Universidade Federal da Grande Dourados-UFGD

Kelven Marcel Santos Delgado

Estudo de identificação de sistemas
Via Algorítimo de Realização de Auto-Sistemas

Dourados, MS
2018

Kelven Marcel Santos Delgado

Estudo de identificação de sistemas
Via Algorítimo de Realização de Auto-Sistemas

Trabalho de conclusão de curso, apresentado à Faculdade de Engenharia, curso de graduação em Engenharia Mecânica na Universidade Federal da Grande Dourados, para a obtenção do título de Bacharel em Engenharia Mecânica.

Orientador: Prof. Dr. Sanderson Manoel da Conceição

Dourados, MS
2018

Delgado, Kelven Marcel   E.R.A. /
Kelven Marcel Santos delgado... [et al.] - 2018.
X f.; 30 cm.

Trabalho de conclusão de curso de Engenharia Mecânica.
Universidade Federal da Grande Dourados.
Faculdade de Engenharia, 2018.

Orientador: Prof. Dr. Sanderson Manoel da Conceição

1. Engenharia - Engenharia Mecânica.
2. Trabalhado de conclusão de curso.
3. Estudo de identificação de sistemas. I. Título.

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
FUNDAÇÃO UNIVERSIDADE FEDERAL DA GRANDE DOURADOS

ANEXO D - AVALIAÇÃO FINAL DO TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO

Aluno: **Kelven Marcel Santos Delgado**

Título do trabalho e subtítulo: **Estudo de identificação de sistemas via Algoritmo de realização de auto-sistemas.**

BANCA EXAMINADORA

1. **Presidente (orientador):**
Prof. Dr. Sanderson Manoel da Conceição, Universidade Federal da Grande Dourados - UFGD

2. **Membro:**
Prof. Dr. Marcus Vinicius Monteiro Varanis, Universidade Federal da Grande Dourados - UFGD

3. **Membro:**
Prof. Dr. Clivaldo de Oliveira, Universidade Federal da Grande Dourados - UFGD

De acordo com o grau final obtido pelo aluno, nós da banca examinadora, declaramos Aprovado (Aprovado/Reprovado) o aluno acima identificado, na componente curricular Trabalho de Conclusão de Curso (TCC-II) de Graduação no Curso de Engenharia Mecânica da Universidade Federal da Grande Dourados.

Dourados, 07 de dezembro de 2018.

Sanderson Manoel da Conceição
Prof. Dr. Sanderson Manoel da Conceição

Prof. Dr. Clivaldo de Oliveira

Prof. Dr. Marcus Vinicius Monteiro Varanis

“Dedico este há duas pessoas, primeiro minha mãe Maria Arlete, que com toda sua dedicação e carinho de uma mulher forte criou eu e meu irmão, mesmo exercendo a profissão de doméstica me orgulho de ser filho desta mulher, que nunca deixou que nada faltasse nem muito menos a vontade para com os estudos, que desde minha pouca idade esforçou a me levar a educação mesmo que na garupa de sua bicicleta e com todo o esforço de um ser que carregava todo um mundo nas costas me tornou o que sou hoje, obrigado de coração.
E também dedico este trabalho há meu pai Victor Anibal Delgado em memória a este homem que apesar da distancia não deixou que nada faltasse e tentou ser presente mesmo na problemática envolvendo nossa situação, dedico ao senhor que sempre em nossos poucos momentos me disse a importância do estudo e do orgulho de ver todos seus filhos formados, pois bem aqui estou e garantirei que o ultimo de seus filhos também siga os caminhos que o senhor tanto se orgulhava. É com muita tristeza porém dever cumprido que dedico ao senhor, obrigado aonde estiver. ”

Agradecimentos

Primeiramente agradeço a meu Deus, pois talvez seja sua força divina que me manteve em pé até aqui e que me ajudou na sabedoria que necessitava para que pudesse realizar este trabalho.

