), e ainda houve pesquisas com encontros no laboratório de Ensino de Matemática (LEMA) na Universidade (MIOLA, 2011), com formações realizadas aos sábados.

As formações foram realizadas, na sua maioria, com um grupo de professores entre três e sete participantes, salvo as formações em modalidades Bimodal que contemplaram, em média, 20 a 30 professores participantes, e ainda tivemos pesquisas desenvolvidas apenas com um professor. Todas as pesquisas foram realizadas com professores da Educação Básica, que atuavam nas redes públicas municipais e estaduais, bem como em instituições privadas, atendendo também professores atuantes nas salas de tecnologia e professores indígenas de escolas específicas.

De um modo geral, os estudos desenvolvidos nas quais os pesquisadores foram até a escola para a produção de dados com os professores, estes foram bem recepcionados. Por outro lado, as pesquisas desenvolvidas que requeriam o deslocamento dos profissionais do local de trabalho para outro local inviabilizaram a participação de muitos professores envolvidos nas atividades e, principalmente, pelos horários e dias estabelecidos para a formação. Todavia, destacamos condições e restrições das formações desenvolvidas no ambiente escolar a partir dos comentários de Batista (2012), que registra:

> Quando estamos no local de trabalho dos professores, em seu ambiente natural, no caso, em uma escola da região periférica, nos damos conta das dificuldades pelas quais passam. Compreender suas reais situações de trabalho implica com eles conviver em salas de aulas quentes, numerosas, sem espaço físico para reuniões e sem sala específica para estudos. Na realidade da escola em que desenvolvemos esta pesquisa,

> as professoras se reuniam em uma sala que ficava entre o bebedouro e a saída da porta para o banheiro. Espremidas entre mais duas portas, a de frente para o pátio e a de entrada para a secretaria, com apenas uma mesa para seis lugares, portanto com uma movimentação muito grande de pessoas, nossos encontros eram desenvolvidos em meio às dificuldades e à falta de condições para concentração nos estudos, na elaboração e realização das atividades. Como o município é muito quente, os dois ventiladores na sala, instalados em um teto baixo e que movimentavam o ar quente, dificultavam a elaboração de atividades pelas professoras, tanto pelo barulho que faziam como pela dificuldade em manter os papéis e documentos sobre a mesa. Observamos também as dificuldades das professoras que precisavam trabalhar em vários turnos para complementação de rendimentos e, em decorrência disso, não tiveram tempo de estudar com o grupo e se aperfeiçoar. Assim, observamos a importância de se pensar que, pelas questões de ensino e aprendizagem ou do conhecimento do professor, passam também os problemas estruturais e de política pública educacional na área da educação, que, apesar de não ser o foco desta pesquisa, não se podem desprezar porque repercutem no ensino de todas as disciplinas, inclusive da matemática. (BATISTA, 2012, p. 130)

Percebemos pela leitura de alguns trabalhos que a escolha pelo grupo de professores ou a investigação da prática de um professor partem, inicialmente, pelos objetivos da pesquisa, para, posteriormente, ocorrer a escolha da participação dos professores. No entanto, na leitura, temos visto que, para o desenvolvimento das pesquisas, existiram o diálogo e, principalmente, a participação dos professores no processo de formação, no qual as suas opiniões foram consideradas. Assim, a presença de diferentes aportes teóricos e metodológicos possibilitou que cada pesquisa buscasse atender especificidades do grupo de professores envolvidos no processo de formação continuada, de modo a promover a autonomia entre os envolvidos, a discordância, as críticas, e viabilizando que todos pudessem participar e suscitar novas propostas de ensino em sala de aula, respeitando as diferenças.

Contudo, enquanto pesquisadores da Educação Matemática, somos desafiados a todo momento a repensar as formações continuadas e compreender que as situações problemáticas dos professores são individuais, não genéricas e muito menos padronizadas. Por certo, as pesquisas desenvolvidas no PPGEduMat direcionaram as suas formações num processo que provocou reflexões sobre a prática, por meio da participação dos professores, com leituras, trabalhos em grupo, estudos, debates, pesquisas entre outros recursos, colaborando para que os participantes das formações desenvolvessem posturas críticas e análise de suas práticas profissionais.

Com base no aporte teórico assumido na presente pesquisa, observamos que, no Brasil, existem diversas pesquisas realizadas que têm utilizado a TAD para o desenvolvimento de formações continuadas. Assim, no próximo tópico, discutimos essas pesquisas, a partir de um levantamento bibliográfico, pois compreendemos que estamos no caminho certo, mas ainda há muito o que fazer para a formação continuada no Brasil.

2.3 Algumas pesquisas brasileiras sobre Formação de Professores: estudos desenvolvidos a partir da TAD

A formação continuada surge como possibilidade de desencadear, na prática profissional, o estudo e a investigação dos processos de ensino e aprendizagem da matemática. Neste sentido, encontramos em Chevallard (2003, p. 11) possibilidades de trabalhar com a formação de professores, pois, segundo o autor, "as ciências didáticas visam estudar qualquer questão levantada pela profissão de professor e qualquer questão relativa à difusão de praxeologias professorais".

Para Bosch e Gascón (2009), a TAD sempre esteve relacionada com a formação inicial e continuada de professores, por diferentes razões, pelo fato de professores ativos estarem se formando e continuarem fazendo parte de algum grupo ou equipe de estudos e pesquisas sobre a TAD. Outro fato a ser destacado é que a TAD foi uma das primeiras teorias a não considerar apenas o processo de ensino e aprendizagem da matemática, mas, todo o processo que vai desde a criação e uso do conhecimento matemático até a materialização do saber ensinado na escola.

A TAD compreende que a prática do professor, como exemplo, ensinar o teorema de Tales, possui como referência relações desenvolvidas em diferentes instituições, nas quais são impostos modos de fazer e pensar resultantes de um processo coletivo, no qual o professor participa ou participou e, por muitas vezes, assume essas relações, como se fossem resultados de um processo individual. Neste sentido, para Chevallard (2009c), as competências e conhecimentos das pessoas correspondem ao equipamento praxeológico de que a pessoa dispõe e, certamente, entender o ambiente escolar e as condições e restrições presentes na prática escolar é o início para desenvolver formações continuadas. É preciso ter claro, primeiramente, que o equipamento praxeológico do professor não deve resumir-se àquilo que ele deve ensinar.

Para Bosch e Gascón (2009), a problemática sobre formação de professores está em entender

> [...] qual[32] é o Equipamento Praxeológico necessário, ou pelo menos útil, para que os professores possam intervir de maneira efetiva e pertinente na formação matemática dos estudantes, de tal ou qual etapa educativa e o que se pode fazer para ajudar para que os professores disponham dele? (GASCÓN; BOSCH, 2009, p. 94).

Nessa lógica, os professores buscam respostas para questões que surgem a partir das suas práticas, do conflito de praxeologias institucionais matemáticas e didáticas, que necessitam de construção de novas praxeologias, que podem não ter sido ensinadas, mas que são essenciais para tornar o ensino compreensível para o próprio professor, ou seja, o professor precisa equipar-se de outras praxeologias, não somente das que vai ensinar.

Sendo assim, somente o desenvolvimento de praxeologias não significa mudanças praxeológicas. Faz-se necessário partir de uma questão ou de uma situação matemática que exija mudanças na praxeologia do professor com relação ao saber matemático em jogo, por meio de questionamentos que o levem para além de uma simples informação, para um estudo que promova mudanças nas organizações matemáticas e organizações didáticas institucionalizadas.

Por esse ângulo, acreditamos, conforme Chevallard (2009a, 2009d), que os Percursos de Estudos e Pesquisas (PEP) são precursores dessas mudanças e formam-se quando questões[33] são estudadas por algumas pessoas, para as quais, *a priori*, as respostas não são tão evidentes e essas pessoas decidem fazer algo para resolver a questão proposta, tornando-se estudantes da questão. Por conseguinte, admitimos que os PEP são dispositivos didáticos que impulsionam os professores a uma situação de mudança ou desestabilidade das praxeologias dominantes, em torno da constituição de problemas e de um grupo de estudos.

Assim, por mais que o processo de aprendizagem seja uma obtenção individual, ele "é resultado de um processo coletivo, o processo de estudo que se desenvolve no interior de uma comunidade, seja ela uma turma ou um grupo de pesquisadores" (CHEVALLARD; BOSCH; GASCÓN, 2001, p. 198). Os autores apontam ainda que o processo de estudo somente pode ser desenvolvido se a aprendizagem for compartilhada dentro desse grupo, todos individualmente aprendem conforme discussão e estudo no

---

[32] ¿Cuál es el *equipamiento praxeológico* necesario (o por lo menos útil) para que los profesores puedan intervenir de manera efectiva y pertinente en la formación matemática de los estudiantes (de tal o cual etapa educativa) y qué se puede hacer para ayudar a que los profesores dispongan de él?

[33] De acordo com o capítulo anterior, a metodologia do PEP requer um estudo antes, durante e após o desenvolvimento do percurso. Vale ressaltar que não são simples questões, e ainda, cada questão é pensada para um grupo específico, caso o grupo de estudantes das questões mudem, as questões serão outras, visto que as questões vão surgindo dos próprios estudantes.

grupo, tornando-se a aprendizagem um fato coletivo que, num ponto de vista antropológico, o estudo e, com ele, a aprendizagem, são atividades que unem os indivíduos.

Neste sentido, como vimos no tópico anterior, a partir do levantamento bibliográfico, e ainda dos apontamentos de alguns pesquisadores da área de formação, a maioria dos envolvidos na Educação Matemática, em torno da formação continuada de professores, tem desenvolvido pesquisas a partir da constituição de grupos, por meio de um trabalho coletivo com professores, nas quais estudam e discutam diferentes temáticas. Por certo, as pesquisas desenvolvidas na corrente francesa não são diferentes.

No cenário brasileiro, temos diversas pesquisas desenvolvidas e pesquisadores que versam os seus trabalhos sobre a Didática da Matemática na corrente francesa, em particular a TAD. Desse modo, realizamos um levantamento bibliográfico[34] de pesquisas que aludem sobre formação continuada de professores de Matemática tendo como aporte teórico a TAD, no sentido de compreender como essas pesquisas têm utilizado a TAD para discutir, investigar e desenvolver formação continuada de professores.

Para efetivação do levantamento bibliográfico, buscamos identificar, primeiramente, os pesquisadores e, respectivamente, as universidades participantes e membros do GT- 14 de Didática da Matemática, atuantes na Sociedade Brasileira de Educação Matemática (SBEM).

Nesse primeiro levantamento, encontramos 13 universidades que trabalham com a Didática da Matemática na corrente francesa, quais sejam: UFMS (Universidade Federal do Mato Grosso do Sul); UESC (Universidade Estadual de Santa Cruz); UFRPE (Universidade Federal Rural de Pernambuco); UFPE (Universidade Federal de Pernambuco); UFRB (Universidade Federal do Recôncavo da Bahia); UFAC (Universidade Federal do Acre); UEMS (Universidade Estadual do Mato Grosso do Sul); UFBA (Universidade Federal da Bahia); UFCG (Universidade Federal de Campina Grande); UNESPAR (Universidade Estadual do Paraná); PUC/SP (Pontifícia Universidade Católica de São Paulo); UFPA (Universidade Federal do Pará) e Anhanguera/SP. Vale ressaltar que a Universidade Anhanguera não possui nenhum

[34] É importante destacar que o levantamento foi realizado por meio dos dados disponibilizados nos sites dos programas, com acesso em abril de 2018.

membro do GT – 14[35], no entanto, devido às pesquisas desenvolvidas, tínhamos conhecimento que a instituição estudava em torno da corrente francesa.

A partir disso, dentre as teses e dissertações dos programas de pós-graduações em Educação Matemática das instituições mencionadas, obtivemos um total de 1.399 pesquisas, por meio dos sites dos respectivos programas. A partir da leitura dos resumos, selecionamos apenas aquelas que tinham como aporte teórico a TAD, totalizando um quantitativo de 88 trabalhos.

A finalidade desse levantamento bibliográfico foi selecionar apenas as pesquisas que versam sobre formação de professores. Realizadas as leituras dos resumos, selecionamos 24 trabalhos que passaram a compor o universo da nossa pesquisa. Na fase seguinte, organizamos os trabalhos em dois eixos: formação inicial e formação continuada. Nesse levantamento, foi possível notar que a Formação de Professores ainda não tem sido muito abordada pelas pesquisas que adotam os pressupostos teóricos da TAD, visto que, de um total de 88 trabalhos que se apoiam na TAD, apenas 24 deles discutem a Formação de Professores, e especificamente 21 trabalhos abordam sobre formação continuada.

Nesse conjunto de trabalhos, grande parte das pesquisas busca compreender as praxeologias de professores de Matemática, mais precisamente, as discussões analisam as relações do professor com o saber matemático por meio das organizações praxeológicas. Além disso, compreendem que, no sistema escolar, são necessários, para além das imposições políticas e administrativas, estudos em torno do objeto matemático, para atender às particularidades de cada disciplina, analisar os livros didáticos e as praxeologias dominantes nos diferentes conteúdos matemáticos.

Nessas pesquisas, observamos que os trabalhos contemplaram diferentes modalidades de Licenciaturas em Matemática, tais como: Indígena, à Distância e Cursos Interdisciplinares. Vimos também que ainda são poucas as investigações no campo da Formação de Professores que empregam a TAD como aporte teórico, mesmo que o tema em questão seja recorrente nas pesquisas brasileiras. Por conseguinte, em face dos resultados decorrentes dos trabalhos aqui levantados, constatamos que, quando se trata da formação de futuros professores, esse número tende a mostrar-se ainda mais escasso.

Na sequência, trazemos uma apresentação mais detalhada das investigações que versam especificamente sobre o desenvolvimento de percurso de estudos e pesquisa

[35]No acesso ao *site* http://www.sbembrasil.org.br/sbembrasil/index.php/grupo-de-trabalho/gt/gt-14, no mês de abril de 2018.

(PEP) na formação continuada, em quais condições ocorrem as formações e como ocorreram. Nesse cenário, do quantitativo de 21 pesquisas, encontramos três trabalhos: Pereira (2017), Andrade (2012) e Santos (2014), os quais discutimos a seguir.

Na pesquisa de Pereira (2017), o autor propõe o desenvolvimento de um PEP com professores de Matemática, no qual visa compreender o modelo epistemológico da Álgebra Escolar que prevalece no equipamento praxeológico dos professores ao tornarem-se professores da Educação Básica. Mais precisamente, objetivouentender quais alterações e recombinações praxeológicas acontecem no equipamento praxeológico no desenvolvimento de um PEP, por meio de um MER para a álgebra escolar.

O PEP desenvolvido por Pereira (2017) foi composto por 11 sessões, em torno de 1h e 40 min cada uma, que foram realizadas aos sábados. A composição de cada sistema didático para estudo da álgebra constituim-se de forma distinta em relação à participação dos professores da Educação Básica, visto que, por problemas diversos, como "por compromissos profissionais e doença" (SILVA, 2017, p. 121), não obteve a participação de todos os professores durante todo o percurso, no total, houve o envolvimento de 12 professores com a desistência de quatro, sem que houvesse a explanação de motivos. Os percursos foram desenvolvidos a partir de leitura e estudos sobre o ensino da álgebra e, principalmente, do estudo da dissertação de Pereira (2012).

Para Pereira (2017), os resultados da pesquisa indicam que o procedimento metodológico do PEP, ao ser assumido na formação continuada dos professores, confirmou a potencialidade desse modelo teórico da TAD. Além disso, obteve-se um grande volume de informações, que possibilitaram aos pesquisadores a compreensão de que as dinâmicas cognitivas durante os estudos da obra de Chevallard (1984, 1989, 1999) e de Pereira (2012) indicaram para alguns professores alterações e recombinações dos dois blocos praxeológicos do saber e do saber-fazer. No entanto, para outros, ocorreram recombinações praxeológicas em relação ao bloco saber-fazer da Álgebra escolar.

Para Andrade (2012), o PEP é um dispositivo de formação continuada que provoca a entrada de professores em processos investigativos de questões que surgem por meio dos confrontos com as práticas vivenciadas em sala de aula. Neste sentido, a pesquisa teve como objetivo realizar a construção de uma OM e OD, compreendida como um conjunto estruturado de tarefas integradas, com ordem crescente de complexidade e que permitiu aos professores o reencontro com o conjunto de obras essenciais do programa de Geometria Analítica.

Na pesquisa de Andrade (2012), o percurso foi desenvolvido com um grupo de 14 professores de matemática, que possuía um horário específico durante o tempo na escola para discutir sobre o ensino de matemática, além disso, o grupo de professores já possuía leituras em torno da TAD e todos participaram da formação sem qualquer desistência.

Nessa pesquisa, o PEP desencadeou, a partir de uma comunidade de práticas, um dispositivo metodológico diferenciado para a formação continuada que, segundo os autores, permitiu: "Por fazer revelar (e como enfrentar) o problema da desarticulação como da profissão docente; por revelar a dimensão escolar dos objetos matemáticos; por revelar as funcionalidades das Tarefas; Por promover e fomentar a geração de questões a partir das práticas docentes: as Tarefas fundamentais" (ANDRADE, 2012, p. 156).

Na dissertação de Santos (2014), o objetivo principal da pesquisa foi investigar as características do modelo dominante do ensino de álgebra presente nas concepções dos professores de matemática investigados. Para isso, estes utilizaram sistemas didáticos com características de um PEP[36], para verificar em que medida tais sistemas interferem na epistemologia dos professores em torno do ensino da Álgebra. A pesquisa desenvolveu-se com um grupo de 23 professores durante os sábados. O grupo participante era composto por alunos de uma especialização em Didática da Matemática, que também já possuíam uma leitura sobre a TAD e foram cedidos ao pesquisador, durante o curso constituído de encontros com uma hora e meia de duração. O autor destaca, nos procedimentos metodológicos, que, na composição dos sistemas didáticos, teve uma variação de 12 a 16 participantes nos estudos.

Dos resultados elencados, a pesquisa revela que os professores, de um modo geral, veem a álgebra como um prolongamento e generalização de práticas aritméticas e que esse estudo tem possibilitado aos professores uma conscientização sobre o ensino da Álgebra, proveniente da necessidade de considerarem-se os aspectos epistemológicos desse campo da matemática.

Na leitura desses trabalhos, vimos que o PEP propiciou aos envolvidos na pesquisa, principalmente aos professores, uma formação permeada de discussões em torno de todo o ambiente escolar e, principalmente, no que diz respeito às OM e OD do ensino de matemática, suas razões de ser e as possibilidades de desenvolvimento de MER a partir dos PEP. Foi possível verificar ainda que a constituição de sistemas didáticos para o desenvolvimento do PEP, no que concerne aos estudantes das questões, que, no caso

[36] O autor denomina característica de um PER, o fato de desenvolverem-se sistemas didáticos em torno de uma questão geratriz, envolvendo os estudantes da questão e também o orientador do estudo.

dessas pesquisas, foram os professores, houve uma dificuldade em desenvolver os sistemas didáticos de modo que todos os professores participem de todos os encontros.

Além disso, nos PEP, os professores possuem o papel ativo no processo, esperando-se que o professor seja capaz de fazer isso com seu aluno, pois, quando o professor está na posição de estudante, nas atividades em que eles participam, quase sempre os processos de formação têm uma tendência clássica, sendo marcados pelo paradigma vigente de *visita às obras*, altamente caracterizado pelo tradicionalismo, sendo que o PEP rompe com esse paradigma.

Outro ponto importante para ser destacado na leitura desses trabalhos foi a cronogênese do PEP, o tempo de duração dos percursos, que, em média, não ultrapassaram duas horas de estudos. Vale ainda ressaltar que, das três pesquisas que desenvolveram o PEP, apenas uma formação aconteceu em horário de serviço, como é o caso da pesquisa de Andrade (2012), que foi desenvolvida em uma escola pública federal, com tempo específico para as formações continuadas, sendo que as demais pesquisas foram realizadas aos sábados. Por certo, podemos verificar o quanto os níveis de codeterminação, no nível da escola e pedagogia podem possibilitar melhores condições às formações continuadas.

De fato, o PEP enquanto proposta metodológica para as formações continuadas possibilita aos envolvidos uma formação única, na qual é possível realizar estudos, leituras, reflexões em torno do ensino de matemática, de modo que todos os envolvidos no sistema didático são desafiados, tratam cada problemática de forma individual e não generalizada, assim, contribuindo para que os professores possam analisar as suas próprias práticas e o desenvolvimento de uma análise crítica sobre o ensino e sobre todo o âmbito escolar.

Certamente, temos visto que a pesquisa de Pereira (2017), tem enfrentado algumas dificuldades na constituição do grupo de professores para a formação continuada, mesmo sendo realizadas aos sábados, não diferente da nossa pesquisa como veremos mais adiante, dos desafios em constituir um grupo para a formação continuada com professores atuantes em diferentes escolas e turnos.

A partir desse levantamento bibliográfico, vimos que os pesquisadores brasileiros, ao discutirem sobre formação de professores com o aporte teórico da TAD, fundamentam-se em diversas pesquisas desenvolvidas na França e Espanha, onde há grupos de pesquisas e pesquisadores renomados no estudo da TAD. Desse modo, no próximo tópico, abordamos algumas discussões sobre as principais referências francesas e espanholas que se sobressaíram nesse levantamento bibliográfico.

2.4 Sobre formação de professores na França e Espanha: estudos com aporte teórico da TAD

Chevallard (2009b), ao discutir formação de professores, no contexto francês, utiliza algumas comparações entre as demais profissões, como o médico e o arquiteto. Para o autor, os médicos não inventaram a ciência médica que implementa e nem os arquitetos foram responsáveis pelo invento das edificações, por mais que ajudem no aprimoramento de suas ações. Por outro lado, esses sujeitos reconhecem na sua vida profissional um professor mestre que os formou. Chevallard afirma:

> [...] o[37] professor quase sempre parece um pequeno produtor independente que deve obter suas ferramentas, seus recursos, inventar suas soluções e viver sozinho o que ele acredita ser seus fracassos, dos quais ele sente muito, e seus sucessos, dos quais ele se orgulha. Por contraste com estes ofícios que pertencem a uma profissão, ele vive como uma ilha, por natureza recluso em uma autarquia insuperável: um médico não inventa a ciência médica que ele coloca ou as terapias que prescreve; um arquiteto não cria a arte de construir se ele puder ajuda a enriquecê-la. O professor acredita que ele se forma a si próprio. O médico se reconhece mestres em alguns de seus professores da faculdade de medicina; o professor não admite nenhum mestre - a menos que ele tenha abdicado de sua liberdade como praticante ~~a trupe~~ ao se aliar à tropa de algum guru! A ‘profissão’, no seu caso, é, na verdade, ruim a ajuda: ele responde apenas algumas questões essenciais que o trabalho lhe pede. Cada um é, portanto, devolvido a si mesmo primeiro. (CHEVALLARD, 2009b, p.8)

Todavia, o professor acredita ser produtor de sua própria origem e não reconhece nenhum mestre na sua formação, segundo Chevallard (2009g), além disso, ponderam que os problemas da profissão são de ordem pessoal:

[37] le professeur se regarde quasiment toujours comme un *petit producteur indépendant* qui doit se procurer ses outils, ses ressources, inventer ses solutions, et vivre seul ce qu’il croit être ses échecs, dont il se désole, et ses réussites, dont il se rengorge. Par contraste avec ces métiers qui relèvent d’une profession, il se vit comme une île, par nature recluse dans une indépassable autarcie : un médecin n’invente ni la science médicale qu’il met en oeuvre, ni les thérapies qu’il prescrit ; un architecte ne crée pas l’art de construire, même s’il peut contribuer à l’enrichir. Le professeur croit s’engendrer lui-même. Le médecin se reconnaît des maîtres en certains de ses professeurs de la faculté de médecine ; le professeur n’avoue aucun maître – à moins qu’il n’ait abdiqué sa liberté de praticien en se rangeant dans la troupe de quelque gourou ! La « profession », dans son cas, est, au vrai, d’un piètre secours : elle ne répond qu’à très peu de questions essentielles que lui pose le métier. Chacun est donc renvoyé d’abord à lui-même.

> O[38] ofício de professor é assim, tradicionalmente, um ofício, artesanal, solitário, onde constantemente se é levado para um ‘brincar pessoal’. Este estado histórico da profissão, em que cada um acredita que tem que inventar suas soluções próprias para as dificuldades vividas solitariamente, traz a ‘profissão’ para olhar as dificuldades encontradas por seus membros como pessoais, e permanecendo essencialmente ligadas às características dos públicos ensinados e não como *problemas da profissão*, noção quase completamente sem sentido nas culturas professorais atuais. (CHEVALLARD, 2003, p. 12)

Possivelmente, a profissão de professor em um contexto histórico é permeada por uma cultura em que as suas decisões, seus direcionamentos profissionais são norteados pelos empregadores estaduais e municipais, sem possibilidades, portanto, de diálogos e ações independentes. (CHEVALLARD, 2009b).

No entanto, é preciso que o professor possa desvencilhar-se desse contexto e buscar novas pedagogias por meio do paradigma *questionamento do mundo* (CHEVALLARD, 2009b). Para isso, é necessário que o professor integre-se a essas pedagogias, contudo, isso não é alcançado de modo isolado, de forma independente. É necessária a mobilização de todos os envolvidos no âmbito escolar, como exemplifica Chevallard (2009b): o tratamento da AIDS não foi alcançado por um único médico, ou por uma única equipe médica, mas pela mobilização médica dos envolvidos nesse processo, da mesma forma, para o autor, as questões relacionadas à educação devem ter os mesmos direcionamentos.

Para Chevallard, podemos identificar três praxeologias professorais, que o autor destaca:

> [...] a[39] categoria mais ampla, e sempre aberta, é a das praxeologias para a profissão (de professores da matemática), que

[38] Le métier de professeur est ainsi, traditionnellement, un métier artisanal, solitaire, où constamment on est poussé à « jouer personel ». Cet état historique du métier, dans lequel chacun croit devoir inventer ses solutions propres à des difficultés vécues solitairement, porte la « profession » à regarder les difficultés rencontrées par ses membres comme *personnelles*, et au demeurant essentiellement liées aux caractéristiques des publics enseignés, et non comme des *problèmes de la profession*, notion presque entièrement dénuée de sens dans les cultures professorales actuelles.

[39] La catégorie la plus large, et toujours ouverte, est celle des praxéologies *pour la profession* (de professeur de mathématiques), qui inclut l’ensemble des praxéologies dont la profession peut avoir avantage à s’équiper. Bien entendu, cette catégorie contient la sous-catégorie des praxéologies *à enseigner*, mais est très loin de s’y réduire: au plan mathématique seulement, elle inclut déjà les connaissances mathématiques indispensables pour distinguer par exemple les praxéologies à enseigner et celles qui ne le sont pas. L’ensemble (flou, et évolutif) des praxéologies à enseigner peut alors s’inclure dans une autre sous-catégorie, celle des praxéologies *pour l’enseignement* (des mathématiques), qui subsume tant ce qu’on nommera plus précisément les *mathématiques pour l’enseignement* que les *praxéologies didactiques* relatives à telle ou telle praxéologie mathématique à enseigner, elles-mêmes élaborées à l’aide de nombreuses praxéologies *pour la profession* qui ne sont pas à proprement parler des praxéologies pour l’enseignement. (On notera que les praxéologies *mathématiques pour la profession* ou, plus

> inclui todas as praxeologias cuja profissão pode ter vantagem de equipar. Obviamente, esta categoria contém a subcategoria de praxeologias para ensinar, mas está longe de ser reduzido a isso: matematicamente, inclui já o conhecimento matemático necessário para distinguir, por exemplo, as praxeologias para ensinar e aquelas que não são. O todo (difuso e evolutivo). As praxeologias a ensinar podem então ser incluídas em outra subcategoria, a de praxeologias para o ensino (matemática), que inclui tanto o que será chamado mais especificamente matemática para ensinar do que praxeologias didáticas relacionados a uma determinada praxeologia matemática a ser ensinada, elaborados por meio de muitas praxeologias para a profissão que não são estritamente falando praxeologias para o ensino. (Notemos que as praxeologias matemáticas para a profissão ou, mais especificamente, para o ensino, são consideradas praxeologias profissionais: são praxeologias da profissão de professor de matemática em igualdade com os outros.). (CHEVALLARD, 2009b, p. 16)

Desse modo, segundo o autor, a praxeologia para a profissão é uma categoria que contém todas as praxeologias que a profissão possa apropriar-se, entendemos que envolvem as experiências do professor, o saber, o planejamento, o conhecimento do conteúdo, a pedagogia, enfim, as praxeologias que compõem a profissão. Nessa categoria, temos uma subcategoria, praxeologia para ensinar, com ênfase nas praxeologias que são para ensinar e as que não são. Nas praxeologias para ensinar, no nosso entendimento, situam-se as praxeologias que o professor mobiliza antes da execução da aula, que ajudam a preparar a sua aula, quais conteúdos e atividades considerar para o ensino, que podem estar presentes nos livros didáticos, planejamentos prontos, situações problemas, que, posteriormente, serão ensinadas, assim, temos uma outra subcategoria que são as praxeologias para o ensino, são as praxeologias da Matemática ensinada. (CHEVALLARD, 2009b)

Ao estudar e analisar as praxeologias professorais, Chevallard (2009b) refere que algumas são observáveis, visíveis, analisáveis, e outras não, sendo necessário buscar meios para a identificação dessas praxeologias. Para Chevallard (2009b), a matemática acadêmica estudada pelo professor de matemática deve ser trabalhada, reformulada, adaptada à realidade para a qual o professor leciona, desse modo, conforme o autor, o conhecimento em torno da matemática acadêmica e o conhecimento para a profissão são diferentes das praxeologias para o ensino que, após as devidas adaptações, serão

particulièrement, *pour l'enseignement* sont regardées comme des praxéologies *professionnelles*: ce sont des praxéologies de la profession de professeur de mathématiques à l'égal des autres.)

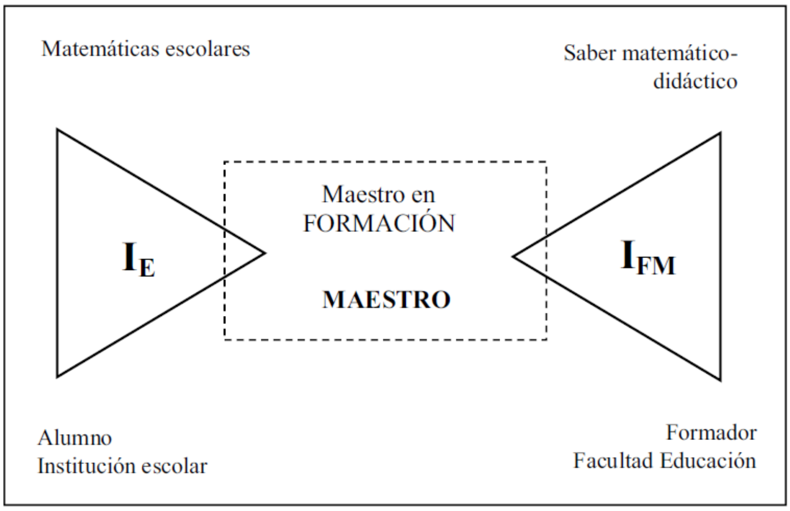
ensinadas. Assim, entre as praxeologias para a profissão docente, existem as praxeologias para ensinar e as praxeologias para o ensino.

Desse modo, compreendemos, de acordo com o autor, que as praxeologias para a profissão envolvem diferentes conhecimentos que não se restringem somente às praxeologias que o professor irá lecionar, ou seja, o professor tem muito mais conhecimento sobre o conteúdo para além do que ele explica, não somente conhecimentos matemáticos, mas conhecimentos que envolvem questões didáticas, experiências de práticas em sala de aula, enfim, diferentes conhecimentos que possibilitam preparar e executar as praxeologias para ensinar, de modo a levar o aluno aprender o que está sendo proposto, e, quando o professor executa sua aula, temos as praxeologias de ensino que são, de fato, as praxeologias que o professor trabalhou em sala de aula e podem ser diferenciadas do seu planejamento.

Em 2010, no artigo intitulado "Didática da matemática e formação de professores: respostas e desafios da TAD", os autores Higueras e Garcia desenvolveram um modelo epistemológico de referência para formação de professores, amparado na TAD. Para os autores, a TAD possui duas características importantes que fundamentam a criação desse modelo, primeiramente, por ser uma teoria que oferece ferramentas para descrever a atividade humana, em particular, a formação de professores, que é o cerne da pesquisa desses autores, e, ademais, propicia a descrição e análise das atividades matemáticas, em especial das atividades matemáticas escolares, que é o objeto de estudo da formação de professores de matemática.

Os autores basearam-se na hipótese de que, a partir de um modelo científico, é possível descrever as atividades de formação de professores nas instituições de formação, e, por outro lado, é possível problematizar, questionar, analisar, avaliar as propostas de formação existentes e as que estão para ser construídas por meio de um rigoroso estudo científico. Desse modo, partindo desse modelo de referência, os autores têm enfatizado uma formação de professores que se baseia na seguinte proposta, conforme figura 8:

Figura 8- Proposta de MER para a formação de professores



Fonte: Higueras; Garcia (2010, p. 192)

Nessa proposta, a instituição formadora de professores tem, como papel principal, formar um profissional competente para a instituição escolar I_E, possibilitando o estudo do conhecimento didático-matemático de modo significativo e que este possa ser reconstruído no ambiente escolar. Por consequência, pontua-se que a instituição formadora deve propiciar ao professor:

> [...] dispor[40] de um conhecimento adequado sobre como funciona o sistema de ensino de matemática (SEM) e o sistema escolar (SE), caracterizar o conjunto de conhecimentos didático-matemáticos que vai capacitar profissionalmente o futuro professor, dispor de praxeologias de formação adequadas para o aluno construir este conhecimento com significado e poder reconstruí-lo no ambiente escolar que gere OD que desenvolve uma atividade de estudo vivo e funcional na escola. (HIGUERAS; GARCIA, 2010, p. 192)

Nesse cenário, a formação deve propiciar atividades de estudo que devem emergir na busca de respostas para as questões cruciais em torno da problemática da profissão de professor, gerando processos de estudos dinâmicos e evitando a automatização do ensino em torno apenas do objeto de conhecimento.

Entretanto, como formadores de professores, podemos visualizar que, nas instituições brasileiras de formação de professores, nas quais estamos inseridos, tal

[40] disponer de un conocimiento adecuado sobre cómo funciona el sistema de enseñanza de las matemáticas (SEM) y el sistema escolar (SE), tener caracterizado el conjunto de saberes *didáctico-matemáticos* que capacitará profesionalmente al futuro maestro, disponer de *praxeologías de formación* adecuadas para que el alumnomaestro construya *con sentido* estos saberes y los pueda reconstruir en el medio escolar generando OD que desarrollen una actividad de estudio viva y funcional en la escuela.

modelo está longe de ser vivenciado e, como pesquisadores da Educação Matemática, partimos do princípio que a teoria seja o aporte para atuar na formação continuada de professores de matemática, viabilizando outras oportunidades de formação, para que eles possam atuar ativamente no ambiente escolar. Certamente, estamos compreendendo que o PEP, de acordo com Pereira (2017), Santos (2014) e Andrade (2012), seja um meio para identificar e estudar praxeologias, auxiliando o professor nas escolhas e nos estudos delas, para serem desenvolvidas no ensino da Matemática.

Neste sentido, reiteramos Chevallard ao mencionar que "a formação de professores é uma ferramenta essencial para o desenvolvimento do sistema escolar e de progresso na educação pública" (CHEVALLARD, 2002, p. 1). Com efeito, é necessário entender que a profissão de professor sob o olhar da TAD é uma profissão em construção, como observam os autores Olarría e Sierra (2012):

> [...] é[41] postulado a partir da TAD que a profissão de professor de matemática, é uma profissão em construção, deve equipar recursos próprios de natureza didático-matemática, que constituem infraestrutura necessária para enfrentar as dificuldades, problemas e desafios que surgem continuamente no exercício do ensino e que, por sua complexidade, não pode e não deve abordar o professor em solitário. (OLARRÍA; SIERRA, 2012, p. 466).

Nesse viés, os autores ressaltam a necessidade do professor buscar recursos didático-matemáticos para confrontar as dificuldades relacionadas ao ensino de matemática, e acrescem que a problemática do ensino não se resume apenas à responsabilidade do professor e de sua formação.

Na tese de Olarría (2015), intitulada "Formação didático-matemática do professor secundário", a autora pontua que, em 2012, numa publicação europeia sobre a Educação Matemática, destacam-se três fatores principais em torno do Ensino de Matemática e Formação de Professores: conteúdo e outros conhecimentos relacionados para o ensino; trabalho em equipe (mesmo com professores de outras disciplinas) e contexto escolar. Esses fatores implicam que ensinar Matemática não perpassa somente os conhecimentos da matemática, ao contrário, como mencionam outros autores como Shulman (1986), Ball (2008), ensinar exige outros conhecimentos e habilidades para além do conteúdo.

[41] se postula desde la TAD que la profesión de profesor de matemáticas, como *profesión en construcción***,** debe dotarse de recursos propios de naturaleza didáctico-matemática, que constituyan la *infraestructura* necesaria para afrontar las dificultades, problemas y retos que surgen continuamente en el ejercicio de la docencia y que, por su complejidad, no puede - ni debe- abordar el o la docente em solitario.

Tais apontamentos sobre a formação de professores são destacados por Chevallard e Cirade (2009), quando registram:

> Uma[42] formação profissional que se considere autenticamente acadêmica deve recusar a ilusão de fácil aplicação do do saber em sua totalidade e a ausência de um verdadeiro diálogo epistemológico, cultural e profissional permanente. Para fazer isso, é fundamental se apoiar em dispositivos de formação e de pesquisa que permitam trazer à tona os problemas da profissão para estudá-los com os profissionais em formação, os seus formadores e pesquisadores que estiverem dispostos a se envolver em investigação de base para fins de desenvolvimento profissional. (CHEVALLARD; CIRADE 2009f, p. 1).

Assim, os pesquisadores franceses e espanhóis revelam a necessidade de incluir, na formação de professores, dispositivos de investigação, para que os professores comecem um processo de formação estimulado por meio de questões, de busca e de estudos. Nesse cenário, os professores precisam querer participar de um processo de formação, em que eles sejam ativos e que, futuramente, possam levar tais práticas para a sala de aula, de modo a fazer com que o aluno envolva-se também em um processo investigativo. Tal situação não é trivial, visto que os professores, de um modo geral, vivenciaram e continuam vivenciando muitas formações tradicionais, enquanto que a proposta dos PEP, como vimos até o momento nesse trabalho, é romper com esse tradicionalismo e amparar as formações no paradigma de *questionamento do mundo*.

Em suma, vimos, neste capítulo, que os pesquisadores da Educação Matemática, sejam brasileiros, espanhóis ou franceses, estão em permanentes estudos de modo a desenvolver formações continuadas que possam atender as especificidades do grupo de professores e, no geral, por serem formações com professores de matemática, estão buscando, nessas formações, discutirem o processo de ensino e aprendizagem do conteúdo, de modo que possam discutir e analisar práticas que cheguem em sala de aula. Certamente, o que pretendemos, de fato, na presente pesquisa, é propiciar aos professores de matemática da Educação Básica o desenvolvimento, por meio de micro-PEP, de uma prática investigativa e que os professores possam vivenciar uma formação na qual eles sejam os principais protagonistas no processo e que ainda possam conduzir a uma reflexão

---

[42] Une formation professionnelle qui se veut authentiquement universitaire se doit de refuser l'illusion de l'application sans peine de savoirs tout faits et l'absence d'un véritable dialogue épistémologique, culturel et professionnel permanent. Pour ce faire, il est crucial de pouvoir s'appuyer sur des dispositifs de formation et de recherche permettant de faire émerger les problèmes de la profession pour les étudier avec les professionnels en formation, leurs formateurs et les chercheurs qui consentent à s'impliquer dans des recherches fondamentales à finalité de développement professionnel.

diária de suas próprias práticas, caso não reflitam sobre, de modo a desenvolver uma postura crítica.

CAPÍTULO III - APRESENTANDO OS PERCURSOS DA PESQUISA

Toda intenção didática se realiza através das instituições. Concretamente, esta intenção didática manifesta-se através da formação de instituições a que chamo, genericamente, sistemas didáticos.
(Yves Chevallard)

Neste capítulo, apresentamos os procedimentos metodológicos que guiaram a nossa pesquisa, algumas discussões sobre o ensino de Geometria, por ser o conteúdo matemático abordado na formação continuada com os professores de Matemática, bem como um estudo praxeológico das atividades matemáticas desenvolvidas com os professores por meio de micro-PEP.

3.1 Aspectos metodológicos desenvolvidos na Pesquisa

A nossa pesquisa, como já pontuamos, visa investigar possibilidades do desenvolvimento de micro-PEP na formação continuada de professores de matemática, no estudo de conteúdos geométricos. Para tanto, apoiamos o desenvolvimento deste trabalho no Percurso de Estudo e Pesquisa como aporte metodológico. Apresentamos, em continuidade, uma discussão sobre o ensino de Geometria e o porquê dessa escolha.

A TAD possibilita analisar a formação docente, a partir de diversos elementos teóricos que a compõem e Chevallard (2009a) vem impulsionando a teoria numa perspectiva de questionamento, de investigação e estudo, resultando no desenvolvimento do PEP. O PEP é um modelo teórico/metodológico decorrente do paradigma *questionamento do mundo*, que, como explicitado no item 1.4 do capítulo I, desenvolve-se no contexto de sistemas didáticos (X, Y, Q_0) que são formados a partir de questões Q_0 e que geram outros sistemas didáticos (X, Y, Q_i) a partir da questão Q_0.

Nesta pesquisa, desenvolvemos os sistemas didáticos (X, Y, Q_0), nos quais todos os x_1, x_2, x_3.......x_{12} $\in$ X, que formam o conjunto de sujeitos dela, são os professores de Matemática participantes de uma formação continuada. A pesquisadora que desenvolveu o presente trabalho participa do sistema didático como Y, orientando os estudos desenvolvidos durante os percursos e as questões Q_0 (geradoras), que estão em torno dos conteúdos geométricos.

Para o desenvolvimento dos PEP, primeiramente, constituímos um grupo de professores que ensinam matemática dispostos a participar de uma formação continuada. Como professora do ensino superior, vimos que, em paralelo à participação dos professores, tínhamos, em contrapartida, que lhes proporcionar uma certificação dos trabalhos desenvolvidos na formação. Assim, via Universidade, encaminhamos um projeto de extensão intitulado "Formação continuada com professores da Educação Básica: um estudo dos conceitos geométricos", pois compreendíamos que, por meio do apoio institucional da UFGD, poderíamos ter mais professores da educação básica participando das atividades.

Após encaminhado o projeto de extensão, começamos a divulgar em redes sociais como Facebook, WhatsApp, mensagens, por telefone e pessoalmente em algumas escolas, convidando os professores que ensinam Matemática a participarem dessa formação continuada. Desse modo, o convite estendeu-se por meio de um grupo de WhatsApp, composto por professores de Matemática atuantes na Educação Básica de Dourados/MS. Assim, convidamos mais de 80 professores de Matemática para participar da formação continuada e, no dia marcado para iniciar a formação, compareceram apenas seis professores de matemática.

De início, marcamos para um sábado o início da formação, por se tratar de um dia que poderia abranger o maior número de participantes, pois convidamos professores que atuavam nos diferentes períodos escolares. Somente o primeiro encontro aconteceu no sábado, os demais foram definidos pelos professores para acontecer no período noturno, às terças-feiras, pois, nesse dia, os professores da rede estadual tinham fixado para hora/atividade. No entanto, essa especificidade não se estendia para os professores da rede municipal e particular. Ainda assim, como a maioria dos professores participantes era da rede estadual de ensino, ficou acordado esse dia da semana.

Os encaminhamentos da nossa pesquisa no que diz respeito à logística da formação não diferem dos problemas enfrentados pelas pesquisas descritas neste trabalho, no item 2.2 do capítulo II. Vimos que as formações ocorrem aos sábados e, principalmente, durante as semanas no período noturno. Tais situações merecem destaque, pois o primeiro passo para desenvolver uma formação continuada está na constituição do grupo de professores e, por não terem garantido no horário de serviço um momento específico para as suas formações, fica difícil encontrar um horário, além dos sábados e período noturno, que possa atender a maioria dos possíveis participantes. Essas situações possuem exceções, conforme vimos na pesquisa de Carvalho (2014), quando a formação acontece atendendo os professores de uma única escola e com o apoio institucional (secretarias de educação) é mais fácil fixar um horário para as formações durante o trabalho na própria escola.

Os encontros com os professores foram realizados em períodos quinzenais, no laboratório de ensino de matemática da Escola Estadual Presidente Vargas, no município de Dourados/MS. Todas as sessões foram gravadas em áudio e vídeo e, posteriormente, foram transcritas para a análise da produção dos dados. Vale ressaltar que o convite para o desenvolvimento da formação continuada estendeu-se às diversas escolas municipais e estaduais, mas se optou por essa escola pelo fato de estar localizada na região central de Dourados, com fácil acesso para os professores de outras escolas.

Os professores participantes da nossa pesquisa são todos atuantes na rede pública de ensino da cidade de Dourados/MS em diferentes escolas. Conforme podemos visualizar no quadro 1, (Dados oriundos do questionário – Anexo 2), esse grupo foi composto por 12 professores com características bastante heterogêneas, contamos com a participação de professores recém graduados e com apenas um mês de vivência em sala de aula, juntamente com professores com anos de experiência docente.

Quadro 1 -Perfil dos sujeitos da pesquisa

Sujeito	Instituição que obteve a graduação	Tempo de experiência na docência	Nível de ensino que atua
x_1	UTFPR- Universidade Tecnológica Federal do Paraná	15 anos	6º e 7º anos (matutino) e coordenação no Projeto AJA - Avanço do Jovem na aprendizagem (Ensino Fundamental e Médio) – noturno
x_2	UNESPAR- Universidade Estadual do Paraná	12 anos	7º e 8º anos do Ensino Fundamental
x_3	UEMS – Universidade Estadual do Mato Grosso do Sul	2 anos	7º e 8º anos do Ensino Fundamental

x_4	UFGD - Universidade Federal da Grande Dourados	6 anos	6o ano do Ensino Fundamental
x_5	UFGD - Universidade Federal da Grande Dourados	Recém-formado	5º anos do Ensino Fundamental
x_6	UFGD - Universidade Federal da Grande Dourados	10 anos	Ensino Médio
x_7	UFGD - Universidade Federal da Grande Dourados	1 mês	5º e 6º anos do Ensino Fundamental
x_8	5º anos do Ensino Fundamental	5 anos	5º e 6º anos do Ensino Fundamental
x_9	UFGD- Universidade Federal da Grande Dourados	2 anos	Estava trabalhando no administrativo no município.
x_{10}	UFMS – Universidade Federal do Mato Grosso do Sul	30 anos	Ensino Médio e Ensino Superior
x_{11}	UNIGRAN- Centro Universitário da Grande Dourados	6 anos	7º e 8º anos do Ensino Fundamental
x_{12}	UNIGRAN- Centro Universitário da Grande Dourados	8 anos	8º e 9º anos do Ensino Fundamental

Fonte: Construída pela pesquisadora

A maioria desses professores é egressa de instituições públicas de ensino superior e atua, principalmente, nos anos finais do ensino fundamental. De um modo geral, vimos que a heterogeneidade do grupo possibilitou desenvolver micro-PEP que culminou no confronto de diferentes práticas de sala de aula com as experiências na formação inicial, apesar de percebermos certa inibição por parte de alguns professores em expor seu conhecimento para o grupo de estudos.

É importante destacar que, independentemente do tempo de atuação em sala de aula, a constituição de um grupo de professores que dialogue, que desenvolva atitudes espontâneas, que respeite a opinião do outro e que exponha suas praxeologias com relação ao ensino, não é trivial.

Uma característica marcante na constituição desse grupo foi a rotatividade dos participantes no decorrer das sessões da formação. Certamente, devido às condições adversas enfrentadas pelos professores, não conseguimos a participação dos doze professores em todos os PEP desenvolvidos (mais adiante, apresentamos cada PEP com mais detalhe), o que inviabilizou a nossa primeira intenção da pesquisa que era desenvolver um único percurso. Diante desses fatos, optamos pelo desenvolvimento de micro-PEP, que foi uma condição restritiva em decorrência do tempo didático (principalmente, a definição de um horário disponível comum a todos os professores) e, na sua prática profissional não está garantido um tempo para a sua formação continuada, de modo que as sessões realizadas com os professores compuseram um conjunto de micropercursos.

Desse modo, além de trabalhar 40horas/aula, é preciso considerar que os professores possuem família, compromissos religiosos, sociais, entre outros, e a participação na formação continuada implica deixá-los de lado. Ademais, eles deparam-se com dificuldades para uma participação efetiva na formação continuada devido às condições e restrições que lhes são impostas. Esse é o caso das professoras participantes dessa formação que são mães e que faltaram em algumas formações por não terem com quem deixar os seus filhos no período noturno.

Para maior clareza dessas situações, após a qualificação da pesquisa, por sugestão da banca, aplicamos um questionário (anexo 2) aos professores participantes desse trabalho de formação continuada, para que eles pudessem explanar condições e restrições que são impostas e que não viabilizam as suas participações em projetos de formação continuada. O questionário, segundo Gil (2008), é uma técnica de investigação que, por meio de questões, submetem-se as pessoas, permite a obtenção de informações sobre diferentes conhecimentos dos envolvidos, de acordo com os objetivos da pesquisa, logo, desenvolvemos o questionário para entender melhor a rotatividade desses professores durante a formação continuada.

Contudo, ao entrar em contato com os professores participantes da pesquisa, após um ano e meio (pois já havíamos concluído a produção de dados), obtivemos um retorno de apenas quatro questionários, sobre os quais traremos mais detalhes das respostas no capítulo de análise.

No desenvolvimento da nossa pesquisa, para cada PEP, realizamos um estudo em torno de uma questão do conteúdo almejado, para que as atividades fossem desafiadoras, conforme as ideias de Chevallard (2012) quanto à necessidade de mudança de paradigmas. Para cada sessão da formação, tivemos o desenvolvimento de um micro-PEP, ou seja, cada micro-PEP teve direcionamentos diferentes (ainda que norteados pela mesma questão geradora), de acordo com os conteúdos que os professores elencavam para estudar, tendo como foco um caminho de estudo e pesquisa para que os professores pudessem vivenciar situações a partir desse novo paradigma.

Desse modo, para definir o conteúdo matemático dos PEP, partimos do trabalho de Santos e Freitas (2013), que desenvolveram uma pesquisa com uma professora indígena para investigar praxeologias mobilizadas ao ensinar os conteúdos de geometria plana e espacial.

Assim, pela pesquisa Santos e Freitas (2013), foi possível vislumbrar problemáticas que ainda são do interesse dos pesquisadores em investigar conteúdos geométricos, além do mais, compreendemos que os conteúdos geométricos impulsionariam os PEP, por ser uma área de investigação que propicia a produção de conjecturas, experimentação e exploração de diferentes recursos didáticos. A seguir, trazemos uma breve discussão sobre o ensino dos conteúdos geométricos, que foram o objeto matemático de estudo que norteou o desenvolvimento dos micro-PEP.

3.2 Uma breve discussão sobre o ensino de Geometria

O ensino de Geometria proposto para o ensino fundamental e médio, segundo os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN), deve propiciar aos alunos um convívio prazeroso com a abstração dos seus conceitos. Os estudantes, em consequência, devem desenvolver o raciocínio lógico, não se detendo a uma mera aplicação de fórmulas. Além disso, é preciso que visualizem a relação entre o cotidiano e a geometria e que ela represente um instrumento importante para resolver situações-problema. Em relação ao conhecimento geométrico para o ensino fundamental, os PCN orientam que:

> Os conceitos geométricos constituem parte importante do currículo de Matemática no ensino fundamental, porque, por meio deles, o aluno desenvolve um tipo especial de pensamento que lhe permite

> compreender, descrever e representar, de forma organizada, o mundo em que vive. (BRASIL,1998, p. 51)

No decorrer da pesquisa, desenvolvemos diferentes PEP em torno dos conteúdos geométricos, vislumbrando estudos, para que os professores pudessem vivenciar situações de ensino e aprendizagem em torno dos conceitos geométricos, de modo a desenvolver outras possibilidades para a sua prática em sala de aula. Algumas pesquisas (PAVANELLO, 1993; LORENZATO, 1995; LINDQUIST, 1994) apontam haver, no ensino de geometria, evidências de uma defasagem diretamente ligada à prática do professor em sala de aula, como deixar de ensinar conceitos geométricos por não compreender os conceitos a serem propostos aos alunos. Poderíamos ainda afirmar, concordando com esses pesquisadores, que o professor deixa, em grande parte, de ensinar conceitos geométricos por não os compreender? Em tais realidades, pesquisadas há mais de 20 anos, parecem não haver direcionamentos muito diferentes das pesquisas desenvolvidas mais recentemente. Como aponta Leivas (2012), há muito o que fazer na formação do professor de matemática que atuará na educação básica brasileira, com relação ao ensino de geometria, destacando que:

> Em uma pesquisa com oito Cursos de Licenciatura em Matemática do RS, verificou-se que todos eles oferecem um semestre de Geometria Plana e um semestre de Geometria Espacial, geralmente desenvolvidos de forma axiomática. Não há indicativos de que a disciplina de Geometria Analítica seja desenvolvida de outra forma, a não ser priorizando a Álgebra em detrimento da Geometria, ou seja, são os algoritmos em primeiro lugar, os quais enquadram determinadas expressões algébricas nessa ou naquela figura geométrica. (LEIVAS, 2012, p. 10)

Para Leivas (2012), a condução do ensino de geometria deve perpassar três conceitos que julga necessários para o desenvolvimento do pensamento geométrico: imaginação, intuição e visualização. Em suas análises, Leivas (2012) verificou que, nos cursos de matemática, não se percebeu qualquer indicativo de que esses elementos norteadores para o ensino de geometria fossem trabalhados. Para esse autor, é fundamental que, no ensino de geometria, caracterize-se também o conhecimento matemático, trabalhando-se com conceitos, propriedades geométricas e demonstrações, ou seja, adotando-se uma abordagem tanto dedutiva quanto experimental, sem priorizar uma delas.

Para o Guia do PNLD, Brasil (2017), o ensino de geometria deve perpassar não somente um estudo teórico, mas atividades que possibilitam o manuseio de materiais ou instrumentos de desenho, que propiciam ao aluno construir uma aprendizagem com autonomia

> Na busca de tornar mais efetiva a aprendizagem da geometria as obras têm recorrido a atividades de visualização e de construções geométricas com instrumentos de desenho ou com materiais para manuseio. Com isso, espera-se que o estudante não seja desestimulado por um ensino muito teórico e que aprenda com mais autonomia. No entanto, é necessário cuidado para garantir equilíbrio entre essas atividades experimentais, tão importantes, e a formação do raciocínio dedutivo no campo de geometria. (BRASIL, 2017, p. 36).

Neste sentido, o trabalho com atividades experimentais deve manter um equilíbrio com a formação do raciocínio do aluno, corroborando Pais (2006). Para o autor, o ensino de geometria deve ser intermediado por meio de quatro elementos: objetos, conceitos, desenhos e imagens mentais. Quando o professor realiza essas articulações, ele permite que o trabalho didático resulte na construção do conhecimento geométrico pelo aluno, porque:

> A aprendizagem da geometria recebe influência de três aspectos que devem ser considerados na condução da prática educativa: intuição, experiência e teoria. O significado do saber escolar pode ser ampliado através das articulações entre esses aspectos mediados pela linguagem, pelo uso de objetos materiais e por desenhos, visando à formação de imagens mentais associadas aos conceitos. (PAIS, 2006, p. 93).

Almouloud *et al.* (2004) atribuem o fracasso do trabalho com conteúdo geométrico em relação à formação do professor, ou seja, a formação inicial não propicia reflexão mais profunda sobre o ensino e aprendizagem dessa área da matemática e a formação continuada não atende os objetivos esperados em relação à geometria. A pesquisa destaca também as dificuldades no próprio sistema educativo, que deixa a cargo da escola definir os conteúdos que julgue importantes para a formação de seus alunos e os problemas geométricos propostos pelos livros didáticos que privilegiam resoluções algébricas, poucos exigindo raciocínio dedutivo ou demonstração.

Para Nunes (2010), é importante que o professor vivencie situações e reflexões sobre o ensino de geometria. Tais vivências contribuem para a formação do seu próprio pensamento geométrico, o autor ainda ressalta:

> É fato que professores, quando questionados a respeito do ensino de Geometria, solicitem cursos de extensão que priorizem reflexões de suas práticas pedagógicas, pois não se sentem preparados para trabalhar segundo as recomendações e orientações didáticas e pedagógicas dos PCNs. Falta-lhes clareza sobre como ensinar Geometria e/ou acerca de

> habilidades que possam ser desenvolvidas nesse nível de ensino. (NUNES, 2010, p. 111)

Com intuito de desenvolver estudos em torno das praxeologias dos conteúdos geométricos, realizamos uma formação continuada por meio de sistemas didáticos composta por grupos diferentes de professores de matemática da Educação Básica, totalizando nove micro-PEP, que ocorreram no período de setembro de 2016 a novembro de 2017, em que a pesquisadora em todos os sistemas desenvolvidos tinha papel inicial como orientadora dos estudos. Na sequência, apresentamos uma discussão sobre os planejamentos e execução dos micro-PEP, que tiveram, como aporte teórico/metodológico, o paradigma *questionamento do mundo* para que constituíssem, de fato, um percurso de estudo.