Aos meus pais Maria Arlete e Victor Anibal (em memória) que com todo amor me passaram ensinamentos que me tornaram a pessoa que sou hoje. Minha Mãe Maria Arlete que sempre esteve comigo, e que me manteve e mantém sempre com seu apoio incondicional todo o agradecimento do mundo. Ao me pai Victor Anibal que já não se encontra entre nós mas que até em seu leito de hospital mantinha o sorriso e as perguntas sobre a faculdade como se eu importasse mais que ele mesmo, muito obrigado pai aonde estiver.

Ao meu irmão Antonio Claudio por todo o apoio e paciência durante essa caminhada e estava aqui em momentos ruins ou bons obrigado garoto, espero que seja melhor que eu sempre e disso ficarei agradecido.

Aos meus amigos de infância, Victor Alexandre, Huilton José e Letícia Ozório, que estavam comigo nos momentos mais complicados que passei durante este ultimo ano de faculdade. Aos meus demais amigos pessoais e de graduação que fiz neste período de faculdade. Dentre esses ao meu colega e calouro Gabriel Barbosa do qual desenvolvemos um sistema de aquisição que depois utilizei como método deste trabalho. Um agradecimento aos meus colegas que fiz durante esses anos de faculdade nos trabalhos que fiz aos finais de semana de garçom.

Aos colegas e professores que compartilharam comigo seus conhecimentos e aprendizados. Um obrigado ao Prof. Dr. Marcus Varanis que convidei para ser parte da banca pois me passou muito aprendizado durante a graduação e também como seu orientando de iniciação cientifica, e me permitiu algumas experiencias como o congresso nacional de matemática aplicada, e também ao professor Prof. Dr. Clivado como parte da iniciação. Aos demais professores de graduação e da engenharia mecânica, do qual cito alguns que tive mais contanto durante minha graduação, como, Prof. Dr. Augusto Salomão, Prof. Dr. Rodrigo Borges, e ao Prof. Dr Rafael Gregolim.

Agradeço a instituição UFGD e seus docentes que me permitiu a oportunidade de cursar o ensino superior e me realizar. Também agradeço pelo meio universitário e aos contatos com as mais diversas pessoas que pude fazer dentro da universidade.

E claro agradeço ao meu Orientador Prof. Dr. Sanderson Manoel que me ajudou na produção deste trabalho e me introduziu em novos conceitos, obrigado professor pela orientação.

Resumo

O estudo das vibrações mecânicas sempre foi uma área muito abrangente da engenharia, visto que quase tudo em nossa constituição moderna pós revolução industrial é relativo á um movimento de máquina ou estrutura, logo tal área é discutida desde as construções matemáticas nas literaturas e seus modelos, até as constituições de novas técnicas de analises experimentais, passando por muitas vezes por estudos numéricos e computacionais através da prévia construção de um modelo do sistema. A importância da identificação de um sistema, seja suas características dinâmicas ou seja seu comportamento vibratório, assim chamado analise modal, nos dá espaço para remodelar um sistema ou até mesmo aplicar técnicas de controle sobre o mesmo, isso é muito utilizado nas industrias aeronáuticas, automotivas, em estudos estruturais, entre outros. Afinal a ideia principal é evitar a falha, seja modificando seu modelo ou controlando o mesmo. Dessarte com a evolução das novas tecnologias não só é possível a assistência de modelos e simulações numéricas precisas como é possível a utilização de técnicas experimentais, porém no âmbito acadêmico utilizar-se de tais tecnologia talvez não seja de fácil acesso devido aos custos dos materiais, sejam sensores, sistemas de aquisição ou até mesmo programas específicos para a analise. Este trabalho estende justaposto há uma técnica desenvolvida para analise modal (analise dos parâmetros dinâmicos) uma forma barata de fazer isso através da utilização de tecnologias de baixo custo, sistema de aquisição e sensores, bem como a utilização de programação open-source para o tratamento computacional. A técnica utilizada para identificação dinâmica e de escopo principal deste trabalho é o ERA-*Eignsystem Realization Algorithm*, um algorítimo matemático desenvolvido por um antigo engenheiro da Nasa Juang, J. N. (NASA Langley Research Center, Hampton, VA, United States), que foi desenvolvido através da matemática computacional para utilização na identificação de parâmetros dinâmicos de estruturas flexíveis, e depois estendido para controle de sistemas. Posto isto o desenvolvimento matemático será atribuído a este trabalho para a construção do algoritmo de identificação do modelo, que posteriormente poderá ser utilizado tanto para analise modal quanto para controle de sistemas, bem como a utilização experimental acessível.

Palavras Chaves:Vibrações,Modelagem Matemática,Identificação de sistemas,ERA

Abstract

The study of mechanical vibrations has always been a very comprehensive area of engineering, since almost everything in our modern post-industrial revolution constitution is relative there is a machine or structure movement, so such an area is discussed from mathematical constructs in literatures and their models, to the constitutions of new techniques of experimental analysis, often going through numerical and computational studies through the prior construction of a system model. The importance of identifying a system, be it its dynamic characteristics or its vibrational behavior, so called modal analysis, gives us space to remodel a system or even apply control techniques on it, this is very used in the aeronautical, automotive industries , in structural studies, among others. After all, the main idea is to avoid failure, either by modifying your model or by controlling it. With the evolution of the new technologies, it is not only possible to assist precise models and numerical simulations as it is possible to use experimental techniques, but in the academic field, using such technology may not be easily accessible due to the costs of materials, whether they are sensors, acquisition systems or even specific programs for analysis. This work extends juxtaposedly there is a technique developed for modal analysis (dynamic parameter analysis) an inexpensive way of doing this through the use of low cost technologies, acquisition system and sensors, as well as the use of open source programming for the treatment computational. The technique used for dynamic identification and main scope of this work is the ERA-Eignsystem Realization Algorithm, a mathematical algorithm developed by a former engineer from Nasa Juang, JN (NASA Langley Research Center, Hampton, VA, United States), which was developed through computational mathematics for use in identifying dynamic parameters of flexible structures, and then extended to control systems. Thus, the mathematical development will be attributed to this work for the construction of the model identification algorithm, which can later be used for both modal analysis and systems control, as well as accessible experimental use.

keywords:Vibrations, Mathematical Modeling, Systems Identification, ERA

Lista de Figuras

Lista de Tabelas

Lista de abreviaturas e siglas

Opcional

ERA	Eigensystem realization algorithm;
NASA	National Aeronautics and Space Administration;
FFT	Fast Fourier Transform;
FRF	Função de Resposta em Frequência
MEMS	Micro Eletrical Machine Sensors;
MEF	Método de Elementos Finitos;
SVD	Singular Value Decomposition.

Lista de símbolos

m	Constante de massa.
c	Constate de amortecimento.
k	Constante de rigidez.
$u(t)$	Força aplicada a um sistema.
t	Variável tempo.
x	Variável que detona estado atual do sistema,(ex:deslocamento).
$\dot{x}$	Primeira derivada do estado atual do sistema,(ex:velocidade).
$\ddot{x}$	Segunda derivada do estado atual do sistema,(ex:aceleração).
i	Integrador numérico indica qualquer número de valor atribuído.
$f(t)$	Função no domino do tempo.
$F(s)$	Função no domino da frequência.
s	Variável complexo que denota o espectro da frequência.
$\pounds$	Operador de Laplace.
y	Variável que denota valor de saída de um sinal.
u	Variável que detona valor de entrada de um sinal.
a	Constante de estado de um sistema.
b	Constante de entrada de um sistema.
$Y(S)$	Transformada no domino da frequência do sinal de saída.
$U(S)$	Transformada no domino da frequência do sinal de entrada.
h	Integrador numérico que indica numero de sinais de saída.
r	Integrador numérico que indica numero de sinais de entrada.
n	Integrador numérico que indica tamanho ou ordem de um sistema ou matriz.
$G(s)$	Função de transferência.
$X(s)$	Estado do sistema transformado no plano da frequência.
A	Matriz de estados.
B	Matriz de entrada.
C	Matriz de saída.
D	Matriz de transmissão direta.
β	Fator que indica múltiplas derivadas das entradas em um sistema.
M	Matriz de massa.
C	Matriz de amortecimento.
K	Matriz de rigidez.
I	Matriz identidade.
$\mathcal{Q}_b$	Matriz de controlabilidade.
$\mathcal{P}_a$	Matriz de observabilidade.
p	Integrador numérico que indica o tempo discreto.
Y	Parâmetros de Markov.
λ	Autovalores de uma matriz.
Λ	Matriz de autovalores.
ψ	Autovetores de uma matriz.
Ψ	Matriz de autovetores.
$H(p)$	Matriz de Hankel.