3.3 Planejamento e execução dos micro-PEP

A preparação e execução dos micro-PEP foram norteadas pelo paradigma *questionamento do mundo*, com intuito de que os professores pudessem dialogar, questionar, estudar e refletir sobre o ensino dos conteúdos geométricos, que eles pudessem ser ativos e participantes na execução dos PEP, não se configurando como meros receptores.

De fato, propor atividades norteadas por esse paradigma requer, como abordado no item 1.3 do capítulo I, o desenvolvimento de características de inquisição, ser herbatiano, procognitivo e exotérico (CHEVALLARD, 2012). Quaisquer que sejam os envolvidos no sistema didático, o processo de estudo é para todos e, para tanto, são necessárias algumas posturas, compreendendo que a pessoa não é obrigada a ter o conhecimento sobre tudo em sua volta. Porém, é necessário ter uma atitude receptiva para as questões a que são confrontadas, é preciso querer aprender e ter ainda a necessidade de buscar esses conhecimentos, entendendo que é um processo que não se esgota.

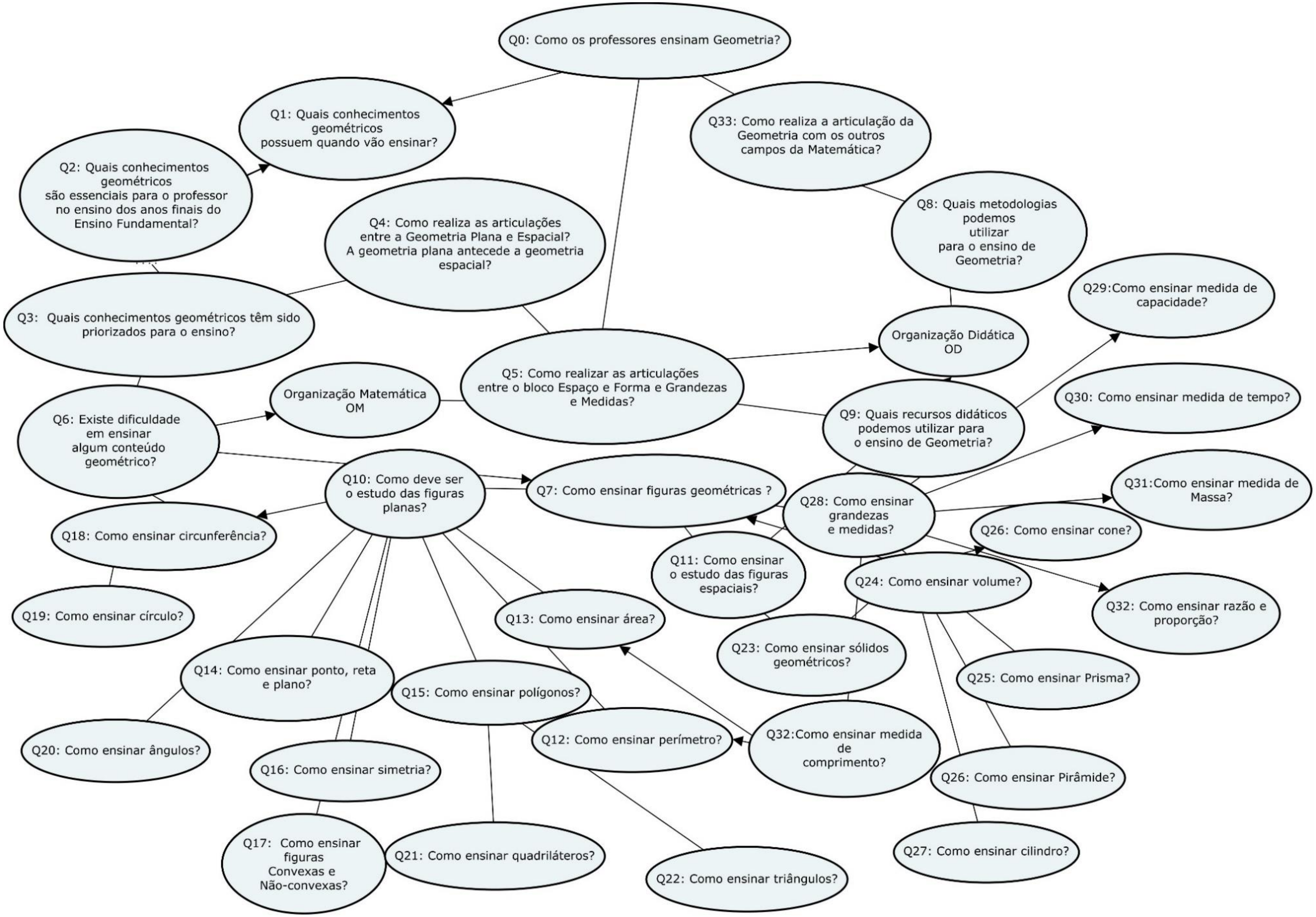
Assim, planejar um percurso que leve os envolvidos do sistema didático a essas características não é trivial. Antes de começar a desenvolver os micro-PEP, o primeiro encontro com o grupo de professores foi para a apresentação da nossa pesquisa e para levantar alguns questionamentos para conhecer sobre a relação dos saberes geométricos desses professores com a sua prática escolar e, principalmente, que eles pudessem explanar quais conteúdos geométricos gostariam de estudar.

Para Barquero, Bosch e Gascón (2011), na execução dos PEP, podem ocorrer diferentes ampliações resultantes dos modelos matemáticos considerados e diferentes desmembramentos de acordo com os envolvidos no percurso. Neste sentido, vale ressaltar que as questões Q geradoras dos percursos foram pensadas e construídas para esse grupo de professores, e que as respostas rotuladas $R_i^{\lozenge}$ e intermediárias R_i na constituição do M para a resposta $R^{\heartsuit}$ foram elaboradas pelos envolvidos no processo, podendo ter outros direcionamentos para grupos diferentes de professores. Pode ser que, para outro grupo de envolvidos nos sistemas didáticos, as questões Q não fossem desafiadoras.

Na organização geral de um PEP, que resulta na "construção de uma grande quantidade de conhecimento que delimita o mapa e os limites provisórios do 'território' do processo de estudo" (BARQUERO; BOSCH; GASCÓN, 2011, p. 568), podemos elencar *a priori* um mapa das possíveis trajetórias para o estudo da questão inicial, ao pensarmos no tempo didático (cronogênese) no desenvolvimento do percurso, temos a dialética questões-respostas (QR), na qual o percurso não é pré-estabelecido, porém, é realizado um estudo para compreender o poder de Q_0 em gerar novas questões.

No desenvolvimento da pesquisa, consideramos em uma possível trajetória de pesquisa, a partir da *Q_0: Como os professores ensinam Geometria?* Ao pensarmos numa estrutura de PEP – Formação de Professores (FP), tínhamos como foco o desenvolvimento de um percurso que propicia o estudo das OM e OD, que, conforme Chevallard (2007), estão interligadas. Assim, pensamos na seguinte trajetória inicial para o estudo e pesquisa dos conteúdos geométricos:

Figura 9 - Trajetória inicial dos PEP das OM e OD para o ensino de Geometria



Fonte: Elaborado pela pesquisadora

No entanto, vislumbramos que se tornaria inviável envolver um PEP – FP englobando a quantidade de OM e OD em torno dos conteúdos geométricos, visto que, para cada questão Q_0 à Q_{33}, estas são geradoras de outras questões, o que estaria ampliando ainda mais a trajetória inicial desse percurso. Assim, na execução do tempo didático (cronogênese), partimos do princípio que, após o desenvolvimento do primeiro PEP, os direcionamentos dos demais PEP seriam norteados pelos próprios professores participantes da pesquisa, de modo que, a partir das suas escolhas, iríamos direcionar para quais conteúdos estudar nas execuções dos PEP, bem como o tempo de estudo em torno de cada conteúdo.

Desse modo, elaboramos, a partir dos conteúdos propostos no Referencial Curricular do Estado/MS, um quadro (quadro 2) com os conteúdos geométricos, distribuídos nos bimestres e níveis escolares, para que os professores analisassem e identificassem (segundo as suas concepções) quais conteúdos são essenciais para serem trabalhados nos anos finais do ensino fundamental, procurando justificar/explicar o porquê de tais escolhas, bem como as relações entre os diferentes conceitos e blocos, de modo que, a partir disso, fossem definidos quais conteúdos iríamos estudar nos PEP:

Quadro 2 - Ementa dos conteúdos geométricos da SED-MS

Bloco: Espaço e Forma				
	Anos escolares			
Bimestres	**6º ano**	**7º ano**	**8º ano**	**9º ano**
1º	Ponto, reta e plano; Figuras planas.	Figuras planas; Sólidos Geométricos.	Ângulos opostos pelo vértice; Ângulos formados por duas retas paralelas e uma reta transversal .	Eixo de simetria; Mediana, altura e bissetriz.
2º	Polígonos.	Simetria; Ampliação e redução de figuras no plano.	Triângulos - Elementos - Congruência	Teorema de Tales
3º	Sólidos Geométricos; Retas paralelas e perpendiculares .	Ângulos; Propriedades do triângulo	Polígonos -Quadriláteros -Polígonos convexos e não convexos -Diagonais de polígonos.	Teorema de Pitágoras
4º	Ângulos	Circunferência e círculo; Mapas e plantas	Circunferência - Circunferência e círculo;	Volume do cilindro, cone. Pirâmide e prisma

			- Relação entre a circunferência e o seu raio e o diâmetro; - Arco de circunferência e ângulo central	
Bloco: Grandezas e Medidas				
	Anos escolares			
Bimestres	**6º ano**	**7º ano**	**8º ano**	**9º ano**
1º	Unidades de medida de tempo	Unidades de medida de massa	Unidades de medidas de comprimento; Equivalência e superfícies e perímetro e áreas de figuras planas.	Unidades de medidas de capacidade; Volume do cubo e paralelepípedo
2º	Área de superfície	Perímetro e área dos quadriláteros	Perímetro e área dos triângulos.	Razão e proporção
3º	Medidas de ângulo.	Volume.	Perímetro e Área de polígonos.	Sistema de unidade de medidas (comprimento, massa, capacidade e volume).
4º	Ângulos	Feixe de retas paralelas	Relação métrica do triângulo retângulo.	Relações métricas na circunferência

Fonte: Elaborado pela pesquisadora

No primeiro contato com os professores participantes da formação, estes não explanaram quais conteúdos de Geometria gostariam de iniciar o estudo, apesar de expressarem as suas experiências frente ao ensino de Geometria, como um conteúdo que praticamente não estudaram no ensino médio e que resultou em muita dificuldade para cursar a graduação. Enquanto orientadora, tinha que propor o estudo de um conteúdo que levasse esses professores a estudar e a repensar o modo como conduziam as suas aulas referentes aos conteúdos geométricos, amparados no paradigma *questionamento do mundo*. É importante ressaltar que o desenvolvimento do PEP não é basicamente reunir os professores e apresentar uma atividade, isso implica, anteriormente, um momento de planejamento das atividades, com muito estudo para que se caracterizassem como PEP, como relataremos no decorrer deste capítulo.

Assim, os nossos planejamentos dos micro-PEP emergem da seguinte problemática: *Como desenvolver processos de estudos (OM, OD), em torno da Geometria Euclidiana, em uma instituição I (I = formação continuada) para que os sujeitos de I possam construir, reconstruir, desenvolver e avaliar (OM, OD) para a instituição escolar I_E*? Desse modo, compreendemos que a formaçao continuada é uma instituição, visto que ela é criada por pessoas, implementada e organizada com conteúdos, ou seja, existem sistemas didáticos, com regras de funcionamento, com formadores e formandos, existindo todos os elementos para que possamos modelá-la como uma instituição.

Neste sentido, os pesquisadores, após estudo em torno de conteúdos que poderíamos iniciar os micro-PEP, optaram por comecar com “polígonos” por ser um conteúdo que os professores já possuíam os conhecimentos necessários para o seu ensino. Assim, consideramos que esse conteúdo poderia ser um pontencializador para desenvolver um PEP e acreditamos que ele faria com que os professores explanassem sobre as suas praxeologias mobilizadas em torno da Geometria. Cabe salientar que, somente para o desenvolvimento do primeiro micro-PEP, os pesquisadores escolheram o conteúdo geométrico a ser estudado. No decorrer dos demais, as escolhas partiram dos próprios professores participantes da pesquisa.

Cada micro-PEP era norteado por uma questão Q_i . De posse da questão, buscavámos, por meio dos livros didáticos, internet, livros, no dialógo entre os pesquisadores, propostas de atividades que impulsionassem a questão Q_i e que fossem desafiadoras para os professores, mas ao mesmo tempo algo que pudesse levar os professores a participar e resolver as atividades propostas e, principalmente, gerar outros questionamentos. Essa parte do planejamento é algo extremamente importante e ao mesmo tempo difícil, pois se, por um lado, propuséssemos atividades difíceis, desanimaríamos os professores e poderia não haver estudo (como dialogar sobre algo que se desconhece) e, por outro lado, se fossem atividades triviais, a formação não permitiria aos professores construir, reconstruir ou avaliar as suas praxeologias.

Durante cada planejamento, foi desenvolvido, seguindo os autores Barquero, Bosch e Gascón (2011), um mapa a priori de cada questão, amparado na dialética questões-respostas (QR), de modo a entender o poder da questão inicial em gerar outras questões, das possibilidades de gerar um percurso de estudo. Assim sendo, a construção do mapa é realizada a partir de questões, bem como de possíveis respostas, como veremos no tópico seguinte, a construção *a priori* de cada mapa do PEP antes de ser desenvolvido com o grupo de professores.

Desse modo, para cada micro-PEP, buscamos fazer um estudo minuscioso e, no desenvolvimento dos micro-PEP, a pesquisadora apresentava atividades e os professores disponibilizavam-se a analisá-las e ao mesmo tempo dialogavam sobre dificuldades na resolução das atividades, bem como sobre as possibilidades para aplicar as atividades em sala de aula, numa perspectiva de propor estudos dos conteúdos geométricos, de modo a levar o aluno à construção do conhecimento.

No total, obtivemos a concretização de nove micro-PEP, norteados pelas seguintes questões: Q_0= Como ensinar os conceitos de polígonos e, em particular, o de trapézio? Q_1= Como ensinar os conceitos de perímetro e área? Q_2 = Como ensinar o conceito de ângulo? Q_3= Como ensinar polígonos regulares? Q_4= Como ensinar simetria? Q_5= Como ensinar semelhança de triângulos e relações métricas do triângulo? Algumas questões geradoras nortearam mais de um micro-PEP e estes, apesar de possuírem a mesma questão geradora, tiveram direcionamentos diferentes conforme os professores participantes do sistema didático. Assim, desenvolvemos os seguintes PEP:

Quadro 3 – Micro-PEP desenvolvidos

Sistemas Didáticos - -PEP	X - Professores de Matemática	Q= {Q_0, Q_1, Q_3...} – praxeologias
S_1= {(x_1, x_2, x_4, x_5, x_6, x_7), Y, Q_0}	x_1, x_2, x_4, x_5, x_6, x_7 – 6 professores	Q_0= Como ensinar os conceitos de polígonos e, em particular o de trapézio?
S_2 = {(x_3, x_5), Y, Q_0}	x_3, x_5 – 2 professores	Q_0 = Como ensinar os conceitos de polígonos e, em particular o de trapézio?
S_3 = {(x_1, x_2, x_5, x_6), Y, Q_1}	x_1, x_2, x_5, x_6 – 4 professores	Q_1 = Como ensinar os conceitos de perímetro e área?
S_4 = {(x_1, x_2), Y, Q_2}	x_1, x_2 – 2 professores	Q_2= Como ensinar o conceito de ângulo?
S_5 = {(x_8, x_9, x_{10}, x_{11}), Y, Q_2}	x_8, x_9, x_{10}, x_{11} – 4 professores	Q_2= Como ensinar o conceito de ângulo?
S_6 = {(x_1, x_{10}), Y, Q_3}	x_1, x_{10} – 2 professores	Q_3= Como ensinar polígonos regulares?
S_7 = {(x_1, x_2, x_{12}), Y, Q_4}	x_1, x_2, x_{12} – 3 professores	Q_4= Como ensinar simetria?
S_8 = {(x_2, x_{12}, x_8, x_9), Y, Q_5}	x_2, x_{13}, x_8, x_9– 4 professores	Q_5 = Como ensinar semelhança de triângulos e relações métricas do triângulo?
S_9 = {(x_1, x_2), Y, Q_4}	x_1, x_2 – 2 professores	Q_4 = Como ensinar simetria?

Fonte: Elaborado pela pesquisadora

Cada elemento de $X_i = \{x_1, x_2, x_3...\}$ representa um professor de matemática, mas para preservar as suas identidades, e também para facilitar a descrição, nomeamos como os elementos $x_1, x_2, x_3, ..., x_{12}$. Para cada $S_1 = \{X_1, Y, Q_0\}$ a $S_9 = \{X_9, Y, Q_4\}$, os X_1 a X_9 representam os conjuntos de professores que participaram daquele sistema didático correspondente, e Q_0 a Q_4 correspondem às suas questões geradoras. Em todos os sistemas didáticos, a pesquisadora teve o papel de orientar os estudos, sendo representada pela letra Y.

Desenvolvemos estudos específicos das questões propostas, com diferentes participantes e, inicialmente, planejamos que as propostas de estudo de cada micro-PEP fossem encerradas no tempo disponível para a formação, no entanto, alguns percursos foram estendidos para mais de uma sessão e algumas respostas e questões (dos diferentes micro-PEP) sempre vinham à tona por meio de determinados participantes que acompanhavam os diferentes PEP, de tal modo que os estudos e discussões eram retomados, caso os professores solicitassem.

Vale ressaltar que, no decorrer desses estudos, alguns professores deixaram de participar, outros novos participantes apareceram, e ainda tivemos professores que estiverem presentes em apenas um encontro de estudo do PEP, devido às condições e restrições que lhes eram impostas. No capítulo de análise, fazemos uma discussão sobre as condições e restrições que pesam sobre os professores. Todos os sistemas didáticos tiveram duração variando de 1h30min a 3h de estudos e cada PEP, apesar de ter temáticas semelhantes, teve direcionamentos e estudos diferentes uns dos outros, conforme as discussões e estudos de cada professor participante.

O desenvolvimento e a análise dos PEP tiveram, como aporte teórico e metodológico, a Teoria Antropológica do Didático (TAD). Para tanto, planejamos os PEP, buscando entender a relação institucional do objeto com a instituição $R_I(O)$, assumimos a formação continuada como sendo a nossa instituição I (I= formação continuada), para compreender as relações dos professores X (X= sujeitos) com os diferentes saberes (não somente matemáticos) que perpassaram as discussões e estudos realizados no desenvolvimento dos micro-PEP. Nessa vertente, temos que o objeto (O) de estudo da nossa pesquisa é o conjunto de todos os objetos que compõem as práticas escolares e seu entorno, discutidos no decorrer da formação, logo analisamos as $R_I(O)$, R(X, O), R(X, R(I, O); R(I, R(X, O) com foco nas desestabilidades ou alterações praxeológicas dos professores por meio do PEP, bem como as condições e restrições impostas.

3.4 - Descrição Praxeológica dos micro-PEP

Os SD vão modelar as intenções didáticas, que, na nossa pesquisa, estão focadas nos conceitos geométricos, em torno das questões Q_0, Q_1, Q_2, Q_3, Q_4, e Q_5, que representam as questões geratrizes ou norteadoras de cada micro-PEP desenvolvido. Para o planejamento de cada micro-PEP, recorremos ao guia do livro didático do ensino fundamental anos finais, do Programa Nacional do Livro Didático (PNLD), Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) e algumas pesquisas desenvolvidas em torno das questões geradoras Q = { Q_0, Q_1, Q_2, Q_3, Q_4, e Q_5} dos conteúdos geométricos estudados, para que cada questão pudesse gerar outras questões. Assim, após os conteúdos definidos pelos participantes da formação, desenvolvíamos o planejamento e elaboração das atividades, e apresentávamos aos professores para que, por meio de tais atividades, impulsionassem o percurso, e os professores buscariam as respostas explanando as suas praxeologias.

No planejamento de cada PEP, conforme os autores Barquero, Bosch e Gascón (2011), elencamos, a partir do conjunto Q = {Q_0, Q_1, Q_2, Q_3, Q_4, e Q_5, }, uma mapa *a priori* de cada questão, amparado na dialética questões-respostas (QR), com o intuito de visualizar o poder das questões Q em gerar novas questões. Na dialética QR, as questões Q são estudadas e as respostas $R_i^{\lozenge}$ rotuladas (são algumas respostas já prontas para as questões levantadas) são ferramentas para serem inseridas no meio para o percurso de estudos, por sua vez, as respostas R_i intermediárias são as respostas desenvolvidas durante o sistema didático, nas quais o percurso instiga o levantamento de novas questões Qj, alimentando o processo do percurso de estudo e pesquisa. A seguir, visualizamos o mapa QR com as suas respectivas respostas $R_i^{\lozenge}$ para cada sistema didático desenvolvido.

3.4.1 Sessão 1: S_1 = {X_1, Y, Q_0} e Sessão 2: S_2 = {X_2, Y, Q_0}

Conhecer os conceitos geométricos é essencial para os professores que vão ensinar Geometria, no entanto, muitos amparam-se nas definições apresentadas pelos livros didáticos, sem observar detalhes dos conceitos abordados, talvez por acreditarem que a Matemática possui uma linguagem universal, exata e única. O desenvolvimento do S_1 teve como propósito um estudo em torno da questão *Q_0 = Como ensinar os conceitos de* *polígonos e, em particular, o de trapézio?* Teve como propósito de fazer com que os professores pudessem refletir sobre Organizações Matemáticas (OM) e Organizações Didáticas (OD) desse conteúdo, visto que, esses conceitos são divergentes quando apresentados em diferentes livros didáticos, como pode ser observado na atividade apresentada para o desenvolvimento do S_1 que se encontra no anexo 3.

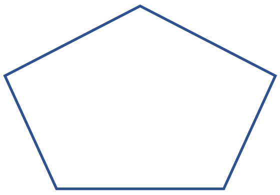
No Guia do livro didático do Ensino Fundamental Anos Finais, do Programa Nacional do Livro Didático (BRASIL, 2017), a Geometria para esse nível tem como propósito atingir dois objetivos principais: "O primeiro é consolidar, ampliar e aprofundar a compreensão dos estudantes sobre os modelos geométricos do espaço em que vivemos. O segundo é iniciar o desenvolvimento do raciocínio lógico-dedutivo, acessível à faixa etária, para validação de propriedades dos modelos geométricos estudados" (BRASIL, 2017, p. 36). De um modo geral, conforme o Guia do PNLD, Brasil (2017), as coleções dos livros didáticos estão conseguindo atingir os objetivos expostos, no entanto, existem algumas falhas ainda para serem superadas.

A maioria dos livros didáticos faz uma associação das figuras geométricas espaciais com as figuras planas e os objetos existentes no mundo real, no sentido de explorar e analisar algumas propriedades dessas figuras, o que é muito elogiado pelos avaliadores dos livros didáticos. No entanto, são necessárias algumas observações quanto a isso, no que diz respeito às nomenclaturas desses sólidos. Ao nomear os sólidos geométricos, por exemplo, é necessário especificar "tridimensional (um cubo "maciço"); bidimensional (a superfície composta por suas faces); ou unidimensional (a linha quebrada formada por suas arestas) " (BRASIL, 2017, p. 36).

Com relação ao ensino de polígonos, o guia aponta que ao iniciar um estudo mais sistemático da Geometria existem ainda vestígios que reduz o ensino de polígonos a nomenclaturas e classificações, que devem ser memorizadas. Todavia, o guia aponta a necessidade da memorização na matemática, devendo ser dosado com outras competências que surgem com o estudo da matemática.

No Guia do PNLD, Brasil (2017), são comentadas as inadequações dos livros quanto à definição de polígono e explica-se a divergência entre os conceitos, bem como a necessidade de esclarecer qual definição o livro está assumindo:

> Por vezes, uma inadequação encontrada nos livros didáticos é relativa às definições de polígonos e de poliedros. É fácil definir o que é um polígono, e não há como fugir à definição tradicional: uma curva fechada simples formada somente por segmentos de reta, os seus lados:



> A definição dada acima é a adotada na Matemática. Dela resulta que um polígono separa o plano em duas regiões, o seu interior e o seu exterior. No ensino escolar de geometria é frequente adotar o termo “polígono” tanto conforme a definição acima, quanto para designar a reunião da linha poligonal com sua região interior. Muitas vezes, essa duplicidade de definição pode gerar dificuldades e é necessário esclarecer qual delas está sendo adotada, em cada caso. (BRASIL, 2017, p. 41)

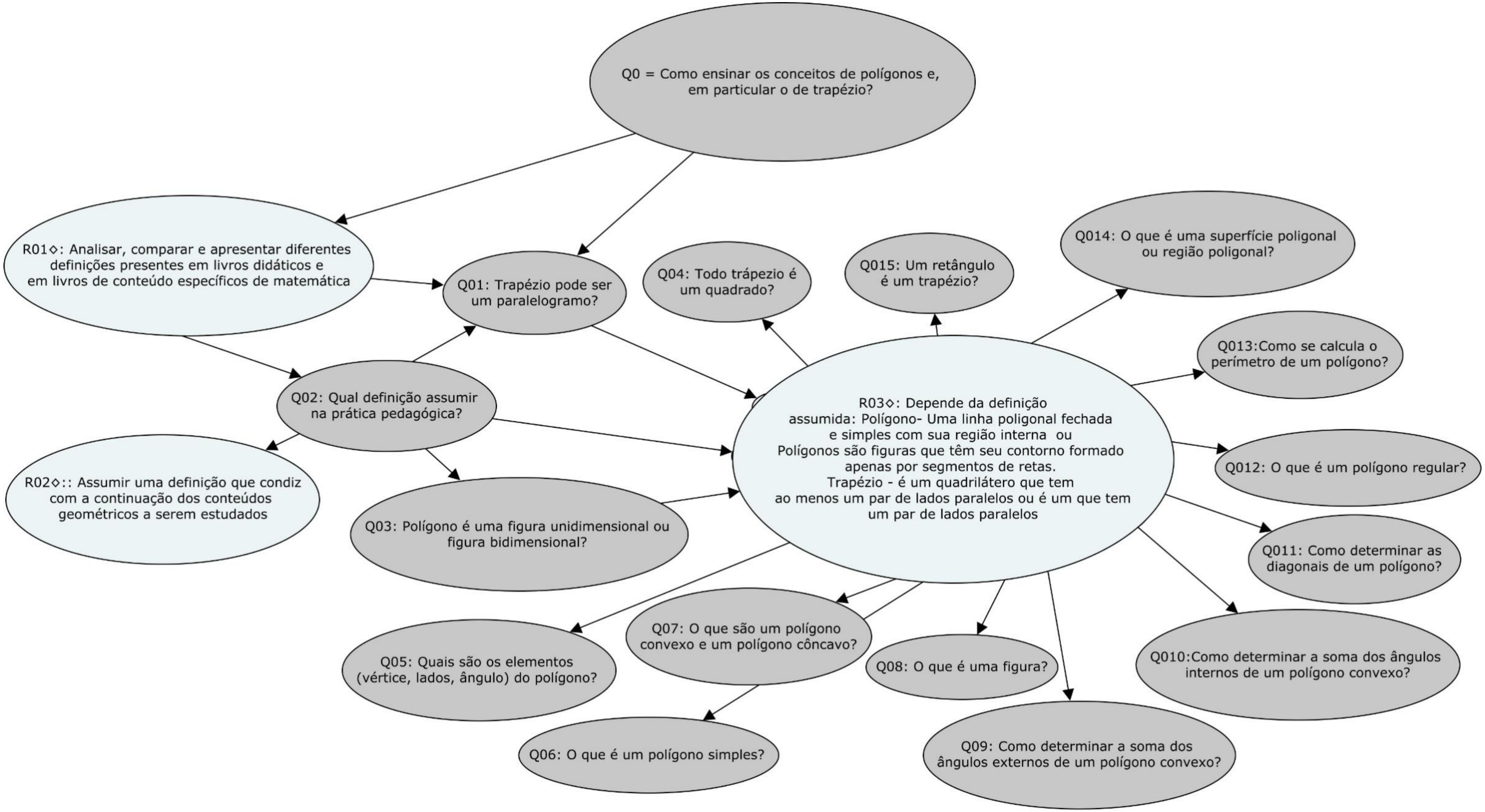
Dessa maneira, o Guia do PNLD, Brasil (2017), ao apontar as divergências manifestadas pela duplicidade de definição dos polígonos, enfatiza que, ao trabalhar o conceito de perímetro de um polígono, trata-se do comprimento da linha poligonal e a medida da região interior do polígono, como sendo a área que está em foco. Ademais, refere que tais flexibilidades na linguagem desses conceitos devem ser exploradas como algo natural e que não devem ser empecilhos para a aprendizagem.

Ao desenvolver a atividade com os professores, a intenção era que eles comparassem as definições de forma que identificassem diferenças entre elas e quais as consequências na escolha de um determinado conceito em relação ao estudo de polígono e de outros conceitos relacionados, como os de área e perímetro, bem como as relações entre o trapézio e os demais quadriláteros, particularmente os paralelogramos.

Certamente, a escolha de uma definição implica consequências no decorrer do ensino desses conceitos, ou seja, dependerá como o professor compreende matematicamente esses conceitos, como abordaria tais conceitos, diante de uma atividade. O objetivo do S_1, a ser desenvolvido em torno dessa atividade, é entender as OM e OD mobilizadas pelos professores, envolvendo esses conceitos geométricos, visto que este será o primeiro estudo da formação continuada, bem como compreender a sua postura de ensino ao lidar com conceituações conflitantes, como as definições apresentadas.

Assim, ao apresentar a questão Q_0 = *Como ensinar os conceitos de polígonos e, em particular o de trapézio?* a intenção é que os professores desenvolvam um PEP, um percurso de estudo por meio da Q_0 e que possam levantar outras questões de modo a encontrar uma resposta para a questão levantada. Desse modo, com o aporte teórico da TAD, desenvolvemos a seguinte dialética QR, conforme mapa a seguir:

Figura 10 - Mapa QR do PEP - S_1



Fonte: Elaborado pela pesquisadora

No primeiro encontro com os professores, não tivemos a intenção de desenvolver nenhum estudo específico. Nesse primeiro contato, conversamos de uma forma global sobre o ensino de Geometria, quando cada um relatou as experiências vivenciadas em torno dos conteúdos geométricos, tanto como professores, quanto alunos da Educação Básica. Após essa primeira conversa, realizamos o S_1 que analisaremos no próximo capítulo por meio da TAD, identificando as OM e OD mobilizadas pelos professores, bem como as condições e restrições que são impostas diretamente nessas praxeologias. Para esse micro PEP - S_1, contamos com a participação de seis professores de Matemática, todos atuantes na Educação Básica.

Na incursão do PEP - $S_{1,}$ dialogamos com os professores, deixando claro que a proposta da formação continuada seria um momento de discussão, diálogo e, principalmente, de um estudo em torno dos conteúdos geométricos, sendo que todos tinham total liberdade para sugerir o trabalho de qualquer outro conteúdo geométrico, mas, como a formação continuada estava vinculada à pesquisa de doutoramento, tínhamos que delimitar os temas, focando alguns conteúdos geométricos e possibilidades de abordagens deles.

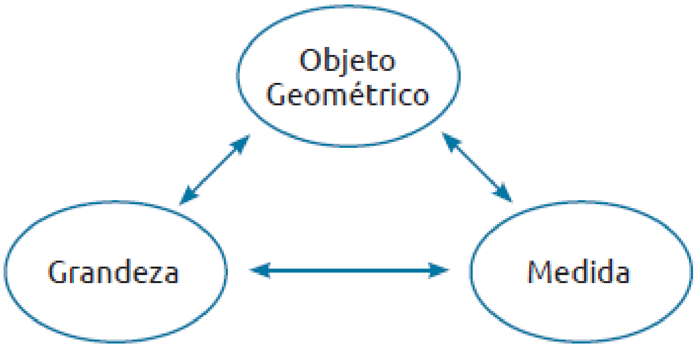
Como na execução do PEP - S_1, não concluímos as discussões realizadas em torno dos conceitos estudados, continuamos, no PEP - S_2, o estudo do mesmo conteúdo, conforme mapa QR do S_1 (figura 10). Entretanto, dos professores integrantes do S_1, somente o professor x_5 participou das duas sessões dos PEP que transcorreram sobre o mesmo conteúdo do PEP - S_1 e PEP – S_2 e, para o sistema $S_{2,}$ contamos com a presença de apenas dois professores x_3 e x_5.

3.4.2 Sessão 3: $S_3 = \{X_3, Y, Q_1\}$

Para dar continuidade aos PEP, vimos que, tanto no S_1 como $S_{2,}$ prevaleceu nas discussões, os conteúdos de perímetro e área, porém, apesar das discussões desses sistemas perpassarem os estudos desses conceitos, percebemos a necessidade de entender melhor as praxeologias desses professores em torno dos referidos conceitos. Para tanto, selecionamos a atividade (no anexo), na qual os professores tinham que realizar uma análise da situação didática, justificando as suas respostas.

Ao discutir grandezas geométricas, o Guia do PNLD, Brasil (2017) apresenta, primeiramente, um estudo teórico, enfatizando que, na didática das grandezas geométricas, é necessário considerar três componentes: “o objeto geométrico, a grandeza a ele associada e a medida dessa grandeza, obtida como resultado de um processo de medição” (BRASIL, 2017, p. 42). Além disso, ele apresenta o esquema (BRASIL, 2017, p. 42):

Figura 11- Grandezas geométricas



Fonte: BRASIL (2017, p. 42)

Em continuidade, explica que o “objeto geométrico” é uma entidade do mundo físico, como também uma figura geométrica, ou ainda uma representação geométrica, acrescendo que “figura geométrica” expressa um conceito matemático tendo como base outros conceitos matemáticos. Para ilustrar essa relação, esclarece que a grandeza área pode estar associada a um objeto matemático, como o conceito matemático de retângulo (medida da superfície).

Esse estudo teórico ressalta as distinções e ao mesmo tempo as interligações entre esses componentes das grandezas geométricas, pois, de fato, a grandeza área não é um objeto geométrico, visto que uma mesma área pode estar associada a diferentes superfícies planas e, ademais, não pode ser considerada uma medida (número), uma vez que podemos medir uma mesma superfície plana com diferentes unidades de áreas, que são medidas diferentes (BRASIL, 2017).

Desse modo, no estudo dos conceitos de área e perímetro, é importante que os alunos visualizem que um mesmo objeto geométrico pode ser relacionado com diferentes grandezas. Ao considerar uma superfície plana na qual o contorno seja uma curva simples e fechada, com comprimento de medida finita, podemos relacionar, nessa superfície, duas grandezas: sua área e o perímetro da superfície, que é o comprimento do seu contorno.

Segundo o Guia do PNLD, Brasil (2017), os livros didáticos aprovados ainda possuem limitações no desenvolvimento desses conteúdos. Cumpre agregar:

> • há uma tendência a definir perímetro somente para superfícies planas poligonais. É o que ocorre quando se define perímetro como ‘a soma dos lados de uma figura plana’;
> • em geral, não se identifica o comprimento de uma circunferência como o perímetro do círculo correspondente;
> • são raras as atividades que visam à distinção entre área e perímetro de uma superfície. (BRASIL, 2017, p. 45)

Nesse cenário, fica explícita a necessidade de explorar atividades que façam a distinção entre área e perímetro de uma superfície, visto que existem inúmeras atividades que possibilitam tal diferença, como solicitar aos alunos que construam superfícies planas de mesma área, com medidas de perímetro diferentes, ou ainda que modifiquem a superfície para uma maior área e menor perímetro.

Os PCN (1998) já ressaltavam a importância de explorar tais distinções, visto que muitos alunos fazem relações errôneas entre esses conteúdos - “as figuras de maior área possuem maior perímetro”, ressaltando:

> Raramente os alunos são colocados ante situações-problema em que as duas noções estejam presentes. Variando as situações propostas (comparar duas figuras que tenham perímetros iguais e áreas diferentes ou que tenham áreas iguais e perímetros diferentes; duas figuras de modo que uma tenha maior perímetro e menor área que a outra ou maior perímetro e maior área) e solicitando aos alunos que construam figuras em que essas situações possam ser observadas, cria-se a possibilidade para que compreendam os conceitos de área e perímetro de forma mais consistente. (BRASIL, 1998, p. 131).

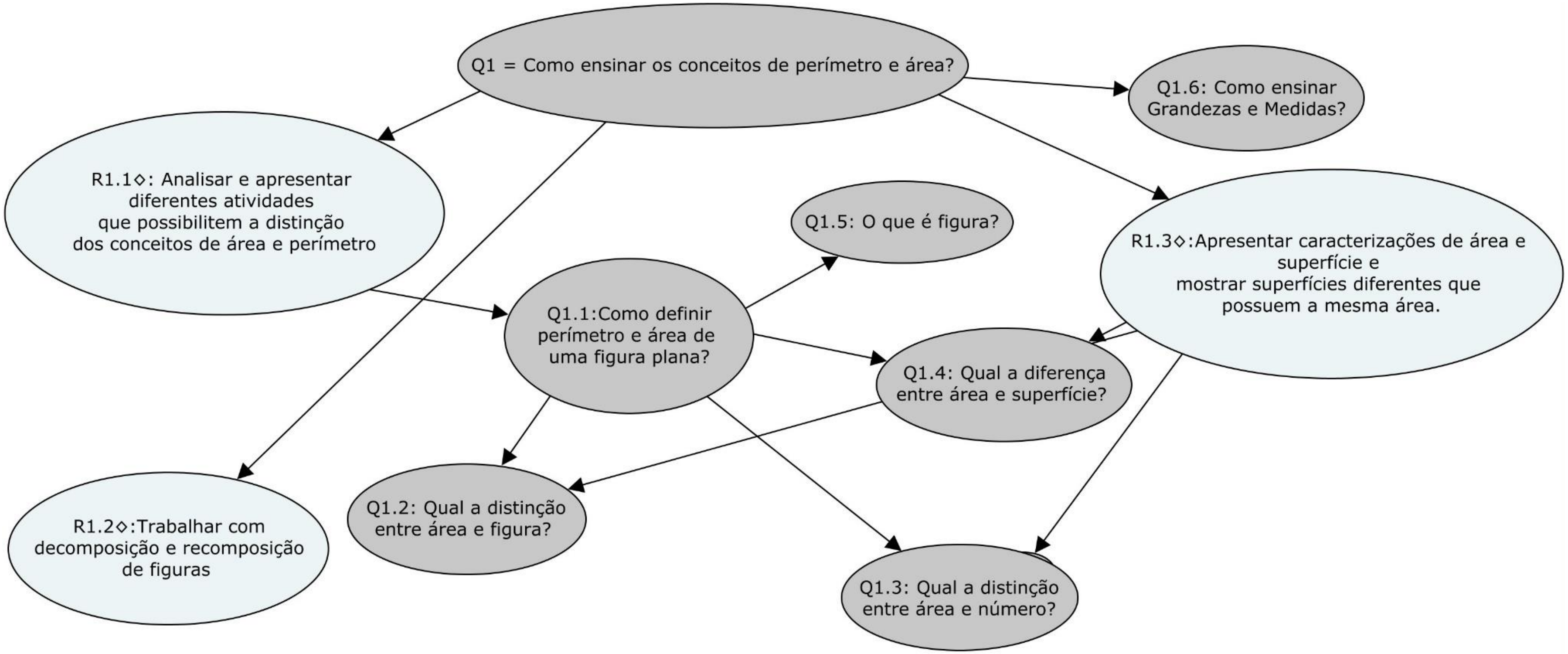
Neste sentido, o Guia do PNLD, Brasil (2017) tem apontado a necessidade de que os alunos visualizem que a grandeza não é apenas um número obtido a partir do processo de medição, ao contrário, a grandeza é resultado do par, número e unidade de medida. Tal situação de grandeza como apenas um número pode ser observada, segundo o Guia do PNLD, Brasil (2017), em algumas coleções dos livros didáticos avaliadas, por exemplo, quando apresentam o cálculo de uma área determinada por “A = 3 x 6 = 18; e A = 3 x 6 = 18 cm^{2}” (BRASIL, 2017, p. 44), induzindo o aluno a pensar que grandeza é um número, sendo que, em ambas, as representações não estão apropriadas.

De acordo com os PCN (1998), uma preocupação com o ensino de área e perímetro dá-se em relação ao uso abusivo das fórmulas, em que muitos alunos aprendem de modo mecânico os conceitos e acabam por aplicá-los sem nenhuma reflexão ou aprendizagem do conceito e, posteriormente, a isso esquecem as fórmulas decoradas que foram apenas utilizadas nas provas escritas. Assim, os PCN apontam a necessidade de abordar esses conceitos por meio de alguns materiais:

> O trabalho com áreas deve apoiar-se em procedimentos que favoreçam a compreensão das noções envolvidas, como obter a área pela composição e decomposição de figuras cuja área eles já sabem calcular (recortes e sobreposição de figuras) por procedimentos de contagem (papel quadriculado, ladrilhamento), por estimativas e aproximações. (BRASIL, 1998, p. 131)

Assim sendo, para a finalidade de explorar situações que explicitem as diferenças entre área e perímetro, bem como, um estudo aprofundado desses conceitos, temos desenvolvido o micro-PEP - S_3, sendo que os estudos em torno da atividade permitiram aos professores explanar as suas praxeologias matemáticas em torno desses conteúdos, argumentando as suas escolhas metodológicas no ensino em sala de aula, o que veremos mais detalhes no capítulo seguinte. Assim, desenvolvemos o seguinte mapa QR da questão Q_1 = *Como ensinar os conceitos de perímetro e área?* do PEP - S_3:

Figura 12 - Mapa QR do PEP - S_3



Fonte: Elaborado pela pesquisadora

Os mapas a priori, possibilitaram ao orientador compreender se as questões geradoras Q_i de cada sistema didático eram "fortes" o suficiente para gerar outras questões. De posse do mapa, o orientador do estudo planejava atividades de modo a conduzir aos questionamentos pré estabelecidos, podendo ocorrer ou não, conforme os participantes dos sistemas didáticos.

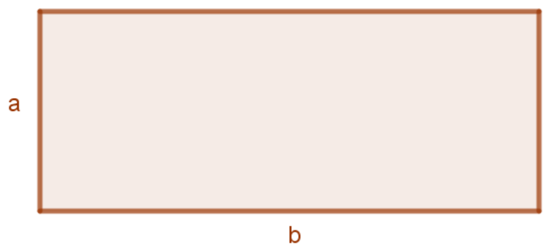
Como, na atividade, os professores teriam que realizar discussões em torno dos questionamentos levantados, dizendo se tais afirmações eram falsas ou verdadeiras, sempre com justificativa de suas escolhas tecemos breves comentários sobre cada uma delas.

A afirmação: "Dois retângulos que têm o mesmo perímetro têm a mesma área" pode ser analisada por meio daquele problema clássico da construção de um galinheiro retangular, cujo comprimento da cerca (ou da tela para cercá-lo) é constante (fixa) em 20 metros, por exemplo. O problema consiste em encontrar, dentre os galinheiros retangulares possíveis, aquele que tem maior área. Por exemplo, um galinheiro de 1m por 9 m não satisfaz por ser muito estreito e, assim, analisar outras medidas. Essa resolução empírica pode ser realizada com alunos do 5º ou 6º anos do EF, mas, no final do Fundamental II ou Ensino Médio, essa atividade poderia ser realizada explorando funções quadráticas e sua simetria, observando que o valor máximo é o ponto médio entre as raízes, pois a concavidade do gráfico é voltada para baixo. Na universidade, esse pode ser um bom exemplo de aplicação da derivada, pois, no ponto de máximo a derivada é expressa por: $A'(x) = 0$. É claro que a afirmação é falsa.

A afirmação: "Dois retângulos que têm a mesma área têm o mesmo perímetro" pode ser analisada por meio da divisão (ou corte) de um retângulo em dois retângulos iguais (congruentes), os quais devem ser justapostos e vão sendo formados outros retângulos com áreas iguais, porém, com perímetros diferentes, confirmando que a afirmação é falsa. A afirmação: "Se aumentarmos o perímetro de um retângulo sua área também aumenta" é falsa e a resolução apresentada para justificar a afirmação anterior serve como resposta. O mesmo acontece com a afirmação "Se aumentarmos a área de um retângulo seu perímetro também aumenta", que é falsa e os exemplos anteriores justificam a resposta.

Já a afirmação: "Todos os retângulos que têm 36 cm^2 de área têm perímetro maior ou igual a 24 cm" é verdadeira e exige um pouco mais de conhecimento matemático ou de modelagem matemática para justificá-lo. A resposta pode ser dada por meio da seguinte demonstração:

Vamos analisar o caso genérico:



Sabe-se que os retângulos têm área 36 cm^2, ou seja, $A = a \times b = 36\ cm^2$, logo, $b = \frac{36cm^2}{a}$

Ambos os lados medem a e b, então o perímetro $p = 2a + 2b$. Como $b = \frac{36}{a}$, p pode ser expresso em função de a, logo, $p = 2a + 2\times\left(\frac{36}{a}\right)$, $p = 2a + \frac{72}{a}$, assim, $p(a) = 2a + \frac{72}{a}$ e queremos identificar para quais valores de a, $p(a) \geq 24\ cm$. Assim, $2a^2 - 24a + 72 \geq 0$, ou seja, $a^2 - 12a + 36 \geq 0 \rightarrow (a-6)^2 \geq 0$. Logo, $p(a) \geq 24\ cm$, para qualquer $a \in \mathbb{R}$, em particular para qualquer $a \geq 0$.

Por fim, a afirmação: "Para todo retângulo existe um outro que tem a mesma área, mas com perímetro maior" também é verdadeira e a resposta da segunda afirmação também serve para justificá-la.

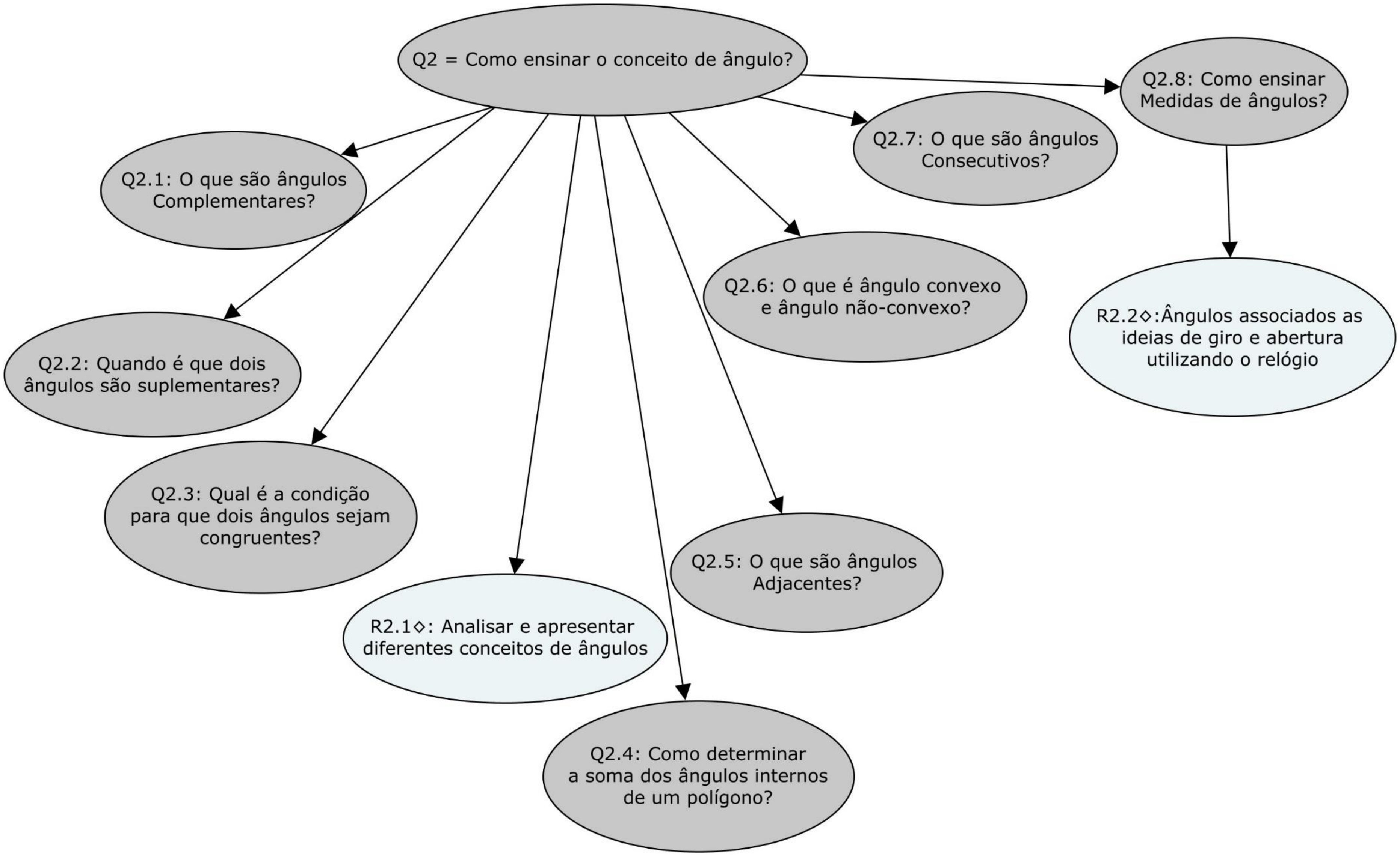
Nesse terceiro PEP desenvolvido, contamos com a presença de quatro professores, e a atividade foi desenvolvida para que os professores explanassem as suas praxeologias matemáticas e didáticas, se concordavam ou não com as afirmações levantadas no decorrer da atividade, sempre as justificando.

3.4.3 Sessão 4: $S_4 = \{X_4, Y, Q_2\}$ e Sessão 5: $S_5 = \{X_5, Y, Q_2\}$

Na condução da formação continuada, conforme afirmamos anteriormente, sempre instigamos os professores a exporem sugestões, conteúdos relacionados à Geometria para a continuidade dos micro-PEP, de modo que o estudo propiciado nas formações não fosse apenas imposto por Y. Das opiniões expostas, os professores explanavam a necessidade na formação para estudar o conceito de ângulo. Segundo os professores, esse conteúdo é abordado em diferentes anos escolares e seria um dos conceitos principais ao estudar os conteúdos geométricos.

Partindo dessas sugestões, para o PEP - S_4, desenvolvemos a atividade (no anexo) para que os professores pudessem identificar os ângulos das figuras e, em seguida, abordamos diferentes definições para o ângulo, compreendendo que o conceito de ângulo é um conceito multifacetado, pois podem ser encontradas diferentes definições em livros didáticos. Os autores Vianna e Cury (2001) ressaltam que grande parte dos livros não explicita uma definição para ângulo: “Muitas vezes o autor nos diz: ‘vamos trabalhar agora com o conceito de ângulo’, mas o que vem em seguida não é um ‘trabalho’ e sim uma frase, geralmente curta, seguida de observações quanto à notação” (VIANNA. CURY, 2001, p. 1). Para a questão Q_2, partimos do seguinte mapa QR:

Figura 13 - Mapa QR PEP - S_4 e PEP - S_5



Fonte: Elaborado pela pesquisadora

Para os autores Vianna e Cury (2001), o conceito de ângulo "está condicionado pelos interesses daquele que fornece a definição. Uma das possibilidades para que os professores percebam isso e tratem com seus alunos, consiste em recorrer a um certo aspecto da história" (VIANNA; CURY, 2001, p. 1). Ademais, orientam sobre a importância dos professores de matemática analisarem os livros didáticos, para que eles possam adequar as suas práticas de acordo com as demandas e dúvidas de seus alunos. Os autores pontuam:

> [...] Os professores de Matemática devem ser capazes de ler livros didáticos e fazer críticas circunstanciadas das respectivas propostas pedagógicas, tendo argumentos para dialogar com os pais de alunos e com as Direções de escolas, justificando suas escolhas. Dessa forma, é importante que, em aulas de cursos de Licenciatura em Matemática, sejam analisados os livros didáticos disponíveis no mercado, para avaliação da apresentação dos conceitos matemáticos sob vários pontos de vista: correção, adequação metodológica à série para a qual estão sendo propostos e pertinência do enfoque adotado quanto aos interesses e motivações da faixa etária a que o livro se destina. (VIANNA; CURY, 2001, p. 1).

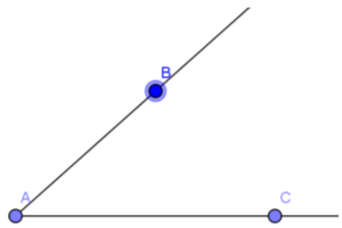
Na execução do PEP – S_4, por estar sendo realizado em um laboratório de matemática, os professores tiveram a oportunidade de pesquisar as definições de ângulos em outros livros didáticos disponíveis no laboratório, para além das definições apresentadas na atividade. Para esse PEP, contamos com a presença de duas professoras. Neste particular, cumpre esclarecer que sempre tivemos a preocupação de ter, no mínimo, duas pessoas, para que pudesse haver uma discussão entre os pares.

Após a apresentação e discussão dos conceitos da atividade e estudo por parte dos professores do PEP – S_4, para o sistema didático PEP – S_5, envolvendo o conteúdo de ângulos, desenvolvemos uma proposta de estudo orientada pelas dúvidas surgidas no PEP – S_4, como segue. Iniciamos as discussões pela definição de Moise e Downs:

> Se duas semirretas tiverem a mesma origem, mas não estiverem contidas na mesma reta, então a sua reunião é um ângulo. As duas semirretas são chamadas lados do ângulo e a origem comum das semirretas é chamada vértice do ângulo. Se as semirretas forem $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$, o ângulo será representado por $\angle BAC$ ou $\angle CAB$. (MOISE, DOWNS (1986, p. 67):

Nessa definição, não estão sendo considerados, como ângulos, os de medida 0º e 180º, pois o autor trabalha a definição de ângulo e a definição de triângulo na sequência, sendo que os ângulos de medidas 0º e 180º não aparecem nesse assunto, pois os ângulos do triângulo nunca são nulos ou rasos).

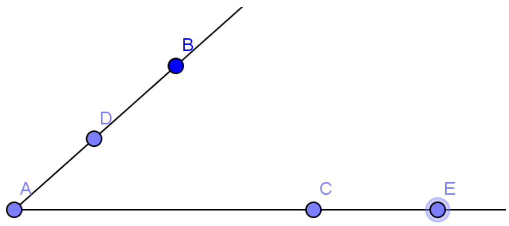
Figura 14 - Exemplo de ângulo



Fonte: Elaborado pela pesquisadora

Não faz diferença qual lado é mencionado em primeiro lugar. De fato, é indiferente qual ponto você refere em cada um dos dois lados. O ângulo na figura a seguir poderia igualmente ser denotado por $\angle BAC, \angle DAE, \angle BAE$ e assim por diante. Para abreviar, podemos escrever simplesmente $\angle A$, se estiver claro quais são os lados do ângulo.

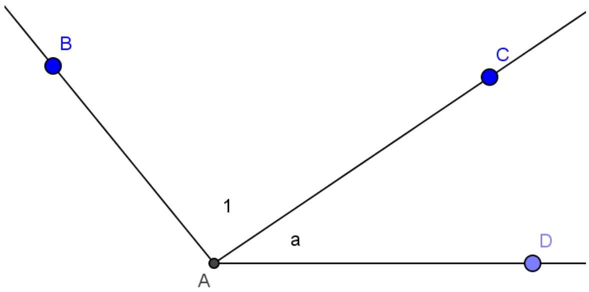
Figura 15 - Exemplo de ângulo



Fonte: Elaborado pela pesquisadora

Entre os exemplos de ângulos e suas representações, temos algumas como:

Figura 16 - Exemplo de ângulo

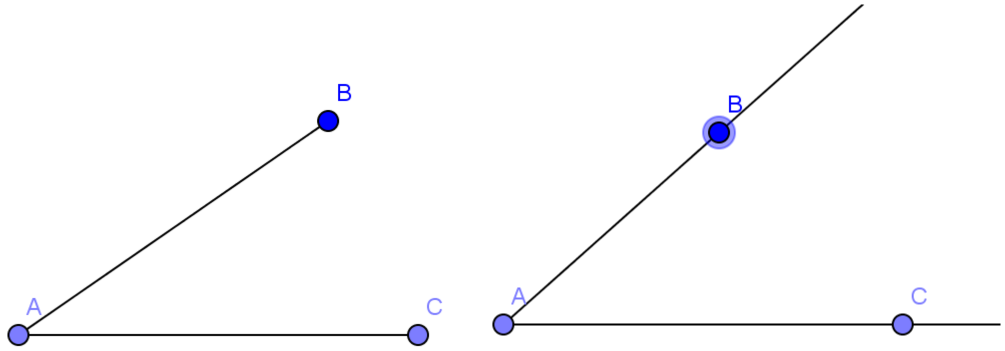


Fonte: Elaborado pela pesquisadora

Neste caso, podemos escrever números e letras dentro dos ângulos, de modo que podemos escrever $\angle$ 1 ao invés de $\angle BAC, \angle, a$ invés de$\angle CAD$, e assim por diante.

Os lados de um ângulo são semirretas, não segmentos. Portanto, a figura à esquerda, abaixo, não é um ângulo.