R	Matriz ortonormal da decomposição singular.
Σ	Matriz diagonal que contém os coeficientes singulares da decomposição singular.
S	Matriz ortonormal da decomposição singular que contém os autovetores associados.
σ	Valores singulares da decomposição singular.
$H^{\top}$	Matriz pseudo inversa da matriz de Hankel em $p = 0$.
R_n	Matriz ortonormal da decomposição singular reduzida.
Σ_n	Matriz diagonal que contém os coeficientes singulares da decomposição singular reduzida.
S_n	Matriz ortonormal da decomposição singular que contém os autovetores associados reduzia.
O_h	Matriz nula correspondente ao numero de saídas.
O_r	Matriz nula correspondentes ao numero de entradas.
E_h	Vetor que contenha as matrizes nulas de saída.
E_r	Vetor que contenhas as matrizes nulas de entrada.
$\hat{A}$	Matriz de estados realizada.
$\hat{C}$	Matriz de saída realizada.
$\hat{D}$	Matriz de entrada realizada.
δ	Parte real dos autovalores, taxas de amortecimento modais discreta.
ω	Parte imaginária dos autovalores,frequências naturais amortecidas discreta.
j	Notação de número imaginário, $\sqrt{-1}$.
λ_c	Autovalores no tempo continuo.
δ_c	Taxa de amortecimento modal.
ω_c	Frequências naturais amortecidas $[rad/s]$.
f	Frequência natural do sistema $[Hz]$.
ζ	Coeficiente de amortecimento.
I_0	Momento de inércia da secção transversal da viga.
L	Comprimento da viga.
E	Módulo de elasticidade ou Módulo de Young.
Ar	Área da secção transversal viga.
η	condições de contorno para viga engastada.

Sumário

Capítulo 1

Introdução

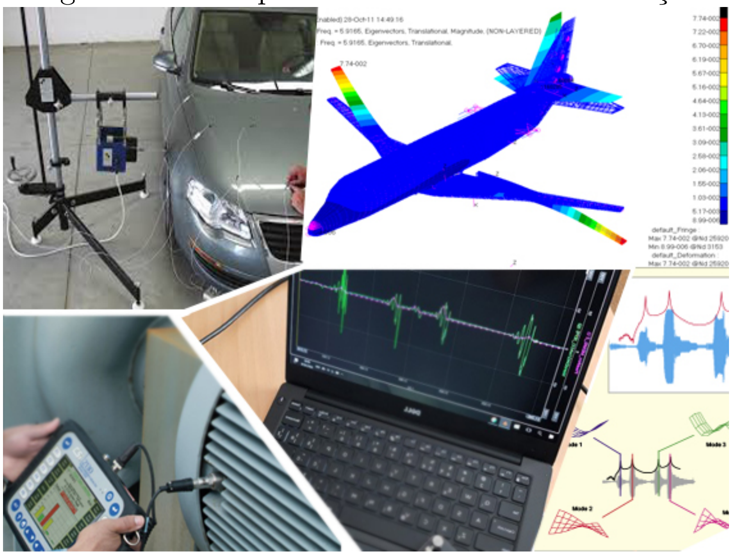
Os campos estruturais e de controle são áreas modernas porém intimas da engenharia, com bases sólidas e antigas em áreas muito mais abrangentes como vibrações mecânicas que estão presentes na história do homem desde sua composição cientifica, como som até as primeiras investigações mecânicas como as oscilações em sistemas físicos com Galileu e suas teorias sobre cordas, Joseph Fourier e suas transformadas, até a teoria completa de Lord Rayleigh sobre som e vibrações, que talvez seja um dos primeiros trabalhos publicados da área. Os primeiros estudiosos da área de vibrações se concentraram em entender os fenômenos naturais e em desenvolver teorias para descrever tais fenômenos, e seus tratamentos matemáticos que foram utilizados junto a isto. Mais recentemente as investigações tem sido motivadas pelas aplicações nas áreas de engenharia como projeto de máquinas, fundações, estruturas, motores, turbinas e sistemas de controle. Em todas as situações uma estrutura sujeita a vibrações está sujeito a falha, ou a fadiga induzida pela variação cíclica da tensão induzida.

Figura 1.1: Ponte de Tacoma Narrows.

Fonte: obtida da internet.

Sempre que a frequência natural de vibração de uma máquina ou estrutura coincide com a frequência da força externa atuante, ocorre um fenômeno conhecido como ressonância, que ocasionam em grandes deformações e falhas mecânicas. A literatura é rica de exemplos de falhas em sistemas causados por vibrações excessivas em virtude de ressonância. A Ponte de Tacoma Narrows 1.1, um dos mais clássicos exemplos de colapso por ressonância (HE; LIU, 2019) (RAO, 2008) (LALANNE; BERTHIER; HAGOPIAN, 1983) (BALACHANDRAN; MAGREB, 2010), apresenta a importância da identificação dos parâmetros dinâmicos de uma estrutura, a Ressonância é um dos fenômenos do estudo mais importantes da engenharia moderna quando nos referimos a sistemas oscilatórios. Tal estudo deve ser realizado a fim de entender o comportamento dinâmico de uma estrutura que estará sujeita a qualquer tipo de excitação periódica, com objetivo de evitar que sejam atingidas as frequências naturais do sistema de estudo e sua possível falha, e com isso deve levar em conta as diferentes técnicas de estudos sobre vibrações bem como análise dos parâmetros dinâmicos do sistema de projeto, e se o caso das estruturas que devem apresentar certa oscilação, estruturas flexíveis, o controle das mesmas.

Figura 1.2: Compilado de estudos sobre vibrações

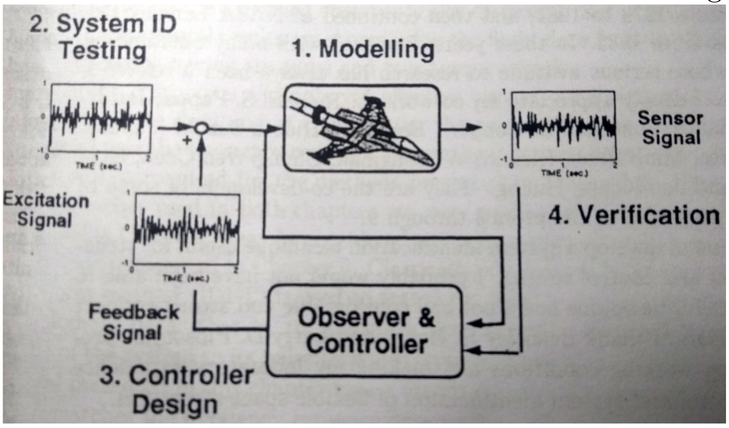


Fonte: obtida da internet e editada pelo autor.

O estudo das vibrações mecânicas, de forma simples, geralmente consiste em quantificar tal movimento segundo sua frequência e amplitude. Na prática, entretanto, essa análise raramente se limita a identificar um único par amplitude-frequência, além de que a interpretação dos resultados pode revelar muitas características do objeto de estudo, como: reatividade química de uma molécula, o estado de deterioração de um elemento mecânico, ou a resistência de prédios a terremotos. Portanto, é apenas natural que este seja um dos tópicos mais importantes de um curso de engenharia.