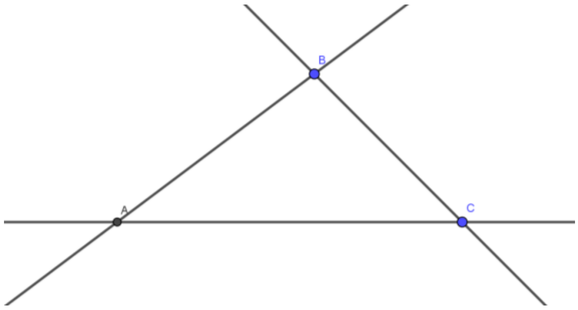
Figura 17 - Figura que não representa ângulo e figura que representa um ângulo



Fonte: Elaborado pela pesquisadora

É claro que a figura determina um ângulo, como indicado à direita. (Da mesma maneira, um segmento determina uma reta embora não seja uma reta). Aqui, é interessante mencionar que, quando desenhamos um triângulo, não desenhamos necessariamente os seus ângulos. Se quisermos desenhar os ângulos, devemos prolongar os lados.

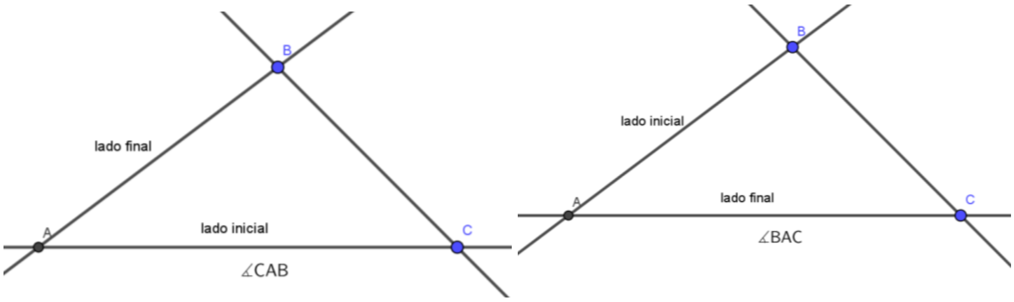
Figura 18 - Exemplo de ângulos do triângulo



Fonte: Elaborado pela pesquisadora

Assumindo a definição de que ângulos são simplesmente conjuntos de pontos (pois existem outras definições), a ordem em que os lados do ângulo são mencionados não faz diferença. Essa é a forma mais simples da ideia de um ângulo. No entanto, ao estudar trigonometria, a ideia de ângulo aparecerá de uma forma diferente. Em trigonometria, fará a diferença qual lado do ângulo é mencionado em primeiro lugar:

Figura 19 - Exemplos de ângulo na Trigonometria



Fonte: Elaborado pela pesquisadora

Isto é, em trigonometria, fazemos a distinção entre $\angle CAB$ e $\angle BAC$. Em $\angle CAB, \overrightarrow{AC}$ é o lado inicial e $\overrightarrow{AB}$ é o lado final. No $\angle BAC, \overrightarrow{AB}$ é o lado inicial e $\overrightarrow{AC}$ é o lado final. Ângulos assim são chamados ângulos orientados. Quando usamos ângulos orientados, admitimos a existência de "ângulos nulos" e "ângulos rasos". Na sequência, trabalhamos com as medidas de ângulos.

Na execução do PEP – S_5, contávamos, pelo menos, com a participação das professoras x_1 e x_2, participantes do PEP – S_4, para darmos continuidade no percurso de estudo iniciado sobre o conceito de ângulo. No entanto, essas professoras não se fizeram presentes e, para o PEP – S_5, contamos com a participação de quatro professoras (x_8, x_9, x_{10} e x_{11}). Entre essas participantes, as professoras x_{10} e x_{11} estavam participando pela primeira vez na formação, assim sendo, ao invés de iniciarmos com a discussão prevista para o PEP – S_5 (foi desenvolvido em uma outra sessão), retomamos novamente as discussões conceituais sobre ângulos do PEP – S_4. Dessa forma, como expresso anteriormente, a rotatividade dos participantes fez com que cada sessão fosse um micropercurso e, na sessão cinco, retomamos as discussões sobre o conceito de ângulo por ser um sistema didático constituído por outros professores que não estiveram presentes na sessão quatro.

3.4.4 Sessão 6: $S_6 = \{X_6, Y, Q_3\}$

Como já mencionamos, cada sessão representa um micro-PEP desenvolvido, constituído por um sistema didático, no caso da sessão seis do sistema $S_6 = \{X_6, Y, Q_3\}$. A questão geradora desse percurso é a questão *Q_3: Como ensinar polígonos regulares?* A proposta para enfocar essa questão partiu de duas professoras que começariam a trabalhar esse conteúdo em sala de aula e solicitaram que fossem estudados. Vale ressaltar que todos os conteúdos geométricos estudados nos PEP, com exceção do PEP – S_1, foram escolhidos pelos professores participantes da formação.

A partir da questão geradora, a orientadora de estudo (Y) coordena uma discussão em torno da questão, de modo a elaborar uma atividade ou uma situação-problema que possa gerar um percurso de estudo e pesquisa guiado pela questão Q_3. Como a questão estudada anteriormente foi em torno do conteúdo de ângulos, a sessão seis teve início retomando algumas discussões sobre ângulo, sendo que elaboramos o seguinte questionamento: Com quais polígonos equiláteros e equiângulos, de um único tipo e colocando sempre a mesma quantidade em torno dos vértices, é possível pavimentar o plano? (Mais detalhes da atividade constam no anexo deste trabalho).

De acordo com a Base Nacional Comum Curricular (BNCC), ao trabalhar o conteúdo de polígonos regulares no 7º ano, uma das habilidades para desenvolver esse conteúdo é: " Calcular medidas de ângulos internos de polígonos regulares, sem o uso de fórmulas, e estabelecer relações entre ângulos internos e externos de polígonos, preferencialmente vinculadas à construção de mosaicos e de ladrilhamentos" (BRASIL, 2017, p. 309)

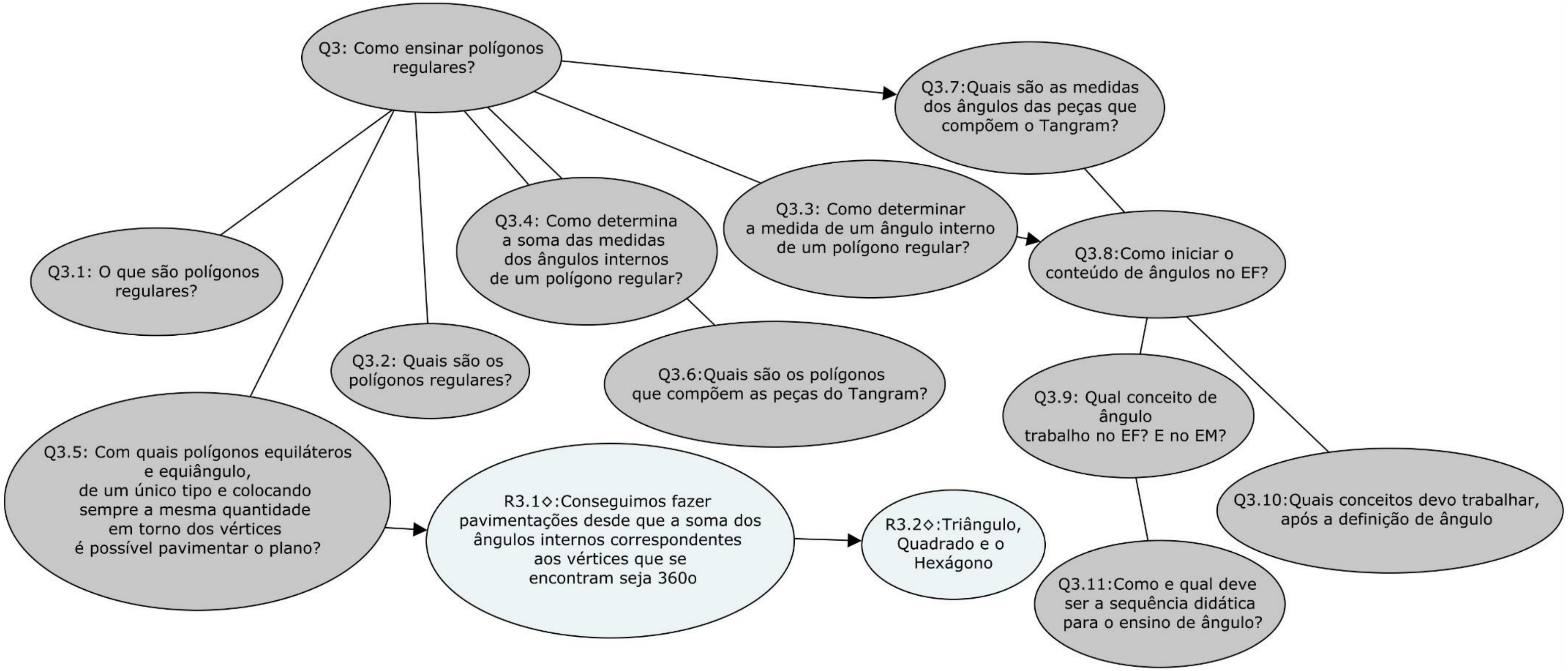
A partir da situação problema, propusemos aos professores a construção de uma tabela, constando o nome do polígono, o número de lados, o número de triângulos que o polígono ficou dividido e a soma dos ângulos internos. Exemplo: Quadrilátero fica dividido em dois triângulos, a soma dos ângulos internos é $2 \times 180^{\circ}$. Assim, conforme a construção da tabela, estaríamos construindo a fórmula da soma dos ângulos internos de um polígono de n lados, ao observar regularidades e padrões existentes. No término da construção da tabela, questionamos os professores se existia outro modo de encontrar a soma dos ângulos internos de um polígono, sem ser pela fórmula encontrada na tabela, tal questionamento seria para identificar a compreensão por parte dos professores sobre a soma dos ângulos internos de um polígono.

A proposta da atividade era fazer com que os professores percebessem que é possível a pavimentação, utilizando o mesmo polígono somente nos casos cujos vértices foram colocados em torno de um ponto e correspondam a ângulos cuja soma das medidas de uma quantidade deles atinja exatamente a soma de 360º, como é o caso do triângulo equilátero, do quadrado e do hexágono regular. Após as discussões sobre a soma dos ângulos internos (construção da tabela) de um polígono qualquer, a proposta foi trabalhar com o estudo dos ângulos no Tangram.

Neste sentido, passamos a uma discussão sobre como iniciar o conteúdo de ângulos para os alunos no Ensino Fundamental por meio do Tangram, bem como procuramos fomentar algumas reflexões. Diante das nossas discussões sobre o conceito de ângulo, em que percebemos que podem ser encontradas diferentes definições em livros didáticos, surgiram os seguintes questionamentos: Como iniciar o conteúdo de ângulos no EF? Qual o conceito de ângulo trabalho no EF? E no EM? Quais conceitos devo trabalhar, após a definição de ângulo (ângulos retos, ângulos complementares, construções geométricas?), como e qual deve ser a sequência didática para o ensino de ângulo? (A proposta foi levar os professores a uma discussão sobre a continuidade do ensino de ângulo, para além do conceito discutido nos encontros, pensando não em um modelo "ideal", mas em uma proposta de trabalho para a sala de aula). Assim, propusemos a segunda situação problema: Encontre as medidas dos ângulos das peças que compõem o Tangram? Quais são?

De um modo geral, a partir da questão Q_3, desenvolvemos o seguinte mapa QR:

Figura 20- Mapa QR PEP - S6



Fonte: Elaborado pela pesquisadora

Desse modo, a proposta do PEP – S_6 foi também de retomar algumas discussões do PEP – S_5, para que os professores percebessem o quanto os conteúdos geométricos estão interligados e que, pelo tempo que tivemos na formação continuada, acabamos desenvolvendo o estudo de alguns conteúdos. Além disso, segundo Chevallard (2002), estes são conteúdos que não devem ser abordados como fila indiana, pois quando trabalhamos um tema após o outro, referindo-se apenas aos níveis do tema e assunto, deixamos de associar aos outros níveis e não encontramos meios para motivar os alunos.

3.4.5 Sessão 7: $S_7 = \{X_7, Y, Q_4\}$ e Sessão 9: $S_9 = \{X_9, Y, Q_4\}$

Na continuidade dos percursos, a professora x_1 solicitou que realizássemos uma sessão com o estudo de simetria, visto que seria o conteúdo que trabalharia nas próximas semanas com os seus alunos e viu, na formação continuada, uma oportunidade de retomar o estudo desse conteúdo e, além disso, pensar em atividades para serem desenvolvidas em sala de aula. Segundo a professora x_1, esse conteúdo matemático é desafiador para ela, pois, raramente, ensinou-o na sua docência. O fato da professora mencionar isso e ainda buscar, na formação continuada, um apoio para a sua prática em sala de aula deixa explícito o quanto os percursos estavam ajudando os professores a refletir e a estudar os conteúdos geométricos para a sua prática em sala de aula.

Diante disso, para o desenvolvimento dos percursos em torno da questão Q_4, buscamos atividades que pudessem levar os professores a estudarem o conteúdo no momento das formações e que poderiam ser atividades que eles levariam para a sala de aula. Assim, por meio do estudo da tese de Silva (2015), intitulada “A prática docente e sua influência na construção de conceitos geométricos: um estudo sobre o ensino e aprendizagem da simetria ortogonal”, adaptamos algumas atividades (anexo 7) para serem desenvolvidas no PEP – S_7.

Primeiramente, iniciamos com uma atividade na qual teriam que indicar o número de eixos de simetria das figuras planas indicadas, como menciona a BNCC para o estudo de simetria: “deve ser iniciado por meio da manipulação de representações de figuras geométricas planas em quadriculados ou no plano cartesiano”. (BRASIL, 2017 p.272). Num segundo momento, propusemos aos professores uma atividade para traçar, em cada situação, a figura simétrica com relação à reta dada e, principalmente, ao realizar as atividades, que explicassem para os demais do grupo os procedimentos utilizados. Desse modo, levamos para o desenvolvimento desse percurso alguns instrumentos geométricos para a construção dos eixos de simetria e das figuras simétricas como régua, esquadro e compasso.

Nessas atividades, tínhamos, como foco, discutir as propriedades como distância do ponto ao eixo de simetria e ortogonalidade, introduzindo a noção de ponto simétrico por meio da mediatriz do segmento, pois, com essa técnica, os professores conseguiriam explorar a diversidade de situações propostas.

Um ponto forte no ensino de simetria é a relação desse conteúdo com o cotidiano, muitos professores e livros didáticos abordam esse conteúdo realizando essas contextualizações. Segundo os PCN:

> À primeira vista as transformações podem parecer um assunto que não têm relação com o dia-a-dia, mas, refletindo e observando um pouco, nota-se, por exemplo, que as simetrias estão muito presentes no cotidiano. Em inúmeros objetos físicos ocorrem aproximações de planos de simetria de reflexão. Em representações planas desses objetos, tais planos de simetria reduzem-se a eixos de simetria. No corpo humano pode-se observar (aproximadamente) um plano de simetria. Assim, também a imagem de um objeto no espelho é simétrica a ele. Há eixos de simetria em diversas criações do homem, como desenhos de aeronaves, edifícios e móveis. (BRASIL, 1998 p. 124)

Nessa vertente, na continuação das atividades, apresentamos algumas pontuações quanto às inadequações desse conceito presentes em livros didáticos, visto que, por ser um conteúdo presente no cotidiano, algumas comparações apresentam erros conceituais de simetria, sendo que, no geral, o mais grave é que se trata apenas o conceito de eixo de simetria em imagens planas de objetos ou de seres tridimensionais, induzindo o aluno a procurar eixos de simetria de reflexão em objetos tridimensionais – móveis, edifícios, etc. – algo que, na verdade, podem ter planos de simetria de reflexão e não eixos de simetria de reflexão. Sabemos que estes últimos podem ocorrer apenas em objetos ou figuras planas. Tais pontuações são assinaladas no Guia do PNLD, Brasil (2017):

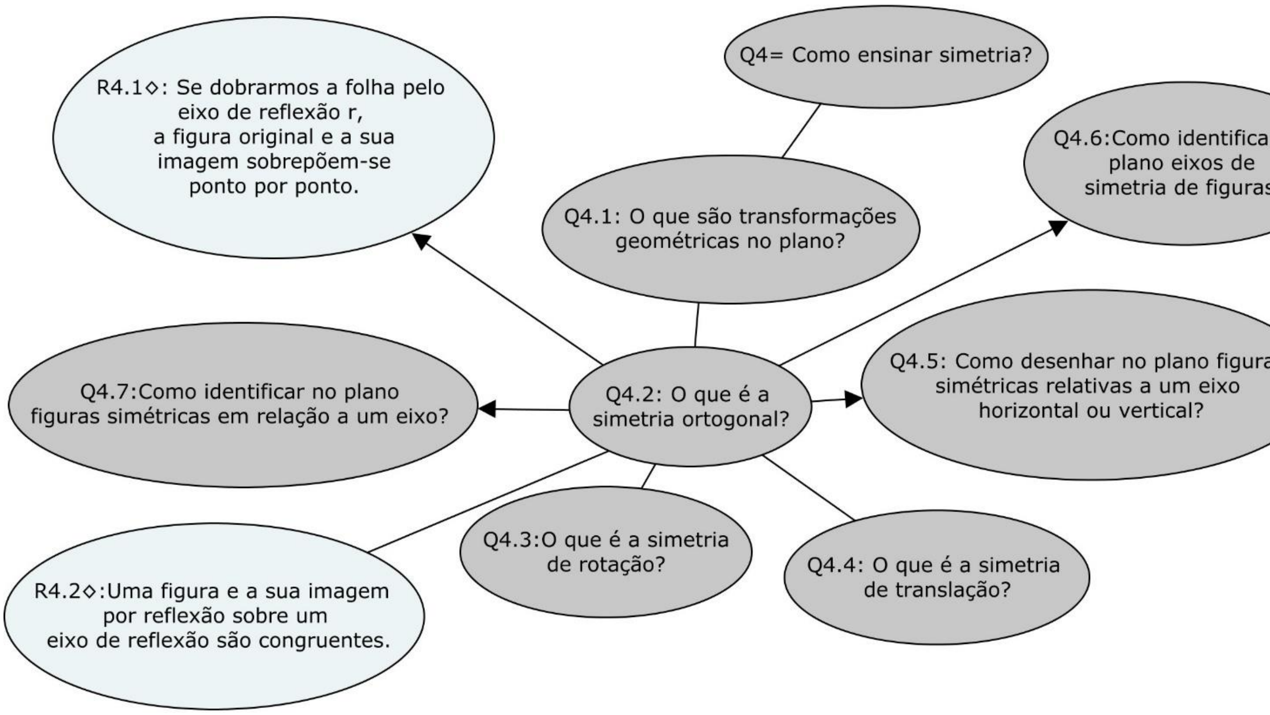
> São frequentes, também, no estudo da simetria de reflexão de objetos geométricos espaciais, afirmar-se que existe eixo de simetria por reflexão, quando pode ocorrer não um eixo mas um plano de simetria de reflexão. Neste caso, pode existir, em alguns casos, um plano de simetria. Assim, não faz sentido, por exemplo, afirmar que uma reta é o eixo de simetria (por reflexão), de uma joaninha, de uma flor ou de um edifício. O que se pode perguntar é se uma reta é um eixo de simetria (por reflexão) de uma imagem plana apresentada para a joaninha, a flor ou o edifício. (BRASIL, 2017, p. 38).

O conceito de simetria é um conteúdo importante na Geometria, pois favorece a compreensão das ideias de congruência e semelhança de figuras, conteúdos que serão abordados durante o ensino fundamental. Por certo, é um "conceito geométrico de grande importância e seu estudo é recomendado para se estender a todo o ensino fundamental, em extensão e profundidade compatíveis com essa fase do ensino" (BRASIL, 2017, p. 38).

No entanto, o conteúdo de simetria nos livros didáticos, de um modo geral, aparece reduzido à simetria de reflexão: "é de lamentar que não se explore, progressivamente, ao longo dessa fase do ensino fundamental, toda a riqueza dos padrões visuais planos nos quais se evidenciam vários tipos de simetria, para além da simetria de reflexão" (BRASIL, 2017, p. 38).

Para a questão Q_4, desenvolvemos o seguinte mapa:

Figura 21- -Mapa QR PEP - S7



Fonte: Elaborado pela pesquisadora

Por mais que pontuamos algumas questões em torno da simetria de rotação e de translação, a professora mencionou que abordaria em sala de aula somente a simetria de reflexão. Nesse PEP, contamos com a presença de três professoras, sendo que a participação da professora x_{10} aconteceu pela primeira vez. Nessa sessão contamos com a participação da professora x_1 que havia pedido o estudo desse conteúdo, pois ocorreram sessões nas quais as professoras solicitaram o estudo de um determinado conteúdo, e não puderam participar da formação. Devido a isso, em alguns casos, retomamos os percursos em outros momentos, assim, temos sessões norteadas por uma mesma questão geradora, como é o caso das sessões sete e nove.

3.4.6 Sessão 8: $S_8 = \{X_9, Y, Q_5\}$

Para a sessão oito, tivemos, como questão geradora, a Q_5 = Como ensinar semelhança de triângulos e relações métricas do triângulo? Nessa sessão, foi a vez da professora x_2 solicitar o conteúdo a ser estudado. O fato de professores solicitarem trabalhar, na formação continuada, os conteúdos que ministrarão em suas aulas vem ao encontro do que discutimos no capítulo dois deste trabalho. Temos visto que os professores buscam formações que compreendam que as situações em sala de aula são individuais e não genéricas, muito menos padronizadas; buscam que as formações atendam às suas especificidades e, além disso, que elas sejam instituídas por discussões em torno de todo o ambiente escolar, principalmente, no que diz respeito às OM e OD do ensino de matemática.

Uma das solicitações da professora para o percurso PEP – S_8 foi que este tivesse como foco a utilização de algum material concreto que pudesse levar para os alunos. Para o Guia do PNLD, Brasil (2017), compreende-se que o trabalho com o material concreto:

> Parte-se de um conceito ou ente matemático e procura-se no mundo natural um fenômeno ou objeto que pode ser associado a ele. Nesse caso, tal objeto ou fenômeno é chamado modelo concreto do ente matemático. Assim, um dado de jogar pode ser um modelo concreto da figura geométrica definida como cubo. Outros exemplos são os denominados materiais concretos, de uso frequente como recurso didático no ensino da Matemática. (BRASIL, 2017, p. 9)

Assim, de posse da questão Q_5, pesquisamos algum material que pudesse atender os anseios da professora, para estudar os conteúdos, que eram relações métricas no triângulo retângulo e semelhança de triângulos juntos. Para esse percurso, a partir da Q_5, pensamos em discutir, primeiramente, o que são triângulos semelhantes (ângulos correspondentes iguais e lados correspondentes proporcionais), partindo do conceito de homotetia (ampliação e redução de figuras), anunciando os três casos fundamentais de semelhança de triângulos: AA (mais usado e basta que os triângulos tenham dois ângulos congruentes), LLL (os três lados correspondentes sejam proporcionais) e o LAL (Um ângulo com a mesma medida e os lados desse ângulo serem proporcionais aos lados correspondentes do outro) e que isso fosse discutido por meio de um material concreto.

Desse modo, propusemos que os professores manuseassem uma folha de sulfite e cortassem na diagonal, obtendo dois triângulos congruentes (caso LAL de congruência), os procedimentos realizados foram permeados por perguntas para justificar porque, ao sobrepor as figuras, elas coincidem em todos os pontos. Em seguida, eles deveriam dobrar uma delas de modo que o vértice do ângulo reto fosse um ponto dessa dobra e, para isso, teriam que dobrar de modo que uma das pontas do lado maior (hipotenusa) desse triângulo caísse (incidisse) sobre o lado menor. Após realizar essa dobra, esse triângulo deveria ser recortado na dobra feita. Assim, esse triângulo ficou dividido em dois triângulos que são semelhantes entre si e também semelhante ao outro (que não foi dobrado). Vale ressaltar que se trata de uma atividade bastante ilustrativa e que possibilita observar que os lados que não fazem parte do ângulo reto, são paralelos. Isso é justificado pelo caso de semelhança AA, pois um dos ângulos é reto e o outro é um dos ângulos do triângulo maior.

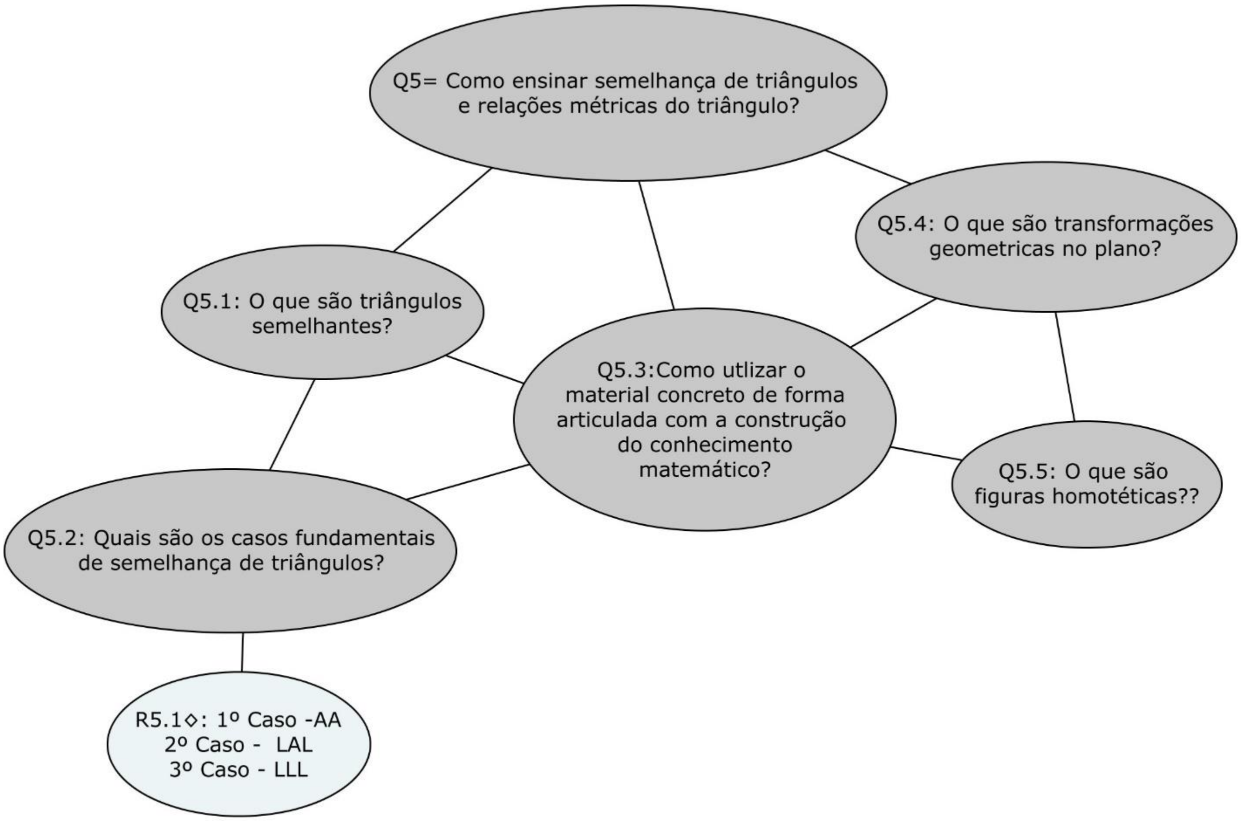
Usando o conceito de semelhança entre esses três triângulos retângulos é possível mostrar que o triângulo ABC (triângulo original sendo Â o ângulo reto) é semelhante aos triângulos DBA e DAC. Nessa atividade, é preciso tomar cuidado com a ordem que são escritos (vértices correspondentes têm que ter ângulos correspondentes com a mesma medida), o vértice D (ângulo reto, pois é projeção do vértice A sobre a hipotenusa) corresponde sempre ao vértice A (ângulo reto do triângulo ABC).

Daí, expressando as razões entre os segmentos correspondentes dos triângulos semelhantes ABC, DBA e DAC, basta observar que $c^2 = a.m$, onde m é a projeção do cateto AB sobre a hipotenusa BC, bem como que $b^2 = a.n$, onde n é a projeção do cateto AC sobre a hipotenusa e, consequentemente, $b^2 + c^2 = a(m+n) = a^2$. Todos esses procedimentos foram sendo construídos juntamente com os professores e surgiram vários questionamentos antes de efetuar cada passagem.

Na sequência, além da atividade com a folha de sulfite, propusemos aos professores a atividade (anexo 8) que compreende um material produzido pelo Observatório da Educação Matemática (OEM) da Bahia. O material envolve uma investigação do conteúdo de relações métricas nos triângulos retângulos, composto por um kit com diferentes figuras geométricas e uma base (um quadrado de lado b+c), do qual deve-se retirar uma figura (quadrados de lados a, b, c, h e m) e substituir por retângulos com dimensões ($a \times m, a \times a$ e $m \times n$), mantendo a mesma base, de modo que se percebam as relações entre as figuras, no caso de retirar um quadrado de lado h e substituir por um retângulo de lados m e n, mantendo a mesma base, significa que ambos possuem a mesma área, logo, $h^2 = m \times n$.

De posse desse material, planejamos o seguinte mapa QR:

Figura 22 - Mapa QR PEP - S8



Fonte: Elaborado pela pesquisadora

Entre os PEP desenvolvidos, esse foi o único que consistia em deixar para os professores uma proposta de material concreto para ser utilizado em sala de aula, ficando a critério do professor empregá-lo ou não. Como a professora x_2 havia solicitado o estudo desse PEP, tivemos um retorno *a posteriori* sobre o que ela desenvolveu nesse percurso com a sua turma. Mais detalhes dessa atividade e dos resultados abordaremos no capítulo seguinte. Nesse percurso, tivemos a participação de quatro professoras e pensamos em desenvolver um percurso que, além de estudar os conteúdos propostos, pudesse levar os professores a refletirem sobre as possibilidades e limitações dos materiais concretos.

3.5 – Algumas considerações sobre o planejamento dos micro-PEP

No estudo e planejamentos dos percursos anteriormente descritos, utilizamos diferentes recursos como livro didático, guia do livro didático, referencial curricular do Estado de Mato Grosso do Sul, documentos oficiais, artigos acadêmicos, dissertações e teses, que tratavam especificamente sobre os conteúdos geométricos, a fim de que, enquanto orientadora do estudo (Y), pudéssemos criar meios para que os professores, de fato, participassem do percurso, conduzindo-os a uma re (construção) dos saberes em jogo.

Para tanto, tínhamos um tempo limitado para pesquisar e buscar situações-problema que pudessem gerar um percurso de estudo e pesquisa. Isto porque as formações aconteciam em períodos quinzenais e, após cada sessão que os professores decidiam o que iriam estudar no próximo PEP, essas condições fizeram com que a pesquisadora, junto com os professores participantes da pesquisa, realizasse algumas escolhas entre os materiais pesquisados.

Desse modo, vale salientar que *a priori* não tínhamos uma estrutura formada dos PEP para as formações. Ao contrário, os direcionamentos do percurso foram dados conforme a formação continuada ia ocorrendo. Por certo, esse percurso é único, os temas abordados e as questões geradoras foram planejados para e com esses professores, de tal forma que, para outro público, esses percursos podem não se caracterizar como percursos de estudos e pesquisas.

Vale mencionar que, para início que cada micropercursos a construção dos mapas QR, foram essenciais para compreender se as questões geradoras Q_i dos sistemas didáticos eram realmente "fortes" para gerar outras questões e ainda possibilitou pensar nas atividades a serem propostas aos professores. Nesse cenário, vale ressaltar o quanto o papel de orientador de estudo (Y) é desafiador. Primeiramente, por ter que planejar atividades que sejam provocadoras e que gerem um percurso e ao mesmo tempo que não seja algo muito difícil que desanime ou não possibilite os professores questionarem. Num segundo momento, trata-se de conduzir o percurso de modo a ser o mediador sem "dar" respostas, mas promover a elaboração de mais questões. Diante disso, no planejamento e execução dos PEP, o orientador do estudo tem a oportunidade de retomar e aprofundar os conceitos abordados e, além disso, a repensar a sua OD para que transcorra um percurso de estudo e pesquisa.

É importante ressaltar que, ao planejar os PEP, tínhamos também a intenção de fazer com que os professores pudessem refletir sobre os saberes didáticos e a importância de criar meios para que a aprendizagem ocorra. Preocupava-nos também ponderar sobre o quanto a profissão exige, que enquanto educadores estaremos em constante estudo, que a investigação e a reflexão são processos que caminham concomitante com a prática profissional docente.

Por certo, planejar um PEP não significa que este acontecerá como planejado, pois tudo depende dos sujeitos envolvidos, assim como a orientadora (Y) tem a sua função nos sistemas didáticos, os estudantes das questões, no caso os professores de matemática (X), participantes, precisam querer aprimorar a sua formação. Nessas sessões, é importante salientar que a composição de sujeitos diferentes em cada PEP fez com que cada micro-PEP tivesse direcionamentos distintos, os professores participantes com presença em mais de uma sessão tinham mais liberdade e confiança em explanar o seu conhecimento sobre os conteúdos geométricos, mas alguns, por mais que instigados a explanar suas praxeologias, não se manifestavam.

Desse modo, no capítulo seguinte, retomamos alguns apontamentos abordados nesse tópico, analisando possibilidades do desenvolvimento de micro-PEP na formação continuada, visto que, nos planejamentos dos PEP, a nossa intenção não era reproduzir a prática de um teoria francesa, mas, por meio do aporte dessa teoria, analisar a formação continuada de acordo com a realidade brasileira, com intuito de comprovar a nossa hipótese de que podemos desestabilizar as praxeologias dos professores nas execuções dos PEP.

CAPÍTULO IV –ANÁLISE DO PROCESSO DE FORMAÇÃO CONTINUADA POR MEIO DOS MICRO-PEP DE ENSINO

A formação docente é, então, vista segundo modelo artístico e reflexivo, tendo por base a concepção construtivista da realidade com a qual o professor se defronta, entendendo que ele constrói o seu conhecimento de forma idiossincrática e processual. (*MIZUKAMI*)

Neste capítulo, abordaremos os vários estudos explanados no decorrer da pesquisa, com foco em analisar a formação continuada desenvolvida com os professores de matemática. Assim, apresentamos os desenvolvimentos dos percursos a partir do estudo de temáticas com o grupo de professores e respondemos à questão que orientou o desenvolvimento desta tese.

A presente pesquisa teve como objetivo principal investigar possibilidades de desenvolvimento de micro-PEP na formação continuada de professores de Matemática, no estudo de conteúdos geométricos. Para tanto, constituímos um grupo de professores de matemática, assumimos a formação continuada como sendo a nossa instituição I (I= formação continuada), visando compreender as relações dos professores X (X= sujeitos) com os diferentes saberes (não somente matemáticos) que perpassaram as discussões e estudos realizados no desenvolvimento dos micro-PEP. Nessa vertente, temos que o objeto (O) de estudo da nossa pesquisa é o conjunto de todos os objetos que compõem as práticas escolares e seu entorno, discutidos no decorrer da formação. Assim, analisamos as R_I(O), R(X, O), R(X, R(I, O); R(I, R(X, O) com foco nas desestabilidades ou alterações praxeológicas dos professores por meio do PEP, bem como as condições e restrições impostas.

4.1 Análise dos micro-PEP desenvolvidos

Ao iniciar o estudo sobre o PEP - S_1, foi possível perceber o quanto os professores estão carentes de formações em que possam dialogar sobre como abordar os conteúdos em sala de aula, tendo como foco principal a Organização Didática (OD). A tarefa didática T_D*: Como abordar (ou apresentar) os conceitos de polígonos e, em particular, o* *de trapézio?* possibilitou aos professores pensarem sobre as suas práticas em sala de aula. A professora (x_2) expressa que, além do estudo do conteúdo, é preciso discutir

> [...] de repente a melhor forma de a gente passar para o aluno [...] você fala uma coisa para o aluno, você fala a definição 2 para o aluno, de repente ele não entende, e fala 3 ele entende, e a 2 não entende [...] o que é mais compreensível para ele (x_2)

Para a professora x_2, a instituição formação continuada (I) deve proporcionar estudos em torno de tarefas didáticas, a importância de ensinar o conteúdo de diferentes formas, ressaltando, neste aspecto, que Gáscon (2003), Chevallard (2008) assinalam sobre o trabalho com o eixo tecnológico -teórico, que deve proporcionar ao professor não apresentar apenas uma definição, mas outras possibilidades.

Ao visualizar a atividade retirada do livro didático, pudemos verificar uma condição imposta à professora x_2 com relação a esse recurso, pois, para ela, as definições presentes nos livros didáticos estão sempre corretas, não sendo necessário questionar a sua veracidade

> [...] porque se estão no livro, não estão erradas, não é isso? (x_2)

Nessa fala da professora, fica explícito, no início do PEP, que o objeto matemático no livro didático possui uma relação não modificável, que o professor pode ensinar apoiado no livro, sem qualquer questionamento dos conceitos apresentados. Certamente, podemos inferir que a professora assujeita-se às condições impostas pelo livro didático, tanto das OM como OD, até o momento de trabalharmos com o PEP - S_1 na formação continuada. Nos demais micropercursos, esses assujeitamentos vão se tornando mais explícitos na fala das professoras.

No decorrer do PEP - S_1, percebemos indícios de modificações no Universo Cognitivo de (x_2) com relação ao livro didático, da necessidade de análise desse recurso e da importância em desenvolver a técnica τ_D*: Analisar, comparar e apresentar diferentes definições presentes em livros didáticos e em livros de matemática*, como podemos observar no diálogo:

> A partir do livro que eu trabalho, é preciso analisar o livro que assumimos (Y)
> Isso mesmo (x_6)
> [...] Mas aí, não é questão de definição, a própria figura mostra para a gente coisas diferentes, uma num livro, o polígono só conta os lados e no outro, não, e aí não é só sinônimo de palavras, entre linhas e segmentos de reta, aí é muito diferente. Por isso, é necessário olhar atentamente para o livro que eu trabalho[...] (x_2)

Para o desenvolvimento dos PEP, buscamos ter, como orientação, o paradigma *questionamento do mundo* de Chevallard (2012), descrito no item 1.3 do capítulo 1, de modo a conduzir os professores a participar e expor as suas praxeologias. Para os professores de matemática participantes desta pesquisa, o professor, muitas vezes, possui atitudes solitárias, por não ser ouvido, pelo fato de não ter momentos de diálogo com os demais profissionais da área, pois, no ambiente escolar, todos estão envolvidos com os seus afazeres, professores, coordenadores, diretores, inspetores e não possuem espaços para conversas e estudos sobre o ensino em sala de aula. Quando eles reúnem-se, é especificamente para tratar de assuntos emergentes da escola. Em virtude disso, as inquietações dos professores em torno da sala de aula só crescem.

> [...] eu tenho a impressão e a maioria dos professores de Matemática que eu converso, eles querem conversar, querem dialogar sobre a sala de aula, porque os cursos que a gente vem ao sábado são questões mais burocráticas que envolvem todo o setor da escola, e não a sala de aula em si. [...] conversar com os professores o que deu certo, o que não deu certo (x_2).

Nesse fragmento, tratamos a importância da relação $R_I(O)$, na qual a instituição I (I = formação continuada) propicia espaços de estudos em torno dos conteúdos geométricos, tornando-se uma formação que possibilita discutir e atender especificidades do ensino desenvolvido em sala de aula. Além disso, temos que considerar o quanto os níveis Escola e Pedagogia interferem diretamente na prática do professor em sala de aula, o fato de a Escola não propiciar espaços de estudos, para que os professores de matemática dialoguem sobre as dificuldades ou até mesmo as propostas de aulas que possam auxiliar a aprendizagem dos alunos faz com que a prática em sala de aula seja isolada. Desse modo, os professores acabam por assujeitarem-se às condições impostas pela Escola, não criando espaços de estudos com os seus pares. Nesse viés, é notória a necessidade de espaços de estudos por parte dos professores, como ressalta a professora x_2, quando relata que, no geral, as formações continuadas não permitem ao professor refletir e agir sobre as suas ações.

Inegavelmente, como sublinham Barquero, Bosch e Gascón (2011), a instituição formadora de professores, de um modo geral, gera restrições à prática dos futuros professores, por reproduzir um modelo tecnicista, segundo Gascón (2003), no qual ensinar matemática resulta do trabalho com diversas tarefas e técnicas. Como resultado, a aprendizagem ocorre por meio da repetição de vários exercícios do mesmo tipo, que podem conduzir à memorização de regras e procedimentos. Tais práticas parecem rotineiras e, certamente, perpassam a vida profissional dos professores de matemática, como afirmam:

> [...] Acho que a minha faculdade lá não é uma das melhores (x_1)
> [...] Se eles tivessem feito esses questionamentos com a gente lá, a gente chegaria melhor, porque eles não fizeram, passaram o conteúdo e a gente tinha que resolver (x_2)
> Mas é assim que acontece (x_4)
> É, nós não fomos formados para assim, questionar (x_6)

Já no primeiro percurso desenvolvido, foi possível observar que as professoras começam a ter uma tomada de consciência das suas limitações no que diz respeito à formação inicial, tanto no que concerne aos seus conhecimentos matemáticos, quanto didáticos. Tais pontuações são reforçadas quando respondem à questão: Qual a sua avaliação do seu processo de formação inicial? Elas pontuam:

> A graduação teve suas falhas pois uma pessoa que escolhe se formar para um dia lecionar deve ter uma preparação em torno do que realmente acontece em uma sala de aula e não apenas conteúdos e mais conteúdos (x_2)
> Fraca nos quesitos voltados para a sala de aula, ou seja, na preparação acadêmica para lecionar (x_4)

As pedagogias dos professores, em geral, são impostas por condições e restrições dos diferentes níveis. Neste caso, na fala das professoras, destacam-se o nível superior *Sociedade* como afirmam Barquero, Bosch e Gascón (2011), que condiciona a existência das Universidades, na disseminação do conhecimento por meio da reprodução de modelos de formação, na qual o professor não é questionado, ele apenas reproduz aquilo que é ensinado, na perspectiva do paradigma *visita às obras*, como Chevallard (2009b) refere em relação aos professores reprodutores de uma "pedagogia regente" ou ainda de uma "pedagogia do professor", que ficam evidentes no exercício profissional, como ressalta a professora:

> Então, a gente acaba vendo que o problema então, está um pouco no aluno? Está, o aluno não quer estudar [...]. Está em determinados professores? Está [...] Mas eu acho que vem lá do sistema, se o sistema melhorasse, eu acho que tudo fluiria [...] acho também que vai de cada escola [...] eu sou contente com essa escola, a coordenadora dá flexibilidade para a gente[..] tanto que ela pede para colocar no planejamento, planejamento flexível, sujeito a alteração de acordo com a sua turma. (x_2)

Nesses excertos, podemos perceber o quanto as práticas dos professores são impostas por diferentes assujeitamentos de diferentes instituições (CHEVALLARD, 2003) e enquanto pesquisadores precisamos considerar tais assujeitamentos para que as formações continuadas não sejam reprodutoras dos paradigmas *visita às obras*. Na pesquisa de Barquero, Bosch e Gascón (2011), ao estudar as restrições impostas pela universidade, com foco nos níveis Sociedade e Escola, os autores apontam que o aplicacionismo, a atividade de modelização da matemática como uma mera aplicação de conhecimentos previamente construídos ou em alguns casos como uma simples exemplificação do conteúdo, é uma das maiores restrições nesse nível de escolaridade, e não compreendem a matemática como uma ferramenta fundamental para a busca de respostas e questões problemas que podem aparecer em distintas realidades. Em contraste com esses modelos aplicacionistas, a TAD por meio do PEP possibilita o processo de modelização da matemática em conjunto com a atividade matemática, sendo ferramenta essencial para a busca de respostas e questões problemáticas, constituindo, assim, o conhecimento científico.

Apesar dos professores participantes dessa pesquisa não terem contato ou estudado a teoria de Chevallard (2009b), eles possuem consciência que a matemática ensinada em sala de aula difere da matemática estudada na academia e mencionam que a Matemática ensinada na escola não é científica, mas mais "popularizada". Segundo os professores x_3 e x_5, estes acreditam que pode ter existido algum estudo do Ministério da Educação (MEC) para que os professores ensinassem de forma mais trivial, e quando questionados se a matemática da escola não seria científica, os professores pontuam:

> [...] mas a matemática que a gente trabalha na escola não é científica? (Y)
> Não é (x_5)
> Na sala de aula, não (x_3)
> Não é (x_5)
> Na sala de aula, não (x_3)
> É o que? (Y)
> Ela é mais popularizada (x_3)

Tal situação vem ao encontro do que Chevallard (2009b) denomina de praxeologias para o ensino e praxeologias para ensinar, nas quais podemos compreender que os professores possuem praxeologias para o ensino, que são os conhecimentos mobilizados no ato de ensinar, e praxeologias para ensinar, que são as praxeologias que os professores mobilizam para além do ensino. Assim, fica subentendido que as praxeologias dos professores não se resumem somente àquilo que o professor vai ensinar, mas sinalizam a importância de apropriarem-se dos estudos para além da formação inicial.

Neste sentido, fica evidente que a formação inicial, como o próprio nome expressa, é apenas o início de uma formação. Ao referirem-se à formação profissional, as professoras apresentam algumas particularidades do ambiente escolar

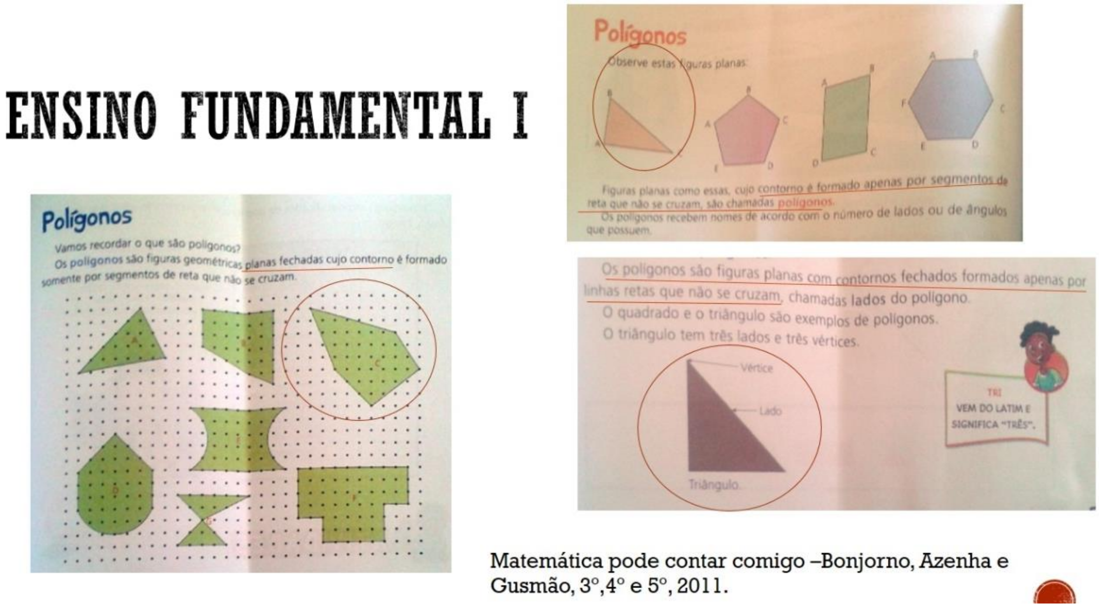
> [...] ela te cobra muito (a escola), ela te cobra, eu não sabia nem ter uma postura de sala de aula, tanto que a minha primeira experiência foi numa escola particular, me jogaram na mão uma bomba de um 5º ano, 4º série, nossa era de chorar, larguei e pedi demissão. Olha só, foi uma experiência horrível, eu não tinha postura, eu não tinha domínio de sala, eu não sabia explicar, eu não sabia dominar, eu não sabia passar o que eu sabia, eu sabia muito bem fazer continha, eu sabia fazer todos os conteúdos e só tirava dez, porém, não sabia dar aula, eu não sabia dar aula, mas, agora, eu completei doze anos dando aula, mas eu olhando, hoje, eu estou grande, em relação ao dia que eu entrei. (x_2)
> Deparando com essas situações, que eu tive que buscar, sabe eu acho que seria as situações de todas aqui (x_4)

De fato, os professores participantes da pesquisa externam a importância da busca por formações continuadas que auxiliem nas suas práticas em sala de aula, que perpassam desde questões dos assujeitamentos impostos pelo sistema escolar, como as organizações didáticas e matemáticas dos conteúdos. Quando questionada, a professora x_2 expressa-se sobre quais mudanças proporia para as formações continuadas das quais tem participado:

> Primeiro, que eles fossem abertos a sugestões de temas, que, em determinadas formações, separassem os professores por área e que, nessas formações, nós pudéssemos produzir e partilhar materiais e métodos de aula para que houvesse realmente um aprendizado significativo para os alunos. Algumas vezes, o assunto abordado precisa ser envolvente e despertar o interesse do aluno, para isso, materiais concretos, jogos, jogos on line, ficha com roteiro de trabalho, filmes, vídeos, etc. Tudo isso ajudaria e muito na construção do aprendizado, mas precisamos de tempo e formações para que isso aconteça. (x_2)

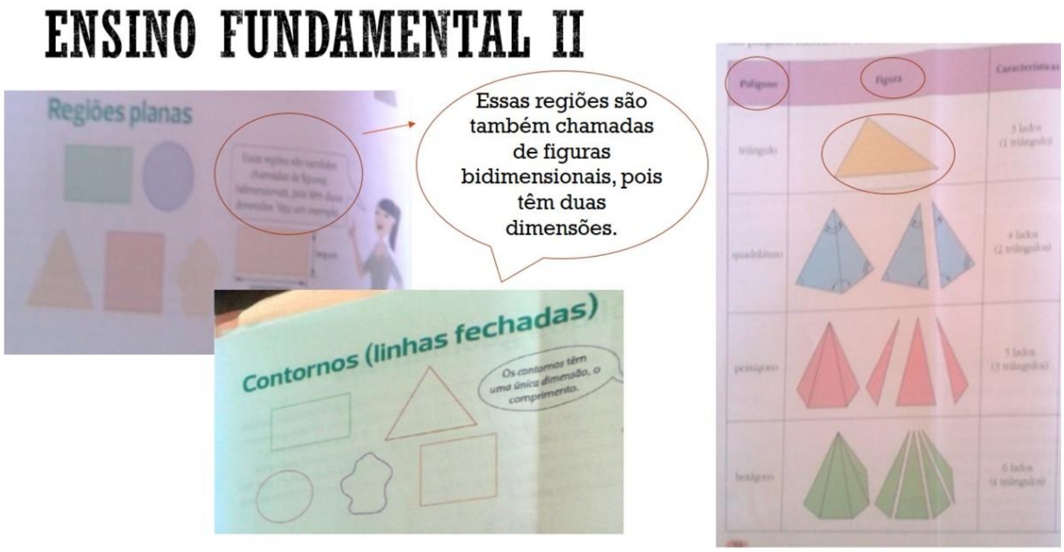
Iniciando os estudos do conceito de polígono, começamos a desenvolver as atividades da sessão 1, os professores tinham como questão geratriz investigar *Q_0: Conceitos de polígonos e, em particular, o de trapézio,* a partir da tarefa *t: Definir o que é um polígono e, em particular, o trapézio,* e da técnica *τ: Identificar diferenças entre as definições, bem como as figuras que se enquadram em cada uma delas*. Com base nos questionamentos de (Y) quanto à definição de polígono, os professores analisaram e compararam as definições, buscando identificar qual delas poderiam assumir. Ao questionar as definições expostas na atividade, o orientador (Y) preparou e apresentou algumas imagens de modo que eles pudessem comparar “definições” escritas com as imagens expostas em slides (conforme figuras 23 e 24) e, assim, explanarem as suas praxeologias quanto a esses conceitos:

Figura 23- Imagens de polígono em diferentes livros didáticos



Fonte: Bonjorno, Azenha e Gusmão (2011, p. 24, p. 35. p. 19)

Figura 24 -Imagens e definições de polígono em livros didáticos



Fonte: Dante (2015, p. 29)

> Um polígono é o conjunto da região plana com o contorno ou, o polígono, ele é considerado somente o contorno? (Y)
> É diferente mesmo, é que uma ali só tá contorno e esse daqui não, lá também não (x_4)
> [...]. Então polígono, ele é uma figura bidimensional? (Y)

Aí eu acredito que sim, acho que a área (x_4)
Acho que a ideia ali é justamente passar o que é uma dimensão e duas dimensões (x_5)
Mas ali está falando de regiões planas, não está falando de polígono (Y)
[...] O polígono está dizendo assim é a região plana, cujo contorno é um segmento de reta, ou seja, é uma região plana mais o contorno. É porque tem que ter o contorno, ele é delimitado [...] se não tiver um limite, você não pode dizer né [...] você pensa ali, região plana sem contorno (x_5)
[...]. Na definição 1, temos uma linha poligonal fechada e simples com sua região interna forma um polígono [...] na definição 2, temos um polígono que é uma figura geométrica plana com contornos retilíneos [...]. Na definição 3, os polígonos são figuras que têm seu contorno formado apenas por segmentos de retas, entre a definição 1, 2 e 3, por exemplo, a 1 e a 2 fala de região interna, e a 3 não fala (Y)
A discussão aqui é a seguinte, é saber se a gente considera o preenchimento, a região, ou só o contorno, não é? [...] (x_2)
Eu acho o que dá a entender aqui é todo polígono, ele é considerado uma figura plana, mas eu não sei se toda a figura plana, ela pode ser dita como um polígono, de acordo com essas definições, tem que ser um segmento, essa acho que é a diferença, mas é verdade o contorno, o polígono é considerado só o contorno mesmo. (x_6)

Para os professores x_4 e x_5, o conceito de polígono traz implícito o conceito de área e, nesse início do PEP, não percebiam a diferença entre as definições, que foi salientada pela professora x_2. A professora x_6 explanou algumas de suas noções da praxeologia sobre polígono, afirmando que se trata de uma figura plana, porém, não sabe se toda a figura plana pode ser considerada como polígono, dessa forma, já começa a desenvolver uma resposta intermediária R_{01}=*Todo polígono é uma figura plana*, e a partir dessas respostas começam a surgir outras questões (Toda figura plana é um polígono? mais adiante veremos mais questionamentos) no decorrer do percurso, no entanto, diante desse fato, nenhum professor fez intervenção quanto à explanação da professora, sendo que, minutos antes, estavam discutindo que polígono são figuras formadas por segmentos de reta, , no caso, o círculo é uma figura plana, que não é polígono.

Durante o PEP - S_1, fiquei instigando os professores a participarem do estudo e, concomitantemente, expor as suas praxeologias. Para alguns professores, a atividade havia-os desestabilizado, pois eles mostravam não ter tido nenhum contato com conceituações conflitantes como essas. Eles continuaram as discussões:

Mas, afinal de contas, são contraditórios né? (x_2)
É são [...] quando eu defino polígono o preenchimento faz parte? (Y)
Daí ele não é só um polígono (x_6)
Ele não é? (x_2)
Ele já passou a ser uma figura plana (x_6)
Ele já é uma figura bidimensional? (Y)
Isso (x_6)

> Então polígono não é uma figura bidimensional? (Y)
> [...]
> Ele tá falando de regiões planas e não polígonos, olha lá (x_4)
> Realmente, ela tem razão (x_6)
> Ali está falando de regiões planas, mas depois ele vai falar de contorno fechado (Y)
> [...]. É porque aqui ele já fez a contextualização das figuras planas né (x_6)
> [...] O significado da palavra polígono não é vários ângulos? (x_4)
> É (Y)
> Então é certeza não é a região, com relação à quantidade de ângulos (x_4)
> [...]. Então tem alguns livros que traz isso também, poli muitos (x_1)
> Porque se você for pensar em quantidade de ângulos aí você vai conseguir imaginar todas aquelas figuras né, já o círculo não é (x_4)
> Por isso que eu digo, que nem toda a figura plana ela é considerada polígono (x_6)

Na realização do estudo, os professores começam a buscar o significado da própria palavra polígono, a professora x_4 menciona que R_{02}= *polígono possui vários ângulos* e ajuda a professora x_6 a concluir que R_{03}= *Nem toda figura plana é considerada polígono,* assim como os demais professores em busca da compreensão desse conceito, surgindo a necessidade de outros conceitos geométricos para tentar compreender qual conceituação assumir.

Neste sentido, entendemos que a Organização Matemática (OM) em torno do conceito de polígono envolve outros conceitos geométricos que vão surgindo no decorrer do estudo, como: *W_{01}= conceito de linhas, W_{02}= conceito de retas, W_{03}= conceito de segmento, W_{04}= conceito de semirreta, W_{05}= conceito de figura, W_{06}= conceito de bidimensional, W_{07}= conceito de área, W_{08}= conceito de dimensão, W_{09}= conceito de regiões planas e W_{10}= conceito de ângulos*. São conceitos, *a priori*, fundamentais para que os professores mobilizassem para a compreensão do conceito de polígono, sendo assim, alguns expressavam a necessidade de estudá-los Além disso, segundo os professores participantes da pesquisa, a falta de estudos em torno desses conceitos, um ensino "totalmente tecnicista", impossibilita um melhor entendimento dos conteúdos geométricos. O estudo continua:

> Quando vai dar o conceito de polígono, ela já tem o conceito do que é ângulo? (x_7)
> Nem sempre (x_2)
> Não (x_6)
> Ali, nas séries iniciais, não tem mesmo (x_4)
> Os pequenininhos não, só no sexto (x_6)
> Porque se a gente pensar no, nas questões dos ângulos e na dos segmentos de reta, de retas que vão formar ângulos fechados né, todas elas fechadas né (x_7)

> Vai ter algum lugar que elas vão se fechar (x_5)
> Elas não podem se cruzarem né (x_7)
> Mas eu acho que, eu não sei esse negócio de assumir ou não o dentro, eu estou tentando imaginar assim que quando a gente vai falar sobre perímetro e área, você fala área, você acostuma a falar assim, aquela parte que está dentro né (x_6)
> É (x_1)
> É assim que a gente fala, então eu não sei essa divisão aí, eu não estou conseguindo ver ela [...] é, tem uma duplicidade (x_6)

Nesse excerto, temos algumas condições e restrições do saber matemático, conforme as instituições na qual ele está inserido. Os professores dialogam sobre o fato de que o objeto matemático (polígono) perpassa os diferentes níveis escolares, que ensinar nos anos iniciais o conceito de polígono é diferente de ensinar em outros anos escolares, e ao considerar o conceito de ângulo como conceito prévio para entender o conceito de polígono, este não vive na instituição anos iniciais. Durante o estudo, a professora x_7 conclui que R_{04} = *segmentos de um polígono não se cruzam* e, no decorrer do percurso, começam a surgir vários questionamentos.