As identificações dos parâmetros dinâmicos, que é geralmente referida como análise modal no campo de estruturas, significa um dos processos de medição de sinais por uma estrutura real e identificação de parâmetros modais da mesma. Em suma a análise modal é um processo em que uma estrutura é descrita em termos de suas características modais, que são a frequência, o amortecimento e os modos de vibrar, ou seja suas propriedades dinâmicas (AVITABILE, 2001). Usando os parâmetros modais identificados, processos adicionais de identificação podem ser realizados para ajustar os parâmetros do modelo estrutural. Já a identificação do sistema no campo de controle significa o processo de medir os sinais produzidos por um sistema e construir um modelo para representar o sistema para o projeto de controle do mesmo. Técnicas preventivas para identificar um modelo a partir de dados medidos normalmente contêm duas etapas. A primeira, um conjunto de modelos candidatos é escolhida e, em seguida, é determinado o membro particular da família de dados que descreve satisfatoriamente os dados observados, com base em algum critério de erro. Se o modelo identificado é um modelo linear em representação de ritmo de estado, a solução matemática do modelo fornece autovalores e autovetores que por sua vez determinam parâmetros dinâmicos para estruturas.

Figura 1.3: Procedimento de controle de estruturas flexíveis segundo Juang



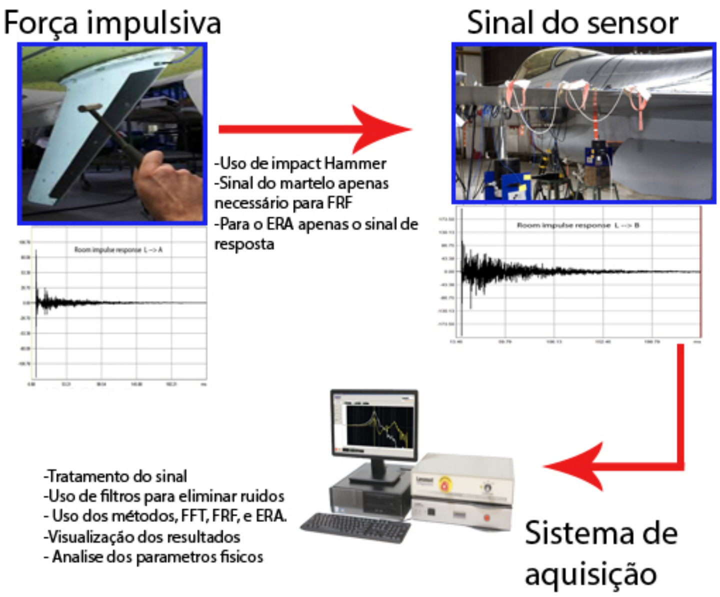
Fonte: (JUANG, 1994).

A correlação entre os campos de teste modal e identificação do sistema para controles é evidente. As teorias de controle são de uma disciplina bem desenvolvida com fortes fundações experimentais. Por outro lado, a área de identificação do sistema para controles é bem desenvolvida com sólidos fundamentos teóricos e metodológicos como em literaturas (OGATA, 2010).Enquanto o desenvolvimento de cada área individual continua, há uma necessidade de fornecer uma unificação abrangente e coerente das áreas. O controle ativo de estruturas flexíveis exige o escopo das duas áreas, tanto a de vibrações mecânicas e por consequente analise modal, quanto a de controle. Entre esses desafios estão o controle de antenas e plataformas espaciais. A área de identificação do sistema engloba uma infinidade de abordagens, perspectivas e técnicas cujas inter-relações e relações Os méritos são difíceis para resolver. Como resultado, é difícil para um não-especialista extrair conceitos fundamentais. Pode ser necessário um esforço para ganhar intuição suficiente sobre uma técnica particular para poder usá-la efetivamente na prática.

1.1 Objetivo

Dessarte, utilizando-se de teorias de controle como formulação básica entremos nos conceitos de espaço de estados, depois entremos nas teorizas de realização de sistema e a construção de um sistema no espaço de estados através do sinal com os devidos tratamentos matemáticos apresentados ao longo do trabalho. Por fim utilizaremos para identificar os parâmetros dinâmicos de um sistema, a construção do algorítimo ERA. Na década de 80, a NASA, EUA, começou a partir de pesquisas de seus engenheiros como Juang e Richard S. Pappa a usar um algorítimo de identificação de sistemas chamado ERA (algorítimo de realização de auto sistemas), tal algorítimo é uma ferramenta para identificação de um sistema através apenas do sinal impulsivo aplicado ao mesmo. Utilizado pelo Juang e pelo Richard S. Pappa para identificação do modelo da sonda espacial Galileo como de exemplo (PAPPA; JUANG, 1988). Algoritmo esse que será construindo em linguagens de programações livres como Python e Scilab. Dentre os resultados propostos,

Figura 1.4: Esquema de uma identificação de modelo excitada impulsivamente
Fonte: obtida da internet e editada pelo autor.