Na continuidade do PEP - S_1 pudemos perceber, pelas falas dos professores, que as dúvidas sobre conteúdos geométricos (OM) iam surgindo e que cada professor tentava responder aquilo que sabia, diante do questionamento feito pelo colega, por meio de respostas intermediárias R_i, e ainda tratavam sobre como são ensinados esses conceitos. Assim, surgiam alguns fragmentos de suas (OD), formulações sobre os conteúdos geométricos prévios que deveriam ser aprendidos antes do conceito de polígono e comentavam algumas experiências realizadas em sala de aula, e o quanto PEP - S_1 havia desestabilizado as suas certezas.

Outro ponto importante para tentar conceituar polígono foi a discussão se os segmentos de um polígono podem ou não se cruzar. Pelas imagens expostas nos slides, alguns livros didáticos consideravam que os segmentos poderiam cruzar-se e outros, não:

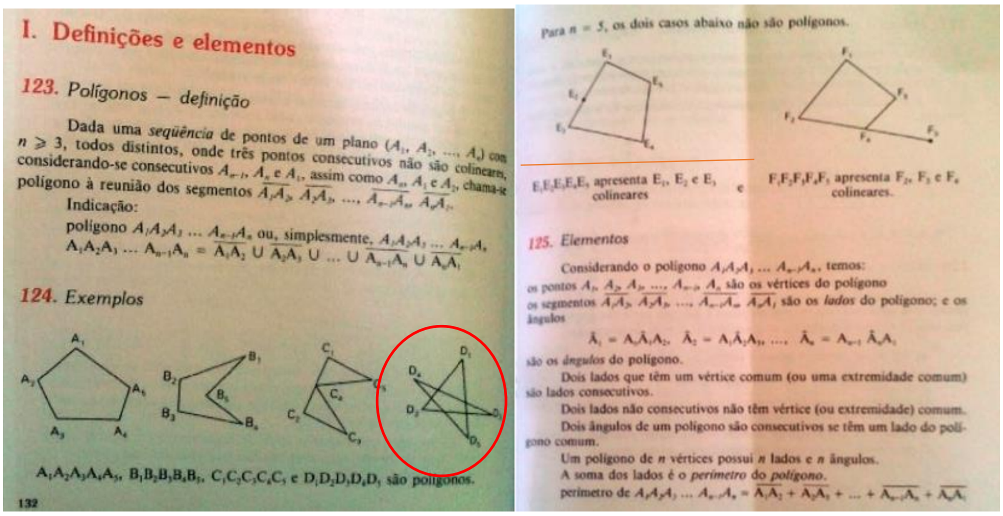
> Então, [...] é isso tem que colocar o que não se cruza, segmentos que não se cruzam (x_6)
> Não são colineares (x_5)
> [...] Eu acho que não, acho que ele já colocou a palavra contorno, porque ele não considera a parte de dentro (x_5)
> Eu também (x_1)
> Ele está desconsiderando (x_6)

Entre as definições apresentadas por livros didáticos, a definição quatro tem sido a mais completa, segundo os professores. No entanto, eles questionam por ser uma definição retirada de um livro de nível superior, que não vai ao encontro de suas realidades.

> [...]. Eu gostei da 4, mas ela é nível superior né (x_1)
> [...] Na 4, que ela fala assim seja A_1, A_2, A_3, ..., A_n, até $n \geq 3$, aqui ele já fala $n \geq 3$ [...] fiquei pensando nas outras definições [...]. Porque ele não fala o número de segmentos (Y)
> Quantidade mínima (x_4)
> N segmentos (x_6)
> [...]. Mas em algum, ele fala fechado né (x_2)
> Hum tem a primeira que ele fala fechado (x_4)
> [...] as outras duas também falam de contornos né, contornos fechados (x_5)
> [..] Não necessariamente, contorno, em volta de algo (x_2)
> [...] Se eu pegar, por exemplo, um clip e abrir, por exemplo, e faço assim, um formato assim (Y)
> É um contorno (x_2)
> [...]. Que não é uma figura (x_5)
> Está certo, contornou (x_1)
> Não é figura aqui? O que é figura? (Y)
> Hum gente, vamos ver, na internet, olha aí o conceito de contorno (x_2)
> Olham aqui que interessante, que aqui, nessa 4, ele fala assim com $n \geq 3$, mínimo de segmentos, tem que ser maior que 3 (Y)
> É porque se não acontece isso que você está falando, de fazer um L, por isso que ele delimita do 3, porque a partir do triângulo aí se delimita as outras figuras (x_6)
> Fechadas né (x_4)
> Polígonos (x_2)
> E continua, uma sequência de n pontos distintos tais que os segmentos A_1A_2, A_2A_3, ..., até A_n, A_1, têm as seguintes propriedades: Nenhum par de segmentos se intersecciona a não ser nas suas extremidades (Y)
> Aqui não tem cruzamento né (x_5)
> Não tem cruzamento, só vão se interseccionar, só vão se encontrar nas suas extremidades. Nenhum par de segmentos com extremidade comum está na mesma reta (Y)
> Ele falou reta agora (x_5)
> [...] depois, tem a definição do que é uma linha poligonal, tem as diagonais de um polígono, tem tudo isso aí ainda (x_6)
> [...]. Aí tem não colineares também (x_2)
> Tem as diagonais (x_6)

Como a atividade proposta no PEP - S_1 apresentava somente as definições, planejamos, juntamente com a atividade, alguns slides com as imagens de polígonos e seus respectivos conceitos abordados em livros didáticos. Ao analisar a definição do livro “Fundamentos de Matemática Elementar- Geometria Plana” – Osvaldo Dolce e José Nicolau Pompeo, exposto nos slides (figura 25), os professores tiveram dúvidas em compreender quando o autor menciona “[...] onde três pontos consecutivos não são colineares (2005, p. 132) ” e começaram a ver necessidade de buscar mais fontes de informação para o estudo proposto. As dúvidas aumentam quando as certezas que os professores estavam se apropriando no PEP são desconstruídas, ao visualizar os exemplos de polígono expostos no livro, pois já tinham certeza de que os segmentos de um polígono não se cruzavam. Assim, eles pontuam:

Figura 25- Definição de Polígono



I. Definições e elementos

123. *Polígonos — definição*

Dada uma *seqüência* de pontos de um plano $(A_1, A_2, \ldots, A_n)$ com $n \geq 3$, todos distintos, onde três pontos consecutivos não são colineares, considerando-se consecutivos A_{n-1}, A_n e A_1, assim como A_n, A_1 e A_2, chama-se polígono à reunião dos segmentos $\overline{A_1A_2}, \overline{A_2A_3}, \ldots, \overline{A_{n-1}A_n}, \overline{A_nA_1}$.

Indicação:

polígono $A_1A_2A_3 \ldots A_{n-1}A_n$ ou, simplesmente, $A_1A_2A_3 \ldots A_{n-1}A_n$

$A_1A_2A_3 \ldots A_{n-1}A_n = \overline{A_1A_2} \cup \overline{A_2A_3} \cup \ldots \cup \overline{A_{n-1}A_n} \cup \overline{A_nA_1}$

124. *Exemplos*

$A_1A_2A_3A_4A_5$, $B_1B_2B_3B_4B_5$, $C_1C_2C_3C_4C_5$ e $D_1D_2D_3D_4D_5$ são polígonos.

132

Para $n = 5$, os dois casos abaixo não são polígonos.

$E_1E_2E_3E_4E_5$ apresenta E_1, E_2 e E_3 colineares e $F_1F_2F_3F_4F_5$ apresenta F_2, F_3 e F_4 colineares.

125. *Elementos*

Considerando o polígono $A_1A_2A_3 \ldots A_{n-1}A_n$, temos:

os pontos $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_{n-1}, A_n$ são os vértices do polígono

os segmentos $\overline{A_1A_2}, \overline{A_2A_3}, \ldots, \overline{A_{n-1}A_n}, \overline{A_nA_1}$ são os *lados* do polígono; e os ângulos

$$\hat{A}_1 = A_n\hat{A}_1A_2, \quad \hat{A}_2 = A_1\hat{A}_2A_3, \ldots, \quad \hat{A}_n = A_{n-1}\hat{A}_nA_1$$

são os *ângulos* do polígono.

Dois lados que têm um vértice comum (ou uma extremidade comum) são lados consecutivos.

Dois lados não consecutivos não têm vértice (ou extremidade) comum.

Dois ângulos de um polígono são consecutivos se têm um lado do polígono comum.

Um polígono de *n* vértices possui *n* lados e *n* ângulos.

A soma dos lados é o *perímetro* do *polígono*.

perímetro de $A_1A_2A_3 \ldots A_{n-1}A_n = \overline{A_1A_2} + \overline{A_2A_3} + \ldots + \overline{A_{n-1}A_n} + \overline{A_nA_1}$

Fonte: Dolce, Pompeo (2005, p. 132)

> [...]. Olha lá o desenho que você fez, tá falando que é polígono ó (x_2)
> Não! Exemplos. Meu Deus! Como assim, ele destruiu tudo (x_4)
> Mas não é só ali, tem vários livros que mostram isso, porque daí depois vão entrar nas diagonais de polígonos e é formado mesmo (x_6)
> Mas e aí? Se cruzam ou não se cruzam? (x_5)
> É isso mesmo (x_1)
> Qual é a verdadeira definição, porque a gente até agora estava defendendo isso (x_5)
> Então (x_6)
> Mas agora chegou outro que falou (x_5)
> E lá não tem preenchimento tá (x_2)
> Aí ele desconstruiu tudo (x_5)
> O Osvaldo Dolce realmente, ele traz sem preenchimento (x_6)
> Ele traz sem preenchimento (Y)
> O livro todo? Nada tem preenchimento (x_5)
> Não, esse não (x_6)

Na condução do PEP – S_1, temos que o esquema herbatiano $[S_1(X, Y, Q_0) \rightarrow M] \rightarrow R^{\heartsuit}$ vai se constituindo pelas respostas intermediárias, no caso do excerto anterior, tem-se que os professores já tinham concluído que os R_{04}= *segmentos de um polígono não se cruzam*, e a definição exposta no livro desconstruiu o que eles haviam compreendido, bem como, nas imagens expostas, o autor considera a definição de polígono apenas o contorno sem a região interna. Outras respostas foram construídas como R_{01}= *Todo Polígono é uma figura plana;* R_{02}= *Polígono possui vários ângulos*, R_{03}= *Nem toda figura* *plana é considerada polígono;* R_{04}= *segmentos de um polígono não se cruzam,* R_{05}= *Polígono é uma figura bidimensional,* e, que no decorrer do PEP – S_1, essas respostas foram desestabilizadas. Desse modo, podemos inferir que, com o auxílio dos outros objetos matemáticos *(W_{01}, W_{02}, W_{03}. W_{04}. W_{05}, W_{06}, W_{07}, W_{08}, W_{09} e W_{010})* e por meio das perguntas derivadas da Q_0, o M foi evoluindo durante o percurso do estudo.

No decorrer do percurso, os professores (X_i) levantaram várias questões recorrentes sobre a questão geratriz Q_0, dentre as quais destacamos: Q_{01}*: "[...] qual a definição de segmento de reta?"*; Q_{02}*: "[...] o que é uma dimensão, o que significa duas dimensões?"*; Q_{03}*: "[...] considera para o preenchimento a região, ou só o contorno?"*; Q_{04}*: "[...] todo polígono, ele é considerado uma figura plana, mas eu não sei se toda a figura plana, ela pode ser dita como um polígono?"*; Q_{05}*: "O significado da palavra polígono não é vários ângulos?"*; Q_{06}*: "[...] um polígono é uma figura geométrica plana. O que é uma figura geométrica plana? "*; Q_{07}*: "[...] quando falo plano, já tenho a ideia de duas dimensões? "*; Q_{08}*: "[...] quando vai dar o conceito de polígono, ela já tem o conceito do que é ângulo? "*; Q_{09}*: "[...] polígono são figuras bidimensionais? "*; Q_{010}*: "O que é figura? "*; Q_{011}*: "[...] assumir ou não o dentro, eu estou tentando imaginar assim que quando a gente vai falar sobre perímetro e área, você fala área, você acostuma falar assim, aquilo que está dentro, não é ?".*

Cabe salientar que alguns questionamentos anteriormente mencionados foram respondidos durante o próprio percurso e outras questões conforme proposição dos professores foram respondidas em uma outra sessão, pois tiveram a necessidade de estudar individualmente. Alguns relataram que não lembravam muitos conceitos e não podiam contribuir nas respostas das questões levantadas pelos colegas.

No PEP - S_1, como nos demais percursos, a pesquisadora (Y) teve o papel inicial de orientadora do estudo, instigando os professores a perguntar e discutir sobre as suas praxeologias em torno do objeto estudado. Na tentativa de desestabilizar os professores quanto às suas certezas, questionamos o grupo sobre a possibilidade de considerar o polígono "somente o contorno sem preenchimento interno", como ficaria a explicação do conceito de área, como trabalhar com área de um polígono, se ele é uma figura unidimensional? Porém, nesse questionamento, surgiram outras questões em que o professor x_5 não compreendeu que, mesmo considerando só o contorno, não temos uma figura unidimensional. Para esse professor, a linha tem que estar esticada para ter uma única dimensão, no caso de um quadrado (somente o contorno), ele considera que possui duas dimensões (comprimento e largura):

[...] se polígono, eu penso numa figura formada por uma dimensão só, só o contorno, na hora de trabalhar com área como fica? (Y)
Nem isso eu não concordo, porque se eu fizer isso daqui (desenha no papel), isso daqui, para mim, não é uma dimensão, nem se eu considerar só a linha, porque tem que esticar a linha (x_5)
Mas ela é uma dimensão (Y)
Mas professora, tenho que esticar a linha, porque é uma dimensão só, então, ela não pode fazer isso daqui (faz gestos com a mão), ou ela segue pra cá, essa direção que existe, esse sentido que existe (x_5)
Onde tem duas dimensões? Se não estamos calculando área? (Y)
Na verdade, está fazendo o contorno, só o contorno (x_2)
[...] Então, deixa eu te perguntar, e o perímetro? (Y)
Hum (x_5)
Ele representa duas dimensões? (Y)
Ele é duas dimensões (x_5)
Não! (x_7)
Perímetro? Não! (Y)
A medida do perímetro é uma dimensão [...] Mas a gente calcula (x_5)
Eu estou concordando com todo mundo (risos), estou concordando com todo mundo (x_2)
[...] A gente calcula segmentos, não é? A gente calcula esse segmento aqui (desenha no papel) mais esse segmento aqui (x_5)
Eu concordo! (x_7)
[...] Mas qual a definição de perímetro? (Y)
A soma dos lados (x_2)
[...] É a soma da medida dos lados, é soma da medida dos lados, e eu estou trabalhando com uma dimensão (Y)
Uma dimensão, comprimento, exatamente (x_1)
Mas ele tá certo, o perímetro tem duas dimensões (x_6)
O perímetro tem duas dimensões? (Y)
É porque ele soma a altura com o comprimento dele, mas não que ele seja, ele não é representação bidimensional (x_4)
É pensar que podemos esticar (x_2)
Isso que eu ia falar agora, se você pegar esse pedaço aí e esticar (x_7)
[...] Mas a gente está somando segmentos né (x_5)
Vamos entender o que é dimensão. (Y)

Nesse diálogo, os professores expressam que R_{06}= *Perímetro possui duas dimensões* e todo o estudo do percurso para entender o conceito de polígono concentrou-se em entender o conceito de figuras unidimensionais, bidimensionais, pois, para o professor x_5, o fato de mudar de direção ao contornar uma figura, por exemplo, o quadrado, significa estar trabalhando com duas dimensões. De um modo geral, nesse primeiro momento, os questionamentos levantados pelos professores são relativos a conceitos básicos da geometria, deixando explícito, nesse PEP, o quanto existe de lacunas de saberes para dialogar sobre as questões de ensino e aprendizagem da matemática. Sem entender muito a ideia do professor, o estudo continua em busca da compreensão do conceito de polígono, a atividade proposta no início do percurso:

> [...]. Então, o nosso querido polígono, ele não é polígono (x_2)
> [...]. Qual a definição que você vai adotar? (x_5)
> É, e aí depois vou dizer também, de acordo com os livros didáticos também, tem que considerar que houve uma mudança na matemática, e a leitura também, as definições foram mudadas, querendo ou não teve né Y, não carrega o Osvaldo Dolce em um livro de sexto e sétimo ano, né aquela primeira definição não (x_6)
> [...]. Qual que é a definição verdadeira? Porque é a definição não é (x_5)
> Mas existe uma verdadeira, uma universal? (Y)
> Alguém demonstrou? (x_5)
> Vamos pegar a demonstrada, a demonstrada, não tem, cadê o Euclides? (x_6)
> [...]. Quando é pequenininho assim, e uma coisa aparecer, eu falo gente ó, eu sou professora de matemática, mas a gente não sabe cem por cento, eu não vou falar nada errado se eu não sei, eu falo mesmo, vou fazer o que, acho que a Y sabe, ela está querendo confundir (x_2)

Os professores começam a querer chegar em uma resposta $R^{\heartsuit}$, uma resposta almejada que possa sanar todas as suas dúvidas. No geral, compreendem que o polígono é a figura com contorno e sua região, no entanto, não conseguem justificar as suas respostas e passam a querer "provas e demonstrações" do que começam a estudar, ficando explícita a necessidade de trabalhar na constituição do ambiente tecnológico-teórico relativo à tarefa proposta, ressaltando a necessidade e a importância de demonstrar em Matemática. Eles também acreditam que a pesquisadora, como orientadora de estudo (Y), possui a resposta para o que está sendo estudado. Isso expressa o quanto os professores estão direcionados pelo paradigma "visitando os monumentos", no qual o orientador do estudo sempre tem uma resposta para apresentar.

Como pesquisadora (Y), não havia a intenção de apresentar respostas aos professores e, após uma hora e meia de discussão em torno do conceito de polígono, não construímos uma praxeologia referente ao conceito estudado, os professores estavam inseguros quanto aos conteúdos matemáticos (mesmo que básicos) e não conseguiam expressar-se sobre o questionamento levantado na Q_0. Como mediadora do estudo e tendo como aporte metodológico do PEP, compreendia que, naquele momento da formação, se fizéssemos alguma explanação referente a uma determinada praxeologia para responder as questões feitas pelos professores, estaríamos desconstruindo o nosso percurso, pois iríamos dialogar numa perspectiva de "visitas às obras", como menciona Bosch e Gáscon (2010) dos estudos "praxeologicamente fechados", se estaria realizando um monólogo.

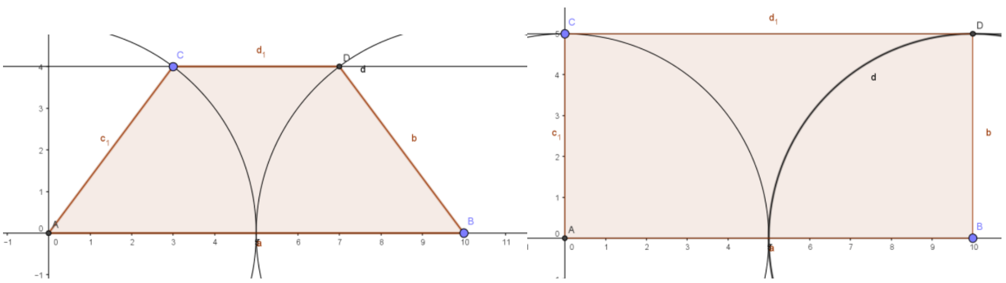
Por certo, os professores viram a necessidade de buscar mais informações (na mídia), alguns comentaram a necessidade de buscar na internet, bem como em livros utilizados durante a graduação específicos de Geometria (José Carlos Putnoki "Jota"), em outros livros didáticos, para construírem uma resposta, pois muitos comentaram que fazia algum tempo que não estudavam os conceitos geométricos, então sugerimos continuar o estudo sobre outro conceito. Vale destacar que, no momento que recomendamos partir para a discussão do conceito de trapézio, a pesquisadora tinha em mente que esses mesmos professores que constituíram o grupo X_1, estariam presentes na próxima sessão, para dar continuidade ao estudo de polígonos. Na sequência do percurso, começamos a estudar o outro conceito proposto pelo PEP - S_1, o conceito de trapézio

> [...] A questão da próxima definição, que até agora nós ficamos em polígono, que é o caso particular de polígono, o de trapézio, a definição 1 ele fala assim, é um quadrilátero que tem ao menos um par de lados (Y)
> Ao menos significa que pode ter mais (x_2)
> Gente, não tem como, é quadrilátero (x_4)
> [...]. Ao menos um par de lados paralelos, não significa, vai ter os quatro lados (Y)
> Uai, o outro par não pode ser? (x_2)
> Pode ser um retângulo ou quadrado (x_5)
> Ah ... entendi (x_4)
> Um trapézio é um quadrilátero, um trapézio é um quadrilátero em que dois lados são paralelos (Y)
> Ali já não fala ao menos, ali só fala dois (x_2)
> Na três, ele fala os trapézios são quadriláteros que têm apenas dois lados opostos paralelos e o quarto ele fala: quadrilátero que tem um par de lados paralelos (Y)
> Não, mas esse é diferente (x_4)
> Não, mas a palavra ao menos indica que pode ser uma, ou pode ser um parzinho (x_2)
> É (x_6)
> Mas aquele terceiro diz que não (x_4)
> O quadrado é um trapézio? Um retângulo é um trapézio? (Não entendi a palavra) É para ser né (x_5)
> Depende da definição (Y)
> Do ao menos lá pode (x_2)
> Quando fala ao menos um (x_4)
> Isso mesmo (x_5)
> O trapézio pode ser um paralelogramo, um retângulo pode ser um trapézio (Y)
> É, mas tem aquele que, todo trapézio é um retângulo? (x_6)
> [...] Mas aí, ele é um quadrilátero, falou ao menos um, quer dizer o outro par pode ser também (x_2)
> Pode ser também (x_4)
> Então, por exemplo, no quadrado, no retângulo, nós temos dois pares de lados paralelos, então o trapézio, ele pode ser um retângulo ou um quadrado, certo? (Y)
> E aí aquelas frases, todo trapézio é retângulo, todo retângulo é um trapézio (x_2)
> [...]. É, eu não usaria, eu não usaria ao menos, a definição do ao menos [...]. A definição dois, ou a definição três, mas mais próximo daquilo que eu trabalho é a três (x_6)

É, dois lados são paralelos (x_5)
Dois lados, se dois lados são paralelos, os outros dois lados também podem ser (Y)
Então (x_6)
Então, deveria ter o somente? (x_2)
Ele não está falando o par (Y)
Então, se for aceita a palavra somente (x_2)
É tinha que colocar (x_4)
Então, daí a gente vai entrar na definição três (x_6)
A melhor (x_4)
Ela está mais (x_6)
Dois lados opostos (Y)
Somente (x_2)
Dois lados (Y)
Mas então a definição 1 e a 3 elas são totalmente diferentes (x_2)
Totalmente diferentes (Y)

Nesse estudo, os professores levantam algumas questões, no sentido de compreender o conceito de trapézio: *Q_{012}: O quadrado é um trapézio? Q_{013}: Um retângulo é um trapézio? Q_{014}: Todo trapézio é um retângulo?* e começam a tentar compreender as diferentes definições expostas na atividade. Na busca por instigar as discussões sobre o conceito de trapézio, como essa atividade apresentava apenas as definições, julgamos necessário apresentar algumas imagens. Segundo Leivas (2012), a condução do pensamento geométrico deve perpassar a imaginação, intuição e visualização, desse modo, planejamos e realizamos uma construção no Geogebra[43] do trapézio ABCD sendo AB = 10 m e AC = BD = 5 m, conforme figura 26, que segue, para que os professores pudessem visualizar que, ao deslocar o ponto C no desenho, o trapézio se tornaria um retângulo:

Figura 26- Construção do trapézio no Geogebra



Fonte: Elaborado pela pesquisadora

[43] Os professores solicitaram, durante a formação continuada, o compartilhamento de recursos e materiais didáticos entre os participantes. Assim, apresentamos o Geogebra como recurso didático possível e a sua escolha deu-se pelo fato de tratar-se de um software gratuito e muito utilizado por pesquisadores e professores de matemática.

Qual que está certa? É a 3 né, porque, até hoje, cadê os trapézios. Se ao menos te dá margem para mais um par, cadê, nas figuras dos outros livros, que eu fui procurar aqui, que todo mundo tem uma montanha em casa, cadê? Eu fui procurar nas figuras, cadê os dois pares, pares paralelos quando tá isso daqui do trapézio, nenhum demonstrava dois pares, na figurinha, aí eu tirei e não vou usar aquela não, e daí? Mas lá, ao menos, fala (x_2)
É esse, ao menos, eu não conhecia ele, não (x_1)
[...]. Assim, um trapézio é um quadrilátero que tem dois lados, que dois lados são paralelos, também (Y)
Dá margem para ao menos, quase igual ao menos (x_2)
É análogo (Y)
Um trapézio é um quadrilátero em que dois lados são paralelos, se dois lados são paralelos, os outros dois também pode ser? (Y)
Ele não está falando nada sobre os outros dois, ele pode ou não ser agora a três, é assim, ela se prende bem a alguma coisa (x_2)
[...] A grande diferença ali, é a palavra “apenas” (Y)
Isso (x_1)
Apenas dois lados (x_4)
É apenas, ficou restrito né (x_6)
Mas cadê as figuras que mostram para gente que o trapézio tem dois pares paralelos? (x_2)
O trapézio é um quadrilátero que tem um par de lados paralelos, a 4 né (x_6)

Por certo, a continuação do PEP – S_1 instiga a outras questões, levantadas pelos professores: *Q_{015}: Qual a definição de Quadriláteros? Q_{016}: Qual a definição de Paralelogramo?* Durante a discussão sobre o conceito de Trapézio, a pesquisadora (Y) foi até o quadro e fez uma classificação, de acordo com as suas práticas em sala de aula, na qual classificava os quadriláteros em Paralelogramos e em Trapézios, bem como, os quadriláteros que não eram nem Paralelogramos e nem Trapézios, indicando que, nessa classificação, estaríamos assumindo a definição de que o trapézio possui apenas um par de lados paralelos, diferenciando do Paralelogramo, o qual possui dois pares de lados paralelos, a fim de demonstrar como trabalhava tal conceituações:

Nós precisávamos de algo mais aprofundado que nos mostre (x_2)
Só se tiver e nós estamos por fora, mas eu particularmente fico com a três, está mais próxima do que eu já trabalhei, aquele ao menos ali, embora seja (x_6)
Ao menos (x_4)

Neste sentido, os professores depararam-se com conceituações conflituosas e deixaram explícita novamente a necessidade da constituição de um bloco teórico-tecnológico. Podemos inferir que as praxeologias mobilizadas pelos professores delimitavam as suas afirmações e o quanto as condições e restrições em torno do conhecimento matemático deles limitavam a busca por respostas para o percurso, pois muitos não sabiam justificar essas respostas.

Finalizando a sessão, pois não encerramos o PEP - S_1., não chegamos a uma resposta (praxeologia), visto que os professores viram a necessidade de pesquisar e estudar alguns conceitos para indicar algumas conclusões e encontrar respostas para os questionamentos sobre algumas afirmações em torno dos quadriláteros, ficando para estudarmos no próximo encontro

> O que ficou para pesquisar para o próximo encontro? Essas questões de dimensões?(Y)
> Contorno, preenchimento [...] Preenchimento de figuras de uma dimensão, duas dimensões, para entrar em um consenso e, depois, responderemos alguns questionamentos aqui: Todo quadrado é um retângulo; todo quadrado é um losango. Vamos ver se fala do trapézio, existem paralelogramos que são trapézios (x_2)
> Podemos pensar assim, cada um responde isso aí, e a gente discute e continua no próximo encontro, sobre essas dúvidas que ficaram, e aí vocês poderiam buscar, o que vocês acham? (Y)
> Até trazer material para mostrar (x_2)
> Isso, vocês concordam? (Y)
> Concordo, aliás eu ia fazer isso para hoje, mas o tempo né, bendito tempo, eu falei nossa, eu nem respondi a apostila da professora, mas responder para mim é para eu ter me preparado, vim armada para você (x_2)
> [...]. Pode (x_4)
> [...] A gente pode discutir, continuar as nossas discussões com relação a isso que a gente vai ter um estudo sobre, o que vocês acham? (Y)
> [...]. Imagina se a gente tivesse mais dúvida assim durante a faculdade? (x_6)
> Nossa, seria muito bom, [...] E a gente assim, sei lá a gente vê muito pouco mesmo Geometria, a gente vê pouco né (risos) é verdade, eu já trabalhei em escola, só que, na faculdade, eu não vi tanto assim (x_1)

Assim, percebemos, pelas falas dos professores e pelo envolvimento nas discussões, que, de fato, constituímos algumas características do percurso, um estudo em torno do conceito de polígono e, em particular, o trapézio e que os professores queriam chegar a um consenso, a uma resposta definitiva, deixando explícito o quanto eles veem a Matemática como uma ciência exata, que precisa ser demonstrada e seus conceitos não podem admitir duplicidades.

Diante desses fatos, como orientadora do estudo, vimos que o PEP - S_1 não poderia ser finalizado apenas apresentando respostas para eles, além disso, por meio de suas falas, estava clara a necessidade de mais estudo, de busca de respostas, como menciona x_1, que não teve oportunidade, na formação inicial, de estudar muito os conceitos geométricos e, principalmente, pelo fato de estarem um tempo sem estudar os conteúdos geométricos expostos no decorrer do percurso.

Portanto, na execução do PEP - S_1, foi constituído o seguinte esquema [$S_1(X_1$, Y, $Q_0) \rightarrow$ M={R_i, Wj, Q_k}], no qual R_i representa as respostas intermediárias i={01, 02, 03, 04, 05, 06}; Wj outros saberes disponíveis, j= {01,02....010} e Q_k as perguntas derivadas de Q_0 com k={01, 02, ...014}. Todavia, os professores não chegaram a uma praxeologia no que diz respeito ao conceito de polígono e, em particular, o de trapézio. Como orientadora (Y) não quis impor uma resposta, amparada no paradigma *questionamento do mundo*, então o PEP - S_1 ficou em aberto, tornando-se evidentes algumas limitações dos conhecimentos geométricos por parte dos professores. Essa situação, vem ao encontro das pesquisas de Leivas (2012), Almouloud et al. (2004), Nunes (2010), quando mencionam que se tem muito o que fazer na formação de professores de matemática com relação ao ensino de geometria, condições que não permitiram a conclusão do percurso.

Logo, todos ficaram de estudar e pesquisar para a próxima sessão, de tal forma que a nossa expectativa enquanto orientadora do estudo era propiciar mais momentos como estes, que fez com que os professores expusessem as suas praxeologias OM e OD em torno dos conceitos estudados.

Na continuidade dos PEP com os professores, desenvolvemos o PEP - S_2, com as discussões iniciadas no PEP - S_1. Para esse estudo, ficamos de encerrar as discussões principalmente de dimensão e conceito de área quando assumimos que o polígono é apenas o contorno da figura, sem o preenchimento. Para esse percurso, tivemos a presença de apenas dois professores x_5 e x_3, mas somente o professor x_5 participou do PEP -S_1, uma vez que professora x_3 havia participado do primeiro encontro, quando houve a reunião do grupo de professores para conhecê-lo e dialogar sobre o ensino de Geometria. Para iniciar o PEP - S_2, tentamos, primeiramente, retomar algumas discussões e dúvidas já iniciadas para que a professora x_3 compreendesse o que foi trabalhado na sessão anterior e, na sequência, questionamos se o professor x_5 estudou sobre as dúvidas levantadas no encontro anterior.

> [...]. Eu pesquisei bastante coisa (x_5)
> E aí? (Y)
> Então, então ó eu pesquisei, losango, trapézio e do polígono né, o polígono, eu pesquisei na internet, aí achei no google assim: que é a figura plana formada pelo mesmo número de ângulos e lados, tranquilo, aí eu achei no, eu fui procurar no, em outras fontes né, pesquisei no wikipédia brasileiro e no estrangeiro também né, ai eu achei que o Euclides, ele define assim: uma figura limitada por linhas retas só (x_5)

> Eu sei, aí você entende que por linhas retas vai ficar que tem o meio né (x_3)
> E daí [..], também conversei com alguns amigos também, aí isso daqui é polígono (desenha no papel), não tem discussão
> Mesmo que se cruza? (Y)
> Hãhã, ele é feito por linhas poligonais né, e tem toda uma definição por trás disso, tudo isso vi na internet, mas tudo bem, que é mais fácil, que assim isso daqui é um polígono, é aceito como polígono e existe as classificações de polígono, esse é um polígono e esse é um polígono não convexo né, então se dividir em polígono não convexo e polígono convexo (x_5)

No início do PEP - S_2, já percebemos que o professor estudou e buscou respostas para as inquietações elencadas no PEP - S_1, realizando pesquisa na internet, em livros didáticos e questionou os demais colegas da profissão. Por certo, o PEP - S_1 impulsionou a busca de mídia (fontes de informação) que foi integrada ao Meio em busca das repostas almejadas $R^♥$. Por mais que pensamos em definir cada micropercurso como distinto, o fato de ter participado e surgido inquietações que desestabilizaram o professor x_5, fez com que este se envolvesse mais nas discussões do PEP - S_2.

Com o intuito de direcionarmos o estudo desse percurso para respostas, no sentido exposto por Bosch e Gascón (2010), que é ampliar o universo praxeológico da comunidade de estudo, focamos, nessa primeira etapa, em compreender o conceito de área de um polígono, a partir da questão: *Q_{011}: "[...] assumir ou não o dentro, eu estou tentando imaginar assim que quando a gente vai falar sobre perímetro e área, você fala área, você acostuma falar assim, aquilo que está dentro, não é?* Como orientadora do estudo (Y) de uma formação continuada, buscamos também apresentar algumas considerações em torno da questão levantada, visto que os professores poderiam não mostrar o que, de fato, estudaram sobre os questionamentos. Para tanto, levamos o livro de Geometria Euclidiana Plana, do autor João Lucas Barbosa, para que o grupo pudesse estudar e caminhar para o desenvolvimento de uma resposta. Assim, quando consideramos que o polígono é somente o contorno da figura, a definição exposta pelo autor João Lucas Barbosa possibilitou entender tais questionamentos levantados no PEP - S_1

> [...] olhando até aqui as definições do João Lucas com relação ao que ele assume como polígono, ele assume polígono como somente o contorno [...] é claro que todo o polígono convexo determina uma região poligonal, é claro isso né, então, no caso, o convexo e não convexo, nós iremos tomar a liberdade de usar expressões do tipo 'a área de um quadrado' quando queremos dizer realmente a área da região

> poligonal cuja a fronteira é um quadrado, então ele está assumindo que o quadrado é só a fronteira ali, só o contorno (Y)
> Aquela área que está dentro (x_5)
> É uma área limitada pelo polígono, região delimitada pelo polígono (Y)
> [...]. Faz bastante sentido né, porque, antes disso, de entrar em polígono, a gente entra em linha poligonal né, então, e depois que entra em polígono, que é quando fecha a figura não é [...] é um exemplo bem claro que facilita no entendimento deles né, e que a minha vida inteira eu achei que tudo isso né, por exemplo, você tem lá um terreno e tem um muro, o que é seu é só o que está limitado naquele retângulo, então seria a área também né, que está limitado, o que é a área do retângulo? É aquela parte que está limitada pelas linhas poligonais, aí é mais fácil, para eles entenderem (x_5).

Ao apresentar a definição do livro do João Lucas Barbosa, não tínhamos a intenção de expor as respostas aos professores. No entanto, tínhamos vivenciado a necessidade de obter algumas conclusões, para que o PEP – S_1 não ficasse mais em aberto, pois, como destaca Chevallard (2009), temos que chegar em respostas $R^{\heartsuit}$, a uma praxeologia, e a não conclusão do PEP – S_1 poderia desestimular os professores no desenvolvimento dos próximos percursos. Na continuidade, buscamos retomar as dúvidas do professor x_5 relacionadas ao conceito de perímetro, dúvida que gerou controvérsias e muitas inquietações com relação ao posicionamento do professor em entender o conceito de perímetro, R_{06}= *Perímetro possui duas dimensões,* e salientamos, que, na Geometria Analítica, quando trabalhamos com vetores, as suas pontuações fazem sentido, no entanto, na Geometria Euclidiana, o perímetro é referente a uma única dimensão, pois, para calcular o perímetro, basta somar as medidas de cada segmento, enquanto que vetores são classes de equivalência de segmentos orientados. Ao retomar a discussão sobre o que era dimensão, o professor pontuou:

> [...] eu pesquisei o que era dimensão, mas, mas o que eu achei foi muito superficial, porque aí ele falou assim né, para a nossa área, para nossa área, não achei, mas eu achei em Física, em Física, ele simplesmente fala que dimensões existem quatro né, e que três é definida como é as três dimensões físicas né, tipo largura, altura e comprimento, e existe a quarta dimensão, que é o [...] (x_5)

Para o estudo de dimensão, o professor buscou algumas fontes, mas ainda se notava uma falta de compreensão com relação à resposta intermediária R_{06}. Assim, por meio do bloco Grandezas e Medidas, realizamos uma discussão sobre dimensões, visando também esclarecer dúvidas em torno do conteúdo de perímetro. Cabe salientar que as respostas obtidas do PEP - S_1 foram buscadas pelo professor e não tínhamos a intenção de respondê-las, mas as respostas foram institucionalizadas por x_5. Outra questão retomada pelo professor foi com relação aos segmentos, lados do polígono, cruzam-se ou não, R_{04}= *segmentos de um polígono não se cruzam*. Para o professor, segundo a sua pesquisa, alguns matemáticos preferem trabalhar com polígonos que não se interseccionam, por serem mais comuns para calcular áreas.

Finalizando a retomada dos conceitos abordados no percurso PEP - S_1, buscamos entender o conceito de trapézio. Para o professor, este é um conceito que ele não tinha mais dúvida, pois os autores Moise e Muniz apresentam uma definição que o professor assujeita-se, pelo fato de compreender que são autores referências no ensino de Geometria, os quais assumem o trapézio como um paralelogramo. Ele comentou:

> [...] eu trouxe o Moise e o Muniz, eles definem o trapézio aceitando que pode ser, sim, um paralelogramo, página 203, ó o trapézio é um quadrilátero que tem dois lados paralelos, né, ele já traz aqui ó, paralelogramo [...] observe que esta definição permite que ambos os pares de lados compostos sejam paralelos, se isto acontecer, temos o paralelogramo (x_5)

Certamente, o fato de termos somente um professor que havia participado do PEP - S_1 no desenvolvimento do PEP - S_2 propiciou entender que a constituição de uma formação continuada perpassa condições e restrições que vão além da intenção e da proposta de estudo. Embora os professores tenham participado do percurso e expressado o quanto gostaram da metodologia da formação, o fato de que estavam realizando uma formação no turno noturno, após um dia inteiro de trabalho, era previsto ocorrer: cansaço físico e mental; indisponibilidade de tempo; necessidade de logística familiar para deixar os filhos com um responsável no momento da formação e ainda acúmulo de serviços, correria para corrigir provas, trabalhos, finalizar notas no final do bimestre. Isso pode ser condições para alguns, mas restrições para outros, que implicavam diretamente na não participação efetiva dos professores nos PEP.

Isso é confirmado pela resposta da professora x_2, ao ser questionada sobre as formações continuadas que acontecem em expedientes fora do horário de serviço. No caso, como as formações continuadas mais recentes na vida da professora têm ocorrido aos sábados, ela expressou:

> [...] vejo um obstáculo grande para participar, pois o sábado eu, assim como todos os outros colegas professores já estão cansados, uma jornada semanal cansativa, também esse dia deveria ser dedicado à família e mais, temos serviços domésticos para realizar nesse dia. Contudo, quando há sábado letivo, consideramos que não houve fim de semana, nem preparo físico e psicológico para iniciar outra semana. (x_2)

Pela fala da professora, temos indícios que as formações continuadas vivenciadas por ela não diferem das pesquisas desenvolvidas no PPGEduMat discutidas no item 2.2 do capítulo 2, nas quais as formações ocorreram na sua grande maioria em horários após as aulas dos professores e, principalmente, aos sábados. Os desenvolvimentos dos micro-PEP foram de acordo com as especificidades do grupo de professores, pois as tentativas de mudar de horário e dia da semana não contemplavam todos os professores envolvidos na formação. Assim sendo, compreendemos que a formação continuada constitui um espaço no qual ambos os envolvidos, (X) os professores e (Y) orientadora do estudo, fazem parte no desenvolvimento e direcionamento dos estudos. Além disso, é uma característica do PEP, segundo Bosch e Gascón (2010), que este tenha uma estrutura aberta e indeterminada no início e que o próprio processo de estudo vai direcionando o caminho a seguir.

Amparados na questão geratriz Q_0*: Conceitos de polígonos e, em particular, o de trapézio*, o foco principal do PEP - S_2, além de responder as dúvidas do PEP - S_1, foi continuar a atividade proposta, pois tínhamos diferentes afirmações em torno do estudo polígonos, em especial, dos quadriláteros, e os professores tinham que pontuar se as sentenças eram verdadeiras ou falsas.

Verificamos que a não participação da professora x_3 no PEP - S_1 trouxe alguns entraves para o PEP - S_2, uma vez que, por várias vezes, ela mencionou que estava ali apenas para acompanhar as ideias do outro professor, como afirmou: "Hoje estou concordando, eu não pesquisei, não fiz nada, eu só vou concordar (risos) (x_5) ". Desse modo, a professora não participou ativamente, no que diz respeito aos topos de X no desenvolvimento do percurso, condição necessária para que o PEP funcione, (os estudantes das questões têm que querer aprender algo) deixando a responsabilidade para o outro professor. Certamente, podemos deduzir que o PEP para essa professora pode ser classificado como um estudo do tipo *visita às obras*, processo no qual os conteúdos foram sendo apresentados sem o interesse da professora em envolver-se efetivamente nos estudos, ratificando o que os autores Barquero, Bosch e Gascón (2011) pontuam, ou seja, que os desmembramentos do PEP dependem dos envolvidos no percurso.

De fato, essa é a realidade da formação continuada envolvendo professores de matemática de diferentes escolas, com carga horária de trabalho diversas e que são convidados a participar de uma formação de livre espontânea vontade, sem nenhuma imposição institucional. Diante disso, destacamos somente o momento em que a professora x_5 participou do PEP, apresentando indícios de uma desestabilidade praxeológica. Nas respostas das sentenças, ambos os professores x_3 e x_5 tiveram dificuldades em compreender a sentença que: "Existem polígonos equiláteros que não possuem todos os ângulos iguais", visto que, para eles, a palavra "equilátero" remete a ângulos iguais:

> [...]. Existem polígonos equiláteros que não possuem todos os ângulos iguais (Y)
> É falsa (x_5)
> Falsa? (Y)
> Porque equilátero é os três ângulos, os três ângulos são iguais (x_3)
> O ângulo é proporcional ao tamanho do lado (x_5)
> Os três lados iguais, os ângulos têm que ser iguais, porque se os lados são iguais, diretamente os ângulos vão ser iguais, não tem como ser diferente (x_3)
> É? (Y)
> É professora, equi igual, a gente não ensina lá que os ângulos são proporcionais aos lados, bom, eu ensino assim (x_5)
> [...]. Eu penso assim, se os lados são iguais, os ângulos são iguais, pois são equi, equiláteros, você não ensina que os lados são proporcionais (x_3)
> [...] quadrado é um equilátero não é, tem todos os lados, são iguais, um polígono equilátero, o pentágono pode se equilátero, tem todos os lados iguais, entendeu? eu estou seguindo essa linha de raciocínio né (x_5)

Para a professora x_3, a resposta R_{07}= *equilátero é os três ângulos, os três ângulos são iguais* aponta a palavra "equilátero" como sendo um conceito exclusivo do triângulo. Posteriormente, durante o estudo, vão se ampliando as discussões sobre o conceito a partir das pontuações realizadas por x_5. Na sequência do PEP - S_2, tivemos algumas respostas intermediárias, mas as discussões das sentenças não geraram outras questões a partir de Q_0 e, na tentativa de ampliar o estudo, questionamos novamente os professores e estes já requerem um contraexemplo referente ao que estavam afirmando,

> Há polígonos equiláteros que não possuem todos os ângulos iguais? (Y)
> Não! Isso é falso (x_5)
> Para mim, é verdadeiro (Y)
> Não, possui ângulos iguais! (x_5)
> [...] Professora, me dá um contraexemplo (x_3)
> [...]. Existem polígonos equiláteros, o que é polígonos equiláteros? Todos os lados são iguais [...] e que não possuem todos os ângulos iguais? Você acabou de ler a definição de um (Y)
> Trapézio? (x_5)
> Não, losango, ele é equilátero (Y)
> Os ângulos não são iguais (x_3)
> Por que não? (x_5)
> Do losango, é? Ele é um polígono equilátero, o losango (Y)
> Sim (x_3)

Porque ele tem os quatro lados iguais, só que os ângulos não são necessariamente iguais (Y)
Os ângulos não são iguais? (x_5)
Não (Y)
Não, já te visualizei (faz gestos com as mãos) esse ângulo aqui é maior que esse ângulo aqui é (desenha no papel), ó esse daqui ó, esse ângulo aqui ele é igual a esse, agora esse daqui ó, vou fazer até maior ó, (x_3)
Mas isso não é um quadrado virado? (x_5)
Mas aí esse aqui é espremidinho (x_3)
Hum, é verdade, dá para fazer (x_5)
Porque o quadrado tem os quatro ângulos retos, o losango só tem que ter os quatro lados iguais, ele não precisa ter os quatro ângulos retos (Y)

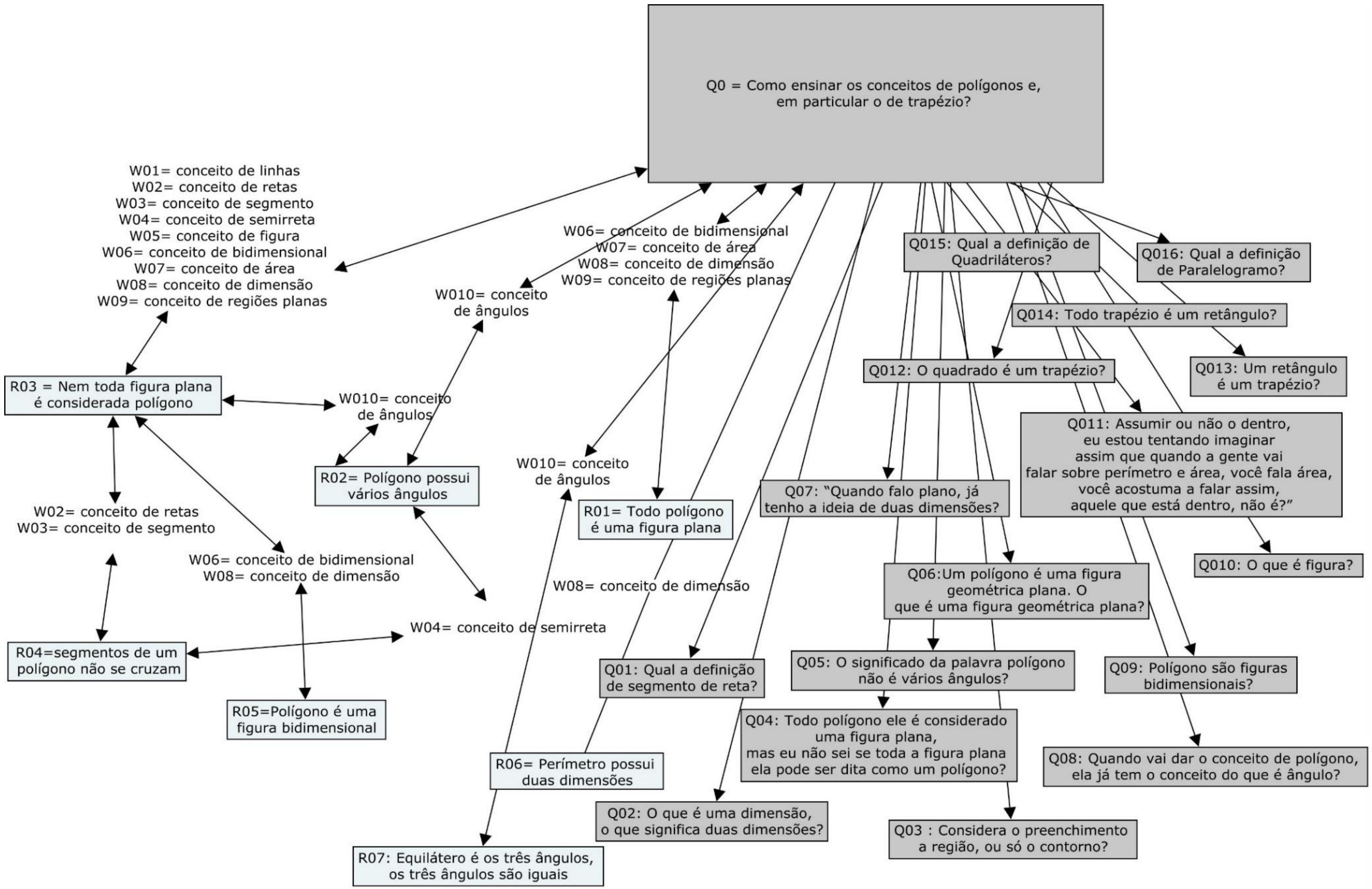
Nesse fragmento, observamos uma mudança nos componentes do sistema didático S_2, pois a posição de x_3 que era de estudante da questão passa para orientadora do estudo. A professora, após compreender a questão, propôs-se a orientar x_5 na busca por uma resposta, de modo que podemos inferir que os papéis de cada componente do "micro" sistema didático pode ser alternados durante o transcorrer do percurso.

Percebemos, assim, que, na execução do PEP - S_2, comparado ao PEP - S_1, tivemos direcionamentos diferentes. Este acabou sendo desenvolvido para concluir o PEP - S_1, para chegar nas respostas praxeológicas. No entanto, vimos que o fato da professora x_3 não ter participado de nenhum percurso fez com que não demonstrasse e expressasse tantas dúvidas em torno dos conceitos, como tem feito o professor x_5. Além disso, em todos os questionamentos levantados pela orientadora do estudo (Y), a professora x_3 alegava que estava presente apenas para ouvir e, assim, não teve um papel ativo no percurso. O fato de não estar presente no PEP - $S_{2,}$ pelo menos mais um professor participante do PEP – S_1, para além do x_5, fez com que as respostas praxeológicas $R^{\heartsuit}$ fossem conclusões do professor x_5.

Para o professor $x_{5,}$ a praxeologia em torno do PEP – S_1 é resultante de algumas conclusões: que a Matemática não é uma ciência exata, de acordo com os conceitos estudados que apresentam conflitos, e que, no ensino desses conceitos, podemos admitir um ou outro conceito, desde que a sua prática pedagógica seja condizente com os conceitos mobilizados. Esse professor ressalta a importância de analisar os livros didáticos. No entanto, assinala a necessidade de estudar sobre o conteúdo a ser ensinado para fazer uma análise precisa dos livros didáticos. Neste sentido, podemos compreender que a formação continuada perpassa condições e restrições por parte de cada participante e do próprio sistema escolar. De fato, o professor tem que ministrar 40 horas/aula e ainda participar, no período noturno, de uma formação continuada, requer esforços que podem restringir a qualidade de vida particular e profissional.

Em suma, o trajeto percorrido nos sistemas [$S_1(X_1, Y, Q_0)/S_2(X_2, Y, Q_0 \rightarrow M=\{R_i, Wj, Q_k\}$], em que R_i representa as respostas intermediárias i={01, 02, 03, 04, 05, 06, 07}; Wj outros saberes disponíveis, j = {01,02....010} e Q_k as perguntas derivadas de Q_0 com k={01, 02, ...014} pode ser visualizado no mapa (figura 27), que expressa os direcionamentos realizados pelos professores:

Figura 27 - Percursos S_1 e S_2



Fonte: Elaborado pela pesquisadora

Ao terminar o PEP - S_2, os professores pontuaram a necessidade de ter atividades mais práticas, envolvendo algum material didático que pudessem levar para a sala de aula. Como desde a primeira conversa com os professores reforçamos a ideia que os PEP eram abertos para que eles pudessem sugerir estudos em torno do que os inquietava, tal situação norteou os direcionamentos para o próximo percurso, com situações fictícias de uma sala de aula, como analisamos a seguir no desenvolvimento do $S_3 = \{X_3, Y, Q_1\}$, no qual contamos com a participação de quatro professores: $X_3= \{x_1, x_2, x_5$ e $x_6\}$.

Como alguns professores, no caso x_1, x_2 e x_6, estiveram presentes no PEP - S_1, e não participaram do PEP - S_2, o início do PEP - S_3 contou com algumas explicações em torno das conclusões do PEP - S_1 e do PEP - S_2, uma vez que os professores perguntaram quais foram os direcionamentos e as respostas diante das questões que haviam sido levantadas. O fato de ainda não terem uma praxeologia $R^{\heartsuit}$ incomodava-os, mesmo após um mês do PEP - S_1 ter ocorrido. Para o percurso PEP - S_3, ressaltamos que o professor x_5 foi o único que participou dos três percursos desenvolvidos.

A proposta do PEP - S_3 foi instigar um percurso com base na questão *Q_1= Como ensinar os conceitos de perímetro e área?* Tendo como foco realizar a tarefa T*: Definir o conceito de área e perímetro*, por meio da técnica *τ: Mostrar que o mesmo objeto matemático possui grandezas diferentes*, de modo que os professores pudessem discutir as distinções e ao mesmo tempo as interligações entre objeto geométrico, grandezas e medidas. Ao iniciar, a orientadora (Y) instigou uma discussão sobre a disciplina de Matemática, já que alguns professores começaram a debater sobre a matemática da escola não ser científica. Apesar de ser equivocada i a ideia da matemática ser ou não científica, podemos inferir que tais diálogos remetem a alguns elementos das praxeologias para ensinar, como podemos visualizar:

> A matemática não é cientifica? (Y)
> [...]. Ela é ... querendo ou não, a gente é muito presa ao livro, a matemática é presa ao livro, o que a gente ensina, a gente tem que recorrer ao livro porque o aluno e leigo né, ele acredita em tudo que a gente falar. [...] o conhecimento matemático é para poucos assim, você pega a OBMEP, a OBMEP é para poucos [...] ela consegue ser universal quando a gente muda a linguagem (x_6)

Para Pais (2002), a linguagem é o cerne dessas transposições. Enquanto, na academia, tem-se uma linguagem codificada, na escola, por seu turno, o saber deve ser ensinado de outra forma, “[...] a linguagem é considerada como um elemento que interfere diretamente no sistema didático, pois guarda uma relação direta com o fenômeno cognitivo”. (PAIS, 2002, p. 21). A partir disso, temos que o processo de ensino perpassa as praxeologias para ensinar, como indica Chevallard (2009b), que são os conhecimentos mobilizados pelos professores que não se resumem apenas ao que o professor deve ensinar, e às praxeologias para o ensino, que são os conhecimentos mobilizados no momento da sala de aula.

No trecho, fica explícito o quanto a professora tem clareza que o saber escolar é muito diferente do saber acadêmico e que a prática de muitos professores acaba sendo reprodutora dos livros didáticos, por estes transporem o saber acadêmico em saber escolar. A professora acaba explicitando a relação de dependência que o professor (X) possui com o livro didático ao ensinar um determinado conteúdo (O), em que o professor assujeita-se na sua prática a reproduzir o modo como o conteúdo é proposto no livro didático, processo que Chevallard (2009) denomina “pedagogia regente”.

Cabe salientar ainda que a professora x_6 deixa claro, na sua fala, o quanto está enraizado, na sua prática, o paradigma *visita às obras*, mencionando que o aluno é leigo, pois acredita em tudo o que o professor fala, enquanto os professores, na sua grande maioria, reproduzem uma prática na qual o professor é o detentor do conhecimento e o aluno é o sujeito passivo, que não possui nenhuma autonomia no processo de ensino e aprendizagem. Além disso, no decorrer da formação, a professora reproduz estereótipos de que a Matemática é para alguns, não sendo acessível a todos.

Para o PEP - S_3, o estudo da questão Q_1 inicia-se com uma atividade contendo questões levantadas por alunos, num diálogo fictício de sala de aula, em que os alunos Davi, Suzana, Guto, Sérgio, Mônica e Luíza conversam entre si sobre os conteúdos de perímetro e área: Davi: “Dois retângulos que têm o mesmo perímetro têm a mesma área”; Suzana: “Dois retângulos que têm a mesma área têm o mesmo perímetro”; Guto: “Se aumentarmos o perímetro de um retângulo sua área também aumenta”; Sérgio: “Se aumentarmos a área de um retângulo seu perímetro também aumenta”; Mônica: “Todos os retângulos que têm 36 cm^2 de área têm perímetro maior ou igual a 24 cm” e Luísa: “Para todo retângulo existe um outro que tem a mesma área, mas com perímetro maior”. Consideremos que os professores pudessem explanar como conduziriam as suas aulas diante de tais questionamentos. Assim, propusemos alguns direcionamentos para o início do percurso

> Podemos começar pelo Davi [...] o que dizer para o Davi? (Y)
> Depende desse retângulo né, estou pensando aqui que tipo de retângulo, quais as medidas (x_6)

Pode propor as medidas (x_2)
Eu concordo, de verdade, eu concordo com o Sergio, talvez com os dois, vagamente me lembro de alguma, não é teoria nem nada, mais algum, que eles falam quando eles se aumentam, eu não lembro agora, área e perímetro, os dois sempre aumentam mesmo [...] estou tentando lembrar, não sei se é um axioma, mas tem, mas vamos analisar caso a caso né (x_6)
Do Davi (Y)
Concordei, a minha continha deu certo (x_2)
Com o Davi, você concorda? (x_6)
Porque se você tanto mudar o comprimento quanto a largura, somando deu o mesmo perímetro e se eu por comprimento vezes largura dá a mesma área. Mas, não estão falando que perímetro e área são iguais né? (x_2)
Não! Está falando se dois retângulos que têm o mesmo perímetro têm a mesma área? Por exemplo, se o perímetro é 20 e área 24, um outro retângulo que tem o perímetro igual a 20, a área também tem que ser 24? Dois retângulos que têm o mesmo perímetro têm a mesma área? (Y)

A priori, a professora x_6 concorda com a afirmação de Davi, apesar de confundir o nome de Sergio, a sua afirmação está embasada em algumas lembranças que tem sobre o conteúdo, tentando validar as suas afirmações a partir de axiomas que ela acredita existir e afirma $R_{1.1}$ = *área e perímetro, os dois sempre aumentam mesmo*. Já a professora x_2 busca validar a sua resposta a partir de um exemplo numérico, associando uma medida às grandezas mencionadas, assim atribuiu valores e realmente encontrou retângulos com perímetros iguais e áreas iguais, $R_{1.2}$ = *Propõe medidas as grandezas*. Nesse momento inicial, as professoras já aparentam estar convencidas das suas respostas e começam a conjecturar para outros quadriláteros

E se ele for paralelogramo? Aí não? Né? (x_2)
Aí, eu falei que estava pensando, nas dimensões e tal (x_6)
E se ele não tiver os quatro ângulos de 90? Porque quando ele for paralelogramo, vou ver aqui, a altura dele vai ser aqui né (está desenhando no papel), a largura acho, acho que eu não concordei agora [...], vocês entenderam? Lados paralelos, lados paralelos com mesma medida, não é isso? Se ele for paralelogramo, esse lado aqui não precisa ser, pode ser que tenha o mesmo perímetro, mas não tem a mesma área (x_2)
Eu pensei mais simples assim ó, um quadrado é retângulo também, um quadrado 5 por 5, ele tem o perímetro 20 não é, e área 25 (x_5)
Ok! (x_2)
Aí, você pega um retângulo que tem lados 10 e 2, vai dar... (x_5)
10, 10 mais 2 aí não dá (x_2)
9 e 1, vai dar o mesmo 20 do perímetro, mas a área vai ser 9. Entendeu? Um e nove, 1e 9, 9 e 1, e esse outro é 5, o perímetro desse aqui é 20, e desse aqui também, mas a área desse aqui é 25 e deste é 9 (x_5)
O caso do paralelogramo é mais ou menos parecido né, porque aí não vai bater área e perímetro (x_2)

> Então, mas não é retângulo né (x_5)

Nesse diálogo, o professor x_5 utiliza a resposta intermediária *$R_{1.2}$= Propor medidas as grandezas,* porém, intervém de forma a contradizer as afirmações realizadas pelas professoras x_2 e x_6, apresentando exemplos de retângulos com medidas diferentes, em que o perímetro é igual e áreas diferentes. Podemos inferir, nesse diálogo, que o professor x_5 acaba assumindo, por alguns instantes, a posição de orientador do estudo, explicando alguns procedimentos para as demais professoras, no entanto, para a professora x_6, o contraexemplo não basta, ela requer uma demonstração e eles continuam a discussão:

> Então, mais aí, no caso, você achou uma situação, [...] tem que ver se é válido na troca dos números. (x_6)
> Pode ser assim 2x+2y é igual a um número k, eu consigo colocar infinitos números aqui dentro, que dê k então [...] você tem equação do primeiro grau, com duas incógnitas que têm infinitas soluções para isso aqui, você pode pensar qualquer número para k (x_5)
> Eu concordei com o (x_2)
> [...] O perímetro não influencia no cálculo de área, são duas operações totalmente distintas e, obviamente, qualquer situação, comprimento e largura quando multiplicado, eu estou tentando associar assim, por ele ter perímetro igual, automaticamente, a área será igual[...] tipo um se então, se eu tenho um perímetro igual, então automaticamente a área vai ser igual, mas ela é válida, a primeira situação é válida, a segunda já não, mesma área não tem o mesmo perímetro. (x_6)

A professora x_6 ao mesmo tempo que afirma *$R_{1.3}$ = São grandezas distintas,* que o cálculo de área e perímetro são medidas diferentes, dando indícios da compreensão da técnica *τ: Mostrar que o mesmo objeto matemático possui grandezas diferentes,* ela continua afirmando que as situações são válidas, assim, o grupo começa a querer entender o que x_6 está querendo expressar na sua fala, que durante o percurso desse estudo ficou confusa e conflituosa com as suas próprias afirmações:

> O x_5 está falando que não é válida, você está falando que é válida? (Y)
> Eu acho que é válida, acho que não é válida a segunda, a da Suzana (x_6)
> Mas eu mostrei aqui dois perímetros iguais e áreas diferentes (x_5)
> Mas ó (x_6)
> Eu preciso de uma refutação, não é? Para provar que galinheiro com apenas 20 metros de cerca, qual deve ser a medida não vale (x_5)
> Vamos pensar numa situação, eu quero cercar um galinheiro com apenas 20 metros de cerca, qual deve ser a medida desse galinheiro para que eu tenha a maior área? Por exemplo, posso fazer com as medidas 1 e 9, com área de 9 metros quadrados, aqui é uma opção que eu estou cercando o galinheiro, só que ele quer que esse galinheiro tenha a maior área (Y)
> Não, é outra história (x_6)

> [...] com os mesmos 20 metros, [...] fazendo uma analogia, podemos pensar que é o perímetro (Y)
> Esses 20 metros são referentes a áreas [...] Mas eu concordo com ele, eu que estou me confundindo na hora de expressar, eu não concordo da maneira que foi provado, às vezes tem outra (x_6)

Nessa etapa da discussão, como orientadora de estudo, propusemos fazer analogia de uma situação problema, para que os professores começassem a pensar como propor situações que levem o aluno a entender o conteúdo de área e perímetro, no entanto, para a professora, a analogia feita trata-se de outra situação, assim sendo, as suas dúvidas ficam em torno de encontrar uma demonstração, comprovando que a afirmação é falsa.

Como podemos visualizar em vários livros didáticos, os conceitos de área e perímetro são apresentados de forma sequencial e podem conduzir os alunos a pensarem em relações entre esses conceitos, o mesmo pensamento permeiam os próprios professores (participantes da pesquisa) que possuem uma certa insegurança quanto aos conteúdos, afirmando técnicas que ao mesmo tempo não conseguem justificá-las, como estaremos identificando no decorrer desse percurso.

No entanto, vale ressaltar que não estamos compreendendo que o professor deve relembrar ou entender todos os conteúdos matemáticos quanto questionados, sem nenhum estudo anterior, pois os professores apropriam-se dos momentos de planejamentos de aula para estudo. *A priori*, compreendemos que os PEP são percursos, que levam o professor a questionar a sua própria prática, no sentido de refletir sobre procedimentos técnicos, automatizados, para a efetivação de questionamentos e indagações sobre a sua própria prática, para isso, orientamos o estudo para a seguinte questão:

> Como explicar isso para o aluno? (Y)
> Esse do exemplo, achei que está bom, mas essas 2x+ 2y dependendo do nível é complicado, mas se tivesse um outro exemplo (x_2)
> Eu acho que teria que mostrar mesmo (x_6)
> Você viu x_6 que o x_5 fez? Você entendeu? (Y)
> Primeiro, eu fiz assim ó, eu achei um perímetro qualquer, 20 por exemplo, eu coloquei 9 e 1, 9 e 1, e 5 e5 que dá o 20, daí que já pensei, assim já refutei isso aqui, [...] vou tentar explicar de outro jeito, aí eu pensei assim, eu sempre vou ter um 2x mais 2y para um K qualquer, eu posso pensar um perímetro qualquer, eu sempre vou achar um 2x mais um 2y qualquer também para que satisfaça isso daqui, que admite infinitas soluções. (x_5)
> *A priori*, concordo (x_6)
> Se considerar aquela frase que você falou no começo, mataria a charada sem nem mesmo fazer a comprovação, se o perímetro é referente à soma como foi dito e a área, à multiplicação já não são iguais e ponto final, [...] são cálculos diferentes, não tem como dar o mesmo resultado. (x_5)
> Vão ser iguais quando possuem as mesmas medidas (x_2)

Tudo depende de qual retângulo que estamos falando (x_6)
Se a afirmação não é verdadeira, um contraexemplo basta, ficou que é falsa (Y)

Percebemos, no desenvolvimento do PEP – S_3, no diálogo entre os professores, indícios de que estes não querem discutir a questão Q_1= *Como ensinar os conceitos de perímetro e área?* por já compreenderem tais conceitos. Porém, durante o percurso, as suas justificativas não condizem com a compreensão, de fato, desses conceitos, visto que, em nenhum momento, referem que, para um mesmo objeto geométrico, temos a grandeza associada a ele e a medida dessa grandeza, fazendo a distinção entre as grandezas envolvidas. Assim, concluímos que a afirmação de Davi tratava-se de uma afirmação falsa e, como bem lembrado pela professora x_2, a própria colocação inicial da professora x_6 já justificaria que a sentença é falsa, porém, a professora x_6, apesar de ter pontuado tal afirmação, ainda se sentia desconfortável quanto aos direcionamentos do estudo tanto que afirmou: "*a priori*, eu concordo".

No seguimento do percurso de estudo, começamos a entender a afirmação da Suzana:

Suzana afirma: Dois retângulos que têm a mesma área têm o mesmo perímetro? (Y)
Se a gente for pensar pelo primeiro, eu acho que é falsa (x_2)
Eu acho que é falsa também (x_5)
Porque se a gente disse que são operações diferentes vão dar resultados diferentes então[...] se for partir desse pressuposto também é falsa (x_5)
Eu tenho um contraexemplo: 2 vezes 10 é 20 e 4x5 é 20, aqui o perímetro 24 e aqui é 16 (x_5)
Já não deu, já é falso (x_5)

Nesse fragmento do percurso, fica explícito que os professores x_2 e x_5, com base nas discussões anteriores, já compreendem que a afirmação de Suzana é falsa e, na apresentação de um contraexemplo, as suas afirmações são justificadas. Na continuidade do nosso estudo, apresentamos, por meio de slides, a situação problema a seguir, como complemento desse estudo.

Figura 28- Atividade matemática envolvendo o conteúdo de área e perímetro[44].

As figuras (1) e (2) abaixo são retangulares. A figura (2) foi obtida justapondo dois retângulos recortados da figura (1) por meio de um corte paralelo a dois de seus lados e que passa pelos pontos médios dos outros dois, conforme figuras abaixo.

Figura (1) Figura (2)

Com base nas informações acima, responda:

a) As figuras (1) e (2) possuem a mesma área? Justifique sua resposta.

b) As figuras (1) e (2) possuem o mesmo perímetro? Justifique sua resposta.

c) Suponha que repita o procedimento utilizado na figura (2), isto é, que seja construída uma figura (3), decompondo a figura (2) e assim sucessivamente obtendo-se outras figuras retangulares. O que podemos dizer com relação ao perímetro e à área das figuras retangulares dessa sequência, obtidas nesse processo?

As figuras 1 e 2 possuem a mesma área? (Y)
Pior que possui (x_6)
Possui ou não possui? (Y)
Sim (x_6)
Espera lá (x_1)
Tem, possui, possui a mesma área (x_2)
É só você somar, é como você estivesse somando essas duas áreas aqui (x_6)
Ou sem pensar em número nenhum, o espaço ocupado lá é o espaço ocupado aqui (x_2)
E se a gente pensar no perímetro? A figura 1 e 2 possuem o mesmo perímetro? (Y)
[...]. Não, eles não têm o mesmo perímetro (x_6)
Então, tem mesma área e não tem o mesmo perímetro, ela acaba ajudando a responder essa daqui de novo ó (x_2)
Então, o perímetro ele muda, ele alterna né (x_6)
[...]. Está dobrando ali a parte de cima né (x_5)
A gente não pode afirmar né [...] (x_6)
Só a parte de cima. Porque ali, aqui (do lado do retângulo), a gente não pode dizer, na vertical né, essa responde a última questão da Luiza lá [...] as áreas são iguais e o perímetro vai para o infinito (x_5)
Vai crescendo né (x_1)
E que a gente está pensando em retângulo só nessa figura, você entende? (x_6)
Com esse recurso visual ficou mais fácil de entender (x_1)
Estou tentando colocar números ali, toda vez muda tudo, então sempre muda (x_2)

[44] A atividade trata-se de uma análise de situação didática, retirada do processo seletivo para ingresso no Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática da Universidade Federal do Mato Grosso do Sul, ano de 2009, disponível em https://ppgedumat.ufms.br/files/2017/06/PPGEdumat_prova_2009.pdf.

E a área permanece, [...] A descrição da figura propicia você a ver certinho as coisas [...] (x_6)

A atividade que trouxe as imagens de retângulos possibilitou aos professores reafirmarem as suas respostas e, além disso, mostrou como a representação das figuras é variável, facilitando a compreensão dos questionamentos levantados, como os próprios professores pontuaram no decorrer do diálogo. Na sequência, continuamos o nosso estudo, a partir do questionamento do Guto:

Se aumentarmos o perímetro de um retângulo, sua área também aumenta? (Y)
Falsa (x_5)
Falsa, agora você facilitou né Y, (x_6)

Nesse trecho, notamos que, para os professores, tal questionamento não se apresentou como um desafio, decorrente dos questionamentos levantados anteriormente. Continuamos com outra afirmação, que achamos que seria trivial para os professores pelas discussões anteriores, mas, nessa nova situação, os professores foram novamente desestabilizados em suas certezas:

Se aumentarmos a área de um retângulo, seu perímetro também aumenta? (Y)
Eu digo que sim (x_5)
Aumenta (x_2)
Se aumentarmos a área de um retângulo, seu perímetro também aumenta? (Y)
Sim, aumentou, aumenta também (x_2)
Cadê a figura? (x_1)
Vamos desenhar a figura (x_2)
Por exemplo, aqui, nesse exemplo, está aumentando o perímetro não está? (Y)
Sim, nesse exemplo do computador está (x_2)
Só que ele está falando de aumentar a área agora e não o perímetro (x_5)
Está, mas [...] (Y)
Você nem precisa de um valor numérico, se pensarmos num espaço nessa sala de aula mesmo, compara ela com outra maior, por exemplo, a minha sala de aula lá que é maior que esse laboratório, aumentou o perímetro, se eu colocar a cerca em volta, aumentou, só aí já é válido, pega esse retângulo aqui (x_2)
Para mim, cercar esse espaço né (x_1)
Se aumentou a área não pode nem diminuir mesmo, só tende a aumentar, acho que é o único caminho, não é isso? Sem pensar em números, em nada, só comparando duas salas de aula. (x_2)
Se aumentar, a área aumenta ... (Y)
Aumenta o perímetro obrigatoriamente, concorda, meninos? (x_2)
Eu concordo, mas eu estou pensando, se existe a possibilidade de aumentar a área e o perímetro permanecer (x_5)

Durante o percurso do estudo, em diversos momentos, tínhamos situações em que se contradiz a afirmação de Sergio, como o próprio exemplo da situação do galinheiro apresentada pela orientadora do estudo, na qual as áreas vão aumentado gradativamente e o perímetro permanece, além disso, os professores já tinham institucionalizado que se tratavam de grandezas distintas, mas ainda assim afirmavam a sentença de Sergio como verdadeira. Nesses fragmentos, apresentam-se indícios que os professores continuam a repetir técnicas e a resposta $R_{1.1=}$ *área e perímetro os dois sempre aumentam mesmo* é o que eles mobilizavam. Porém, o professor x_5 concordou, mas ao mesmo tempo tentou validar a sua justificativa, buscando verificar outra técnica que contradiz a sua. Continuamos no seguimento do percurso:

> Penso, assim, uma afirmação não é recíproca da outra né, se tem que aumentar a área, aumenta o perímetro, ...pois ela está colocando assim se aumentar a área, aumenta o perímetro também. Eu estou pensando do que a gente vem discutindo anteriormente, do Guto mesmo, pelo que respondemos anteriormente (Y)
> Mas lá afirma, está comparando que tem que ser a mesma, os dois serem os mesmos (x_5)
> Aqui está falando de aumentar né (Y)
> Não falou que na mesma proporção, mais que aumenta, aumenta né (x_2)
> Se a gente colocar x vezes y, se a gente aumentar o x vai aumentar o resultado...e como é par, como é uma soma de x mais y não é negativo nem nada né, porque aqui do x vezes y tem que considerar do 1 para frente né, pode considerar de 0 até 1, o único modo de diminuir a multiplicação é se a gente considerar de 0 até 1 correto, é as frações $\frac{1}{2}\frac{1}{3}$ e assim a gente consegue diminuir uma multiplicação, a gente consegue diminuir a multiplicação, se for a partir de 1. (x_5)
> [...]. Porque você falou dessa situação? (x_2)
> A área não é x vezes y (x_5)
> Sim (x_2)
> Sim né, aí vai dar um k aqui, para aumentar esse k ou x tem que ser maior ou y tem que ser maior, o único modo de diminuir k é se o x e o y estiver entre 0 e 1, entende? (x_5)
> Mas ele pode estar entre 0 e 1, o que não pode acontecer é número negativo (x_2)
> Mas pensando ali $\frac{1}{2}$ é maior que $\frac{1}{3}$...para poder contar como maior a fração também tem que ser menor, e se a fração for menor, o lado é maior (x_5)
> Então, o que você acha x_6? (Y)
> Então, se a gente pegar a situação x e y, quando você tem x e y normal a área, mas quando você vai para o perímetro 2x + 2y caso que ele mostrou lá, mas se eu dobrar essa área, pegar uma situação de dobrar, vai passar a ser 2 vezes x e y, o seu perímetro vira 4 (x_6)
> Então, aumentou (x_2)
> Então, vamos supor aqui 2x dobrei né, eu vou fazer 4x mais 4y entendeu, então fica 4 vezes, então provavelmente ele aumenta. (x_6)
> E ela fez um exemplo bem prático, bem simples (x_1)

Como podemos visualizar no trecho anterior, os professores foram conjecturando e fazendo relações com outros campos da Matemática, mas não perceberam o equívoco de afirmar que a sentença é verdadeira. Compreendemos que a questão Q_1 impulsionou notar que os professores (X) possuem práticas onde predominam as abordagens clássicas com proximidade às tecnicistas (GASCÓN, 2003) e o quanto U(X) com relação aos conceitos de perímetro e área estão amparados no paradigma *visita às obras*, talvez por não compreenderem, de fato, esses conceitos, sendo a relação R(X, O) condicionada a regras e memorização sem muitas justificativas tecnológico-teóricas. Continuamos a questioná-los:

> Eu fiquei com dúvida com o exemplo do próprio Marcos, ele colocou 1 e 9, e 5 e 5 é 25 (Y)
> Aí ele partiu para um quadrado (x_6)
> Nesse caso aqui, são dois retângulos, todo quadrado é retângulo também, então aqui o perímetro é 20, [...] os perímetros são iguais, as áreas são iguais? (Y)
> Não (x_6)
> E aqui de 9 m^2 foi para quanto? 25 m^2, vamos supor que está tudo em metros né, a área aumentou, não aumentou? Só que o perímetro aumentou? (Y)
> O perímetro é o mesmo (x_2)
> [...] Então, tem que se pensar nessa situação, eu estou partindo do pressuposto (x_6)
> Hiiiiii... então, agora não sei de mais nada (x_2)
> Vamos pegar o exemplo seu do arame, esse arame vai ter que ser maior. (x_6)
> Assim no arame, ele dá limitado 20 metros de arame, e ele quer fazer uma cerca de um galinheiro, vamos supor essa situação usando esses 20 metros aqui, [...] você pode fazer esse galinheiro de diversos tamanhos, ele pode ter uma área menor se você fazer 9 por 1 ou pode ser com uma área maior de você fazer 5 por 5, o desafio é você fazer (cercar) o galinheiro com maior área (Y)

A orientadora do estudo (Y) tentou nortear para a situação do galinheiro na qual a área vai aumentando e o perímetro permanece, no sentido de levar os professores à compreensão que "se a área aumenta, o perímetro aumenta" é falsa, mas eles não assimilam a ideia e, na sequência, a professora x_2 pondera que "não sabe de mais nada", sendo que ela ainda pontua que a própria atividade conduz a pensar que existe uma relação entre os conceitos:

> [...] está tão insistente nisso, que parece mostrar que existe algo...será que existe essa relação? Às vezes, a atividade está querendo mostrar isso para a gente e nós não estamos conseguindo enxergar [...] a gente

está falando que possuem medidas diferentes [...] quando a gente compara um com o outro, eles não se relacionam, não sei. (x_2)
A atividade está querendo mostrar que existe? (Y)
É que existe (x_2)
Ou talvez que não exista (x_5)
[...] porque área e perímetro estão ligados na hora do referencial do conteúdo (a professora quis dizer que são conteúdos sequenciais no referencial curricular do Estado). Mais aí voltamos aquilo, operações diferentes resultados diferentes (x_2)
Acho que tinha que voltar mais ao conceito e deixar um pouco a parte do cálculo em si, sabe? (x_6)
Talvez a gente tivesse que ter mais um embasamento teórico, uma parte teórica sobre isso (x_2)
A gente chegou no consenso que o perímetro é o contorno certo? A área se você for pegar mesmo, você faz subdivisões de figuras dentro dele ... e continua com a mesma área [...]. Esse daqui aconteceu um exemplo numérico que permaneceu o mesmo perímetro e aumentou a área (x_6)
O próprio exemplo numérico é um contraexemplo (Y)
É um contraexemplo, talvez eu pensaria assim: ele está dizendo, se aumentarmos a área de um retângulo, seu perímetro aumenta, aí a resposta seria não necessariamente né, o perímetro pode permanecer igual também. (x_5)
Pode permanecer igual, então foi o que eu falei, mas essa resposta aí é cabível? (x_2)
A pergunta: O que você pensa sobre o que diz cada um desses alunos? Concorda ou não? Por quê? Não concordo porque existe casos que o perímetro permanece o mesmo para esse daqui...até agora, está tudo falsa. (x_5)

As falas das professoras: "acho que tinha que voltar mais ao conceito e deixar um pouco a parte do cálculo em si, sabe? (x_6)", "talvez a gente tivesse que ter mais um embasamento teórico, uma parte teórica sobre isso (x_2)" ressaltam as nossas afirmações do quanto os professores possuem dificuldades em compreender os conteúdos geométricos, como Leivas (2012) aponta que a Geometria ensinada para os professores, no geral, é totalmente calculista. Nesse percurso, os professores foram desestabilizados quanto às suas praxeologias referentes ao conteúdo de perímetro e área, porém, não surgiram outros questionamentos como: *O que é medir? O que é grandeza? O que é um objeto geométrico?* Talvez a própria dificuldade com relação aos conceitos não possibilitou gerar outras questões.

Após um período de discussão, os professores chegaram ao consenso que a afirmação é falsa, pois encontraram contraexemplos para os quais a afirmação não é validada. Percebemos que todos os encontros com os professores foram norteados com afirmações que abalaram as suas certezas em torno do conteúdo estudado e, assim, foi surgindo uma insegurança em responder o que realmente achavam, tanto que, na maioria das suas respostas, começavam com a palavra "acho". Além disso, precisavam da validação das suas respostas pelos outros professores. Talvez seja por isso que eles começaram a ter necessidade de um embasamento teórico, algum estudo dos conteúdos que vão surgindo no decorrer do estudo e perceberam o quanto está lhes faltando um estudo do bloco teórico-tecnológico relativo a esses conceitos.

No desenvolvimento do percurso, iniciamos um estudo sobre mais uma sentença:

> E o da Mônica? (Y)
> Eu acho que o da Mônica, ele sempre vai permanecer maior, mais aí tem que gerar outros valores (x_6)
> Teria que pensar x e y qualquer que dá 36 [...] Todos os retângulos que tem 36 cm^2 de área têm perímetro maior ou igual a 24 cm (Y)
> E achar o menor número né, qual o menor dígito entre os dois que dá 36? Se a gente for fazer 6 x 6 é 36, aí pode ser 9x4 (x_5)
> Você pode ir alternando 4x9, mas também outras você pode fazer 12x3 (x_6)
> Como ele está falando para esse daqui, a gente teria que pensar para esse, temos que mostrar para esse (Y)
> Acho que o menor de todos vai ser o quadrado, o quadrado pode fazer o desenho lá, que vamos dividindo e vai aumentado sempre o perímetro, não é? (x_5)
> Se valer a parte do quadrado, é, pode chegar a 24 (x_6)
> Que a área mínima (x_2)
> E o perímetro, pode ser maior ou igual 24 (x_1)
> Acho que é verdadeiro (x_6)
> Quando a gente assume que é verdadeiro [...], a gente tem que demonstrar né (Y)
> Pode ser 18 e 2 e 6 e 6 (x_2)
> Mas para demonstrar, a gente não atribui valores para x, para demonstrar você não joga valores únicos né, quando é falso um contraexemplo já basta, só que quando é verdadeiro, eu tenho que mostrar para qualquer valor, no caso qualquer a e b com área 36 e a soma dos perímetros tem que ser maior ou igual a 24. (Y)
> Dá para montar um sistema...axb=36 e 2a+2b>24, vou isolar aqui... (x_2)
> Eu posso pegar aqui, ele não fala que a soma é maior igual, eu posso assumir o igual aqui e analisar depois...a ideia é analisar, por exemplo, chegou aqui na equação né, essa daqui $(b-6)^2$, quando isso daqui é maior ou igual a 24, quando isso daqui é maior ou igual a zero, para qualquer valor de b... Aqui está ao quadrado, nunca vai ser negativo (Y)

A discussão da sentença de Mônica, diferentemente das sentenças anteriores que são todas falsas, tratava-se de uma afirmação verdadeira, e como a própria professora x_6 referiu houve a necessidade de demonstrar, essa seria a oportunidade única dos professores apresentarem uma prova matemática para a sentença verdadeira. No estudo dessa sentença, imaginávamos que todos tentariam resolver de forma individual, mas, ao contrário, todos ficaram observando e apenas a orientadora do estudo iniciou a demonstração, sempre questionando o grupo, sendo que os professores no decorrer da demonstração faziam alguns apontamentos.

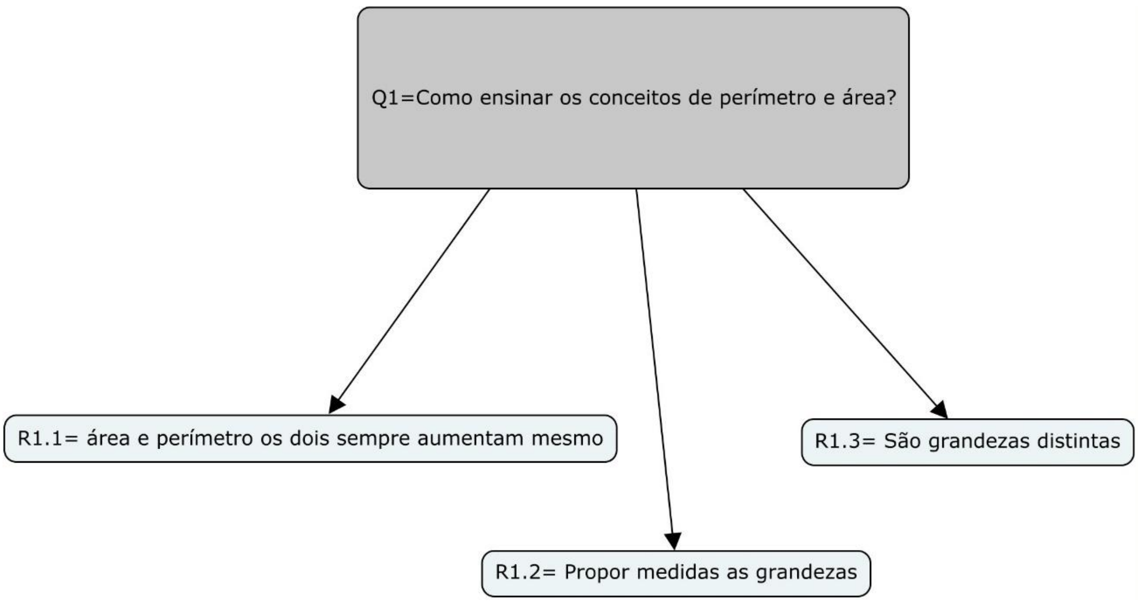
Eles podem ser valores distintos, não pode? No caso do 36, eles podem também ser valores iguais certo, a é 6 e b é 6, aí coloca aqui suponha que o a é igual, e o a é 6 e o b é 6, 6+6=12x2=24 (x_6)
Mas aqui você está supondo que a=b (Y)
Acho que a gente fez errado, supondo que a soma é maior ou igual, tinha que ser menor ou igual não é? (x_5)
Aqui ele fala maior ou igual a 24 (Y)
A gente não tinha que limitar como menor e igual? (x_5)
Por que? (Y)
Porque, assim, qualquer número que eu utilizar aqui vai dar maior correto (x_5)
Porque o perímetro é uma soma (x_6)
A gente poderia pensar assim, que o perímetro é uma soma, disso daqui $2a+2b \geq 24$, só que eu posso fazer isso daqui em função de a ou em função de b, então se eu deixo em função de a aqui, ai eu analiso esse perímetro em função de a maior ou igual a 24...se eu isolar o a e o b, eu vou chegar nessa situação aqui, só que aqui eu chego numa equação verdadeira, para qualquer valor de b ou qualquer valor de a, esse daqui sempre vai ser maior ou igual a zero, então eu partindo de um perímetro que é maior ou igual a 24 (Y)
O correto não seria afirmar que ele é maior ou igual a 24? Porque o maior ou igual a zero vai ser automaticamente por conta do quadrado (x_6)
Então, isso quer dizer que qualquer valor de b que eu assumo aqui e valor de a, o perímetro vai ser maior ou igual a 24, pois eu estou analisando aquilo ali, você está entendendo? Esse é para qualquer valor real (Y)
Porque se você colocar aqui o 9, não vai dar 9, a gente achou um caso único que o b aqui é 6 (x_6)
É aquilo que você está discutindo desde o início, quando é uma afirmação verdadeira (Y)
Chegou na maior área que é 36 (x_5)
Ele dá que a área deve ser 36, ele dá área, ele fala que se a área é 36, o perímetro sempre vai ser maior ou igual a 24, então, eu não tenho as medidas do retângulo, dos lados, então, assim, eu tenho que provar isso independente das medidas dos lados, independente se a e b é igual 6 e 6, independente se é 4 e 9[...] eu tenho que provar que, para todos esses casos, o perímetro é maior ou igual a 24 (Y)
Acho que a gente tem que provar o mínimo que é 24, entende, que não tem menor ...isso que eu estava tentando fazer aquela hora, agora como que a gente prova o mínimo que é o complicado (x_5)

Ao estudar a sentença de Monica, percebemos já um cansaço dos professores para encerrar a atividade. O professor x_5 sente-se incomodado com a demonstração, pois, na verdade, ele queria provar que, no caso de Mônica, não existiria que a soma dos perímetros fosse menor que 24 e, no momento do estudo, o professor não conseguiu sistematizar as suas ideias, e os demais professores não acompanharam o seu raciocínio. No final da demonstração, todos os professores tiveram certeza que a sentença estava correta e reafirmaram a necessidade de retomar estudos em torno dos conteúdos geométricos. A partir dessa discussão, finalizamos o estudo, os professores estavam cansados e não se propuseram a responder a última sentença de Luiza.

Contudo, na execução do PEP - S_3, constituído pelo sistema [$S_3 = \{X_3, Y, Q_1\} \rightarrow M=\{R_{1.1}, R_{1.2}, R_{1.3}\}] = R^{\heartsuit}$, tivemos a constituição do M, apenas pelas respostas intermediárias, sendo que os professores chegaram a um praxeologia $R^{\heartsuit}$ concluindo que os conceitos de perímetro e áreas são grandezas distintas, porém, teriam que estudar mais sobre o bloco tecnológico-teórico. Neste sentido, observando as suas explanações, ficou claro que a formação possibilitou uma desestabilização nas suas praxeologias, pois achavam que já compreendiam os conceitos estudados e que era "fácil" ensiná-los. Assim sendo, ficou evidente a necessidade dos professores em estudar, em buscar mais momentos de formação, no que diz respeito ao processo de ensino e aprendizagem dos conteúdos geométricos.

Nesse cenário do PEP - S_3, percebemos que as relações dos professores (X) com os objetos matemáticos área e perímetro perpassavam condições quanto a OM e OD[45] desses conteúdos, apresentando indícios de que suas praxeologias estavam em torno do paradigma *visita às obras* e o quanto reproduziam técnicas sem justificá-las, tanto que o percurso teve somente esses direcionamentos:

Figura 29 - Percurso S_3



Fonte: Elaborado pela pesquisadora

[45] As OM estão relacionadas ao conteúdo matemático e as OD o como ensinar esse conteúdo. As relações OM e OD estão em torno das escolhas matemáticas e didáticas realizadas pelos professores.

No diálogo com os professores, eles expressaram a necessidade de estudar sobre o conceito de ângulos. No início do PEP – S_4, guiados pela questão Q_2 = *Como ensinar o conceito de ângulo?* Os professores, após o desenvolvimento de três sistemas didáticos, passaram a elucidar o quanto é importante propiciar práticas permeadas pelo paradigma *questionamento do mundo* e o quanto o trabalho com tais práticas é desafiadora. Ao mesmo tempo, esse trabalho aflige os professores, por ter que despertar nos alunos mais autonomia diante dos conteúdos ensinados em sala de aula, como podemos visualizar na fala da professora x_2:

> Um dos nossos desafios, desde o ano passado, que é essa nova proposta do aluno, ele mesmo descobrir, ele mesmo experimentar e ele propor, ele mesmo chegar na conclusão de uma teoria sem você por explícito no quadro. Então, você tem que esse é o problema, que eu fico pensando aqui, isso me aflige também, como que eu vou problematizar, como que eu vou dar as ferramentas para o aluno, para ele chegar onde eu quero, que é a parte teórica, embasamento teórico. E é isso que eles querem da gente, não é mais colocado igual do livro exposto, eu posso até fazer uma dinâmica, mas o início do conteúdo ele tem que chegar, eu tenho que dar uma situação para ele chegar na parte inicial, que, no caso, eu colocaria no quadro, eu faria a exposição na lousa digital, eles não querem mais isso, eles falam que isso tem que cair por terra com o passar do tempo, por enquanto, é bem flexível, pois ninguém vai mudar da água para o vinho. Mas o aluno tem que ser o construtor, o pesquisador, fazer a experiência, no caso de ângulos, talvez fazer a parte prática primeiro e chegar depois na teoria, eles têm que chegar pela conclusão deles. (x_2)

E continua:

> [...] Foi assim a vida inteira né, eu aprendi assim, eu acho que eu aprendi [...] quando eu estava mais madura, as coisas que eu decorei, eu consegui voltar lá atrás e tentar entender [...] mas aquele momento que eu decorei para tirar nota lá no ensino fundamental, que eu lembro até hoje como a professora, passou para mim, naquela hora eu não entendi o porquê, depois que você precisa daquilo [...] no meu caso, eu precisei saber porque eu sou professora, agora quem não procura saber, ele só vai decorar e nunca mais vai entender aquilo. (x_2)

A própria trajetória de formação dos professores implica condições e até mesmo restrições à sua prática, visto que não é somente uma questão "didática", o como ensinar, mas ter conhecimento sobre o objeto matemático para ensinar. A simples reprodução de tarefas e técnicas não possibilita o desenvolvimento de um percurso de estudo e pesquisa com os alunos. É necessária a inserção do saber-fazer na prática pedagógica, de elementos teórico-tecnológicos que propiciem tanto o ensino por meio de diferentes abordagens metodológicas, quanto conhecimento dos conteúdos a serem ensinados.

Para o percurso PEP – S_4, iniciamos apresentando apenas as questões 1 e 2 (a seguir), para que os professores começassem os estudos em torno do conceito de ângulo:

1) Quantos ângulos vê nas figuras a) e b), respectivamente?

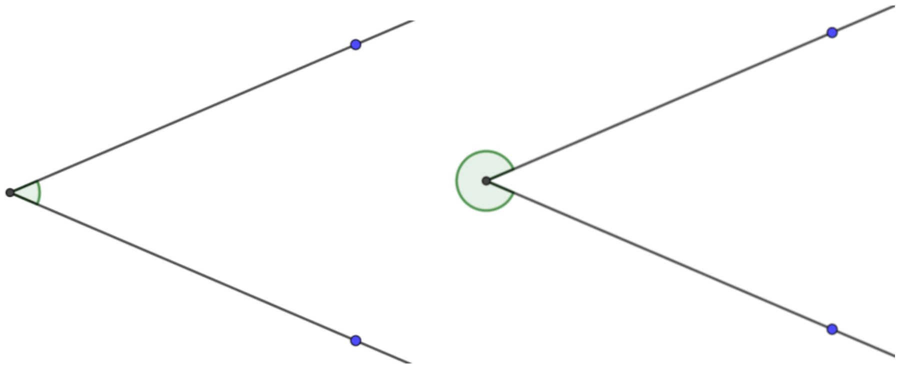
2) Referente ao exercício anterior, qual conceito de ângulo que você assumiu?

Ao começar a resolução da atividade proposta, a professora x_2, expressa:

> Essa atividade é legal para dar para aluno, sabe por quê? A primeira coisa que me lembrou foi quando um aluno falou assim, eu explicando ângulo e ele falou assim [...] e eu, na minha ideia, estava explicando esse ângulo aqui né (pinta o ângulo na figura, parte interna). Ele questionou, eu nem lembro o certo qual foi a pergunta, e esse ângulo aqui de fora? Ele falava para mim, eu não lembro mais o que eu falei, faz muito tempo, mas a situação ficou marcada para mim. (x_2)
> [...] Qual o conceito de ângulo você assumiu? (Y)
> [...] Toda a vida eu falei, eu seguia o livro [...] quando duas semirretas se encontram, elas formam uma abertura (x_2)
> Uma região (x_1)
> Uma região (x_2)
> Eu sempre trabalhei assim [...] é uma figura formada por duas semirretas de mesma origem (Y)
> É uma figura ou é um espaço entre as semirretas? (x_2)
> É a região, o ângulo é essa região, claro, esse daqui é o ângulo interno (x_1)
> É a região delimitada por duas semirretas de mesma origem (x_2)
> Por essa definição, a gente vê o ângulo interno, aí foge da definição de que seu aluno falou [...] essa parte aqui não entra, lembra que seu aluno questionou professora e esse aqui (x_1)
> É [...] então é esse espacinho aqui então, está certo? (x_2)
> Muitos conceitos trazem região mesmo (x_1)

Ao resolver a atividade, a professora x_2 já relembra uma situação vivenciada em sala de aula, na qual o aluno questionou sobre o conceito de ângulo, visto que a professora apresentou uma imagem semelhante à da atividade, porém, o aluno questionou qual ângulo considerar, conforme as imagens da figura 30:

Figura 30 - Exemplos de ângulos



Fonte: Elaborado pela pesquisadora

No desenvolvimento da atividade, as professoras não consideraram o ângulo externo, porém, já começaram a ter dúvidas sobre o conceito de ângulo e, ao serem questionadas sobre qual definição assumiram, elas passaram a relembrar algumas definições, principalmente ângulo como uma região, respondendo $R_{2.1}$= *ângulo é a região do plano limitada por duas semirretas;* $R_{2.2}$= *os ângulos podem ser côncavos ou convexos.* No entanto, no decorrer do percurso, vai surgindo a necessidade das professoras buscarem recursos para o processo de (re) construção praxeológica, assim, principiaram a pesquisar nos livros didáticos dispostos no laboratório de matemática:

> Quem tem o livro de sexto ano aí? [...] vamos ver (x_2)
> Aqui não tem? (x_1)
> É do nono [...] Esse Bianchini (livro), o pessoal gosta dele [...] mas a gente viu que até a teoria dos livros vem com algumas falhas, foi isso que a gente viu em alguns dos encontros (x_2)
> Um giro dá ideia de ângulo [...] é um giro [...] uma região do plano convexa determinada por duas semirretas de mesma origem denominada ângulo (x_1)
> Convexa ó (x_2)
> [...] Então aqui ele não considera porque não é convexo. [...] e quando trabalhamos com ângulo externo? (Y)
> É sempre o prolongamento, na verdade, é essa semirreta com essa (x_2)
> Formou de novo com duas semirretas (x_1)
> É o prolongamento da reta (x_2)
> É delimitado pela região de novo (x_1)
> Tem um autor que traz a parte. [...] eu já vi em dois livros mais ou menos. Porque, geralmente, quando se pede o ângulo externo é o prolongamento ali [...] é mais e essa situação que estamos lembrando, tem livrinho do sétimo ano que traz o conteúdo, ao invés de trazer essa imagem, traz também a de fora [...] eu queria lembrar em algum livro que traz alguma coisa sobre essa parte de fora (x_2)
> [...] Se a gente considerar essa definição nessa figura temos somente um ângulo. E na outra figura? A letra b, temos quantos ângulos? (Y)
> Dois ângulos (x_1)

> São três[...], porque, nesse caso, ela falou que é formado por duas semirretas, então, não pode ser aqui também, porque ela não demarcou, aqui não falou nada de convexo-côncavo [...] Quando segue o livro é tudo muito fácil, pois já traz pronto, agora quando a gente se põe para pensar, fica tudo mais difícil [...] eu vou ensinar ângulo, eu abro o livro e vou seguir, não vai ter dúvida [...] a gente toma como verdade [...] agora se a gente põe isso daqui para os alunos (a atividade) vai virar um fuzuê, vão surgir um monte de dúvidas, eles vão ter várias respostas diferentes, então, na verdade, isso daqui (se refere ao livro didático) põe uma vedação né, o livro né [...] ele te ajuda muito, mas também te policia muito, não deixa você dar margem para as coisas que realmente causam dúvidas. (x_2)

De fato, as professoras não mobilizavam um entendimento do bloco téorico-tecnológico referente ao conceito de ângulo e, quando questionadas sobre a tarefa didática *T_D: Como abordar (ou apresentar) o conceito de ângulo?,* a professora justifica que a prática pedagógica é simples quando se reproduz apenas o que está no livro didático, não possibilitando questionamentos tanto por parte do professor quanto do aluno. A cada conceito que estudávamos ficava mais explícito o quanto os professores ficam condicionados aos livros didáticos. Podemos inferir que tais condicionamentos podem ser referentes à relação de assujeitamento que o professor tem com o livro didático, como se os livros fossem um recurso exclusivo para serem reproduzidos na prática pedagógica. Na tentativa de compreender mais sobre o que as professoras mobilizavam sobre o conceito, instigamos a compreensão das definições:

> [...] É o conjunto desses pontos que é o ângulo [...] ele assume essa definição, a figura formada por duas semirretas de mesma origem, isso que ele fala que é o ângulo (Y)
> Não é esse intervalo? Esse espaço? (x_2)
> Esse espaço estamos trabalhando com região (Y)
> É questão de preenchimento[...] aqui está recaindo naquela situação do polígono, região ou contorno [...] você conseguiu me confundir (x_2)
> Esse conjunto de pontos das semirretas é o que forma o ângulo[...] fui olhar as definições que falam de região, mas tem definições que não falam de região (Y)
> Então, aí que tem os autores, diferentes autores [...] quem tem internet aí? No próximo estudo, eu vou trazer o notebook para gente ver as várias definições (x_2)

Nesse momento, começamos um diálogo com as professoras no sentido de mostrar a existência de diferentes definições para ângulos e a professora x_2 relembrou o primeiro percurso desenvolvido sobre o conceito de polígono, sobre as contradições dos conceitos e buscou, no computador do laboratório, pesquisar as diferentes definições para ângulo. Apresentamos, então, a atividade número 3, que continha as diferentes definições de ângulo para que as professoras pudessem analisar:

> Vocês sabiam que o conceito de ângulo é um conceito multifacetado? [...] que existem diferentes definições para ângulos nos livros didáticos.(Y)
> Diferentes? Porém, certas ou não? Isso eu quero saber porque é o seguinte, é esse povo está mandando livro didático para gente, a gente está explicando tudo errado para os alunos então? (x_2)
> [...] Então, por isso que eu trouxe aqui até para gente discutir um pouco das definições que já foram apresentadas de ângulo [...] tem definições que aceitam, por exemplo, côncavo, convexo. (Y)
> [...] Mas essa definição além dela ser diferente, ela está errada também porque as duas semirretas, elas podem estar numa mesma reta que vai dar um ângulo de 180º (x_2)
> Então, é justamente isso olha aqui ó, se as duas semirretas tiverem a mesma origem, mas não estiverem na mesma reta (Y)
> Nossa, que parafuso heim, então quer dizer que ele está tirando fora o ângulo de 180º, se eu traçar aqui ó, são duas semirretas, ele está falando que não pode. Então, não tem um ângulo de 180º? Poxa! Eu adorava quando chegava esse conteúdo, porque eu achava ele tão fácil (risos).[...] Então, nenhuma delas está certa, como assim eles são ângulos?[...] o ângulo nulo e o de 180º existe (nesse momento, ela mostra transferidor de meia volta, mostrando que o ângulo de 180º existe) Não existe? ele existe se ele não colocou, ele está errado ou está incompleto, no mínimo, pra mim, incompleto [...] porque a primeira coisa se o aluno captar rápido que a gente tem aluno esperto, então professora não existe o ângulo de 180? Não existe um ângulo raso? Já está começando a complicar minha vida. Por isso que eu estou falando o livro às vezes é uma enganação como que faz? Quando a gente fosse ensinar poderia ser só dois tópicos por bimestre para gente ver as questões a fundo de cada conceito, para eu estudar tudo isso daqui, e eu transparecer isso para o meu aluno. Meu aluno não tem essa dúvida aqui, porque ninguém está passando isso daqui para ele, eu estou só lendo aqui e passando no slide lá a atividade 1,2, 3, 4 [...] Então, cadê o salto para as dúvidas? Eles enchem uma linguiça e mandam para gente, eu ainda estou no conteúdo do primeiro bimestre ainda, ainda faltam dois tópicos para terminar, e eu estou passando por cima ainda, estou numa correria danada, como faz? (x_2)

Percebemos, nesse dialogo, que a atividade 3 iniciou a desestabilizar as professoras e o quanto a professora x_2 culpabiliza o livro didático, ao mesmo tempo indicou que as condições do sistema escolar impossibilitam um estudo aprofundado do conceito, tanto por parte do professor quanto do aluno, formando restrições no desenvolvimento da prática pedagógica. Os conteúdos do referencial curricular do estado devem ser todos abordados, como a professora mesmo menciona, porque acabam sendo ensinados superficialmente, enfatizando apenas as tarefas e as técnicas dos conteúdos, sem justificação por meio do bloco saber-fazer.

De fato, a não exploração das tecnologias e teorias (saber-fazer) em torno dos conteúdos estudados não possibilita o questionamento e pesquisa, fazendo com que o ensino restrinja-se ao paradigma *visita às obras*, tanto que a professora menciona a possibilidade de trabalhar com menos conteúdo por bimestre, porém, um estudo mais intenso do conteúdo. Ao analisar as definições, a professora x_2 pontuou:

> Falou em figuras de novo, eu não gosto [...] O que significa figura geométrica? [...] o que é uma figura geométrica? Cadê o conceito de figuras geométricas para gente ver isso (x_2)
> Eu nunca tinha ouvido falar de figura [...] aqui ó os giros, duas semirretas de origem comum, olha aqui (apontando para o livro didático) (x_1)
> Você está vendo que aqui ele não fala de região (Y)
> Não (x_1)
> Ele está falando do conjunto de todos os pontos (Y)
> É o mesmo autor só que 17 anos depois [...]. Ele se aperfeiçoou um pouquinho (x_2)

Na continuidade do percurso, primeiramente, surgiu, novamente, uma questão $Q_{2.1}$= *O que é uma figura geométrica?* Tal questionamento já havia sido levantado no PEP – S_1, porém as professoras ainda continuavam com dúvidas relacionadas a esse conceito, visto que não compreendiam quando se tratava de figura geométrica para conceituar ângulo, pois as questões surgiam em torno de considerar a região ou não. Diante das dúvidas levantadas durante o percurso, as professoras não se limitavam apenas às definições expostas na atividade 3, elas começaram a manusear os diferentes livros didáticos presentes no laboratório e encontraram coincidentemente uma definição de mesma autoria, exposta na atividade só que dezessete anos depois, em um livro aprovado pelo PNLD triênio 2014-2016.

No desenvolvimento do estudo do PEP – S4, as professoras concentraram em entender se o ângulo é o conjunto de pontos da semirreta ou se consideravam a região, compreendendo que o “risquinho” simboliza a medida do ângulo:

> Se ele está falando que a figura, ele não está considerando espaço de dentro, a abertura [...] nenhuma delas considerou região, então tudo que eu aprendi, a vida inteira, estava errado. As duas semirretas são só a caixinha, só o formato para abertura? (x_2)
> O esqueleto (x_1)
> Imagine dois palitinhos aqui de fósforo, só existe abertura porque os dois palitos estão grudados um no outro, aí tira eles, não têm abertura né e é isso eu queria entender porque só é as duas semirretas, para mim, um ângulo é essa região (x_2)
> É essa região, eu vi isso aí, eu aprendi assim (x_1)
> Agora, estou falando ao contrário, se o ângulo é isso, o ângulo é abertura das duas semirretas de mesma origem, se eu tirar as duas semirretas não tem ângulo? (x_2)
> Não (x_1)

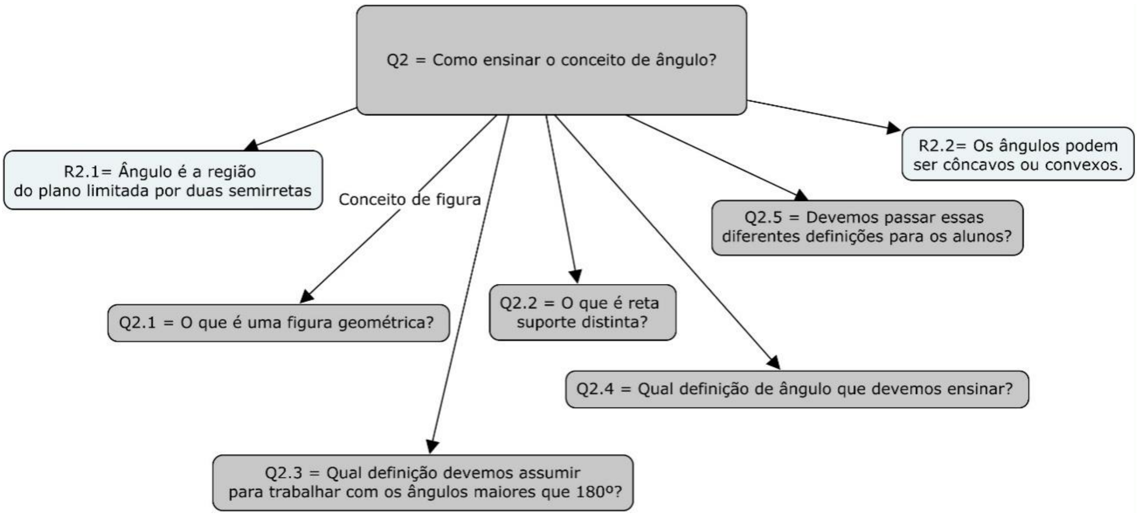
> Então, posso considerar que os ângulos são realmente essas duas semirretas, está entendendo que eu estou fazendo inverso (x_2)
> Quando eu já estou pensando em medida [...] será que eu posso pensar que esse risquinho seria para mensurar a ideia de transferidor, pensar nas medidas? (x_2)

Diante das diferentes definições expostas, os questionamentos surgiram em torno de algumas nomenclaturas e conceitos utilizados pelos autores na definição de ângulo: como: $Q_{2.2}$ *= O que é reta suporte distint?;* $Q_{2.3}$*= Qual definição devemos assumir para trabalhar com os ângulos maiores que 180º*?; $Q_{2.4}$*= Qual definição de ângulo que devemos ensinar?;* $Q_{2.5}$*= Devemos passar essas diferentes definições para os alunos?* E diante desse estudo em torno desses conceitos, as professoras expressaram o quanto a atividade propiciou uma desestabilidade praxeológica em torno das OM e OD de ângulos, pontuando:

> [...]mas você trouxe para pessoas erradas, você está me deixando confusa[...] mas eu não posso dar margem para uma coisa que é certa, ter duas interpretações ou é 2 ou -2.[....] Mas essa definição de considerar só o de dentro, só convexo é muito forte em todos os livros é muito forte a maioria (x_2)
> Eu achava que minhas aulas melhores eram as aulas de ângulo (risos) (x_1)

Desse modo, encaminhamos para o final do percurso, no qual as professoras vivenciaram a necessidade de analisar os conceitos apresentados nos livros didáticos, destacando que os livros não trazem praxeologias para serem reproduzidas, mas analisadas e questionadas pelo professor. Diante do PEP – S_4, concluíram que $R^{\heartsuit}$ *= a reunião das semirretas AB e AC com qualquer uma das duas regiões que elas limitam no plano é denominada ângulo*, ressaltando que tanto a parte interna como a externa são ângulos, logo, o percurso foi constituído do seguinte sistema: [S_4= {X_4, Y, Q_2}$\rightarrow$ M={$R_{2.1}$, $R_{2.2}$;$Q_{2.1}$, $Q_{2.2}$, $Q_{2.3}$, $Q_{2.4}$, $Q_{2.5}$ }] = $R^{\heartsuit}$, como podemos visualizar no mapa que segue:

Figura 31- Percurso S_4



Fonte: Elaborado pela pesquisadora

Desse modo, assim como no PEP – S_1, o PEP – S_4 representou para os professores o estudo de conceituações conflituosas eles vivenciaram o quanto precisam apropriar-se das OM em torno do ensino de ângulos e, como eles mesmos explanaram, até o momento desse estudo, achavam que sabiam ensinar ângulos, ou ainda que as suas aulas sobre esse conteúdo eram as melhores, mas, diante do sistema didático, começaram a refletir de modo diferente e o quanto teriam que buscar mais informações sobre o conteúdo estudado.

Assim, propusemos às professoras x_1 e x_2, que buscassem mais informações sobre o conceito de ângulo a fim de que no PEP – S_5 pudessem apropriar-se mais das praxeologias em torno desse conteúdo. Para isso, desenvolvemos alguns direcionamentos de estudo em torno de ângulo para o PEP – S_5, exposto anteriormente no item 3.4.3. Todavia, para o PEP – S_5, contamos com a participação quatro professoras (x_8, x_9, x_{10} e x_{11}), sendo que as professoras x_{10} e x_{11} estavam participando pela primeira vez da formação. As professoras x_8 e x_9 já haviam participado da formação (o primeiro encontro do ano de 2017), quando citaram os conteúdos geométricos que gostariam de estudar nas formações, tratando-se, pois, da segunda vez que estavam presentes na formação, inclusive a proposta de estudar ângulos emergiu dessas professoras, pois teriam que trabalhar esse conteúdo nas suas próximas aulas, porém, não haviam participado ainda de nenhuma sessão realizada para o desenvolvimento de algum percurso de estudo.

Diante desse cenário, talvez por receio em expor as suas praxeologias, o desenvolvimento do percurso PEP – S_5 foi totalmente diferente dos percursos desenvolvidos anteriormente, aliás, acreditamos que, na verdade, não tivemos o desenvolvimento de um percurso de estudo, mas um estudo em torno do paradigma *visita às obras*, uma vez que as professoras foram questionadas e provocadas para expor as suas práticas e os seus entendimentos em torno do conteúdo de ângulos, contudo, o silêncio foi constante em todo o momento que a orientadora (Y) questionava, a professora x_9 ainda expressou:

> [...] Conceito de ângulos? Vou procurar no Google, nossa! tenho que lembrar que eu vou aplicar esse conteúdo. (x_9)

Para quebrar o silêncio, como orientadora do estudo, começamos a expor as praxeologias em torno do conceito de ângulos, lendo as diferentes definições e explicando para as professoras, seguindo o seguinte sistema S (x_8, x_9, x_{10} e x_{11}, Y, $\wp$), transformando o sistema didático preparado pelo paradigma *questionamento do mundo* S(X, Y, Q) → S(X, Y, $\wp$) em um sistema de exposição de praxeologias. Isso ocorreu após várias tentativas frustradas de questionamento, nas quais obtivemos somente o silêncio como resposta, ou ainda elas utilizavam os momentos da formação (grande parte) para desabafos e relatos de experiências em sala de aula, sobre assuntos diversos:

> [...] Eles falaram que o buraco na educação está na matemática de sexto ano, sexto ao nono ano e ensino médio, ai todo mundo discordou, pois o buraco da educação está no primeiro ao quinto ano, eles não têm aquela base e quando chegam no sexto ano não sabem (x_{11})
> [...] Lá na minha escola, eu fui dar multiplicação com dois números, a professora não sabia explicar para os alunos porque que colocava aquele sinal de mais na operação, ai o aluno chegou em mim e falou: a professora falou que eu não preciso colocar esse daqui, se referindo ao sinal da operação +, aí eles emendavam unidade com dezenas, dezenas com unidade, aí eu falei não! Isso daqui está errado, aí vai eu explicar desde o começo (x_8)

O sistema didático desenvolvido teve duração de 1h40min e, em todo esse tempo, como orientadora do estudo, não conseguimos fazer com que as professoras participantes do sistema e expusessem as suas praxeologias. Podemos inferir que tal situação pode ter ocorrido pelo fato de as professoras sentirem-se inseguras quanto ao conteúdo abordado, a sua relação R(X, O) não propiciou o desenvolvimento de um estudo, talvez por essa relação ter mais elementos técnicos do que teóricos. Por outro lado, vimos que as relações pessoais dessas professoras R(X, R(I, O)) com a instituição I = Formação Continuada, nos moldes de um PEP, estava sendo inicialmente trilhada e isso pode ter impactado as professoras em expor as suas praxeologias, visto que o grupo estava formado por professoras desconhecidas até aquele momento, e ter que expor as suas OM e OD em torno dos conceitos de ângulo pode ter angustiado as professoras, no sentido de expor algo que seja considerado “errôneo” pelo grupo.

Certamente, expor as praxeologias requer uma certa confiabilidade dos sujeitos envolvidos no sistema didático, quanto se trata principalmente de um grupo constituído por professores, pois entre os diferentes participantes da pesquisa, podemos destacar que as professoras x_1 e x_2, as que mais participaram dos sistemas didáticos, ambas com seis participações dos nove sistemas didáticos desenvolvidos, já explanavam sem qualquer timidez ou receio as suas relações com o objeto matemático, assim como conduziam as suas aulas.

Assim, no desenvolvimento dos cinco sistemas didáticos, podemos compreender que, para a execução de percurso de estudos e pesquisas com professores de matemática na realidade brasileira, não basta ter somente uma questão Q geradora de outras questões que instiguem o desenvolvimento do M. A formação continuada nesse viés deve garantir a participação e a permanência dos professores na formação continuada, para que estes tenham uma relação com a formação R(X, R(I, O)), que gere um processo de diálogo, reflexões e estudo em torno do sistema escolar. Entendemos que a execução de micro-PEP pode ou não constituir um sistema de estudo, isso depende fortemente dos sujeitos envolvidos no processo.

Sem dúvida, as relações do sujeito com o objeto R(X, O) é algo extremamente forte e essencial no desenvolvimento dos PEP. Pelos cinco PEP analisados até o momento, podemos inferir que, para alguns professores, os micropercursos propiciaram uma desestabilidade praxeológica e ao mesmo tempo possibilitaram desenvolver e estudar OM e OD em torno dos conteúdos estudados no PEP para as suas práticas em sala de aula. Assim, ao depararem-se com situações de ensino de polígonos, ângulos, área e perímetro no decorrer de suas práticas profissionais, as reflexões em torno desses conteúdos virão à tona, bem como a necessidade de analisar os conteúdos propostos nos livros didáticos.

Na continuidade da formação continuada, na sessão $S_6 = \{(x_1, x_{10}), Y, Q_3\}$, contamos com a presença das professoras x_1 e x_{10}, tendo como questão geradora Q_3= *Como ensinar polígonos regulares?* Para iniciar o percurso, apresentamos as professoras o seguinte questionamento: Com quais polígonos equiláteros e equiângulo, de um único tipo, e colocando sempre a mesma quantidade em torno dos vértices, é possível pavimentar o plano? Assim, a partir da questão levantada, as professoras começaram a tentar responder a situação problema:

> Qual figuras? (x_{10})
> Sim (Y)
> Retângulo, quadrado (x_{10})
> [...] um ângulo de 90° (x_1)
> [...] então, eu consigo pavimentar aqui com ângulo de quantos graus? (Y)
> Tenho 90º, 90º, 90º e 90º (x_{10})
> [...] 360º (x_1)
> 360º (x_{10})
> 360º, então aqui eu posso pensar no retângulo como uma possibilidade, teria outra possibilidade? Retângulo, ele é equilátero e equiângulo? (Y)
> É isso que estou vendo (x_1)
> Hum (x_{10})
> Qual polígono seria equilátero e equiângulo? (Y)
> O hexágono? (x_{10})
> O hexágono? O hexágono tem 6 lados iguais, e equiângulo os 6 ângulos iguais? (Y)
> É, não é? (x_{10})
> Como eu poderia pensar no hexágono para realizar a planificação? (Y)
> Planificar pelos ângulos (x_{10})
> Então, posso colocar eles todos juntos aqui no mesmo vértice, como vocês fizeram aqui para o retângulo? (Y)
> Fazer igualzinho né mesmo tamanho se não, não vai dar certo, equiláteros e equiângulos? Temos que planificar isso daqui? (x_1)
> Sim, seria no sentido de pavimentarmos, então, por exemplo, como se eu tivesse aqui, aí eu coloco o hexágono aqui, quantos eu consigo colocar em volta, de forma que eu pavimente todo plano? (Y)
> Entendi (x_1)
> 2, 3, 4, 5 e 6, seis, seis vamos ver, hum mais tem o outro né? Do lado do outro (x_{10})
> [...] quantos você consegue colocar em torno do mesmo vértice (Y)
> Quantos é aqui? 360º (x_1)
> 360º, 360º (x_{10})

Percebemos que as professoras tentam responder a questão e expressam que os quadriláteros quadrado e retângulo são polígonos possíveis para a pavimentação, como podemos observar na figura 32. Elas indicam a resolução que $R_{3.1}$ = *: a soma dos ângulos internos correspondentes aos vértices que se encontram seja 360º,* no entanto, apresentam alguns indícios de dificuldades em compreender os conceitos de "equiângulo e equilátero". Logo no início do percurso, surgiu a questão *$Q_{3.1}$ = O que são polígonos equiláteros e equiângulos?*

Figura 32 - Imagens das resoluções das professoras

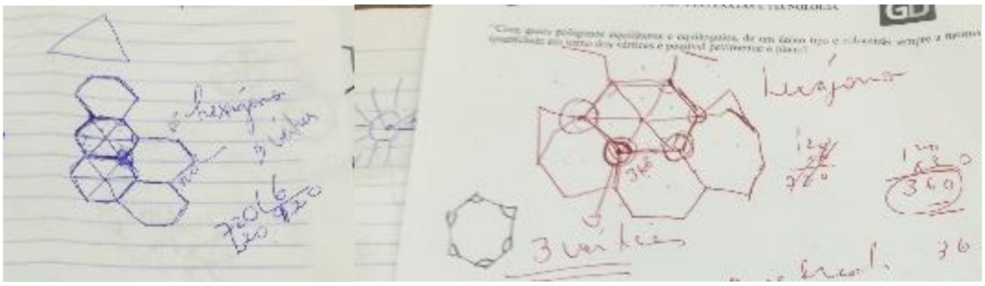
Fonte: Imagens capturadas pela pesquisadora

Assim, nesse início, a questão geradora Q_3 propiciou o encontro com a OM, as professoras expõem a suas praxeologias sem muitas justificativas, começam a explorar a atividade restringindo o estudo para o hexágono e ao mesmo tempo indicam a compreensão da resposta $R_{3.1}$. Durante o percurso, a orientadora do estudo (Y) buscou potencializar o papel das professoras para um trabalho de estudo coletivo, em contraposição a um trabalho individual, como registram Barquero, Bosch e Gascón (2011) sobre a importância da dialética indivíduo e coletivo nos PEP e as responsabilidades que cada componente do sistema didático deve assumir. Desse modo, retomamos as discussões e foi possível perceber que a professora x_1 ainda não compreendeu a atividade:

> [...] vamos pensar nesse vértice aqui em torno desse vértice, quantas figuras eu consigo construir em torno desse vértice igual ao hexágono? Em torno desse vértice [...] eu consigo construir? (Y)
> Vamos ver, deixa eu fazer aqui em torno desse vértice aqui (x_1)
> Se cada um é 120º, então 720º (x_1)
> 720º? (Y)
> Sim, não é 120º cada um? (x_{10})
> Em torno de um único vértice (Y)
> 120º, 120º, 120º, 120º, 120º e 120º? (x_{10}) (Estava pensando em torno do dos seis vértices)
> Vamos ver aqui [...] escolhe um único vértice, em torno de um único vértice, você conseguiu construir quantos hexágonos? (Y)
> Eu construo 120º vezes três (x_{10})
> [...] eu consigo colocar quantos hexágonos aqui em torno do mesmo vértice? (Y)
> Três (x_{10})

Durante o desenvolvimento das atividades, as professoras recorrem ao desenho dos polígonos, conforme podemos visualizar na figura 33. De acordo com Pais (2006), o trabalho com a geometria deve perpassar os desenhos e temos visto que estes têm possibilitado às professoras dialogar sobre as suas conjecturas. No sistema $S_6 = \{(x_1, x_{10}), Y, Q_3\}$, o estudo durou em torno de duas horas e meia, em que as professoras, mesmo com as dificuldades, estavam ativas e acompanhando as discussões, assumindo a questão geratriz Q_3 como “algo sério”. Barquero; Bosch; Gascón (2011) assinalam a importância que a comunidade de estudo assuma a questão geratriz como algo “vivo” e que tenha a responsabilidade em buscar respostas para a questão levantada.

Figura 33 - Imagens das resoluções das professoras



Fonte: Imagens capturadas pela pesquisadora

Quando questionada a existência de outros polígonos que poderiam fazer parte do conjunto solução da situação problema, sem muita dificuldade as professoras mencionaram o triângulo equilátero e, na continuidade dos estudos, passaram a refletir sobre a possibilidade de ter outros polígonos, para além dos já estudados, a partir da questão:

> Será que existem outros? (Y)
> Octógono? O pentágono? O pentágono é ímpar (x_{10})
> O pentágono? (Y)
> O pentágono é ímpar, tem cinco, tem alguma relação? (x_{10})
> [...] tem que ser equilátero (x_1)
> Vamos pensar sobre o pentágono? (Y)
> Pentágono não dá (x_1)
> O Pentágono acho que não dá (x_{10})
> Por que daí ele não é equiângulo (x_1)
> É? (x_{10})
> O Pentágono não é equiângulo? (Y)
> Vamos ver aqui (x_1)

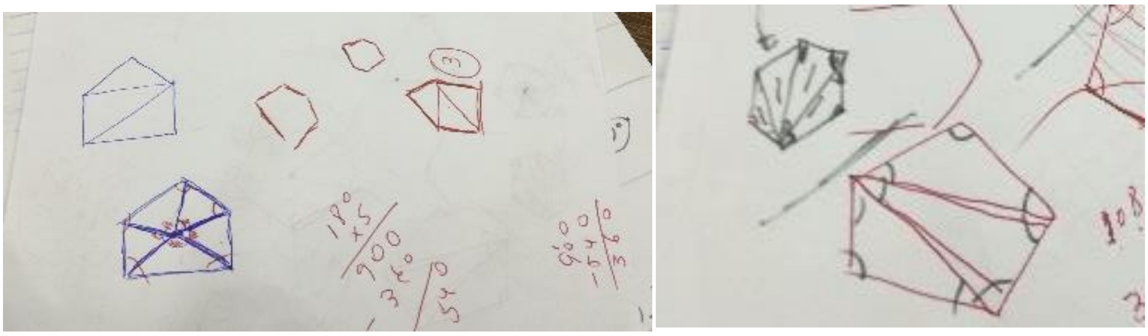
No desenvolvimento do PEP – S_6, como nos PEP anteriores, buscamos conduzir os estudos propiciando um caráter aberto (Bosch; Gascón, 2010), de modo que as professoras direcionassem o percurso. Neste sentido, as professoras buscaram exemplos de polígonos regulares apenas com o quantitativo de lados pares, até então, enquanto orientadora do estudo (Y), tínhamos a percepção de que as professoras apresentavam indícios da compressão do conceito de polígonos regulares e, quando instigadas a encontrar outros polígonos regulares, levantaram a questão *$Q_{3.2}$= O quantitativo dos* *lados do polígono têm alguma relação com o conceito de polígonos regulares?* Para elas, o pentágono não poderia ser equiângulo pelo fato do número de lados desse polígono ser um número ímpar, certamente, as professoras estavam compreendendo o conceito matemático exposto por meio da questão Q_3, conjecturando uma resposta errônea: *$R_{3.2}$: o quantitativo dos lados dos polígonos regulares é par*.

As professoras apresentaram muita dificuldade na continuidade do estudo e x_1 expressou "aí eu sou muito ruim, não consegui pensar". Assim, direcionamos o percurso para a construção de uma tabela, com títulos indicando o nome do polígono, a quantidade de lados do polígono e a soma dos ângulos internos do polígono, determinado pela quantidade de triângulos que os polígonos podem ser divididos, de modo a conduzirmos o estudo para que as professoras pudessem perceber que poderiam existir pentágonos regulares e irregulares, e, além disso, numa tentativa de trabalhar o momento tecnológico-teórico.

> [...] O quadrado, eu consigo dividir ele em quantos triângulos? (Y)
> Divide em dois triângulos aí. (x_1)
> Em dois triângulos, [...] se eu já sei que a soma dos ângulos internos do triângulo é 180º, então a soma dos ângulos internos do quadrado vai ser duas vezes 180º porque é dois triângulos, então cada um desses ângulos aqui tem quanto? (Y)
> 90º (x_{10})
> 90º, Ó eu tenho aqui, 360º dividido em quatro, um ângulo de cada vértice, então agora nós vamos pensar no pentágono [...] eu consigo dividir ele em quantos triângulos? (Y)
> Deixa eu dividir ele aqui (x_1)
> Cinco, cinco, eu fiz o pentágono, que ficou estranho (x_{10})
> Em cinco? Deixa eu ver seu desenho, aí você dividiu em quantos? (Y)
> Eu dividi em três. (x_1)
> As duas divisões que vocês fizeram são divisões em triângulos, só que essa divisão é diferente dessa divisão aqui. (Y)

As professoras ao dividirem o pentágono em triângulos encontraram duas situações diferentes, como podemos visualizar as suas resoluções na figura 34:

Figura 34 Imagens das resoluções das professoras



Fonte: Imagens capturadas pela pesquisadora

Nesse momento do estudo, direcionamos a nossa discussão para a divisão do polígono em apenas três triângulos, a tarefa $T_{3.1}$*: Qual a medida dos ângulos internos do pentágono?* poderia ser realizada por meio da $\tau_{3.1}$*: dividir o pentágono em três triângulos e dividir por cinco a soma dos ângulos internos dos triângulos obtidos.* Continuamos o questionamento para as professoras

> Olha, como é que é nós chegamos em duas situações, [...] vamos pensar nesta situação aqui, eu tenho quantos triângulos? (Y)
> Três (x_{10})
> Três [...] vezes a soma dos ângulos internos do triângulo? (Y)
> 180º (x_1)
> 180º (x_{10})
> Então, vou ter 3 vezes 180º, se a gente pensar 3 × 180º, então vai dar quantos? (Y)
> 540º (x_{10})
> 540º, certo? Então 540º significa que a soma desses ângulos aqui dá 540º e, mas quanto que é cada ângulo? (Y)
> 540º dividido por (x_{10})
> Não são iguais por cinco não dá (x_1)
> Cinco (Y)
> Vamos dividir 540º por 5 veja só, 108º graus (x_1)
> [...] Então existem Pentágonos que têm os lados iguais, equilátero, e ele também é equiângulo, porque ele tem todos os ângulos iguais que é 108º (Y)
> Você visualizando assim não é né a olho nu (x_1)
> Ao olho nu não é (x_{10})

Esse fragmento mostra o quanto a professora x_1 tem dificuldade em acompanhar as resoluções expostas na sessão, pois, ao olhar o número 540º, ela já avalia que não dá, acreditamos que ela estava querendo dizer que não dava uma divisão exata, mas depois que a professora x_{10} realizou os cálculos, ela concordou. No momento que a orientadora (Y) tentou institucionalizar as características do pentágono, que podem ser ou não regulares, as professoras observaram que “a olho nu não é”, dando indícios que ainda possuíam dúvidas em relação ao conteúdo geométrico exposto na formação.

Fica notório, durante as discussões realizadas nesse sistema didático, que as professoras não compreendem os conceitos geométricos abordados. De fato, no decorrer das formações, as professoras afirmaram que trabalhavam muito em sala de aula o campo de números e operações e que os conteúdos de geometria, quase não:

> [...] quando eu cheguei para trabalhar na escola, eu vi que a Geometria é realmente deixada de lado, ela é o conteúdo que a gente vai abordar no final do bimestre e você trabalha toda a parte aritmética e, quando você está chegando no final do bimestre, aí você vai trabalhar, já não dá tempo mais [...] (x_1)

Certamente, como aponta Leivas (2012), tem-se muito o que fazer referente ao ensino de Geometria. Acreditamos que o fato de os conceitos geométricos não serem quase trabalhados em sala de aula acarrete o esquecimento dos conceitos pelos professores participantes da pesquisa, e ainda percebemos que os conhecimentos em torno dos conteúdos geométricos são reproduções de técnicas (GASCÓN, 2003), sem justificativas teóricas. Nesse cenário, tentamos trabalhar com o momento tecnológico-teórico, direcionando o estudo para que os professores percebessem a regularidade na construção da tabela e chegassem na fórmula dos ângulos internos de qualquer polígono, assim continuamos o estudo:

> [...] a soma dos ângulos internos, o triângulo tem três lados é 180º, o quadrado tem quatro lados 360º, 2 x 180º, pentágono tem cinco lados, 540º, 3× 180°, hexágono seis lados e 720º, 4 vezes 180°, então assim se a gente continuar nessa tabela, o que que a gente percebe com relação à soma dos ângulos internos de um polígono qualquer? (Y)
> Vamos pensar no 10 (polígono de dez lados) (x_{10})
> É, vamos pensar no decágono, no de dez, no decágono, e eu consigo (Y)
> 1800º (x_1)
> É 1800º, aqui né, 10 x 180º, (x_{10})
> É 10 vezes 180º? Oh vamos começar aqui o quadrado, quatro lados dois vezes 180º, pentágono cinco lados deram três, o hexágono seis lados deram quatro (Y)
> Então, é oito, sempre diminuindo dois (x_{10})
> Que que está acontecendo? Os lados sempre estão diminuindo quantos? (Y)
> Dois (x_{10})
> [...] O decágono é isso mesmo (x_1)
> [...] Vamos pensar para um polígono de n lados e vamos generalizar, um polígono de n lados, eu quero encontrar a soma dos ângulos internos desse polígono e como que vai ser? Para encontrar a soma? (Y)
> Tem a fórmula (x_{10})

[...] Está vendo aqui? É o número de lados menos o quê? (Y)
-2 (x_1)
Vezes quem? (Y)
180º (x_1)
Então, temos (n-2) x180º[...] (Y)

Nesse trecho, a professora x_{10} levanta a questão $Q_{3.3}$ = *Qual é a soma dos ângulos internos de um polígono de dez lados?* Na tentativa de responder a sua própria indagação, ela expressou outra resposta errônea $R_{3.3}$*: A soma dos ângulos dos polígonos de dez lados é* $10 \times 180°$, e, quando orientada a perceber a regularidade na tabela, notamos que o número de lados de cada polígono é diminuído por dois, assim, na sequência, realizamos a institucionalização dos conceitos geométricos estudados, enfatizando a diferença, principalmente, entre os polígonos regulares e irregulares.

Enquanto orientadora do estudo (Y), queríamos instigá-las a participarem cada vez mais do sistema didático e que expressassem os seus conhecimentos geométricos, desse modo, na continuidade do estudo sobre a soma de ângulos internos de qualquer polígono, questionamos as professoras se existia outro modo de encontrar a soma sem ser pela fórmula. Elas expressaram-se:

Sem pensar na fórmula né (x_{10})
Vamos pensar (Y)
Nessa daqui? (x_1)
Como encontraria? (Y)
Qual você falou? Se eu consigo encontrar a soma dos ângulos internos, por esse desenho? Sim (x_1)
Como você encontraria? (Y)
Visualizando aqui? (x_1)
É (Y)
[...] aqui é um pentágono, 6 × 6 = 36, não é isso, 6 × 6, não é isso daqui? (x_1)
Não, eu quero, por exemplo, a soma dos ângulos internos desse hexágono (Y)
De todo ele? (x_{10})
[...] pensando um outro modo diferente desse aqui que nós acabamos de calcular? (Y)
(Momento de silêncio)
Deixa eu pensar aqui que eu acho, que preciso pensar (x_1)
Um triângulo aqui dá quanto? Esse daqui sozinho? 180º? (x_{10})
180º a soma dos ângulos internos (Y)
(Estão tentando fazer)
Você somou aqui e aqui? 360º 360º que dá 720º? (x_1)
Não aqui dá 720º porque a gente está pegando 180º, 180º, 180º, e 180º (Y)
Agora, aqui nós estamos pegando 60º? (x_{10})
[...] O que está diferenciando desse daqui? Vamos supor, se eu pegar esse triângulo aqui, a soma dos ângulos dele é 180º, certo? Só que eu

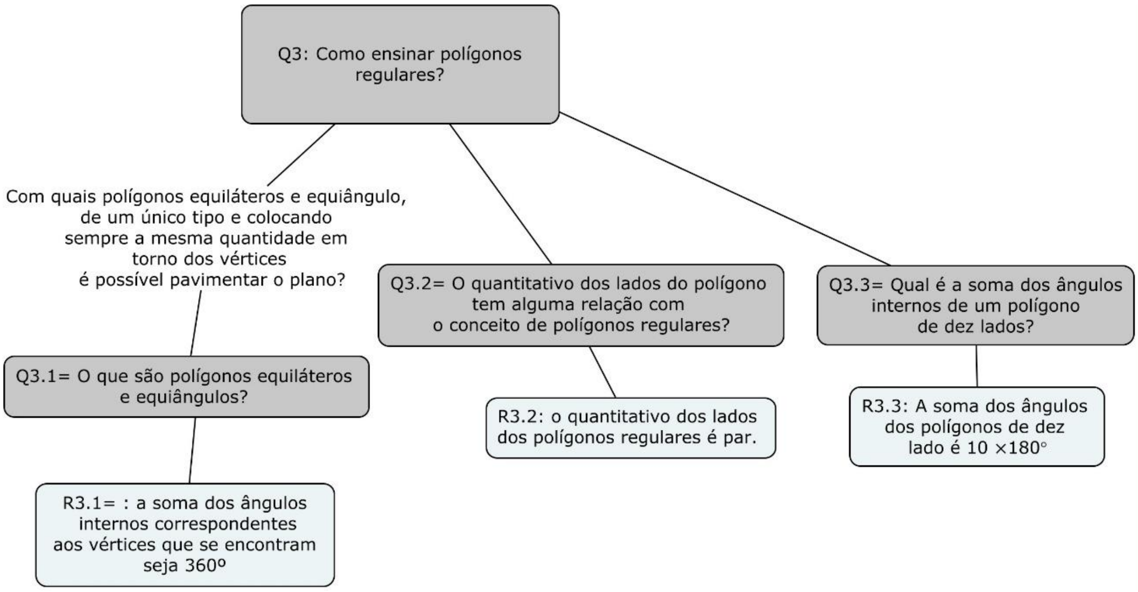
quero a soma dos ângulos internos desse hexágono, certo? Onde estão os ângulos internos desse hexágono? (Y)
Está aqui, aqui, aqui nesses três, todos eles (x_{10})
Está aqui? (Y)
Mas está aqui também (x_{10})
Está aqui? Se a gente desenha o hexágono assim, 1, 2, 3, 4, 5 e 6 onde estão os ângulos dele aqui sem olhar aquele dividido? (Y)
Está aqui, aqui fora (x_{10})
Isso aqui (Y)
Os ângulos internos, você está perguntando (x_1)
Sim, onde estão os ângulos internos? (Y)
Aqui fora (risos) não aí (x_{10})
[...]agora quando a gente divide aqui, o que está acontecendo? Nesses triângulos daqui 1, 2, 3, 4, 5 e 6? Então, eu faço assim 6 x 180º e dá quanto? (Y)
1080º (x_1)
1080º, isto só que nós vimos o que a soma dos ângulos internos de um hexágono, é quanto? (Y)
720º (x_{10})
O que, que ele está contando ah, mas aí? (Y)
360º, isso aqui do interior (x_1)
Isso ele está contando ângulo central, então eu tenho que fazer 1080º menos 360º (Y)

Nesse excerto, propomos a tarefa $T_{3.2}$*: Determine a soma dos ângulos de um polígono sem ser pela fórmula* $(n-2)\times 180°$*?* Como vimos que as professoras não conseguiriam resolver a tarefa proposta, retomamos a divisão do pentágono (realizada pelas professoras, conforme figura 34), em que a professora dividiu o polígono em seis triângulos, conduzimos o estudo para chegarem no outro modo de obter a soma dos ângulos internos de um polígono qualquer pela expressão $(n \times 180°) - 360°$ e, na sequência, direcionamos o estudo para desenvolver o trabalho com a resposta $R_{3.4}$*: Divida o polígono de n lados em triângulos a partir do ângulo central, multiplique por 180º e diminua 360º.*

Ao final do percurso, a professora x_1 afirmou que "[...] achei essa sequência superinteressante para nós", certamente o PEP – S_6 representou para as professoras, além da oportunidade de estudo, uma sequência didática que poderia levar para a sala de aula, ao invés de trabalhar somente com as fórmulas, assim, o PEP possibilita uma tentativa de desvencilhar-se do ensino de uma geometria totalmente calculista.

No decorrer dos percursos, vamos percebendo que os conteúdos solicitados pelos professores para estudos na formação são conteúdos que eles possuem dificuldades em compreender, assim como observamos como as questões geradoras impulsionam as sessões, desse modo, a questão geratriz Q_3 possibilitou a construção de respostas $R_{3.1}$, $R_{3.4}$ e a desconstrução de algumas respostas errôneas como $R_{3.2}$ e $R_{3.3}$ e o trabalho com as questões $Q_{3.1}$, $Q_{3.2}$, e a $Q_{3.3}$, assim o percurso foi constituído do seguinte sistema: [S_6= {X_6 Y, Q_3}$\rightarrow$ M={ $R_{3.1}$, $R_{3.2}$,$R_{3.3}$, $R_{3.4}$ $Q_{3.1}$, $Q_{3.2}$, $Q_{3.3}$}] = $R^{♥}$, como podemos visualizar no mapa (figura 35) :

Figura 35- Percurso S_6



Fonte: Elaborado pela pesquisadora

Ao analisarmos o PEP – S_6, temos visto que preparamos questões para um público alvo 'professores de matemática', assumimos *a priori* que estes possuíam alguns conhecimentos e almejávamos que as discussões em torno das OM fossem mais complexas, porém, na execução dos micro-PEP, percebemos, por várias vezes, que os professores não compreendiam os conteúdos geométricos e, quando compreendiam algum conceito, não conseguiam justificar as suas respostas.

Continuando com a formação continuada, demos início ao PEP - S_7 norteado pela questão Q_4 = *Como ensinar simetria?* Nessa sessão, tínhamos o seguinte sistema didático S_7 = {(x_1, x_2, x_{12}), Y, Q_4}, no qual a professora x_{12} estava participando pela primeira vez. Como aconteceu nas outras sessões, a orientadora do estudo (Y) iniciou a dialogar com foco na questão Q_4 para o princípio do estudo:

> [...] quando trabalhamos geometria, a gente pode utilizar, na sala de aula, alguns instrumentos de construções geométricas, por isso, que eu trouxe régua e compasso, porque pode ser uma oportunidade também quando for trabalhar esse conteúdo de simetria, trabalhar um pouco das construções, trabalhar com régua, esquadro (Y)
> Eles têm dificuldade de trabalhar (alunos) (x_2)

> Aí seria uma oportunidade, se eles têm dificuldade até para eles começarem a manusear (Y)
> Que eles mostram assim professora, como que chama esse? Esse daqui é qual? Para que, que usa isso? Eles têm muita dificuldade. Sinceramente, eu não dou muito valor a esse conteúdo aqui, passo superficialmente por ele (x_2)
> É o que eu falei, a gente passa assim por esse conteúdo e, e a partir daquele encontro que nós fizemos sobre ladrilhos, é que vocês perderam a aula que foi sobre isso e aí nós pensamos nessa sequência de simetria (x_1)
> Sabe o que acontece, as questões que livro didático traz, elas não promovem ou demonstram alguma dificuldade para o aluno e, aí quando o aluno faz, eles questionam o professor, isso daqui é para nós? Isso daqui não dá para dificultar dá? (x_2)
> Depende né dá, dá sim (Y)
> Por que os que vêm no livro são de nível de dificuldade bem baixo (x_2)
> Então vamos resolvendo aqui que podemos ir discutindo sobre (Y)
> Se eu bem te conheço, esse daqui vai surgir dúvida, vai dar problema para mim de novo (x_2)

Ao iniciar o estudo, a professora x_2 já expressou a sua OD em torno do conteúdo de simetria e respondeu *$R_{4.1}$: "eu não dou muito valor a esse conteúdo aqui, passo superficialmente por ele (x_2)*" e ainda complementou que o fato de o livro didático só apresentar atividades triviais faz com que até mesmo os alunos questionem se as atividades são para eles. Certamente, o conteúdo de simetria é ensinado pela professora seguindo a organização didática exposta no livro didático e, nesse início do estudo, ela comentou que não possui nenhuma dificuldade em relação ao conteúdo.

Durante todas as sessões, tentamos fazer com que os professores participassem ativamente e que o estudo contribuísse para a sua prática em sala de aula. Como a professora vem participando assiduamente das formações, os percursos desenvolvidos têm desestabilizado as suas certezas. Ela refere: "se eu bem te conheço, esse daqui vai surgir dúvida, vai dar problema para mim de novo (x_2)", logo, quando começam a participar de uma nova sessão dos micro-PEP, as professoras já esperam situações que propiciam repensar sobre as suas OD e OM em torno dos conteúdos geométricos. Assim, iniciamos o nosso estudo retomando o significado de transformações geométricas:

> [...] essa palavra vem agora no livro do sexto ano não sei o de vocês? Homotetia, o livro didático já vem mais ou menos por aí [...] tem, no nono ano, no sétimo ano, tem alguma coisa de congruência não tem? Ah não! No oitavo ano, tem os casos de congruência [...] E é pura decoreba, eu vou falar pura decoreba que o aluno faz [...] Que, na OBMEP, vem muito, vem muito contexto sobre isso né , tem que dominar na OBMEP essa parte pega, aí pega essa parte [...] Por isso que tem que passar o bê-á-bá em si ou vice-versa para depois relacionar, mas aí também você tem aquela disponibilidade de tempo também, pois

até o aluno assimilar, ou você começa lá pelo contexto, até chegar lá você tem que falar parte técnica também, você tem que apontar dentro do conteúdo várias coisas também, você não pode só ficar na historinha né você tem que mostrar a parte técnica da coisa né, da teoria, eu acho muito extenso o conteúdo e eu gostaria que tivesse somente um, dois ou três conteúdos, aí talvez a gente conseguisse abrir a mente do aluno para outras coisas (x_2)
Porque, na verdade, a gente, querendo ou não, acaba fazendo algumas escolhas, acabamos priorizando alguns conteúdos do que outros (Y)
Ou tem professor que acaba pincelando tudo e passa por tudo, quando eu digo pincelar, você vê, mas não vê o ideal, o ideal seria você parar para estudar a fundo, como você está falando, aí talvez até a própria simetria que eu estou considerando um conteúdo mais fácil que a gente passa, tenho algo pra gente ver mais (x_2)

Nesse fragmento, a professora ressalta novamente a sua OD que ensina o conteúdo com foco na técnica, visto que não possui condições 'tempo' para trabalhar toda a OM na sua complexidade. Essas condições, em ter que cumprir a ementa seguindo o referencial curricular do estado, não foram criadas pelos professores, mas afetam diretamente as suas praxeologias em sala de aula e acabam se tornando restrições para a sua prática. O professor acaba fazendo algumas escolhas, pois, numa sala com 40 alunos (heterogêneos), com diferentes tempos de aprendizagem, fica difícil, segundo a professora, trabalhar com bloco tecnológico-teórico. Após essas reflexões, as professoras passaram a resolver a atividade:

Vamos indicar os eixos de simetria (Y)
Na G, tem infinitos? (x_2)
Por quê? (Y)
Na G, tem infinitos? Porque toda vez que eu risco vai ter, aqui passando pelo centro, não? Ou eu estou equivocada, gente, por favor, me ajudem, você acaba esquecendo, sabe o que acontece quando você é professor, e você está perto de outros professores da área né você fica com medo de falar alguma coisa, de falar e, de repente, o outro vai falar assim, aí ela vai me chamar de burra. (x_2)
Que nada pode falar. (x_1)
[....] A nossa formação não dá conta, às vezes, você não sabe porque você não viu, ou, às vezes, também porque você não lembra né. (x_2)
Por exemplo, tanto tempo você não trabalha com o nono ano, cinco anos, você tem que voltar a dar uma olhada no conteúdo, planejar é assim que funciona retomar, eu trabalhava em uma escola particular, lá na escola particular era assim, você pegava o nono era só nono que você ministrava aula. (x_1)

A professora x_2 pontua o quanto é difícil expressar-se num grupo de professores e, principalmente, assumir as dificuldades que possui frente ao conteúdo ensinado, temos visto que a sua participação mais ativa nos percursos possibilita ter mais liberdade e confiabilidade no orientador do estudo (Y) para expor as suas dificuldades. Essa é uma característica importante nos PEP – FP, visto que os professores devem assumir-se como ‘estudantes da questão’ e torna-se um desafio para o orientador do estudo encaminhar os percursos de modo que os professores tenham essa responsabilidade e que exponham as suas praxeologias desenvolvidas em sala de aula.

Assim, uma das limitações nos PEP - FP composto por professores de matemática que já possuem graduação na área é a dificuldade em assumir para os demais profissionais que não compreendem determinado conteúdo, o que é totalmente diferente de lidar com professores na formação inicial que ainda estão, portanto, em processo de formação. Não estamos querendo dizer que o professor é o profissional que já compreende tudo em torno do ambiente escolar, ao contrário, acreditamos que, conforme Gatti (2016), as formações continuadas são justamente para dar continuidade ao processo formativo. O importante é que as professoras buscam, na formação, uma oportunidade de estudar os conceitos que vão trabalhar futuramente em sala de aula. Continuamos a discussão em torno da atividade:

> O eixo não precisa ser necessariamente de vértice a vértice né? É só você arriscar né, partir igual. (x_2)
> É o espelho, igual o espelho. (x_1)
> Uma técnica que a gente pode pensar dobrando a figura se eu consigo dobrar. (Y)
> E ficar igual. (x_2)
> Uma parte sobreposta sobre a outra igualmente, então eu consigo encontrar. (Y)
> Eu queria falar o seguinte né, para ficar certinho. Aqui tem dois, você consegue dividir aqui ó, aí você consegue tem que ficar certinho mesmo tamanho, entendeu? Então por exemplo, se eu dividir o triângulo ao meio, encaixar duas partes é o eixo tem que encaixar duas partes, não é isso? (x_1)
> Isso (Y)
> Então dobra aqui, não aqui já não deu, não deu (x_2)
> Tem que ser simétrico igual espelho né (x_1)
> Aqui não dá, estou dobrando aqui não dá, então está errado (x_2)
> Então, vamos começar aqui (Y)
> Agora aqui dá (x_2)
> Vamos começar na letra, na letra ‘a’ (Y)
> Na letra ‘a’ (x_1)
> Quantos eixos de simetria tem? (Y)
> São dois (x_1)
> São três (x_2)
> [...] na letra ‘a’ vocês encontraram quantos? Quantos eixos de simetria? (Y)
> Se você perguntou mais de uma vez é porque o meu está errado (x_2)
> Então, para encontrar três, vocês estão considerando esse triângulo o quê? (Y)
> Equilátero (x_1)
> Para mim, ele é equilátero não está não? (x_2)

Porque aí, no caso (Y)
Se ele fosse isósceles, a gente não encontra isso, porque o isósceles é só um eixo (x_1)
Não daria aí teria menos eixos não é isso? (x_2)
Quantos eixos a gente poderia pensar, se fosse isósceles quantos eixos de simetria poderíamos pensar? (Y)
Só um, só esse do meio, não é? Não é? Só ia dobrar aqui, não ia dobrar aqui, não ia dobrar lá, agora esse porque ele é equilátero, ele tem três. (x_2)
Por isso que eu estou medindo aqui, tem que medir certinho né, escaleno não tem né se for, se for medir né. (x_1)
Escaleno não tem, nenhum. (x_1)

A professora mencionou logo no início do PEP – S_7 que se tratava de um conteúdo fácil, no entanto, quando começa a resolver a atividade já levantou a questão: *$Q_{4.1}$: Ao traçar o eixo, não precisa ser necessariamente de vértice a vértice?* Conforme vão se desenvolvendo os estudos, percebemos que essa compreensão de ser um conteúdo 'fácil' já vai mudando. Ao resolver a atividade com as figuras do retângulo, quadrado, paralelogramo, as professoras não apresentaram dificuldades em resolver, mas ao tentar resolver a situação para o polígono de oito lados, tiveram dúvidas sobre as suas certezas:

Na letra c? (Y)
Na letra C, eu não estou visualizando muito. (x_1)
Oito lados. (Y)
Não, não, na letra C, a letra c é essa né ela é um octógono, eu consegui quatro também não foi isso? (x_2)
Deixa eu ver 2, 3, 4, 5, 6, 7 e 8. (x_1)
1234 são quatro, não é isso? (x_2)
São quatro? (Y)
Ah o meu encontrei mais, será que eu estou errada? Deixa eu fazer um maior aqui, um ... (x_1)
Um, dois ... só tem quatro. (x_2)
Dois, três é quatro, que eu fiz aqui ó (x_1)
Não, Y! Estou errada olha aqui Y tem uma montoeira, que tem 4, 5 no meu vai ter infinitos também. (x_2)
Infinitos? (Y)
Olha aqui ó, se riscar do lado desse outro, não, não, não, não, não, espera aí se aqui deu 5, 6, 7, 8, deu oito, de oito então quer dizer o número de lados é o número de eixos? é? (x_2)
Gente, estou pensando, 4, 5, 6, oito. (x_1)
Mas você não riscou aqui. (x_2)
Estou pensando para riscar, espera. (x_1)
Será que quando a gente senta para resolver esses exercícios, a gente tem a mesma dificuldade que o aluno teria? Depois que a gente estuda e passa para eles, a gente quer que eles aprendem rapidinho né, e nós somos alunos grandes, né? (x_2)
Isso que eu falei para outra professora, a gente cobra demais dos nossos alunos. (x_1)
É tadinhos, esse daqui, eu não encontrei (x_2)

[...] Eu posso, então, afirmar que, no polígono regular, o número de eixos de simetria é igual número de lados? (Y)
Com esses três exemplos, eu já bato o cartão já falo que é. (x_2)
Eu já ia falar que sim Y. (x_1)
Posso afirmar? não? (x_1)
Eu não sei (Y)
Calma vamos analisar (x_2)

Ao analisar as resoluções das atividades, as professoras perceberam que o número de eixos de simetria das figuras era iguais ao número de lados dos polígonos regulares, sendo assim, já surgiu outro questionamento feito pelas professoras *$Q_{4.2}$: O número de lados do polígono regular é igual ao número de eixos de simetria?* No levantamento dessas questões, continuamos o estudo de modo a encontrar as respostas e vimos que as professoras traçaram os eixos de simetria, mas não conseguiram justificar as suas resoluções:

Mas aí no caso quando vocês traçam o eixo de simetria na figura, vocês estão passando de vértice a vértice? (Y)
Essa foi minha pergunta inicial. (x_2)
Não. (x_1)
Vamos olhar aqui, por exemplo, vamos olhar aqui ó no caso do octógono. (Y)
Quando ele é regular, você passa de vértice a vértice. (x_2)
Que aconteceu no caso do quadrado? (Y)
Aqui você não passou todos os vértices, aqui não é vértice. (x_2)
No caso aqui é um caso que foi o vértice. (Y)
Verdade Y. (x_2)
Então, nesses três casos aqui, vocês traçaram uma só reta que passa pelos vértices? (Y)
Não. (x_2)
Vocês traçaram também. (Y)
Lado a lado, metade, vértice a vértice, metade, ponto médio, pelo ponto médio de cada lado, cada lado, exato. (x_2)
Então, assim vocês, no caso, têm duas opções, no caso aqui é a mesma regra no triângulo? (Y)
Vértice, a vértice foi. (x_2)
Triângulo foi de vértice a vértice? Olha que o quadrilátero, o quadrado octógono, vocês partiram que é de vértice a vértice. (Y)
É aqui não, no triângulo ponto médio (x_1)
Então, olha foi isso, aqui foi de ponto médio, a ponto médio do lado oposto. (Y)
Aqui foi de vértice a ponto médio. (x_1)
Aqui foi de vértice a ponto médio (Y)
Aqui já é diferente, concorda? (Y)
Concordo (x_1)
Aqui é vértice a vértice, aqui ponto médio a ponto médio. (Y)
Mesma coisa aqui (x_2)
Aonde você quer chegar? (x_1)
Está vendo vértice a vértice, está então aí eu pergunto, para vocês, assim, se eu considerar um polígono regular, eu posso colocar que todos

vão ter um número de eixos de simetria com a mesma quantidade de lados? (Y)
Sim? (x_2)
Isso ficou claro (x_1)

Assim, conduzimos o percurso para que as professoras conseguissem responder à questão $Q_{4.2}$ e chegassem às respostas *$R_{4.2}$: No polígono regular, o número de eixos de simetria é igual à quantidade de lados do polígono*. Durante o estudo, as professoras principiaram a perceber algumas diferenças no modo como se encontram os eixos de simetria nos polígonos de lado par e lado ímpar. A orientadora questionou:

> Mas e aí, os eixos de simetria para encontrar, vamos dizer assim os polígonos de lados pares, é igual para você encontrar os eixos de simetria dos polígonos de lado ímpar? (Y)
> Manda um polígono de lado ímpar, então para gente ver. (x_1)
> Então, vamos desenhar, por exemplo, um pentágono, um pentágono regular. (Y)
> Vai ser difícil agora para mim desenhar um pentágono. (x_1)
> Então, vamos pensar no eixo de simetria. (Y)
> [...] Não está regular, é difícil desenhar a mão livre. (x_1)
> Se eu dobrar, também não vai dar Y. (x_2)
> Não dá? Vamos pensar aqui ó, desse vértice, é o desenho que não está. (Y)
> Vamos fazer o desenho correto. (x_1)
> Não dá Y (x_2)
> Um pentágono regular. (x_1)
> Então, faz um tempo que eu não desenho um pentágono, mas a gente pode tentar assim, vamos supor aqui, de lado cinco, lado cinco, aí. (Y)
> Então, vamos pensar assim, vamos fazer outro formato para ele. (x_2)
> Lado cinco. (Y)
> Vamos tentar outro formato para ele então Y. (x_2)
> Então, aqui a gente pode desenhar cinco aqui também né (Y)
> Não vai dar pentágono. (x_1)
> Vai dar uma figura monstruosa. (x_2)
> Regular professora, não estou conseguindo entender um regular aí. (risos) (x_1)
> Não vai dar regular. (x_2)

As professoras não conseguiram desenhar um pentágono, ao tentarem desenhar o polígono, elas consideraram apenas os lados, mas não os ângulos, vale ressaltar que a professora x_1 tinha participado do percurso sobre ladrilhamento e discutimos sobre o pentágono regular. Contudo, no momento, ela não pontuou nada. Continuamos, então, a discussão:

> Não dá, vamos pegar no celular? (x_2)
> Professora, pode usar o celular? (risos) (x_1) (pega o celular)
> [...] será que o problema não pode estar no nosso desenho? (Y)
> Mas esse é um pentágono regular. (x_2)

> É um pentágono só que, para ser regular, eles têm que ter o quê? (Y)
> Ah do vértice ao centro tem que ter a mesma medida do lado. (x_2)
> Quando nós falamos em polígonos regulares aqui o que nós estamos considerando apenas? (Y)
> Só lado. (x_2).
> Só lado? (Y)
> Está errado, o nosso desenho (x_2)
> O que está errado aqui? Este aqui é um polígono regular? Olhando aqui, eu estou apenas considerando os lados, mas o polígono regular, ele tem os lados iguais e os ângulos, então aqui, por exemplo, aqui tem um ângulo de 90 ... aqui vai ter um pouco maior que 90 aqui, essa figura não é regular. (Y)
> Mas o pentágono pode ser regular? (x_2)
> Sim. (Y)
> Vamos colocar na internet (x_2)
> Tem pentágono regular, não tem? Ou não (Y)
> Tenho minhas dúvidas (x_2) (nesse momento a professora pesquisa na internet com o auxílio do celular)
> Sim! tem? (Y)
> Eu estava achando que tinha, mas agora não sei mais, mediante esse desenho aqui eu não sei mais professora, até agora eu estava achando que tinha. (x_1)

Nesse fragmento, fica explícito que as professoras não sabem o que é polígono regular, tendo levantado a questão *$Q_{4.3}$: Mas o pentágono pode ser regular?* No decorrer do percurso, vamos percebendo que admitimos que os professores já sabiam alguns conceitos geométricos, no entanto, conforme vamos executando os estudos, temos fortes indícios que os conceitos básicos da geometria não são compreendidos pelos professores, sendo que eles precisam recorrer à internet (mídia) para entender o conteúdo. A professora x_2 assim expressou-se:

> Meu Deus! Têm. Não é no formato da nossa casinha e vai ter os ângulos e os lados, olha aqui ó (x_2)
> Os ângulos aqui têm que ser todos iguais, e aqui o que acontece, estamos considerando somente o lado, num polígono regular de cinco lados, os ângulos internos deles é 108°. (Y)
> É a soma é 540º né. (x_2)
> [...] E se assemelha com um triângulo, será que vai se assemelhar com o heptágono também? Vou pesquisar na internet (x_1). A professora começa a pesquisar na internet.
> O heptágono, ele tem sete lados, é um polígono com lados ímpares né, a partir do desenho da internet começa a contar os eixos de simetria. Do vértice ao ponto médio (Y)
> Um, dois, três, quatro, cinco, seis e sete, sempre no vértice ao ponto médio e, então, as características permanecem sempre para os polígonos regulares, as características permanecem também para os polígonos de lados pares e de lados ímpares também (x_2)
> O que acontece, nos polígonos regulares, a gente pode afirmar que a quantidade de lados é a quantidade dos eixos de simetria, porém, o modo como encontro os eixos de simetria de um polígono de lado par é

> diferente do modo como encontro os eixos de simetria de um polígono de lado ímpar. (Y)
> Nos pares, é de vértice a vértice e ponto médio a ponto médio, é isso? (x_2)
> Vértice a vértice e ponto médio a ponto médio. No polígono de lado ímpar (Y)
> Só de vértice a ponto médio. (x_2)
> De vértice a ponto médio. (Y)

Nesse trecho, após as professoras pesquisarem na internet (mídia), conseguimos institucionalizar algumas particularidades da simetria que foram recorrentes nas atividades desenvolvidas, tendo obtido as seguintes respostas $R_{4.3}$*: Nos polígonos regulares de lados pares, os eixos de simetria são traçados de vértice a vértice e ponto médio a ponto médio* e $R_{4.4}$*: Nos polígonos regulares de lado ímpar, os eixos de simetria são traçados de vértice a ponto médio*.

Apesar das dificuldades, é importante ressaltar que a todo o momento as professoras x_1 e x_2 vão anotando tudo, como elas mesmo expressaram é um momento de estudo, mas a professora x_{12} só fica olhando, talvez por ser a primeira vez que participa. Em continuidade, segue o estudo, quando a orientadora apresenta alguns conceitos de ortogonalidade, sobre a mediatriz enquanto lugar geométrico, pois as professoras, quando questionadas sobre esses conceitos, não lembravam. Após a compreensão do conteúdo, as professoras avaliaram as possibilidades de desenvolver essas atividades em sala de aula (OD) e retomaram a discussão sobre o estudo:

> Essa atividade no laboratório ficaria legal, você distribui para o grupo, você pode distribuir para o grupo as questionáveis né, por exemplo, um polígono com lado par, um que não tem eixo de simetria. (x_2)
> Casos que não tenham eixos, casos que tenham, tipo os polígonos pares e ímpares. (Y)
> E a partir daí começar a questionar, a fazer as perguntas pra que eles possam responder, dá pra ser uma aula legal de laboratório né. (x_2)
> O Y, aquela figura que eu falei no começo, que tem infinitos eixos de simetria, eu ainda continuo batendo nessa tecla e tem finitos eixo simetria, vai ficar 'n' retas passando pelo centro, e vai ficar dividido. (x_2)
> Vai ficar dividido igualmente, então o caso da circunferência aí, ela tem infinitos eixos de simetria, quando passa pelo centro e toca dois pontos da circunferência, na verdade, eu estou trabalhando com o (Y)
> Raio, o diâmetro. (x_2)
> Isso, com o diâmetro. (Y)
> Já dá para puxar também que tem o conteúdo, todo de circunferência em algum ano aí, acho que é no nono não vai ter? No oitavo também, no ano passado eu me lembro, e daí fica legal também já puxar o gancho para isso. (x_2)

Então, aí você já pode trabalhar, e aí eu trouxe até umas perguntas em complementos dessas, aí a gente pode até pensar para ser questionado para os alunos, ou, às vezes, a gente nem precisa necessariamente, vou aplicar a definição, eixo de simetria é isso, isso, isso, aí vocês podem falar a partir dessas figuras, vamos dobrar, o conceito de sobrepor sobre o outro, aí eles vão descobrindo que esses são os eixos de simetria. (Y)
Eles vão formar a própria teoria deles, como vocês querem escrever? Eixo de simetria é o quê? Cada um vai falar uma coisa. (x_2)
Aí, na verdade, é o que eu consigo dividir a figura. (Y)
Em duas partes sobrepostas. (x_2)
Iguais, quando você sobrepõe, é exatamente igual, então, assim, você pode fazer até uma atividade a partir disso e perguntar para os alunos, o que realizou para encontrar os eixos de simetria das figuras? (Y)
Não dá para falar que é dividir a figura em duas partes iguais, se não o paralelogramo entra né, eu tenho que falar algo mais né, partes iguais que sobrepõem. (x_2)
Em duas partes simétricas. (Y)
Pode por outra coisa em lugar de simétrico, talvez eles entendam melhor, eu não posso falar em duas partes iguais, se não vou levar ao erro. (x_2)
O caso do paralelogramo é justamente ele que induz a esse erro, então, seria duas partes iguais que se sobrepõem. (Y)
Igualmente. (x_2)
Igualmente. (Y)

Por certo, na fala das professoras, o conceito que elas expressavam que era “fácil” já muda. No decorrer do estudo, verificamos que as professoras compreenderam muito mais o conteúdo e passaram a pensar numa OD para ser desenvolvida em sala de aula. Na continuidade do estudo do conteúdo, propusemos uma discussão sobre alguns erros conceituais apresentados em livros didáticos relacionados à simetria. Um dos erros mais graves que a atividade menciona é o conceito de eixo de simetria em seres tridimensionais, assim, tentamos estudar que em objetos tridimensionais são planos de simetria e não eixos de simetria. Assim posto, pontuamos:

[...] o que ele coloca com mais ênfase que eu estou falando aqui, eixos de simetria, nós estamos trabalhando com o quê, com figuras. (Y)
Planas, ele coloca com figuras tridimensionais. (x_2)
Isso, então, por exemplo, o corpo humano, ele não é plano, então, eu não posso falar em eixo. (Y)
Mas a sombra dele, geralmente, vem a sombra (x_2)
Se for a sombra no plano, eu posso falar isso de simetria, mas quando entrou uma figura tridimensional, eu falo o quê? (Y)
Não recebe mais esse nome, é simetria de reflexão, esse é o nome? (x_2)
[...] Simetria de reflexão e simetria axial é a mesma coisa, só que aí o que acontece quando eu trabalho com três dimensões não existe o eixo de simetria, existe o plano de simetria, eu vou falar dos planos de simetria de reflexão, por isso que ele fala assim, que o livro conduz ao erro, porque quando o trabalho, por exemplo, prédio, o prédio, ele é

> uma figura tridimensional então, não vai existir um eixo, não vai existir um eixo de simetria, vai existir um plano de simetria. (Y)
> Acho que o livro quis contextualizar e acabou errando (x_2)
> Na verdade, não existe eixos no caso de figuras tridimensionais e, pensa no objeto de três dimensões, vamos supor ali, se eu pensar em dividir esse objeto. (Y)
> Eu teria um plano, eu passo uma sua folha no meio não uma reta. (x_2)
> Isso. (Y)
> Passo uma folha no meio que é um plano. (x_2)
> Isso que é o plano que vai dividir em duas partes iguais e sobrepostas. (Y)
> Como se fosse uma parede. (x_2)

Com essa atividade sobre os erros conceituais no livro didático em torno do estudo de simetria, encerramos o PEP-S_7 e, nesse momento, temos percebido que conforme as dificuldades em relação ao conteúdo, as professoras quase não questionam. Bosch e Gascón (2010) argumentam que os percursos devem conduzir a uma ampliação das praxeologias, observamos que, no decorrer do estudo dessa sessão, as praxeologias das professoras em torno do conceito de simetria ampliaram-se, visto que, segundo relato, elas ensinavam somente traçar os eixos de simetria. Por certo, no final dessa sessão, já não acham um conteúdo simples a ser ensinado e as suas praxeologias ficaram mais completas após o estudo. O percurso foi sendo composto pelo seguinte sistema: $[S_7=\{X_7, Y, Q_4\} \rightarrow M=\{ R_{4.1}, R_{4.2}, R_{4.3}, R_{4.4}; Q_{4.1}, Q_{4.2}, Q_{4.3}\}]$.

No término dessas atividades, as professoras solicitaram a continuidade de estudo sobre a Simetria, assim, foi proposto fazê-lo na próxima sessão. Em suma, estamos compreendendo que teria muito o que fazer para o estudo de geometria com esses professores, porém, as suas relações com os conteúdos geométricos não serão as mesmas após os micropercursos.

Conforme os professores solicitaram, demos continuidade ao PEP- S_8 norteado pela questão *Q_5=Como ensinar semelhança de triângulos e relações métricas do triângulo?* A própria professora x_2 expressou a necessidade de trabalhar esse conteúdo, pois já iria iniciar na sua aula. De início, na sessão 8, a intenção foi continuar a discussão da Q_4, todavia, o estudo da questão Q_4 ficou para outro momento, visto que as professoras interessadas nesse assunto não estavam presentes no PEP– S_8. A orientadora do (Y) deixou livre para as professoras decidirem:

> [...] vocês querem discutir essas atividades (simetria) ou vocês querem discutir as atividades de relações métricas (Y)

> Eu prefiro, a minha opinião ir para esse (relações métricas) de repente outro dia que as meninas vierem, a gente volta para esse de simetria, o que você acha (x_2)
> Pode ser (Y)
> [...] Esse conteúdo volta no primeiro ano né ou no segundo ano do ensino médio? (x_2)
> No médio (x_{12})
> Então, porque eu dei aula disso, já faz uns quatro anos e agora vai ser depois da prova semana que vem, eu vou entrar aqui nesse conteúdo. (x_2)

A professora x_2 expressou que já fazia uns quatro anos que não trabalhava esse conteúdo em sala de aula, talvez seja por isso que solicitou que estudássemos na formação, viu uma oportunidade de estudar e pensar nas suas aulas *a posteriori*. Os professores, no decorrer da formação continuada, solicitaram muito para a orientadora Y materiais concretos para trabalharem em sala de aula ou no laboratório de matemática que a escola possuía. De fato, os professores viam a necessidade de trabalhar em outro ambiente com os alunos, bem como com algo concreto que representasse os conceitos estudados, por certo, o foco desse percurso foi discutir as possibilidades sobre como trabalhar com materiais concretos (OD) no ensino da Q_5:

> [...] estou pensando em trazer os alunos aqui (laboratório de matemática) ou na própria sala de aula mesmo para fazer isso daqui, antes despejar esse monte de fórmulas para eles, das relações. (x_2)
> Porque aí você pode ir começar com atividade assim ó, é aí depois eles vão até entender melhor esse conteúdo, aí vamos recortar tem uma tesoura ali [...] Aí agora, com auxílio do esquadro, nós vamos traçar um ângulo de 90º, passando por esse vértice aqui ó, a gente pode pensar assim aqui é A, aqui é B e aqui é C, traçar o segmento, que fica perpendicular à hipotenusa BC. (Y)
> Você quer então altura. (x_2)
> Isso. (Y)
> Até então eu não falo nada para eles (alunos), só peço para eles irem fazendo essas coisas? [...] eu já estava pensando seguinte fazer algo que eles já fossem compreendendo as fórmulas, que já fossem visualizando as fórmulas. (x_2)
> [...] Aqui eles já podem ir fazendo algumas conjecturas. (Y)
> Eles já visualizam né. (x_2)
> [...] B com B, então no caso aqui eu tenho, eu estou trabalhando com o caso de semelhança. (Y)
> Ângulo, ângulo. (x_2)
> Ângulo, ângulo, e aí eu posso fazer assim se o triângulo, se eu chamar aqui o triângulo A, B e C, vamos colocar aqui no triângulo, vou colocar aqui o triângulo ABC, eu posso falar que ele é semelhante a esse triângulo aqui, certo? Mas qual vai ser a ordem aqui? O vértice A, ele é semelhante a quê? (Y)
> Ele bate com o D. (x_2)
> D (Y)
> Semelhante ao triângulo D, B, A. (x_2)

D, B, A. (Y)
Que eles têm que comparar os vértices. (x_2)
Isso. (Y)
Porque senão fica errado. (x_2)
Isso, no caso, é como eles colocassem assim por isso, na folha de sulfite seja mais fácil, ele, assim ó, estão vendo? Olha aqui, aqui está o A, aqui está o próprio B, e aqui está o A, estão vendo? Aqui ele consegue, se ele coloca aqui, se ele vem aqui, se ele vem aqui e se ele vem aqui, eles estão vendo que tem o mesmo ângulo, por quê? (Y)
Porque está encaixando, sobrepondo. (x_2)
[...] Porque está sobrepondo, aí entra igual àquela atividade que nós estávamos discutindo de Simetria né, quando eu consigo colocar sobreposição exatamente, e aí, olha aqui como ele consegue ver ó, porque eles são ó, eles são, os ângulos são o quê? Congruentes, por isso, que às vezes do recorte aqui, ele já consegue manusear e visualizar. (Y)
Talvez muito mais do que uma figura somente colorida né. (x_2)
Isso, aqui se eu falo que dois triângulos são semelhantes, é porque os ângulos correspondentes são iguais, e os lados são o quê? Os lados são (Y)
Proporcionais. (x_2)
Então, eu posso colocar que o lado AB do triângulo aqui [...] do triângulo ABC é proporcional a quem? (Y)
É proporcional ao lado você falou do lado AB né? (x_2)
AB. (Y)
Ao lado BA, não ao lado BD. (x_2)
É proporcional a quem? (Y)
AB a BD. (x_2)
A BD. (Y)
Aqui ó BD. (x_2)
E o AC é proporcional a quem? (Y)
É proporcional a esses dois aqui DA ou AD. (x_2)
Com quem? (Y)
AD ou DA. (x_2)
DA. (Y)
AC, DA. (Y)
Porque você começou daqui, mas se bem que. (Y)
Como se trata da mesma medida. (x_2)
Como se trata da mesma medida. (Y)
Neste caso, interferência nenhuma. (x_2)
Não da diferença. (Y)
Mas é legal por. (x_2)

Nesse fragmento, começamos a trabalhar com a atividade da folha de sulfite para que os professores relembrassem os casos de semelhança e que, durante o percurso por meio do conteúdo de semelhança, chegaríamos ao conteúdo de relações métricas no triângulo retângulo. No entanto, nas discussões realizadas no decorrer do PEP - S_8, somente a professora x_2 tratou sobre os conceitos abordados no estudo, talvez por ser a única professora presente que trabalharia com o conteúdo em sala de aula. Assim, direcionamos as discussões para as possibilidades do material concreto para trabalhar em sala de aula (OD) concomitante com o conteúdo (OM). No término do manuseio com as folhas de sulfite, começamos a trabalhar com o material concreto de relações métricas:

> [...] porque quando eu dispuser esse material para eles, eu tenho que falar para eles encaixar, não é isso? Eu pensei assim, em distribuir isso (o material) e pedir para eles encaixarem, e eles vão conseguir, eles vão ver que tem que colocar h com h, elas vão ter que relacionar isso, eles vão conseguir encaixar, e a partir daqui eu queria que eles visualizassem a fórmula aqui. (x_2)
> Isso. (Y)
> A primeira você falou a = m+ n, eu visualizei. (x_2)
> Y dá um help aí. (x_2)
> Fica olhando pelos lados. (Y)
> O que vocês tiraram? Um quadrado de lado o quê? (Y)
> B. (x_2)
> Se eu falar assim, qual é a área desse quadrado? (Y)
> B x b (x_8)
> B ao quadrado. (x_2)
> B ao quadrado, se você tirou esse quadrado de área b^2 e você colocou um retângulo, qual que é a área desse retângulo? (Y)
> Então b^2 = a x m (x_2)
> Isso b^2 é = a x m, ou b^2 = m x a, por que é isso? Porque significa o quê, você tirou essa área do quadrado e se você conseguiu encaixar um retângulo no espaço que você tirou esse quadrado aqui de lado B significa o quê? A área desse quadrado = a área do retângulo, eles ocupam o mesmo espaço, certo? Então, você chega aqui b^2 é igual a x m ou b^2 = m x a, você já chegou na primeira. (Y)
> Você usa a fórmula, porque já vimos que a hipotenusa é a = m+n, a gente já embarcou duas. (x_2)
> De repente, quando você pede para ele tirar você, pode intervir nesse sentido para ele não ficar gastando muito tempo da aula, faz essa observação. (x_2)
> Então, mas aí o que acontece, tem coisas que a gente observa, mas aí a gente também já dá a dica para eles, o certo é que o aluno manuseia o material assim, o certo é deixar, eu sei que a gente tem um tempo limitado em sala de aula, eu entendo isso, mas o certo é eles conduzirem o material, o tempo que for necessário, para ele ir compreendendo essas relações, porque, às vezes, a gente, e fica assim, ele manuseou um pouco, vou falar logo. (Y)
> Se não vai terminar a aula. (x_2)
> Mas o interessante seria assim, que ele pudesse manusear mesmo ficando a aula inteira, porque aí o que acontece isso daqui automaticamente vai desenvolver o raciocínio lógico dele, ele vai ter que pensar em estratégias, olha essa forma que deu certo, então, o que está acontecendo, o que que deu certo porque aqui está substituindo. (Y)

Durante o manuseio dos materiais, tínhamos, como intenção inicial, discutir os conceitos de relações métricas, o que acabou não acontecendo. De fato, conforme afirmamos anteriormente, somente a professora x_2 participava, devido a isso, direcionamos a discussão para que os professores avaliassem as potencialidades dos materiais, se era viável trabalhar com esses recursos em sala de aula ou não, ou ainda se esses materiais concretos conduziam à compreensão dos conceitos. Logo, não tivemos esses direcionamentos e a maioria dos professores manuseou o jogo e a atividade da folha de sulfite sem fazer qualquer análise.

Nesse cenário, estamos compreendendo que a formação continuada é um espaço, como vimos nas pesquisas de Gatti (2016), Imbernón (2009), que os professores são livres para dialogar ou não, e que são protagonistas das formações com foco no seu contexto de trabalho. Acreditamos que, naquele momento, algumas professoras tinham outras preocupações, como é o caso da professora x_{12} que levou para a formação algumas atividades avaliativas dos seus alunos sobre cálculo de Pitágoras e estava com dúvidas na correção. Na verdade, a professora não compreendia os erros dos alunos, mas sabia que as atividades estavam erradas pelo fato de os resultados não coincidirem com o gabarito do livro:

> [...] Isso que eu ia perguntar para Y, [...] eu tenho que corrigir esses também. (x_{12})
> Eu chamo de ‘a’ porque a maioria dos livros trazem ‘a’ (x_2)
> Então $a^2 + b^2$ (x_{12})
> $c^2= a^2$ aqui é o cateto? (x_2)
> É $a^2 + b^2 = c^2$, a maioria dos livros trazem. (x_2)
> É o contrário, não? (x_8)
> A fórmula em si tá certa, mas as letras estão trocadas né, a fórmula é essa, a soma dos quadrados dos catetos é igual ao quadrado da hipotenusa, mas aí você está chamando a hipotenusa de ‘c’. (x_2)
> De ‘c’ e os catetos de a, igual aqui ó (Y)
> Mas como está pedindo no valor de x e y, daí no lugar do ‘c’ colocaram o ‘x’. (x_{12})
> Sim! Mas eu coloco para os meus que a hipotenusa é “a”. (x_2)
> Mas aqui ó, ‘x’ aqui ó é cateto. (Y)
> Cateto. (x_2)
> E a hipotenusa sempre que está de frente. (x_{12})
> De frente para o ângulo reto. (x_2)
> Isso. (x_{12})
> De frente para o ângulo reto aqui ó, então a hipotenusa é 15, vamos supor aqui na letra b, está vendo aqui, do jeito que está aqui o 15 tinha que estar aqui (Y)
> Aí ele representa cateto (x_2)
> Porque o que ele está falando ó, dessa fórmula aqui ó é decorrente até desse daqui para chegarmos no Teorema de Pitágoras (Y)
> Isso que eu estou vendo agora, essas fórmulas eu não cheguei nas relações métricas ainda (x_{12})
> [...] eles estão usando uma fórmula só para todos na resolução (x_{12})
> Aqui, na verdade, eles estão (se referindo as atividades feitas pelos alunos da x_{12}), nesse caso aqui, eles estão confundindo, quem que é a hipotenusa, e quem que é os catetos (Y)
> Não mais, eu deixei bem claro que lá na hipotenusa é sempre para o ângulo de 90º (x_{12})

> Mas é porque a maioria dos livros traz a hipotenusa como a, por isso que eu acredito que não seja interessante pôr o ‘c’. (x_2)
> Mas aqui ó, mas, por exemplo, na letra b, o cateto é ‘x’ e a hipotenusa 15, e aqui ele tratou como se fosse cateto a hipotenusa, por isso não vai chegar na resposta, aqui ó, porque o que ele tinha que fazer ele tinha que colocar $15^2 = x^2 + 122$, entendeu? Porque o ângulo que está aqui, que enxerga, o segmento que está aqui ao lado do ângulo reto é o 15. (Y)

Conforme Barquero, Bosch e Gascón (2011), considerando o caráter aberto e dinâmico dos PEP, no seu desenvolvimento, podem surgir outras questões a serem estudadas que não foram antecipadas. Notamos que, apesar de o teorema de Pitágoras ser uma das relações métricas do triângulo retângulo, não tínhamos previsto um estudo mais específico dessa relação e, no momento da nossa formação, os direcionamentos do estudo ficaram com foco em ajudar a professora, pois vimos a dificuldade dela ao expor a sua OM no ensino sobre o referido teorema. Por certo, a professora x_{12} não compreendia o conteúdo e explicitou a sua dificuldade quando dialogava com a professora x_2.

> Muitas vezes, eu coloco para ela, como esse exemplo do mexer com a proporção mesmo, com a semelhança com os lados proporcionais. Nesse caso que eu mostrei aqui ó, não precisa fazer contas, proporcionalmente esse é o nosso cateto 3, 4 e 5, muitos dos casos mais simples assim usual, eles não fazem conta, ele, meu lado de hipotenusa 5, esse só pode ser meu cateto 4, o famoso 3, 4, 5. (x_2)
> Pode fazer assim? Vai dar o mesmo valor? (x_{12})
> Opa! Proporcionalmente, eles foram aumentados vezes 3, proporcionalmente. (x_2)
> Porque se eles forem triângulos retângulos semelhantes, eles são (Y) proporcionais. (x_2)
> Como nós vimos, são proporcionais, se eles são proporcionais (Y)
> Eles só não fazem assim, quando envolve raiz, decimal, mas no caso simples assim, eles mandam a ver. (x_2)
> Quando envolve raiz, potência. (Y)
> Uma coisa que não fica tão visual. (x_2)

Diante disso, a nossa sessão 8, com o sistema $S_8 = \{X_8, Y, Q_5\}$, não teve levantamento de questões por parte das professoras em torno das OD quanto aos usos dos materiais concretos. Por certo, o percurso desenvolveu-se apenas no manuseio dos materiais concretos e ficou mais evidente o estudo do Teorema de Pitágoras, pois as professoras apropriaram-se das atividades dos alunos de x_{12} e começaram a interpretar os erros cometidos. Pelas atividades, ficou implícito que a professora havia ensinado de forma errônea para a sua turma, pois não teve nenhum aluno que desenvolveu as atividades corretamente, todos assumiram o ‘cateto’ como ‘hipotenusa’, visto que, para eles, a letra ‘c’ representava a hipotenusa e a letra ‘a’, o cateto, de modo que, sem interpretar a figura, já resolviam as situações propostas.

Desde o início, solicitamos que os professores expusessem as suas praxeologias e realizássemos um estudo em torno dos conteúdos geométricos. No entanto, não solicitamos que eles trabalhassem com as atividades desenvolvidas na formação continuada em sala de aula. A professora x_{2}, após o PEP-S_8, executou as atividades discutidas na formação em sala de aula, por livre e espontânea vontade:

> Antes de você entrar no conteúdo, você dá aquela analisada, pois, aquele dia, eu vim crua né, e daí eu cheguei à conclusão ~~do~~ seguinte, é o que você falou, é mais interessante fazer isso antes (mostra a folha de sulfite), porque isso daqui (aponta para o material de relações métricas), depois que ele pega o jeito meramente, ele vai saber que uma área é igual a outra [...] aí o que eu fiz, eu reparti o sulfite no meio, aí eu fiz isso aqui, para eles fazerem os recortes, nomeamos né, colocamos os catetos tá, aí depois reservei esse , aí a gente nomeou aqui, aí falei para eles o que significam as projeções [...] que é algo novo para eles, as projeções, aí depois pedi para que recortassem e retomei o conteúdo semelhança, eles lembravam de alguma coisa ainda e mediante a semelhança, aí sim nós fomos estabelecendo as relações métricas, e aí é muito mais fácil. É muito mais vantajoso eu fazer isso, porque daí ele não vai precisar decorar a fórmula, porque quando eu mostrar para ele um exercício (folheia o livro didático) assim (aponta para o livro), ele não vai precisar lembrar que fórmula que é, basta ele relacionar os lados correspondentes. [...] eles iam falando e eu colocando no quadro, aí eu chegava na fórmula né, e todo mundo com seus triangulozinhos na mão olhando, bem legalzinho e aí [...] eu frisei bem essa parte da semelhança e retomei o que era necessário para que eles sejam semelhantes, e eles lembraram: Ah, professora! Lembra que você falava assim, quando divide os lados pelo mesmo número ou multiplica é porque eles são semelhantes, e quando tem os ângulos iguais, eles conseguiram falar isso, o que eles dizem é os lados proporcionais, então, assim, eu frisei bem a questão da semelhança e, por isso, a gente poderia relacionar os lados correspondentes e chegar nessas fórmulas e daí eu acho muito mais legal, mediante os exercícios, porque você tem duas maneiras depois de fazer os exercícios, ir tirando os dados certo? e ver qual fórmula encaixa, aí vai ficar perdidão no meio das fórmulas, se eu estiver só usando as fórmulas com eles e eu fazendo isso (aponta para as folhas de sulfite), essa demonstração, eles podem relacionar os lados que chegam nas fórmulas do mesmo jeito, eu acredito que é mais vantajoso, [...] e eu gostei muito, porque apesar de ser simples é concreto, materializa a situação [...] apesar de você fazer um simples recorte né, e eu achei esse formato né, depois que eu fui estudando né, mais interessante que esse. E você tinha me dito e eu fui contradizer você, eu queria esse [...] mas depois eu vi que esse aqui, mediante a situação de semelhança, que eu poderia pegar de gancho e eles montando as fórmulas vai ficando muito mais fixado do que aquele joguinho ali, mostrando que as áreas são iguais, eu posso fazer esse sim depois, em um outro momento, mas, para iniciar, entendeu, eu gostei muito desse [...]. Relembramos a altura, mediana, mediatriz, daí achei

> esse muito interessante [...]. [...] assim, levou em torno de uma aula ou mais para fazer isso com eles, mas está tendo muito mais efeito (x_2)

Nesse excerto, a professora comentou que buscou estudar e planejar a aula e percebeu que, durante o percurso, estava equivocada, compreendia que o melhor material didático para trabalhar com os seus alunos era o da montagem, que trabalhava diretamente o conteúdo de relações métricas, todavia, ao analisar os materiais concretos e estudar a atividade de dobra e recorte com a folha de sulfite (trabalhando semelhança dos triângulos), percebeu que os alunos entenderiam melhor as relações métricas do triângulo retângulo. Essa possibilidade de abordagem com o uso desse material tinha sido discutida durante a formação e a professora não havia concordado.

Ao planejar a sua aula, a professora mudou de opinião e, na execução, ficou evidente o quanto o material fez com que os alunos compreendessem o conteúdo das relações métricas, tanto que não tinham necessidade de recorrer às fórmulas das relações métricas do triângulo retângulo, utilizaram as razões de proporcionalidade e resolviam as atividades sem qualquer dúvida, segundo a professora x_2. Desse modo, temos visto o quanto a formação continuada pode contribuir para a formação dos professores, em especial para aqueles que buscam estudar sobre os conteúdos discutidos durante os percursos e após o desenvolvimento deste.

É importante destacar que, no momento da sessão 8, não houve o levantamento de questões (no momento da formação), porém, no momento de estudo individual para a preparação da aula, a professora referiu que, quando começou a estudar já surgiram dúvidas com relação ao que ensinar e como ensinar do rol de conteúdos a serem ensinados. Podemos inferir, assim, que se tivéssemos sugerido mais aos professores para execução dos estudos realizados nos micro-PEP na sala de aula, provavelmente teríamos mais retorno das suas praxeologias com relação aos conteúdos geométricos.

Como algumas professoras que solicitaram o estudo da questão Q_4 não estavam presentes no PEP–S_8, retomamos a discussão do estudo de simetria no PEP–S_9. O estudo começou a partir da atividade: Trace, em cada situação, a figura simétrica com relação à reta dada e explique os procedimentos utilizados. As professoras, de início, resolveram a atividade por meio da técnica que conhecem, $\tau_{1.9}$*: dobrar as figuras ao meio de modo que uma parte sobrepõe a outra.*

> Você vai dobrar em cima do eixo? (x_1)

> Eu dobro aqui, eu coloco a sombra e pronto, eu consigo a figura igual [...] uma maneira mais fácil e mais certeira, é isso é? Tem que dobrar e sobrepor (x_2)
> Existe só essa maneira? O que significa esse eixo quando eu dobro a figura, esse eixo fica sendo o que dá figura? (Y)
> A base, quando dobrei, ele ficou aqui né. [...] ele está sendo o ponto médio (x_2)
> [...] qual o segmento que passa pelo ponto médio aqui, ele tem um nome, vocês lembram? (Y)
> É a mediatriz (x_2)
> Então, o eixo de simetria
> Ele passa ser a mediatriz de todas as figuras (x_2)
> Isso, ele é a mediatriz das figuras (Y)

Como as professoras já tinham participado do PEP-S_7 sobre o estudo de simetria, elas apropriaram-se da técnica $\tau_{1.9}$ No entanto, nas próximas atividades, começamos a instigá-las a pensarem em um outra técnica para resolver a atividade:

> Como eu vou construir esse ponto do outro lado, sem ser pela sobreposição? Sem ser utilizando a técnica da dobradura? (Y)
> E sem ser medindo também? Com a régua? (x_2)
> Mesmo medindo, você pode desviar para lá, para cá, e não necessariamente ele fica sobreposto. (Y)
> E tem que ficar para ser simétrico. (x_2)
> Como fazer isso? (Y)
> Eu não sei como fazer. (x_2)

As professoras teriam que reproduzir um ponto simétrico em relação ao eixo dado e, para o desenvolvimento dessa atividade, uma técnica que se faz por meio do desenho, reproduzir o ponto com o auxílio do compasso. As professoras realmente não compreendiam como fazer e o estudo acabou sendo direcionado por (Y), ensinando alguns procedimentos de desenho para reproduzir as figuras simétricas em relação ao eixo. Diante disso, a professora x_2 também expressou as dificuldades dos alunos em trabalhar com o compasso e o transferidor:

> [...] O simples fato deles manusearem isso daqui (compasso) já é uma evolução, eles têm extrema dificuldade com isso, quando fui trabalhar o gráfico de setores com eles, depois eles ficaram entendendo mais, mas o transferidor foi um caos para eles [...] esse que mandaram do governo, ele é muito ruim (x_2)

A professora expressa a dificuldade em trabalhar com os instrumentos de desenho com alunos e que eles são utilizados em outros conteúdos da matemática (gráfico de setores) e não para os conteúdos geométricos, talvez pela própria dificuldade da professora em lembrar os procedimentos dos desenhos geométricos seja um impasse para trabalhar com seus alunos. Assim, explicamos para as professoras como se faz a construção do ponto simétrico em relação ao eixo dado com o auxílio do compasso e da régua e, na sequência, foram resolvidas situações que teriam que reproduzir a figura simétrica do triângulo, sendo que elas não tiveram dificuldade em realizar, visto que bastava reproduzir os três vértices. Na continuação das atividades, questionamos as professoras quanto às figuras que interceptavam o eixo de simetria, um caso diferente dos que elas haviam resolvido até então:

> [...] e nesses casos que o eixo de simetria intercepta a figura como fica? (Y)
> Você vai ter que mandar ao contrário né? Esse daqui você vai mandar para lá e esse para cá. Você pega esse ponto manda para lá, esse para lá e esse você manda pra cá, é isso? (x_2)
> É isso mesmo. (Y)
> Mas assim é trabalhoso fazer com isso (compasso). (x_2)
> Um dos focos do ensino da geometria é você trabalhar com as construções geométricas, então trabalhar com os instrumentos compasso e régua. (Y)
> Se for por dobradura, passo para lá, risco aqui, passo para lá, risco aqui. (x_2)
> No caso da técnica de dobradura, eu uso como referência o eixo [...] mas e, nesse caso, que o eixo corta a figura? [...] nesse caso aqui, é conveniente a técnica da dobradura ou da construção? (Y)
> Acho que o que chega mais próximo do ideal, do exato é esse né pelo que estou vendo, mas eu acho ele trabalhoso e se não estudar vai se embananar tudo aqui, dá para fazer esse? (x_2)
> Vamos tentar? (Y)

As professoras tentam resolver e não conseguem reproduzir utilizando a mediatriz, elas sabem a técnica de reproduzir os três pontos do triângulo e, depois, traçar os seus segmentos ligando os pontos, mas ao desenhar utilizando o compasso não conseguem, mesmo a orientadora fazendo os procedimentos minutos antes:

> Por que que nós não construímos o ponto certo?
> Nossa, complicado heim! O aluno não vai gostar, não. (x_2)

As professoras vão construindo, conforme a orientadora (Y) explica os procedimentos para encontrar os pontos simétricos com o auxílio do compasso, e vão realizando a atividade, mas, mesmo com a orientação, as professoras não conseguiram reproduzir a figura. Uma delas expressou que esse tipo de atividade para trabalhar em sala de aula é inviável, pois demanda muito tempo da aula

> [...] eu penso o seguinte, coloca um bem elementar e um desse já é o suficiente para aprender a técnica [...] porque se não, você não dispõe de muito tempo na aula, aí você pode colocar situações, qual maneira

que você pode reproduzir do outro lado, aí eles vão falar a técnica de dobrar, esses eles não vão falar nunca. (x_2)

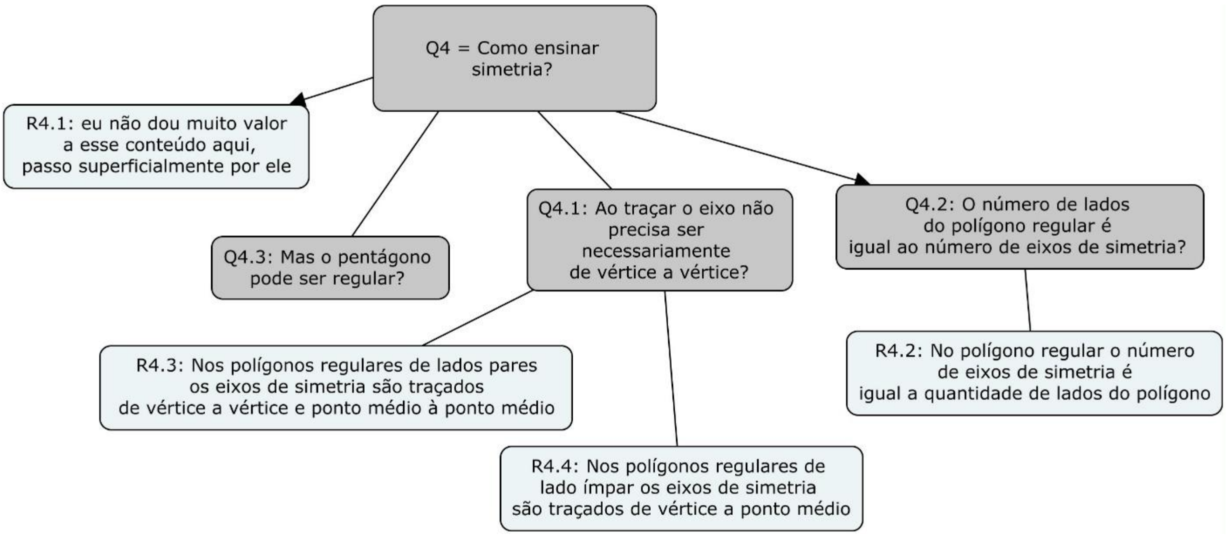
Por certo, durante o PEP – S_9, continuação do PEP – S_7, ficou claro que as professoras ensinam o conteúdo de simetria 'superficial', trabalham apenas com a técnica da dobradura e encerram o conteúdo, como se o ensino de simetria se resumisse a isso. Além disso, não trabalham com os outros tipos de simetria como rotação e translação. De fato, como a professora x_2 disse no início do PEP – S_7: "[...] eu não dou muito valor a esse conteúdo aqui, passo superficialmente por ele (x_2)", ponderando que não existia dificuldade alguma nesse conteúdo para ensinar e nem os alunos em aprender, mas, no final dos micropercursos, pontuou:

> [...] você reparou também que pra todos os conteúdos me parece que a gente fica no elementar, que se você pensar, como eu disse para você no primeiro encontro, eu falei que não dava muita importância para o conteúdo de simetria, que ele me parecia muito fácil e eu passava pincelando nele e olha quanta coisa que eu não sabia, você está entendendo, então parece que o livro ao mesmo tempo que ele te ajuda, ele te trava também, você tinha que parar para estudar, e se você for pensar bem a aula, bem elaborada para cada conteúdo que você entra, você tinha que estudar, tinha que ralar bastante [...] porque a gente abre página do livro e dá uma lida, acontece com todo mundo, você vai dar uma passada com os alunos e você não elaborou aquela aula de acordo, você aceita o que está ali, é verdade, você concorda com tudo e se você for olhar por de trás os questionamentos são longos. (x_2)

Nessa fala, temos que a professora assume que as suas organizações didáticas estão assujeitadas ao livro didático e, ao preparar as suas aulas de acordo com o conteúdo exposto no livro didático, não apresenta qualquer dificuldade, pois reproduz como está no papel. No entanto, o percurso fez com que percebesse a importância de estudar e o quanto não estuda o suficiente para ministrar uma aula com toda a organização matemática necessária para a compreensão do aluno. Os professores ensinam os conteúdos geométricos em torno apenas de técnicas.

De fato, o micropercurso desenvolvido em torno do sistema S_9 ficou em torno de um estudo mais local do conteúdo de simetria, o desenvolvimento do sistema $S_9 = \{X_9, Y, Q_4\}$ não possibilitou mais levantamento de questões. Nesse percurso, as professoras expressaram-se bastante, no entanto, vimos que as questões surgem a partir de algum conhecimento que a pessoa possui sobre o conteúdo a ser estudado. Nesse caso, percebemos que as professoras tinham um conhecimento superficial sobre o conteúdo de simetria e não podiam questionar sobre algo que desconheciam, portanto, os PEP – S_7 e S_9 tiveram os seguintes direcionamentos:

Figura 36 - Percursos S_7 e S_9



Fonte: Elaborado pela pesquisadora

Na pesquisa de Barquero, Bosch e Gáscon (2011), temos que, no desenvolvimento do PEP, para superar algumas limitações dos percursos (passividade dos alunos, direção do percurso totalmente guiada pelo orientador), os professores propuseram que, no final de cada sessão, cada aluno levaria uma questão a ser estudada e, no início da próxima sessão, todos iriam discutir em conjunto. Acreditamos que, durante os percursos desenvolvidos, faltou um momento para que os professores pudessem estudar e pesquisar sobre os conteúdos estudados, talvez se tivéssemos orientado mais, para um tempo dedicado a um estudo individual, os percursos teriam outros direcionamentos, como Cirade (2006) propõe na sua tese para que os alunos elaborassem 'questões da semana' para serem discutidas no grupo.

Certamente, durante o desenvolvimento dos micro-PEP – FP, verificamos que o estudo praxeológico não se desenvolveu como almejávamos. Primeiramente, não tivemos uma participação contínua e ativa dos professores. Como já mencionamos anteriormente, o PEP – FP necessita que o professor assuma o 'papel de estudante da questão', que exponha as suas dúvidas e certezas, todavia, a descontinuidade na participação dos micropercursos fez com que os professores não criassem uma confiança no grupo, que permitissem uma discussão mais detalhada de suas praxeologias com os pares. Ao contrário, as professoras, como x_1 e x_2, que tiveram uma participação mais contínua nos micropercursos permitiram-se questionar e expor as suas praxeologias em torno dos conteúdos geométricos.

Durante os planejamentos dos micropercursos, estes têm sido norteados pelo paradigma *questionamento do mundo*, porém, nas suas execuções, identificamos que há algumas características desse paradigma, mas, no geral, os sistemas didáticos, principalmente os estudos dos conteúdos geométricos que as professoras possuíam mais dificuldade, centraram-se em percursos totalmente guiados pelo orientador do estudo, o que não condiz com o paradigma proposto.

No desenvolvimento dos percursos tem se propiciado momentos de reflexão sobre a formação inicial dos professores, o quanto um ensino totalmente direcionado que receberam durante a graduação repercute na sua prática escolar, tratando-se, pois, de condições que refletem no exercício da profissão. Avaliou-se, ainda, o quanto é difícil trabalhar no paradigma *questionamento do mundo* pois estamos enraizados com práticas nas quais o professor direciona todo o estudo desenvolvido.

No estudo dos conteúdos geométricos, verificamos o quanto é necessário desenvolver mais momentos de formação com os professores de matemática em torno desses conceitos e como o campo de números e operações prevalece no ensino de matemática, restringindo o ensino da geometria. Certamente, durante os sistemas didáticos, percebemos a dificuldade dos professores ao expor as suas OM, que, na sua maioria, são embasadas em reproduções de técnicas sem justificativas teóricas. No geral, eles expõem o bloco 'fazer' dissociável com o bloco 'saber-fazer'.

Ainda temos visto o quanto os livros didáticos estão presentes nas OD dos professores. De um modo geral, as organizações didáticas dos professores da pesquisa com relação aos conteúdos geométricos estão em torno das OD dos livros didáticos, que reproduzem tal qual como o livro apresenta.

No desenvolvimento dos micropercursos fica explícito que os professores estão habituados a participarem de formações, em que apenas 'escutam' e, no final, recebem um certificado. São formações que não atendem as áreas específicas, como menciona a professora sobre a necessidade de "promover maior número de formações continuadas específicas por área de conhecimento" (x_{10}). A execução de micropercursos possibilitou uma ruptura com esses tipos de formações, os professores foram instigados a participarem o tempo todo e, mais que isso, foram os protagonistas das formações que direcionavam quais conteúdos estudar e como ensinar.

Podemos inferir que os micropercursos desestabilizaram as OM e OD dos professores e, além disso, possibilitaram refletir sobre o sistema escolar e as condições e restrições que são impostas aos professores, como uma extensa lista de conteúdos a cumprir, a falta de diálogo entre os professores de mesma área de conhecimento, a ausência de apoio da coordenação para o trabalho em sala de aula, limitações da formação inicial e os desafios diários da prática escolar. Os micropercursos propiciaram que os professores dialogassem não somente em torno dos conteúdos geométricos, mas também sobre as suas inquietações em torno do ambiente escolar.

Contudo, temos observado que o desenvolvimento dos micropercursos da pesquisa obteve aproximações com o aporte teórico/metodológico e que a constituição dos sujeitos envolvidos permitiu dialogar com a teoria a partir da realidade da formação continuada brasileira.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Ao vivenciar e promover diferentes formações continuadas, somos conhecedores dos desafios externados à formação continuada, assim sendo, este trabalho teve como propósito desenvolver uma pesquisa que pudesse auxiliar o professor de matemática na construção de praxeologias para a sala de aula.

Com essa intenção e norteados pela TAD, realizamos uma pesquisa na qual fizemos algumas suposições: a) a participação dos professores nos encontros da formação continuada deveria ser de forma espontânea, sem qualquer imposição; b) os estudos em torno dos conteúdos geométricos deveriam surgir de suas próprias inquietações; c) os percursos desenvolvidos seriam orientados pelo paradigma *questionamento do mundo*; d) a TAD como aporte teórico possibilitaria aos professores desestabilizar as suas praxeologias, repensar e analisar as suas práticas pedagógicas.

Diante dessas hipóteses tivemos como objetivo principal investigar possibilidades do desenvolvimento de micro-PEP na formação continuada de professores de matemática, no estudo de conteúdos geométricos. Para tanto, constituímos um grupocom 12 professores de matemática, atuantes em escolas da educação básica das redes municipal e estadual do município de Dourados/MS, e desenvolvemos nove micropercursos de estudo com duração de 1h30min a 3h cada.

Com relação à participação dos professores, verificamos que, no decorrer do desenvolvimento dos micropercursos, a formação não impôs a participação efetiva deles, tanto que quando encerramos o PEP-S_1, devido ao envolvimento de todos os participantes, imaginávamos que todos retornariam para a próxima sessão, o que não ocorreu, ficando evidente que existem fatores externos aos planejamentos de formações continuadas que interferem diretamente na execução delas, como pondera Chevallard (2002), que podem existir outras instituições externas muito mais importantes., com a família, e os afazeres escolares (correção de provas, trabalhos, planejamentos, fechamentos de nota).

Vale pontuar que a presente formação continuada, foi distinta da proposta por Lucas (2015) desenvolvida com um grupo específico numa disciplina na formação inicial, e da de Andrade (2012), que trabalhou na formação continuada com professores de uma única escola, com horários fixos no serviço para a realização da formação, estas apesar de desenvolverem um PEP, tinham um público alvo ‘fixo’ ou ‘único’. Em nossa pesquisa, os micropercursos foram desenvolvidos para professores de matemática de diferentes escolas da rede pública e privada de ensino da cidade de Dourados/MS, abrangendo professores com uma diversidade de horários disponíveis e atuações nas escolas da educação básica, uma formação continuada 'aberta', tanto que, em todo o momento do desenvolvimento dos percursos, as professoras participantes estavam convidando os seus colegas, como é o caso da x_{12}, que começou a participar a partir do sétimo sistema didático.

Neste sentido, considerando os trabalhos de vários autores, dentre eles Imbernón, Gatti e Nóvoa, que têm defendido a importância da formação continuada ser um espaço de estudo e de troca de experiências, os micropercursos possibilitaram aos professores da presente pesquisa um espaço que culminou em discussão de situações vivenciadas em sala de aula. Além disso, consideramos que eles proporcionaram o estudo dos conteúdos geométricos, aproximando de uma formação que atende especificidades do grupo e não uma formação superficial.

Desse modo, nos planejamentos e estudo dos micropercursos, nos apropriamos de uma diversidade de recursos, como dissertações e teses, artigos acadêmicos, livros didáticos, documentos oficiais, com intuito de criarmos um ambiente que propiciasse aos professores (re) pensarem sobre as praxeologias desenvolvidas no ambiente escolar. No entanto, vale ressaltar que, nesse cenário, realizamos algumas escolhas entre diversas fontes, pois tínhamos um período limitado entre uma formação e outra, porque os planejamentos dos micropercursos foram acontecendo durante o desenvolvimento da formação continuada.

Os professores participantes da pesquisa enfatizaram, logo no início, a necessidade de ter espaços para estudo e troca de experiências, pois os momentos que estavam reunidos com os professores na escola eram para discutir situações mais gerais, envolvendo o âmbito escolar e eles não tinham ocasiões de diálogo entre os professores de mesma área para discutir o ensino da Matemática. Nesse viés, os professores pontuaram o quanto é importante a escola propiciar espaços de diálogo entre os pares, destacando que o diálogo sobre o ensino dos conteúdos e métodos avaliativos são escassos no ambiente da escola.

Eles ainda pontuam que a maioria das formações continuadas das quais participam, promovidas pelas secretarias da educação, não focam o trabalho com os professores por área de ensino. Diante desse quadro, quando questionados sobre o que mudaria nas formações continuadas recebidas, enfatizaram a necessidade de separar os professores por área de atuação e a necessidade de produzir e partilhar materiais didáticos para o ensino.

Neste sentido, nesta pesquisa, foi possível ver o quanto a TAD possibilita um estudo das OM e OD e desestabilizar e a (re) construir praxeologias para o ensino da Matemática. Na condição de pesquisadores da Educação Matemática, acreditamos que o estudo do objeto matemático seja um ponto crucial a ser abordado no trabalho com formações continuadas.

Por meio dos diálogos ocorridos, vimos o quanto os professores 'achavam' que tinham o conhecimento geométrico e quando questionados percebiam as suas dificuldades. Tanto que, por várias vezes, relataram a dificuldade em assumir as suas deficiências diante de um grupo de professores de matemática e que, ademais, por não vivenciarem formações que são direcionadas por questionamentos, de início, sentiram-se intimidados em falar no grupo.

Durante o desenvolvimento das sessões de pesquisa, percebemos que alguns professores estavam sempre dispostos a participar, apesar das dificuldades, eles buscavam esclarecimentos nos livros didáticos presentes no ambiente da formação (laboratório de matemática), na internet, perguntavam para os colegas (que não estavam participando das sessões formação) sobre as questões levantadas durante o estudo, deixando explícita a disponibilidade em participar. Todavia, também tivemos professores participantes que não se dispuseram em realizar estudos, entraram e saíram da formação sem uma participação ativa.

Um ponto importante no desenvolvimento da pesquisa foi mostrar a realidade brasileira para subsidiar formações continuadas. Os professores não possuem nenhuma ajuda institucional que os incentive, que impulsione a participação e a permanência em formações continuadas, salvo as formações que a própria secretaria de educação oferece. Os profissionais, na sua grande maioria, após uma jornada semanal de 40 horas/aula de trabalho, com grande demanda de trabalhos para serem desenvolvidos em casa, têm que criar toda uma logística na vida pessoal e profissional para garantir a sua permanência em uma formação, fato esse confirmado por meio do questionário respondido pelos professores.

Apesar de restringirmos os nossos estudos aos conteúdos geométricos, não diferente das pesquisas levantadas no item 2.2 do capítulo 2, que já vão para a escola na sua maioria com os conteúdos predefinidos para o desenvolvimento das pesquisas, buscamos no decorrer dos micropercursos fazer com que os professores decidissem quais conceitos estudaríamos entre o rol de conteúdos geométricos dispostos para a educação básica, assim, por mais que decidimos o domínio (Geometria) o tema e o assunto era definido pelos professores participantes da pesquisa. Além disso, com relação à gênese tempo didático (cronôgenese) para o desenvolvimento do PEP, notamos que, para o grupo de professores participantes dessa pesquisa, o tempo entre 1h30min até 3h destinado às sessões não foi suficiente para uma construção mais completa das respostas praxeológicas, todavia, consideramos que o ‘tempo’ não foi o maior motivo para não construírem uma praxeologia, mas a necessidade de estudar.

A nossa intenção inicial, no momento dos planejamentos dos micropercursos, era que estes fossem norteados pelo paradigma *questionamento do mundo*, todavia, no momento das suas execuções, podemos inferir que os micropercursos direcionaram-se para alguns indícios desse paradigma, mas o que prevaleceu, nos sistemas didáticos, foram estudos fortemente guiados pelo orientador do estudo (Y), o que não condiz totalmente com o paradigma. De fato, isso ocorreu, principalmente, nos estudos dos conceitos geométricos que os professores possuíam mais dificuldades em compreender, pois não conseguiam dialogar sobre algo que desconheciam.

Certamente, a metodologia do PEP não significa simplesmente reunir um grupo de professores e estudar as questões. O processo de constituição do PEP, que envolve a cronogênese, a mesogênese e a topogênese, é complexo e envolve um compromisso de todos os envolvidos no sistema didático. Acreditamos que, para um melhor desenvolvimento dos estudos, os percursos devem propiciar momentos de estudos, sejam individuais ou até mesmo em subconjuntos entre os sistemas didáticos, para que possam surgir mais questionamentos.

Assim sendo, avaliamos que, no transcorrer dos micropercursos, tivemos situações nas quais houve uma mudança nas posições dos componentes do sistema didático, alguns estudantes da questão passaram a ser orientadores do estudo, ou seja, após a compreensão dos conceitos, propunham-se a orientar os demais colegas para encontrar repostas, desse modo, vimos, conforme o envolvimento dos participantes, que os papeis de cada um no sistema podem ser alternados.

No desenvolvimento dos micropercursos faz-se possível investigar e analisar os conteúdos geométricos mobilizados pelos professores participantes da pesquisa. Ao começar o estudo com uma questão geradora, na busca por uma praxeologia que respondesse à questão, os professores explanaram os conceitos geométricos mobilizados e foram percebidas dificuldades por parte deles na compreensão dos conceitos geométricos.

Durante o desenvolvimento de alguns micropercursos, foi propiciado aos professores analisarem algumas conceituações conflitantes e percebemos que eles não tinham vivenciado, nas suas experiências com o ensino da matemática, situações como essas. Ademais, os próprios professores relataram que, ao ensinar a matemática em sala de aula, ficam mais no elementar e que não preparam ou estudam os conteúdos matemáticos com uma complexidade maior.

Temos vivenciado também durante as formações continuadas a dificuldade dos professores em não ter as respostas prontas pelo orientador do estudo, a todo o momento perguntam e afirmam que a orientadora (Y) sabe as respostas e, por muitas vezes, intimam-na para responder. Neste sentido, observamos o quanto os professores estão acostumados com formações guiadas pelo paradigma *visita às obras*, há dificuldade de fazerem parte de um sistema didático em que sejam condutores processo de formação.

A cada mapa descrito no final de cada percurso, percebemos que, no decorrer dos micropercursos, os questionamentos foram diminuindo e o mapa *a priori* do desenvolvimento da formação acaba sendo distante da execução dos percursos, isso pode ser devido ao fato que os professores começaram a apresentar mais dificuldade nos conteúdos geométricos que foram abordados nos sistemas didáticos.

Acreditamos que, no desenvolvimento de formações continuadas para professores de matemática, devem ser propiciados aos sujeitos envolvidos no processo estudos em torno do objeto matemático e análise de situações que levem a refletir sobre como ensinar determinado conteúdo, bem como uma reflexão sobre o próprio sistema escolar, as condições e restrições que permeiam as práticas dos professores em sala de aula.

Assim, tínhamos como pretensão que, com esse trabalho de tese, houvesse uma proposta de trabalho, mais precisamente de uma proposta metodológica para desenvolver em formações continuadas. Para tanto, temos observado que o PEP é um caminho entre tantas propostas de trabalho, visto que não é um modelo a ser seguido. Ao contrário, requer um estudo dos envolvidos no sistema didático para que atenda as especificidades de cada sistema e cada PEP desenvolvido pode servir como base/alicerce para outro, mas não para ser reproduzido. Assim, os PEP conduzidos nesta pesquisa foram e são específicos para o grupo de professores participantes dela.

Além disso, os resultados dos percursos realizados puderam explicitar a relevância do PEP para os processos formativos de professores, especialmente na área da

Matemática, na qual se evidencia uma profunda carência de estudos voltados para o objeto matemático, sendo plenamente possível a sua realização e efetivação, pois não requer grandes estruturas ou demandas financeiras, apenas a oportunidade e disponibilidade dos professores ao estudo.

No desenvolvimento dos nove sistemas didáticos, verificamos que cada percurso depende fortemente dos sujeitos envolvidos no sistema didático, bem como as relações que o sujeito possui com o objeto a ser estudado, pois o surgimento de novas questões emergem dos blocos fazer e saber-fazer das OM e OD mobilizadas pelos professores participantes da pesquisa.

Os dados desses percursos revelaram que os professores possuem uma preocupação em explanar uma maneira mais adequada de ensinar aos seus alunos, uma melhor forma de explicar o conteúdo, no entanto, as suas limitações praxeológicas em torno dos conteúdos geométricos inviabilizam tais práticas. Podemos pontuar o quanto o ensino de Geometria representa um desafio na prática pedagógica desses professores, visto que as suas OM e OD estão em torno de tarefas e técnicas sem justificativas tecnológicas e teóricas dos conteúdos estudados.

Por outro lado, os professores compreendem seus equipamentos praxeológicos não se resumem somente àquilo que eles vão ensinar. Eles compreendem que existe a transposição dos saberes e que a matemática ensinada na escola não é a mesma recebida na academia, identificando a necessidade do professor ampliar as praxeologias para ensinar, para que a aprendizagem ocorra.

Verificamos que, antes do desenvolvimento dos micropercursos, os professores explanavam que não possuíam dificuldades com relação ao conceito a ser estudado e, após a execução dos PEP, eles perceberam que ainda há muito o que estudar com relação aos conteúdos geométricos. Além disso, os professores participantes da pesquisa já esperavam ser desafiados por meio dos micropercursos.

Nesses percursos, vimos o quanto os professores são dependentes dos livros didáticos e como este recurso, até o momento da formação, tem orientado e condicionado as suas práticas em sala de aula, sendo entendido por muitos professores participantes dessa pesquisa como algo inquestionável e pronto para ser reproduzido em sala de aula. Ademais, alguns professores culpabilizam o livro didático pelos direcionamentos do ensino realizado em sala de aula.

Vale ressaltar ainda que existem condições e restrições que permeiam a prática pedagógica, como a própria formação acadêmica desses professores. Estes pontuaram que suas formações não propiciaram espaços para questionamento, mas para a reprodução de técnicas e decorebas dos estudos desenvolvidos. Assim sendo, esse cenário tem refletido diretamente nas suas práticas, pois eles têm ressaltado um ensino totalmente amparado no paradigma *visita às obras*.

Por certo, os professores da pesquisa possuíam a consciência que a formação inicial era apenas o começo de um processo de formação. No entanto, no decorrer dos micropercursos, fica evidente o descontentamento com relação à graduação, principalmente a falta de preparação para lidar com o dia a dia do ambiente escolar e o quanto as suas práticas são reflexos de diferentes assujeitamentos de distintas instituições.

No desenvolvimento dos micropercursos, podemos inferir que a praxeologias do orientador do estudo (Y) desestabiliza-se e modifica-se a cada percurso executado, observamos que, no momento do planejamento dos PEP, já nos deparamos com desafios quanto a OD, como orientar de modo que a questão permaneça viva entre os participantes, sem ser um estudo totalmente direcionado por Y. Cabe ressaltar que, no momento de planejamento dos PEP, o orientador começa a estudar e percebe o quanto as suas praxeologias em torno dos conceitos geométricos desestabilizaram-se e ampliaram-se, pois tivemos que realizar um estudo intenso para melhor atender os professores na formação continuada, de tal modo que, a cada percurso, repensávamos sobre as praxeologias.

É importante destacar que não tínhamos como planejar ou formar um grupo de professores de matemática 'ideal', primeiramente, porque, enquanto pesquisadores da área da Educação Matemática, não restringimos o nosso estudo a um grupo específico de professores, ao contrário, almejamos uma parceria entre universidades e escolas e que novas pesquisas, bem como resultados de pesquisas, possam transitar nesses ambientes. Por outro lado, ressaltamos que o aporte teórico utilizado para a presente pesquisa surge no contexto francês, que é uma realidade totalmente diferente do contexto brasileiro, que, por sua vez, merece estudos sobre possíveis adaptações para a nossa realidade.

Todavia, consideramos que é possível desenvolver PEP nas formações continuadas, pois esse tem um caráter dinâmico e propicia um espaço de estudo e troca de experiência entre professores. Além disso, é um processo de formação que os próprios participantes vão direcionando.

É relevante pontuar que, no decorrer desses quatros anos de doutorado, fomos nos apropriando da teoria e verificamos que é um aporte teórico em movimento, que, a cada leitura, identificamos mais possibilidades em desenvolver percursos na formação continuada e que o trabalho com a tese é o princípio de outros percursos que desenvolveremos na formação continuada, pois, enquanto pesquisadores da área da Educação Matemática, acreditamos que esse seja o caminho para alcançarmos uma educação com qualidade.

A partir da produção de dados analisados, percebemos o quanto o PEP têm possibilitado aos professores participantes desta pesquisa a refletir sobre as suas práticas, tanto a necessidade pela busca de estudar os conteúdos geométricos, quanto propiciar aos seus alunos o desenvolvimento de práticas que instiguem a conjecturar, a pesquisar para não serem meros receptores dos conteúdos a serem ensinados.

REFERÊNCIAS

ALMEIDA, V. F. C. **Análise das práticas docentes de professores dos cursos de licenciatura em matemática referentes ao estudo de retas paralelas e de ângulos.** Dissertação (Mestrado) – Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática, Universidade Federal do Mato Grosso do Sul, Instituto de Matemática, Campo Grande, 2009.

ALMOULOUD, S. MANRIQUE, A. L. SILVA, M. J. F. CAMPOS, T.M.M. **A geometria no ensino fundamental: reflexões sobre uma experiência de formação envolvendo professores e alunos**, 2004, p. 94-108. Disponível em: http://www.scielo.br/pdf/rbedu/n27/n27a06.pdf. Acesso em janeiro de 2017.

ANDRADE, R. C. D. **A Noção de Tarefa Fundamental Como Dispositivo Didático Para Um Percurso De Formação De Professores: o caso da Geometria Analítica**. Universidade Federal do Pará, Instituto de Educação Matemática e Científica, Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemáticas. Tese. Belém, 2012.

BALL, D. L., THAMES, M. H. y PHELPS, G. (2008). **Content knowledge for teaching: what makes it special? Journal of Teacher Education,** 59(5), 389-407.

BARBOSA, J. L. M. **Geometria Euclidiana Plana**. Coleção do professor de matemática. Sociedade brasileira de matemática. 1997

BARQUERO, B.; BOSCH, M.; GASCÓN, J. (2011). **Ecología de lamodelización matemática: los recorridos de estudio e investigación.** En M. Bosch, J. Gascón, A. Ruiz Olarría, M. Artaud, A. Bronner, Y. Chevallard, G. Cirade, C. Ladage & M. Larguier (Eds.), Un panorama de la TAD (pp. 553-577). CRM Documents, vol. 10. Bellaterra (Barcelona): Centre de Recerca Matemàtica.

BATISTA, C. M. S. **Percepções e conhecimentos de professoras que ensinam matemática nos anos iniciais do ensino fundamental acerca do ensino de números e operações**. Dissertação (Mestrado) - Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática, Universidade Federal do Mato Grosso do Sul, Campo Grande, 2012.

BITTAR, M. A **Teoria Antropológica do Didático como ferramenta metodológica para análise de livros didáticos**. Zetetiké, Campinas, SP, v.25, n. 3, set. /dez.2017, p.364-387.

BOAVIDA, A. M., & PONTE, J. P. **Investigação colaborativa: Potencialidades e problemas**. In GTI (Org.), Reflectir e investigar sobre a prática profissional. (2002). (pp. 43-55). Lisboa: APM.

BORGES, R. **Saberes construídos e ressignificados por um professor de matemática da educação básica quando investiga a sua prática pedagógica**. Dissertação (Mestrado) - Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática, Universidade Federal do Mato Grosso do Sul, Campo Grande, 2018.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais: matemática**. Brasília: MEC/SEF, 1998.

BRASIL. Ministério da Educação, Secretaria de Educação Básica I. **Guia de Livros Didáticos, PNLD/2017**. Brasília: MEC/SEF, 2017.

BRASIL. **Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional (LDB)**. Brasília: MEC/SEF, 2015.

BRASIL. Ministério da Educação, Secretaria de Educação Básica**. Base Nacional Curricular Comum**. 2017.

BRITTO, M. L. B. **Uma discussão de discussões de professores que ensinam matemática em um grupo de trabalho**. Dissertação (Mestrado) - Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática, Universidade Federal do Mato Grosso do Sul, Campo Grande, 2015.

BONJORNO J. R.; AZENHA R.; GUSMÃO T. **Matemática pode contar comigo – alfabetização matemática**, 2011.

BOSCH, M. **Modelos epistemológicos e didáticos no paradigma do questionamento do mundo**. Seminário Sul-Mato-Grossense de Pesquisa em Educação Matemática. Agosto, 2018, Brasil.

BOSCH, M., GASCÓN, J. (2009**). Aportaciones de laTeoría Antropológica de loDidáctico a la formación del profesorado de matemáticas de secundaria**. En M.J. González, M.T. González & J. Murillo (Eds.), Investigació nen Educación Matemática XIII (pp. 89-113). Santander: SEIEM.

BOSCH, M.; GASCÓN, J. (2010). **Fundamentación antropológica de las organizaciones didácticas: de los 'talleres de práticas matemáticas' a los 'recorridos de estudio e investigación'**. CITAD-II-2010.

CARVALHO, S. F. **Formação continuada em serviço e o uso da lousa digital em aulas de matemática: ações e reflexões de um grupo de professores**. Dissertação (Mestrado) - Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática, Universidade Federal do Mato Grosso do Sul, Campo Grande, 2014.

CHEVALLARD, Y. **La notion d'ingénieriedidactique, unconcept à refonder;** Clermont-Ferrand, 16-23 août 2009a. Disponível em http://yves.chevallard.free.fr. Acesso em agosto de 2017.

________Analysedes pratiques enseignantes et didactiquedesmathematiques: L´approcheantropologique. In Recherches em Didactiquedes Mathématiques, Vol 19, nº 2, pp. 221-266, 1.998. Disponível em: http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/. Acesso em julho de 2017.

________Didactique et formation des enseignants, p.1-14, 2003**.** Disponível em http://yves.chevallard.free.fr. Acesso em agosto de 2017.

________Didactique et formation des enseignants, p. 1-20, 2009b.Disponível em http://yves.chevallard.free.fr. Acesso em agosto de 2017.

________ **Approche anthropologique du rapport au savoir et didactique des mathématiques**. DansS.Maury& M. Caillot (Éds), Rapport au savoir et didactiques (pp. 81-104). 2003. Paris :Fabert.

________ **Conceptsfondamentaux de ladidactique : perspectives apportées par une approcheanthropologique**. Recherches en Didactique des Mathématiques. Vol. 12, nº 1, pp. 73-112, 1992.

________ **Teaching Mathematics in Tomorrow's Society: A Case for an Oncoming Counter Paradigm**. Texto publicado nos anais do ICMI 12 p. 173-187, 2012.

________**La TAD face auprofesseur de mathématiques**. 2009c. Disponível em: <http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/article.php3?id_article=162>. Acesso em abril 2017.

________**Recherches em didactique et pratiques de formation d'enseignants**. février 2002. Notes pourunexposé fait à Namur, danslecadredesFacultésuniversitairesNotre-Dame de laPaix, le 5 février 2002. Disponível em: http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/IMG/pdf/Recherches_en_didactique_et_formation.pdf. Acesso em janeiro de 2018.

________ **Passé et présent de la théorie anthropologique du didactique.** 2007.Disponível em http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/article.php3?id_article=134. Acesso em janeiro de 2018.

________ BOSCH, M.; GASCÓN, J. **Estudar Matemáticas: O elo perdido entre o ensino e a aprendizagem**. Porto Alegre: Artmed, 2001.

________ **À propos des PER.** In: Journal du Seminaire TAD/IDD – 1; pp. 7-23, 2009d. Disponível em: <http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/IMG/pdf/journal-tad-idd-2009-20010-1.pdf >. Acesso em: Acesso em: 07 dez. 2016.

________« **Le fait de la recherche** ». In: Journal du Seminaire TAD/IDD – 3; pp. 1-8, 2009e. Disponível em: < http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/IMG/pdf/journal-tad-idd-2009-2010-3.pdf >. Acesso em: 10 dez. 2016.

________ **Organizer L'étude. 3. Ecologie & regulation.** Actes de la 11 École d'Été de Didactique des Mathématiques. France: La Pensée Sauvage. 2002. Disponível em: http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/article.php3?id_article=53. Acesso em janeiro de 2017, com paginação de 1-22.

________ CIRADE, G., 2009f. **Pour une formation professionnelle d'université. Recherche et Formation pour les professions de l'éducation**, 60, 51-62. Disponível em http://rechercheformation.revues.org/584. Acesso em maio de 2017.

________ **Remarques sur la notion d'infrastructure didactique et sur le rôle des PER.** 2009g .Disponível em http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/article.php3?id_article=155. Acesso em maio de 2018.

________**Les processus de transposition didactique et leur théorisation**, 1994. Contribution à l'ouvrage dirigé par G. Arsac, Y. Chevallard, J.-L. Martinand, Andrée Tiberghien (éds), La transposition didactique à l'épreuve, La Pensée sauvage, Grenoble, p. 135-180.

CORAÇA, A. R. R. **O uso do computador na prática pedagógica de professores de matemática que atuam como professores de tecnologia.** Dissertação (Mestrado) - Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática, Universidade Federal do Mato Grosso do Sul, Campo Grande, 2010.

CORRÊA, A. M. **Significados Fenomenológicos da orientação pedagógica para o ensino fundamental de Geometria**. Dissertação (Mestrado) - Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática, Universidade Federal do Mato Grosso do Sul, Campo Grande, 2009.

CORREIA, G.; LOBO, R. **Teorema de Thales: uma análise dos livros didáticos**. XIII Conferência Interamericana de Educação Matemática, Recife- Brasil, 2011.

DANTE, L. R. **Projeto Teláris**. 6º e 7º ano 2º ed. 2015

DE OLIVEIRA, A. **Formação continuada de professores de matemática a distância: estar junto virtual e habitar ambientes virtuais de aprendizagem**. Dissertação (Mestrado) - Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática, Universidade Federal do Mato Grosso do Sul, Campo Grande, 2012.

DOLCE, O; POMPEO, J. N. **Fundamentos de Matemática Elementar 9: geometria plana** – 8 ed. – São Paulo: Atual, 2005.

ESTEVES, A. K. **Números Decimais na Escola Fundamental: Interações entre os conhecimentos de um grupo de professores e a relação com sua prática pedagógica.** Dissertação (Mestrado) - Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática, Universidade Federal do Mato Grosso do Sul, Campo Grande, 2009.

FREITAS, M. E. **Viver a tese é preciso! Reflexões sobre a aventura e desventuras da vida acadêmica.** RAE - Revista de Administração de Empresas • Jan./Mar. 2002 São Paulo, v. 42 • n. 1 • p. 88-93.

FURONI, S. P. **Conhecimentos mobilizados por professores de matemática do ensino médio em suas relações com livros didáticos**. Dissertação (Mestrado) - Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática, Universidade Federal do Mato Grosso do Sul, Campo Grande, 2014.

GATTI, B. A. **Análise das Políticas Públicas para Formação Continuada no Brasil, na última década.** Revista Brasileira de Educação. n. 37, jan/abr, 2008. Autores Associados, p. 57-70 Apontar o título do periódico.

GATTI, B. A**. Formação de Professores: Condições e Problemas**

Atuais. Revista Internacional de Formação de Professores. V.1, n 2, 2016.

GARCIA, C. M. **Formação de professores – para uma mudança educativa**. Porto/Portugal: Porto Editora, 1999.

GASCON, J. **La necesidad de utilizar modelos endidáctica de las matemáticas.** Educ. Mat. Pesqui., São Paulo, v.5, n.2, pp. 11-37, 2003.

GIL, A. C. **Métodos e Técnicas de Pesquisa Social**. Sexta edição. São Paulo, editora Atlas S. A. – 2008.

HIGUERAS, L. R.; GARCIA, F. X. **Didáctica de las matemáticas y formación de maestros: respuestas y desafíos (desde la TAD).** CITAD II, 2010. Disponível em: http://www.atd-tad.org/wp-content/uploads/2012/05/LuisaJavi-CITAD-II-2010.pdf. Acesso em janeiro de 2018.

IBIAPINA, I. M. L. M. **Pesquisa colaborativa: investigação, formação e produção de conhecimentos**. Brasília DF: Líber Livro Editora, 2008.

IMBERNÓN, F. **Formação permanente do professorado: novas tendências.** Tradução de Sandra Trabucco Valenzuela. São Paulo: Cortez, 2009.

JORGE, N. M. **Reflexões sobre a prática docente de um professor de matemática a partir da pesquisa colaborativa**. Dissertação (Mestrado) - Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática, Universidade Federal do Mato Grosso do Sul, Campo Grande, 2015.

KICHOW, I. V. **Procedimentos didáticos relativos ao ensino de números racionais em nível de sexto e sétimo ano do ensino fundamental.** Dissertação (Mestrado) - Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática, Universidade Federal do Mato Grosso do Sul, Campo Grande, 2009.

LEIVAS, J. C. P. **Educação Geométrica: Reflexões sobre ensino e aprendizagem em geometria**. EMR-RS - ANO 13 - 2012 - número 13 - v.1 - pp. 9 a 16.

LIBÂNEO, J. C. **Organização e Gestão da escola: teoria e prática**. 5 ed. Goiânia, GO: Alternativa, 2004.

LINDQUIST, M. M.; SHULTE, A. (Org.). **Aprendendo e ensinando geometria**. São Paulo: Editora Atual, 1994.

LINS, R. C. **O Modelo dos Campos Semânticos: estabelecimentos e notas de teorizações.** In: ANGELO, C. L. et. Al. (Orgs.). In: Modelo dos Campos Semânticos e Educação Matemática: 20 anos de história. São Paulo: Midiograf, 2012. P. 11 – 30.

LINS, R. C. **Por que discutir Teoria do Conhecimento é relevante para a Educação Matemática.** In: BICUDO, M. A. V. (Org.). Pesquisa em Educação Matemática: Concepções e Perspectivas. Rio Claro: Editora UNESP, 1999. p. 75 – 94.

LORENZATO, S. **Por que não ensinar geometria?** A Educação Matemática em Revista - ano III - nº 4 - Publicação da Sociedade Brasileira de Educação Matemática, 1995.

LUCAS, C. O. **Una posible <razón de ser> del cálculo diferencial elemental em elámbito de la modelización funcional**. Departamento de Matemática Aplicada I. Programa de doctorado Técnicas Matemáticas Avanzadas y sus Aplicaciones. Vigo, 2015.

MACHADO, S. D. A. et al. **Educação Matemática: uma (nova) introdução**. 3ª ed. Revista, São Paulo: EDUC, 2008.

MIOLA, A. F. S. **Uma análise de reflexões e de conhecimentos construídos e mobilizados por um grupo de professores no ensino de números decimais para o sexto ano do ensino fundamental**. Dissertação (Mestrado) - Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática, Universidade Federal do Mato Grosso do Sul, Campo Grande, 2011.

MIOLA, A. F. S. **Interações e mediações propiciadas pela pesquisa colaborativa e o desenvolvimento profissional de professores de matemática**. Tese (Doutorado) - Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática, Universidade Federal do Mato Grosso do Sul, Campo Grande, 2018.

MIZUKAMI, M. G. N. [et al]. **Escola e aprendizagem da docência:** processos de investigação e formação. São Carlos - EduUFSCAR, 2002.

MIZUKAMI, M. N. **Aprendizagem da docência: algumas contribuições de L.S.** Shulman. Revista do Centro de Educação, v. 29, n. 2, 2004

MOISE, E.E.; DOWNS, F. Jr. **Serie Matemática Moderna – Geometria**. Fondo Educativo Interamericano S.A. 1986.

SANTOS, C.M. **Análise da prática pedagógica de uma professora iandígena voltada para a Geometria no Ensino Médio.** Dissertação (Mestrado) - Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática, Universidade Federal do Mato Grosso do Sul, Campo Grande, 2013

SANTOS, E. S. **Um *Long Play* sobre formação de professores que ensinam matemática.** Dissertação (Mestrado) - Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática, Universidade Federal do Mato Grosso do Sul, Campo Grande, 2016.

NEVES, T.G. **Possibilidades e Limites de uma Prática Reflexiva para a Integração da Tecnologia no Ensino da Matemática.** Dissertação (Mestrado) - Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática, Universidade Federal do Mato Grosso do Sul, Campo Grande, 2015.

NOVAIS, P. A. F. **Um estudo sobre professores de matemática que analisam produções escritas em grupos de trabalho**. Dissertação (Mestrado) - Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática, Universidade Federal do Mato Grosso do Sul, Campo Grande, 2017.

NÓVOA, A. **Formação de Professores e profissão docente**. Universidade de Lisboa. 1992

NUNES, C. B. **O Processo Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Geometria através da Resolução de Problemas: perspectivas didático-matemáticas na formação inicial de professores de matemática**. Tese de Doutorado, Universidade Estadual Paulista (UNESP), Campus Rio Claro, 2010.

OLARRÍA, A.R.; SIERRA, T. A. **La formación matemático-didácticadelprofesorado de secundaria.** CITAD III, 2012. Disponível em: http://www.atd-tad.org/wp-content/uploads/2012/05/AliciaTomas-CITAD-III-20111.pdf. Acesso em janeiro de 2018.

________. **La Formación Matemático-Didáctica Del Profesorado De Secundaria. De Las Matemáticas Por Enseñar A Las Matemáticas Para La Enseñanza**. Tese de Doutorado. Facultad de formación de profesorado y educaciónDepartamento de didácticas específicas. Madri, 2015.

OLIVEIRA, A.B. **Prática pedagógica e conhecimentos específicos:** um estudo com um professor de Matemática em início de docência. Dissertação (Mestrado) Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática, Universidade Federal do Mato Grosso do Sul, Campo Grande, 2010.

OLIVEIRA, A. D. **Reconstruindo o conceito de paralelogramo com o software Klogo: uma experiência com professores de matemática.** Dissertação (Mestrado) - Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática, Universidade Federal do Mato Grosso do Sul, Campo Grande, 2012.

OVANDO, E. C. B. **Sobre um processo de elaboração de propostas de trabalho de matemática para o ensino fundamental**. Dissertação (Mestrado) - Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática, Universidade Federal do Mato Grosso do Sul, Campo Grande, 2017.

PAIS, L. C. **Didática da Matemática: uma análise da influência francesa**. 2º ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2002.

________**Ensinar e aprender Matemática**. Belo Horizonte: Autêntica, 2006.

PAVANELLO, R. M. **O abandono do ensino da Geometria no Brasil: causas e consequências**. Revista Zetetiké, ano I-n°1/1993.

PADILHA, L. C. S. **Integração do computador na prática pedagógica de professores de matemática que atuam em sala de aula de tecnologia: uma abordagem instrumental**. Dissertação (Mestrado) - Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática, Universidade Federal do Mato Grosso do Sul, Campo Grande, 2013.

PARDIM, J. F. S. **Reflexões e interações de um professor da educação básica em um projeto colaborativo.** Dissertação (Mestrado) - Programa de Pós-Graduação em

Educação Matemática, Universidade Federal do Mato Grosso do Sul, Campo Grande, 2015.

PEREIRA, J. C. S. **Alterações e recombinações praxeológicas reveladas por professores de matemática do ensino básico em formação continuada: a partir de um modelo epistemológico alternativo para o ensino da álgebra escolar**. Tese (Doutorado) – Universidade Federal do Pará, Instituto de Educação Matemática e Científica, Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemáticas, Belém, 2017.

________Análise praxeológica de conexões entre aritmética e álgebra no contexto do desenvolvimento profissional do professor de matemática. Dissertação (Mestrado) – Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemática, Universidade Federal do Pará, Instituto de Educação Matemática e Científica, Belém, 2012.

PERRENOUD, P. **Dez novas competências para ensinar**. Porto Alegre: Artes Médicas, 2000.

PIMENTA, S. G. **Saberes pedagógicos e atividade docente**. São Paulo: Cortez Editora, 1999.

PONTE, J. P. **Da formação ao desenvolvimento profissional**. Lisboa: APM, 1998. Disponível em: <http://www.educ.fc.ul.pt/docentes/jponte/artigos-por-temas.htm#Formacao%20e%20desenvolvimento%20profissional>. Acesso em: 8 maio 2019.

PONTE, J. P. **Perspectivas de desenvolvimento profissional de professores de Matemática.** In J. P. Ponte, C. Monteiro, M. Maia, L. Serrazina, & C. Loureiro (Eds.), Desenvolvimento profissional de professores de Matemática: Que formação? (pp. 193-211). (1995). Lisboa: SEM-SPCE.

PONTE, J. P. **Filosofia da matemática na formação inicial de professores.** In A. Estrela, R. Fernandes, F. A. Costa, I. Narciso, & O. Valério (Eds.), Contributos da investigação científica para a qualidade do ensino (pp. 257-265). Porto: Sociedade Portuguesa de Ciências da Educação (1997).

RUIZ, A.O. La Formación Matemático-Didáctica Del Profesorado De Secundaria. De Las Matemáticas Por Enseñar A Las Matemáticas Para La Enseñanza. Universidad Autonoma de Madrid. Facultad de Formación de Profesorado Y Educación Departamento de Didácticas Específicas. Madrid, 2015.

SACRISTÁN, J.G. **Consciência e Acção sobre a Prática como Libertação Profissional dos Professores.** In: NÓVOA, A. (org.) Profissão Professor. Portugal, Porto Editora, 1995, p.63-92

SANTANA, L. A. **Possibilidades na formação de professores de matemática**. Dissertação (Mestrado) - Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática, Universidade Federal do Mato Grosso do Sul, Campo Grande, 2017.

SANTOS, A. B. C. **Investigando epistemologias espontâneas de professores de matemática sobre o ensino de equações do primeiro grau**. Dissertação (Mestrado) – Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemática, Universidade Federal do Pará, Instituto de Educação Matemática e Científica, Belém, 2014.

SANTOS, C.M. **Análise da prática pedagógica de uma professora indígena voltada para a Geometria no Ensino Médio.** Dissertação (Mestrado) - Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática, Universidade Federal do Mato Grosso do Sul, Campo Grande, 2013.

SANTOS, C. M.; FREITAS, J. L. M. **Contribuições da teoria antropológica do didático na formação de professores de matemática**. Amazônia (UFPA), v. 13, p. 51, 2017.

SILVA, C. V. **A prática docente e sua influência na construção de conceitos geométricos: um estudo sobre o ensino e a aprendizagem da Simetria Ortogonal** Tese (Doutorado) –Doutorado em Educação Matemática- Pontifícia Universidade Católica de São Paulo PUC/SP, 2015.

SILVA, D. W. **Conhecimentos de professores que ensinam matemática em um grupo de trabalho que analisa produções escritas em matemática**. Dissertação (Mestrado) - Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática, Universidade Federal do Mato Grosso do Sul, Campo Grande, 2015.

SILVA, J. S. Aspectos da prática profissional de duas professoras que analisam produções escritas em matemática. Dissertação (Mestrado) - Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática, Universidade Federal do Mato Grosso do Sul, Campo Grande, 2016.

SILVA, L. Q. **Formação de professores dos anos iniciais para o ensino de geometria plana: Uma experiência com o uso do Software Klogo**. Dissertação (Mestrado) - Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática, Universidade Federal do Mato Grosso do Sul, Campo Grande, 2014.

SILVA, P. A**. Experiências e escritas de si: deslocamentos de pensamentos sobre formação, educação financeira, currículo e vida.** Dissertação (Mestrado) - Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática, Universidade Federal do Mato Grosso do Sul, Campo Grande, 2018.

SILVA, J. X. **Influências da informática educativa na prática pedagógica do professor de matemática**. Dissertação (Mestrado) - Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática, Universidade Federal do Mato Grosso do Sul, Campo Grande, 2009.

SCHÖN, D. **Formar professores como profissionais reflexivos**; In: NÓVOA, A. Os Professores e a sua formação. Lisboa: Dom Quixote, 1992, p. 77-92.

SOUZA, F. E. S. O uso do *laptop* no ensino de álgebra: um estudo com professores do 8º ano do ensino fundamental. Dissertação (Mestrado) - Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática, Universidade Federal do Mato Grosso do Sul, Campo Grande, 2014.

SOUZA, M. E. **Professores e o uso do Geogebra: (re) construindo conhecimentos sobre funções.** Dissertação (Mestrado) - Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática, Universidade Federal do Mato Grosso do Sul, Campo Grande, 2016.

SHULMAN, L. **Those Who Understand:** Knowledge Growth in Teaching, Educational Researcher,1986.

__________. **Knowledge and teaching: foundations of the new reform**. Harvard Educational Review. v. 57, n.1 Febuary, 1987. p. 1-22

___________; WILSON, S. M.; GROSSMAN, P. L**. Teachers of Substance: subject matter knowledge for teaching. In: Knowledge Base for the Beginning Teacher**. Ed Maynard C. Reynolds. For the American Association of Colleges for Teacher Education. Nova Yorque: Pergamon Press, 1989. p.23-36.

TARDIF, M.; RAYMOND, D. **Saberes, tempo e aprendizagem do trabalho no magistério**. Revista Educação & Sociedade, ano XXI, n. 73, Dezembro, 2000.

TARDIF, M. **Saberes Docentes e Formação Profissional.** Petrópolis: Editora Vozes, 2002.

VEIGA, L. E. M. **Formación de Professores de Matemática y El Fracasso Escolar en la Disciplina de Matemáticas**. Tesis Doctoral. Universidad de Extremadura, 2017.

VEIGA, I. P. A. et al. **Docência: uma construção ético-profissional**. Campinas, SP: Papirus, 2005 – (Coleção Magistério: Formação e Trabalho Pedagógico)

VERMIEIRO, J. L. **Uso de *laptops* educacionais nas aulas de matemática em escolas públicas de Mato Grosso do Sul**. Dissertação (Mestrado) - Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática, Universidade Federal do Mato Grosso do Sul, Campo Grande, 2014.

VIANNA, C. R; CURY, H. N**. Ângulos: uma "História" escolar.** Revista História & Educação Matemática, v.1, n.1, pp. 23-37, jan. / jun. 2001.

ZEICHNER, K. M. **Uma análise crítica sobre a "reflexão" como conceito estruturante na formação docente**. Educ. Soc., ago. 2008, vol. 29, nº 103, p. 535554.

ANEXOS

ANEXO 1

Levantamento Bibliográfico dos trabalhos desenvolvidos no PPGEDUMAT da Universidade Federal de Mato Grosso do Sul, sobre formação continuada de professores:

Autor(a)	**Título**	**Ano da defesa das Dissertações e Teses**
Juliana Xavier Silva	Influências da informática educativa na prática pedagógica do professor de matemática.	2009
Anelisa Kisielewski Esteves	Números decimais na escola fundamental: interações entre os conhecimentos de um grupo de professores e a relação com sua prática pedagógica	2009
Vera Fátima Corsino de Almeida	Analise das práticas docentes de professores de cursos de licenciatura em Matemática referentes ao estudo de retas e ângulos.	2009
Irio Valdir Kichow	Procedimentos didáticos relativos ao ensino de números racionais em nível de sexto e sétimo ano do ensino fundamental	2009
Anderson Martins Corrêa	Significados fenomenológicos da orientação didática no ensino fundamental de geometria	2009
Adriana Barbosa de Oliveira	Prática pedagógica e conhecimentos específicos: Um estudo com um professor de matemática em início de docência.	2010
Adriana Ramires Ribeiro Coraça	O uso do computador na prática pedagógica de professores de matemática que atuam como professores de tecnologia	2010
Adriana Fátima de Souza Miola	Uma análise de reflexões e de conhecimentos construídos e mobilizados por um grupo de professores no ensino de números decimais para o sexto ano do ensino fundamental	2011
Vanessa Franco Neto	Competências profissionais de professores de matemática do ensino médio valorizadas por uma "boa" escola: a supremacia da cultura da performatividade	2011
Clarice Martins de Souza Batista	Percepções e conhecimentos de professoras que ensinam matemática nos anos iniciais do ensino fundamental acerca do ensino de números e operações	2012

Marcela dos Reis França	Limites e Potencialidades em Educação Matemática de Diferentes Programas de Formação na perspectiva de professores de escolas públicas de Três Lagoas/MS.	2012
Ádamo Duarte de Oliveira	Reconstruindo o conceito de paralelogramo com o software klogo: uma experiência com professores de matemática	2012
Agnaldo de Oliveira	Formação continuada de professores de matemática a distância: estar junto virtual e habitar ambientes virtuais de aprendizagem	2012
Luiz Cléber Soares Padilha	Integração do computador na prática pedagógica de professores de matemática que atuam em sala de tecnologia: Uma Abordagem instrumental	2013
Cintia Melo dos Santos	Análise da prática pedagógica de uma professora indígena voltada para a geometria no ensino médio	2013
Shirlei Paschoalin Furoni	Conhecimentos mobilizados por professores de Matemática do Ensino Médio em suas relações com livros didáticos	2014
Jackeline Riquielme de Oliveira	Relações estabelecidas entre professores de Matemática do Ensino Médio e livros didáticos, em diferentes fases da carreira	2014
Fernanda Elisbão Silva de Souza	O uso do laptop no ensino de álgebra: um estudo com professores do 8º ano do ensino fundamental	2014
Sérgio Freitas de Carvalho	Formação continuada em serviço e o uso da lousa digital em aulas de matemática: ações e reflexões de um grupo de professores	2014
Luana Quadrini da Silva	Formação de professores dos anos iniciais para o ensino de geometria plana: Uma experiência com o uso do Software Klogo	2014
Cristiano da Silva dos Anjos	Crenças de um professor de matemática que emergem em suas interações com um livro didático do ensino médio	2014
Jonas Lobato Vermieiro	Uso de laptops educacionais nas aulas de matemática em escolas públicas de Mato Grosso do Sul	2014
Darlysson Wesley da Silva	Conhecimentos específicos da Docência de Professores que ensinam Matemática em um Grupo de Trabalho que Analisa Produções Escritas em Matemática	2015
Tatiani Garcia Neves	Possibilidades e Limites de uma Prática Reflexiva para a Integração da Tecnologia no Ensino da Matemática	2015
Juliana Ferreira de Sousa Pardim	Reflexões e interações de um Professor da Educação básica em um Projeto Colaborativo	2015

Júlio César Gomes de Oliveira	Currículos de Matemática no Ensino Médio: Significados que professores atribuem a uma Trajetória Hipotética de Aprendizagem desenvolvida à luz da Educação Matemática Crítica	2015
Deise Maria Xavier de Barros Souza	Narrativas de uma professora de matemática: Uma construção de significados sobre avaliação	2015
Mauro Luís Borsoi Britto	Uma discussão de discussões de professores que ensinam Matemática em um grupo de trabalho	2015
Nickson Moretti Jorge	Reflexões sobre a prática docente de um professor de matemática a partir da pesquisa colaborativa	2015
Jhenifer dos Santos Silva	Aspectos da prática profissional de duas professoras que analisam produções escritas em matemática	2016
Mauro Eduardo de Souza	Professores e o uso do geogebra: (re) construindo conhecimentos sobre funções	2016
Edivagner Souza dos Santos	Um long play sobre formação de professores que ensinam matemática	2016
Keyla Ribeiro de Andrade	Representações semióticas de números racionais sob o olhar de um grupo de professores de matemática dos anos finais do ensino fundamental	2016
Larissa Ávila Santana	Possibilidades na formação de professores de matemática	2017
Jesus Reinaldo Alves Quirino	Um panorama das pesquisas em formação continuada de professores de matemática no programa obeduc (2010 – 2015): uma caracterização da reflexividade docente	2017
Cristiane Trombini Bispo	Significação da prática docente: uma investigação com professores de matemática inseridos em um grupo de estudos	2017
Pedro Anísio Ferreira Novais	Um estudo sobre professores de matemática que analisam produções escritas em grupos de trabalho	2017
Elaine Cristina Braga Ovando	Sobre um processo de elaboração de propostas de trabalho de matemática para o ensino fundamental	2017
Ronaldo Borges	Saberes construídos e ressignificados por um professor de Matemática da educação básica quando investiga a própria prática	2018

Pedro Alves da Silva	Experiências e escritas de si: deslocamentos de pensamentos sobre formação, educação financeira, currículo e vida	2018
Magno Rodrigo da Silva	(De)versos, se fez narrativas (ou: estórias sobre formação continuada de professores de matemática no estado de Mato Grosso)	2018
Terezinha Inajossa Santos	Narrativas de um professor de matemática do ensino médio: produção de subjetividade alinhada ao discurso neoliberal	2018
Bárbara Drielle Roncoletta Corrêa	Entre narrativas, gaiolas e voos: movimentos de integração de tecnologias digitais de uma professora dos anos iniciais	2018
Adriana Fátima de Souza Miola	Interações e mediações propiciadas pela pesquisa colaborativa e o desenvolvimento profissional de professores de matemática	2018

Fonte: PPGEDUMAT da Universidade Federal de Mato Grosso do Sul.

ANEXO 2:

QUESTIONÁRIO

Este instrumento tem por objetivo obter dados sobre sua formação e os cursos de formação continuada dos quais tem participado para uma pesquisa acadêmica que está em desenvolvimento no Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática da Universidade Federal de Mato Grosso do Sul. Conto com a sua colaboração e compreensão para responder este questionário e desde já agradeço pela sua disponibilidade.

Nome:

Data de Nascimento:

Estado Civil:

Possui Filhos? Quantos? Qual idade?

E-mail:

Em qual Instituição se Graduou?

Em qual ano ingressou na graduação?

Possui especialização? ( ) Completo ( ) Incompleto ( ) Cursando ( ) Não possui

Em:

Possui mestrado? ( ) Completo ( ) Incompleto ( ) Cursando ( ) Não possui

Em:

Em qual Escola que leciona?

Para que níveis de ensino leciona?

Qual seu tempo de experiência como professor (a):

Qual a sua situação profissional? Contratado (a) ou Concursado (a)?

O que motivou você a fazer a escolha pelo curso de Matemática?

Descreva:

Qual a sua avaliação do seu processo de formação inicial?

Você tem participado de cursos para formação continuada de professores? Quais cursos participou nos últimos anos?

Caso tenha participado de alguma formação específica para professores de matemática, esta foi voltada para o estudo de conteúdos matemáticos ou sobre como ensinar esses conteúdos?

Qual a sua opinião sobre as formações continuadas que são oferecidas pela secretaria de educação e demais órgãos?

Quais mudanças você proporia para as formações continuadas das quais tem participado?

A escola na qual você leciona disponibiliza aos professores um horário específico para participar de formações continuadas no período de trabalho?

As formações continuadas, das quais você participa, têm ocorrido em quais dias da semana? E em quais horários?

Existe alguma dificuldade ou algo que impossibilite você a participar de formações continuadas?

ANEXO 3:

Atividades desenvolvidas nos PEP:

Sessão 1: $S_1 = \{X_1, Y, Q_0\}$ e Sessão 2: $S_2 = \{X_2, Y, Q_0\}$:

COMPARANDO DEFINIÇÕES[46]

---

[46]Retirado do Livro: Rêgo, R. G. Laboratório de ensino de Geometria

Parte 1 – Observe as seguintes definições de POLÍGONO, apresentadas em diferentes livros didáticos. As três primeiras definições foram retiradas de livros destinados ao 6º ano do ensino fundamental e a quarta definição, de um livro voltado para o ensino superior.

Definição 1[47] – Uma linha poligonal fechada e simples com sua região interna forma um polígono (*Matemática*, Departamento de Edições Educativas, São Paulo, Moderna, 2004). **Observação**: *O autor define que uma linha do plano é chamada poligonal se for formada apenas por segmentos de reta, de maneira que os segmentos consecutivos são não colineares.*

Definição 2 – Um polígono é uma figura geométrica plana com contornos retilíneos (Imenes & Lellis, Matemática, São Paulo, Scipione, 2001).

Definição 3 – Polígonos são figuras que têm seu contorno formado apenas por segmentos de retas (Bianchini & Miani, *Construindo conhecimento em matemática*, São Paulo, Moderna, 2000).

Definição 4 – Seja A_1, A_2, A_3, ..., A_n, $n \geq 3$, uma sequência de n pontos distintos tais que os segmentos A_1A_2, A_2A_3, ..., $A_n A_1$, têm as seguintes propriedades:

1. Nenhum par de segmentos se intersecciona a não ser nas suas extremidades.

2. Nenhum par de segmentos com extremidade comum está na mesma reta.

Um polígono é o conjunto formado dos pontos do plano pertencentes ao conjunto A_1A_2 U A_2A_3 U..... U $A_n A_1$.

Questão: Apresentem exemplos de figuras que satisfazem a uma definição, mas não a outra (ou outras), sempre justificando suas escolhas.

Parte 2 – Observe as seguintes definições de TRAPÉZIO, apresentadas em diferentes livros didáticos.

Definição 1 – Trapézio é um quadrilátero que tem *ao menos um par de lados paralelos* (NETO et al., Geometria, São Paulo, Moderna, 1982).

Definição 2 – Um trapézio é um quadrilátero em que dois lados são paralelos (REZENDE & QUEIROZ, Geometria Euclidiana Plana, Campinas, Editora da UNICAMP, 2000).

Definição 3 – Os trapézios são quadriláteros que têm apenas dois lados opostos paralelos (BIACHINI & MIAMI, Construindo conhecimento em matemática, São Paulo, Moderna, 2000; LOGEN, Matemática em movimento, Curitiba, Positivo, 2004).

Definição 4: Trapézio: quadrilátero que tem um par de lados paralelos (IMENES & LELLIS, Matemática, São Paulo, Scipione 2001).

---

[47] Embora estejamos considerando como "definição", o livro didático não explicita por meio dessa palavra. No entanto, estamos assim considerando pelo fato do livro tentar caracterizar, ou seja, "definir" o conceito por meio de uma frase, seguida ou não de exemplos ostensivos.

Questão: Existem diferenças entre as definições apresentadas? Em caso afirmativo, quais consequências em caso de adoção de cada uma no estudo das relações entre o trapézio e os demais quadriláteros, ou na forma das figuras que serviriam como exemplo ou contraexemplo para cada caso.

Na sequência sugerimos analisar, com base em definições, as seguintes afirmações:

( ) Todo quadrado é um retângulo.

( ) Todo quadrado é um losango.

( ) Todo retângulo é um quadrado.

( ) Um paralelogramo que tem lados congruentes pode ser chamado de losango.

( ) Os retângulos que são losangos são quadrados.

( ) Um paralelogramo é sempre um retângulo.

( ) Os lados opostos de um paralelogramo são paralelos.

( ) Os lados opostos de um quadrado são perpendiculares.

( ) Existem paralelogramos que são trapézios

( ) Os lados consecutivos de um quadrado são perpendiculares.

( ) Existem polígonos equiláteros que não possuem todos os ângulos iguais.

( ) Existem polígonos que possuem todos os ângulos iguais e que não são equiláteros

ANEXO 4:

Sessão 3: S[48]$_3$ = {X$_3$, Y, Q$_1$}:

Numa classe, os alunos trabalham com perímetro e área de um retângulo. Eis o que dizem alguns dentre eles:

Davi: Dois retângulos que têm o mesmo perímetro têm a mesma área.

Suzana: Dois retângulos que têm a mesma área têm o mesmo perímetro.

Guto: Se aumentarmos o perímetro de um retângulo sua área também aumenta.

Sérgio: Se aumentarmos a área de um retângulo seu perímetro também aumenta.

Mônica: Todos os retângulos que tem 36 cm2 de área têm perímetro maior ou igual a 24 cm.

Luísa: Para todo retângulo existe um outro que tem a mesma área mas com perímetro maior.

[48]A atividade trata-se de uma análise de situação didática, retirada do processo seletivo para ingresso no Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática da Universidade Federal do Mato Grosso do Sul, ano de 2008, disponível em https://ppgedumat.ufms.br/files/2017/06/PPGEdumat_prova_2008.pdf.

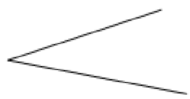
O que você pensa sobre o que diz cada uma desses alunos? Concorda ou não? Por quê?

ANEXO 5:

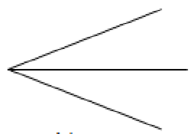
Sessão 4: S[49]$_4$ = {X_4, Y, Q_2} e Sessão 5: S_5 = {X_5, Y, Q_2}

Estudo do conceito de ângulos - 08/05/2017

1) Quantos ângulos vê nas figuras a) e b), respectivamente?



a)



b)

2) Referente ao exercício anterior, qual conceito de ângulo você assumiu?

3) Você sabia que o conceito de ângulo é um conceito multifacetado, pois podem ser encontradas diferentes definições em livros didáticos. Vejamos algumas delas:

a) Definições que recorrem a semirretas

a.1) Aceitam os ângulos nulo e raso:

1. Ângulo é a figura formada por duas semirretas que têm a origem comum (Quintella, 1950, p. 139, 3º ginasial).
2. O ponto A é origem comum das semirretas AB e AC. O conjunto que contém todos os pontos de AB e todos os pontos de AC chama-se ângulo (Quintella, 1967, p. 51, 3º ginasial).
3. Ângulo é a figura formada pela reunião de duas semirretas tendo a mesma origem (Sangiorgi, 1966, p. 154, 3º ginasial).
4. A figura geométrica formada por duas semirretas que têm a mesma origem denomina-se ângulo (Giovanni e Giovanni Jr., 1990, p. 172, 5ª série).
5. Da Geometria Plana sabemos que um ângulo é caracterizado por um par de semirretas de origem no mesmo ponto (Machado, 1994, p. 218, v.1).

a.2) Não aceitam os ângulos nulo e raso:

6. Um ângulo é a reunião de dois raios que têm o mesmo ponto extremo, mas não estão situados na mesma reta (SMSG, 1964, p. 43, v.1).
7. Sejam duas semirretas OA e OB de mesma origem O, não colineares, isto é, com retas suportes distintas. A figura constituída por duas semirretas, de mesma origem e não colineares chama-se ângulo (Castrucci e Bóscolo, 1968, p. 161, 3º ginasial).
8. Considere três pontos não colineares: A, O e B. Ângulo geométrico AÔB é a figura formada pelas semirretas OA e OB (Bongiovanni e outros, 1990, p. 212, 5ª série).

[49] Definições extraídas do artigo: VIANNA, C. R; CURY, H. N. Ângulos: uma "História" escolar. Revista História & Educação Matemática, v.1, n.1, pp. 23-37, jan. / jun. 2001

9. A união de duas semirretas de mesma origem, mas não contidas numa mesma reta, é um ângulo (Guelli e Lima, s/d, p. 151, 6ª série).
10. Ângulo é a reunião de duas semirretas não-colineares e de mesma origem (Pompeu e outros, s/d, p. 85, 7ª série).

a.3) Aceitam o ângulo nulo, mas não aceitam o ângulo raso.

11. A reunião de duas semirretas distintas, de mesma origem e não opostas é um ângulo (Iezzi, Dolce e Machado, 1982, p. 198, 6ª série).

12. Ângulo é uma figura geométrica plana, formada por duas semirretas, não opostas e de mesma origem (Mori e Onaga, 1998, p. 229, 6ª série).

a.4) Aceitam o ângulo raso, mas não aceitam o ângulo nulo.

13. A figura formada por duas semirretas de mesma origem e não-coincidentes chama-se ângulo (Bianchini, 1986, p.84, 7ª série).
14. Ângulo é a figura geométrica formada por duas semirretas de mesma origem e não coincidentes (Malveira, 1987, p.123, 7ª série).

b) Definições que recorrem à região do plano

1. Duas retas AB, CD que se cortam, dividem a extensão indefinida do plano que elas determinam em quatro porções distintas, ás quais se dá o nome de *ângulos*. Assim chama-se angulo a *porção de um plano limitada em parte por duas linhas que se encontrão* (...) (Ottoni, 1870, p. 12-3, *grafia original*).

2. Duas retas r e s que se cortam em um ponto A, dividem um plano em quatro regiões. Cada uma dessas regiões recebe o nome de ângulo (Pierro Neto, s/d, p.258, 1ª série ginasial).
3. Sejam OA e OB, duas semirretas distintas de mesma origem O. A região do plano determinada pelas duas semirretas é chamada ângulo (Domênico, Lago e Ens, s/d, p. 93, 7ª série).
4. Ângulo é o nome de cada uma das regiões em que o plano fica dividido por duas de suas retas, que tenham um só ponto comum (Pierro Neto, 1991, p.168, 6ª série).
5. Duas semirretas com a mesma origem, e que não estejam contidas na mesma reta, separam o plano em duas regiões: uma convexa e outra não-convexa. Cada uma dessas regiões, junto com as semi-retas, forma um ângulo. Então, as duas semi-retas determinam dois ângulos. Agora, considere duas semi-retas de mesma origem A que estejam contidas na mesma reta. Também nesse caso formam-se ângulos (Jakubovic e Lellis, 1991, p. 166, 6ª série).
6. . Denominamos ângulo a região convexa formada por duas semi-retas não-opostas que têm a mesma origem (Giovanni e Giovanni Jr., 2000, p.30).

c) Definições que recorrem a outras ideias

1. Angulo é a abertura formada por duas rectas que partem do mesmo ponto (Collecção FTD, 1925, p. 8).
2. Com as peças do Tangram é possível (...) formar triângulos retângulos isósceles de vários tamanhos. O que há de comum nesses triângulos? (...) Veremos que há elementos desses triângulos que não dependem do tamanho dos triângulos. São os ângulos (...) (Lopes, 1994, p. 95, 6ª série).

3. Antônio sai de casa às 11 horas e chega no serviço às 11h e 30 min. Às 11h, o ângulo entre os ponteiros do relógio é 30^{o} (...) São 11h 30 min. Qual é o ângulo entre os ponteiros? (Imenes e Lellis, 1997, p. 61, 6^{a} série).

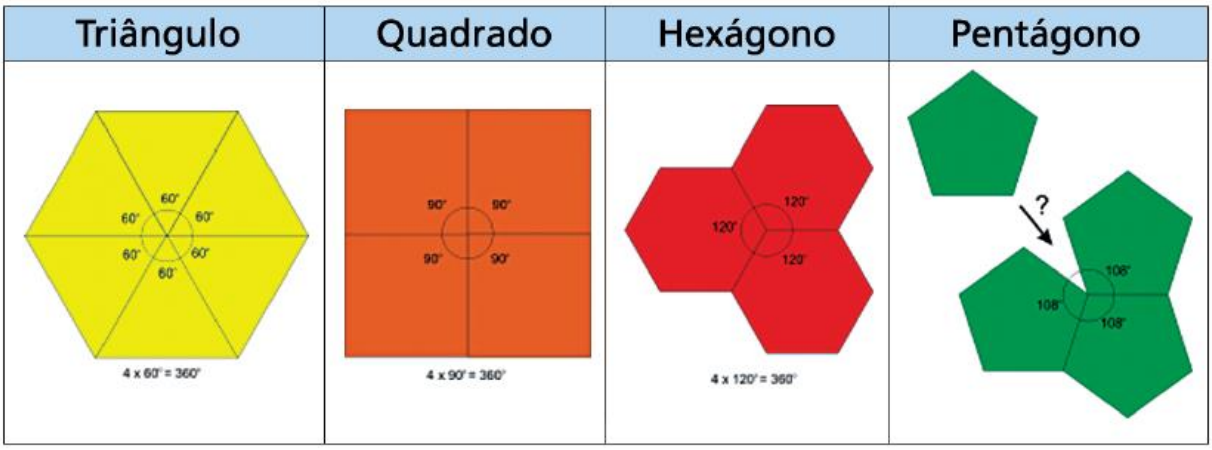
ANEXO 6:

Sessão 6: $S_6 = \{X_6, Y, Q_3\}$

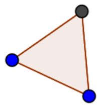
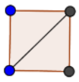
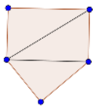
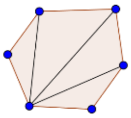
Para iniciar o encontro do dia 20/06, iremos retomar as discussões sobre ângulos, trabalhando inicialmente a seguinte questão:

Com quais polígonos equiláteros e equiângulo, de um único tipo e colocando sempre a mesma quantidade em torno dos vértices é possível pavimentar o plano?

A proposta da atividade é fazer com que os professores percebam que é possível a pavimentação, utilizando o mesmo polígono, somente nos casos abaixo.

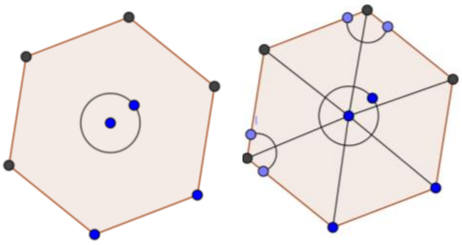


Para isso, construiremos a seguinte tabela:

Polígono	Nº de lados	Exemplo	Nº de triângulos que o Polígono ficou dividido	Soma dos ângulos internos
Triângulo	3		1	$1 \times 180º$
Quadrilátero	4		2	$2 \times 180º$
Pentágono	5		3	$3 \times 180º$
Hexágono	6		4	$4 \times 180º$
………				
Decágono	10		8	$8 \times 180º$
……..				
Polígono n lados	N		(n-2)	$(n-2)\times 180º$

Ao terminar a construção dessa tabela, vamos questionar as professoras se existe outro modo, de encontrar a soma dos ângulos internos de um polígono, sem ser pela fórmula encontrada na tabela, para que possamos chegar na expressão abaixo, e ainda, identificar a compreensão por parte dos professores sobre a soma interna dos ângulos de um polígono.

Assim, temos que:



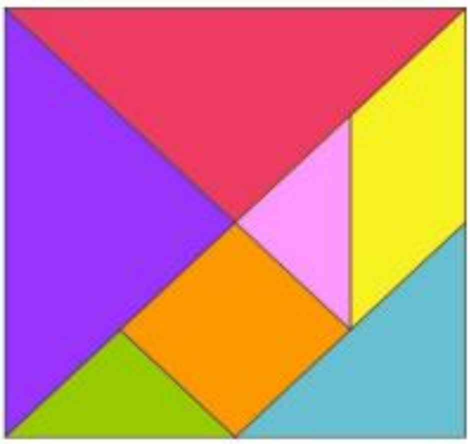
Para qualquer polígono, a soma dos ângulos internos pode ser expresso por: $(n \times 180) - 360º$ ($360º$ *referente ao ângulo central*).

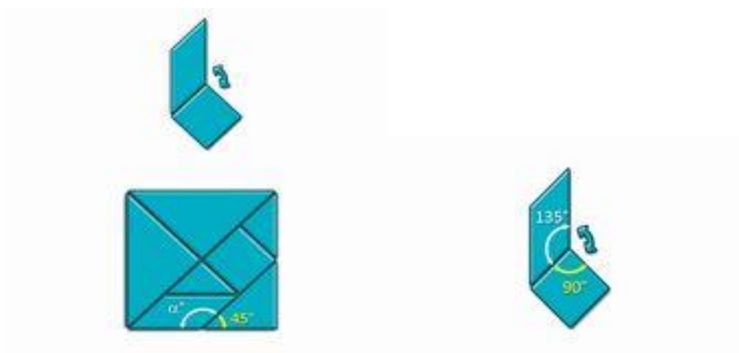
Após as discussões sobre a soma dos ângulos internos de um polígono qualquer, trabalharemos com o estudo dos ângulos no Tangram. Nesse sentido, podemos começar uma discussão de como iniciar o conteúdo de ângulos para os alunos no Ensino

Fundamental por meio do Tangram, bem como, fomentar algumas reflexões: Diante das nossas discussões, sobre o conceito de ângulo, no qual percebemos que podem ser encontradas diferentes definições em livros didáticos, surgem os seguintes questionamentos?

- Como iniciar o conteúdo de ângulos no EF?
- Qual conceito trabalho no EF? E no EM?
- Quais conceitos devo trabalhar, após a definição de ângulo (ângulos retos, ângulos complementares, construções geométricas?)
- Como e qual deve ser a sequência didática para o ensino de ângulo? (a proposta é levar as professoras a uma discussão sobre a continuidade do ensino de ângulo, para além do conceito discutido nos encontros, pensando não em um modelo "ideal", mas sim em proposta de trabalho para a sala de aula).

Encontrar as medidas dos ângulos das peças que compõem o Tangram? Quais são?





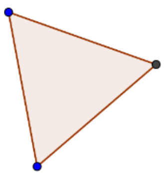
ANEXO 7:

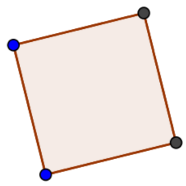
Sessão 7: $S_7 = \{X_7, Y, Q_4\}$ e Sessão 9: $S_9 = \{X_9, Y, Q_4\}$:

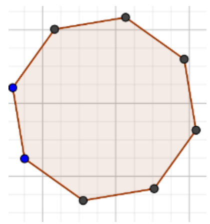
Formação continuada com professores da Educação Básica: um estudo dos conceitos geométricos   Data 29/08/17

Atividades[50]

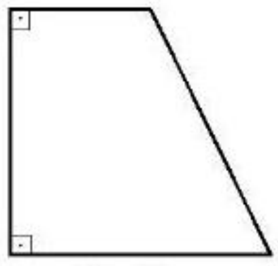
1) Em cada caso indique o número de eixos de simetria de cada figura:

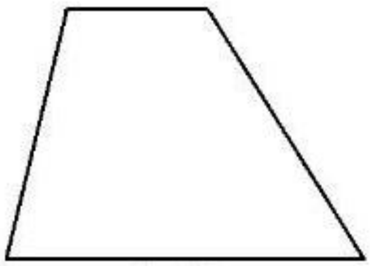
a) 

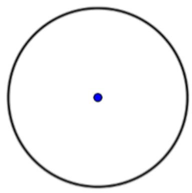
b) 

c) 

d) 

e) 

f) 

g) 

1) O que realizou para encontrar os eixos de simetria das figuras?

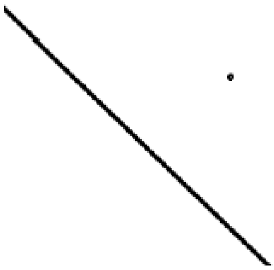
2) A direção do eixo de simetria (horizontal, vertical, oblíqua), pode ser uma variável que intervém na sua identificação?

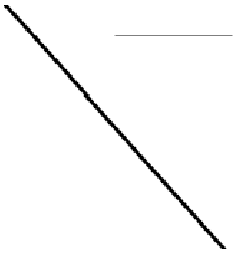
3) As figuras dispostas no papel em branco, ou no papel quadriculado, podem facilitar ou dificultar a identificação dos eixos de simetria?

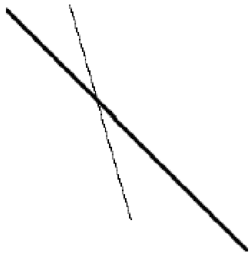
4) O que é a simetria?

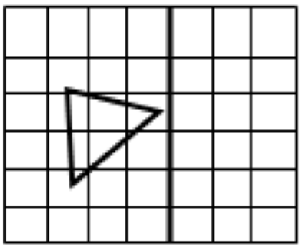
2) Trace em cada situação a figura simétrica com relação à reta dada, e explique os procedimentos utilizados.

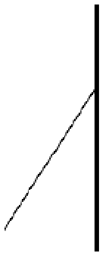
[50] Atividades adaptadas a partir da tese de Silva, C. V. A prática docente e sua influência na construção de conceitos geométricos: um estudo sobre o ensino e aprendizagem da simetria ortogonal. 301 p. 2015. Tese (doutorado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo – São Paulo, 2015.

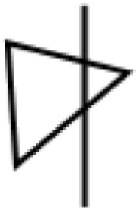
a) 

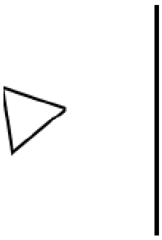
b) 

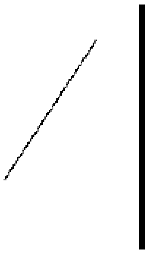
c) 

d) 

e) 

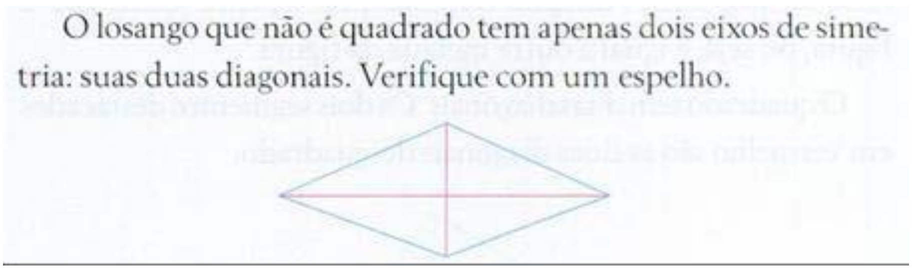
f) 

g) 

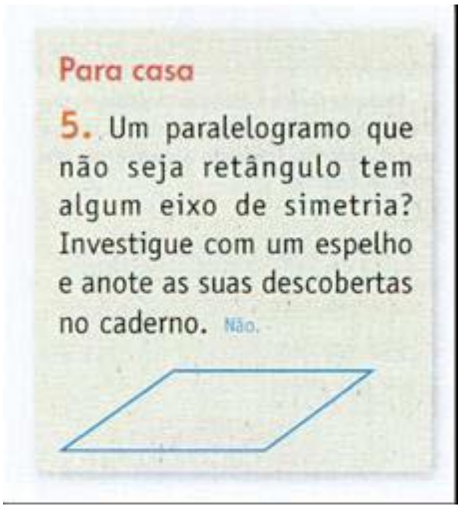
h) 

2) Analisando alguns erros conceituais de Simetria em livros didáticos:

a) No estudo da simetria, logo após se ler que “o losango não quadrado tem exatamente dois eixos de simetria” o que é verdade, o texto afirma que um paralelogramo não retângulo não tem nenhum eixo de simetria, o que está errado. Desconsidera-se, assim, que o losango não quadrado, exemplo dado na mesma página, é um paralelogramo não retângulo.

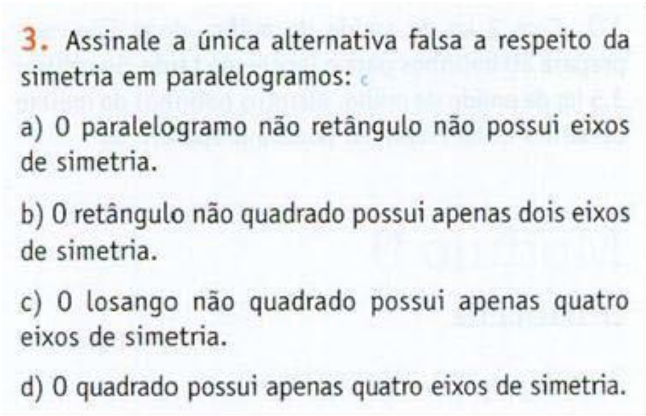


O losango que não é quadrado tem apenas dois eixos de simetria: suas duas diagonais. Verifique com um espelho.


Para casa

5. Um paralelogramo que não seja retângulo tem algum eixo de simetria? Investigue com um espelho e anote as suas descobertas no caderno. Não.

A exclusão dos losangos da categoria dos paralelogramos não retângulos repete-se na seção. Mostre o que você sabe, como se pode observar no trecho do livro destacado na imagem a seguir:


3. Assinale a única alternativa falsa a respeito da simetria em paralelogramos: c

a) O paralelogramo não retângulo não possui eixos de simetria.

b) O retângulo não quadrado possui apenas dois eixos de simetria.

c) O losango não quadrado possui apenas quatro eixos de simetria.

d) O quadrado possui apenas quatro eixos de simetria.

A afirmação contida no item (a) da atividade 3 é falsa, pois um losango não quadrado é um paralelogramo não retângulo e possui eixos de simetria. No entanto, no manual do professor, escreve-se que tal afirmação é verdadeira. A repetição do erro já cometido no volume do 7º ano, como acima citado, dificulta a aprendizagem da classificação dos quadriláteros.

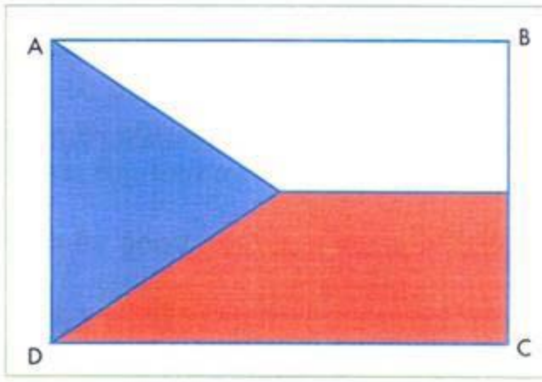
b) No volume do 8º ano, há a seguinte atividade sobre simetria de reflexão:

8. Observe a figura da bandeira da República Tcheca:

a) Copie a figura em uma folha de papel e identifique o vértice do triângulo azul, no interior da bandeira, pela letra E.

b) Identifique o quarto vértice do trapézio vermelho pela letra F.

c) Na figura, existem dois segmentos simétricos em relação à reta que passa pelos pontos E e F. Quais?



d) É possível recortar os dois trapézios e com eles formar um retângulo, um trapézi isósceles ou um pentágono. Desenhe esses três polígonos, destacando com um linha pontilhada os lados superpostos dos dois trapézios.

No enunciado do item (c) afirma-se que há apenas dois segmentos de reta simétricos em relação à reta que passa pelos pontos E e F e, no manual do professor, diz-se que tais segmentos são AB e DC. Na verdade, são três os segmentos de reta simétricos em relação à reta que passa por E e F: AB e DC; EA e ED; e FC e FB. Este tipo de erro dificulta a aprendizagem do conceito de simetria de reflexão, tópico importante na matemática escolar.

c) Na obra, a abordagem da simetria de reflexão é bastante falha. De fato, em toda a coleção, praticamente tudo o que se escreve sobre simetria de reflexão está contido a reprodução a seguir apresentada.

5. SIMETRIA DE REFLEXÃO

Observe as imagens a seguir.

Fachada do edifício Taj Mahal, na Índia, uma borboleta e uma jarra.

Cada uma dessas imagens foi "cortada" por uma linha. Imagine que essa linha tracejada seja um espelho. Note que o lado esquerdo se sobrepõe quase que perfeitamente ao lado direito. Professor(a), o manual traz um texto sobre a simetria bilateral do corpo humano. e uma atividade multidisciplinar

Essa característica, presente em alguns objetos, é chamada de **simetria de reflexão**. A linha imaginária que representamos é o **eixo de simetria**.

Se você observar ao seu redor, encontrará simetria de reflexão na natureza, nos azulejos, em obras de arte, em móveis, edifícios e objetos de decoração.

O que é mais grave é que se menciona apenas o conceito de eixo de simetria em imagens planas de objetos ou de seres tridimensionais, mas se faz a recomendação:

> "Se você observar ao seu redor, encontrará simetria de reflexão na natureza, nos azulejos, em obras de arte, em móveis, edifícios e objetos de decoração."

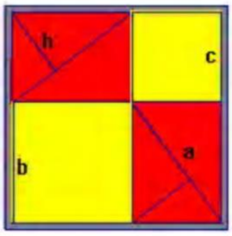
Dessa maneira, induz-se o aluno a procurar eixos de simetria de reflexão em objetos tridimensionais – móveis, edifícios, etc – que, na verdade, podem ter planos de simetria de reflexão e não eixos de simetria de reflexão. Sabe-se que estes últimos podem ocorrer apenas em objetos ou figuras planas.

ANEXO 8:

Sessão 8: S^{51}_8 = {X_9, Y, Q_5}

Hoje nossa aula será sobre Geometria! A tarefa que realizaremos envolve investigação sobre relações métricas que podemos achar nos triângulos retângulos. A sala será dividida em grupos, cada equipe receberá um kit com diferentes figuras geométricas e a partir delas serão discutidas algumas relações. Vamos começar?!

1. Usando como base o quadrado maior do kit, monte o modelo da figura ao lado:



Agora retire o quadrado de lado ***b*** e substitua por este retângulo:

Fig. 01

Fig. 01 Referência: autoria própria

Em seguida, tente montar o quadrado. O que aconteceu quando você substituiu uma figura pela outra? Qual a relação entre elas?

[51] Material produzido pelo OEM-Bahia. Disponível em www.educacaomatematica.ufba.br. Acesso em maio de 2017

2. Agora monte o modelo da figura ao lado:

Em seguida, substitua o quadrado de lado ***c*** por este retângulo:

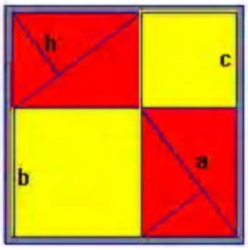


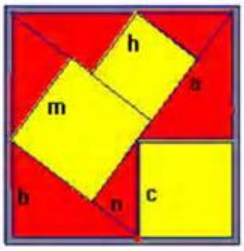
Fig. 02 Referência: autoria própria

Monte o quadrado novamente.

E agora, qual a relação entre as figuras?

3. Vamos montar agora este modelo.

Substituindo o quadrado de lado ***h*** pelo retângulo:



Monte o quadrado novamente. O que você observa em relação às figuras?

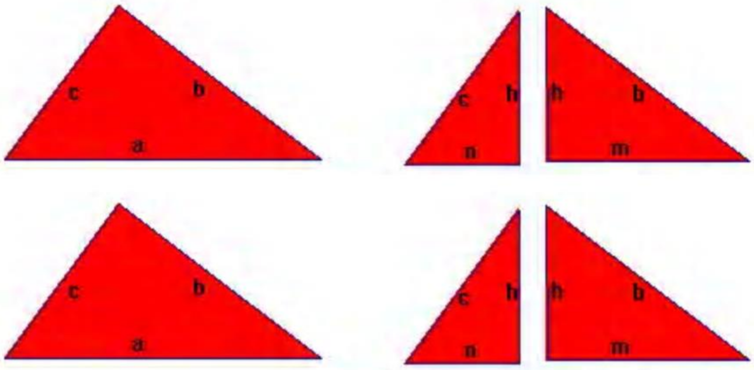
Fig. 03 Referência: utoria própria

KIT DE MATERIAIS MANIPULÁVEIS

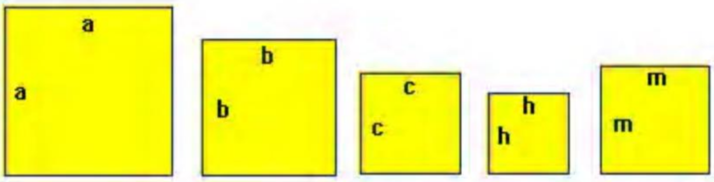
Material emborrachado (EVA) com espessura igual ou superior a 0,5cm.

Com a mesma cor construa quatro triângulos retângulos congruentes de catetos *b* e *c* e hipotenusa *a*. Dois desses triângulos devem ser recortados na altura relativa a hipotenusa formando outros quatro triângulos. As projeções são nomeadas por *m* e n e a altura por *h*.

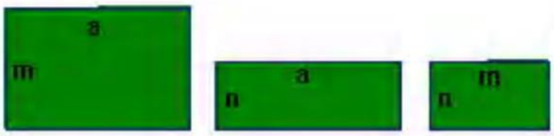
Sugestão de medidas: *a*=10cm, *b*=8cm, *c*=6cm, *m*=6,4cm, *n*=3,6cm e *h*=4,8*cm*.



Com outra cor construa cinco quadrados de lados: a, b, c, h e m.



Com uma terceira cor construa três retângulos de lados: *a* e *m*, *a* e *n* e *m* e *n*.



Para finalizar construa uma base quadrangular com lado *b*+*c*+2cm, estes 2 cm representam as bordas da base quadrangular.