Fonte: Imagens da internet editas pelo autor.

primeiro utilizarei de um modelo totalmente simulado e utilizarei de sua resposta para afirmar os primeiros resultados, logo apos utilizarei de um modelo de viga engastada real que será comparada há um modelo numérico também simulado em Python.

Dentre do escopo proposto, o objetivo principal deste trabalho é desenvolver uma técnica de analise e identificação de modelo dinâmico de um estrutura, através da construção do algorítimo chamado Eigensystem Realization Algoritihm, ou ERA, o tal algorítimo desenvolvido em cima de teorias de controle moderno através do espaço de estados e de teoria de identificação de sistema através das teorias de miníma realização. Com isso será desenvolvido uma ferramenta que identifica modelos reais e que podem posteriormente serem utilizados para controle ou analise modais. Justaposto a isto será desenvolvido também a forma de obtenção dos sinais que deverão ser utilizados através de tecnologias acessíveis ao publico acadêmico, bem como explicitado mais a frente a tecnologia Open-Source, com baixos custos será desenvolvido todo o sistema de aquisição e tratamento através do algorítimo ERA.

1.2 Discussão sobre tecnologia Open-source

Na corrente ida ao mundo cientifico principalmente se tratando da engenharia moderna, nos deparamos com a questão de custos, ou por muitas vezes nos vemos na insuficiência da questão educacional em nosso pais que talvez não supra toda a necessidade em nossas universidades. Também há o fato que quando começamos a busca de softwares de engenharia nos vemos preso a questão dos termos de uso e da cobrança de licença para utilização de muitos softwares de engenharia, isso também se estende para os componentes como sensores que por muitas vezes são de preços muito elevados pois são de usos industriais. Nesta linha de raciocínio surgem para solução de problemas a tecnologia open-source, ou software de código livre, dos quais não há cobrança de licença pelos fabricantes.

O software open-source (código aberto) está presente em muitas coisas da sua vida, mesmo que você não perceba. Os fãs das placas Raspberry Pi, por exemplo, se aproveitam do software open-source. Servidores open-source Linux e BSD rodam nossos sites e redes corporativas, assim como unidades de entretenimento de aviões e quiosques de computadores. E não para por aí, o software open-source está no núcleo dos aparelhos Android. Até mesmo navegadores populares são open-source, incluindo o Firefox, o Opera e o projeto Chromium, que serve como base para o Chrome. Softwares de código aberto como Linux são tão importantes para os desenvolvedores que a Microsoft até o integrou no Windows 10 com o Ubuntu Bash no Windows.

Esse estilo open source significa expressar a vontade de compartilhar informações e conhecimentos, colaborar de modo transparente (para que os outros possam entender e se unir à iniciativa), reconhecer que o erro é uma maneira de melhorar e esperar e encorajar outras pessoas a seguir pelo mesmo caminho. A empresa Red Hat, líder mundial de soluções de softwares deste tipo e que contribui com a difusão da ideia, lançou um livro, também colaborativo, chamado The Open Source Way ("O Estilo Open Source", em tradução livre)

No presente trabalho utilizarei de toda tecnologia open-source vigente para a compilação de resultados bem como a utilização da linguagem de programação Python para simulações numéricas e para a obtenção de resultados. Também a utilização do raspberry pi como sistema de aquisição e acelerômetros micro-machinados (MEMS) que são muito mais baratos que os acelerômetros usais na industria como os piezoelétricos.

Capítulo 2

Conceitos de sistemas de controle

Neste capitulo será salientado a importância da modelagem matemática para sistemas mecânicos, como é feito a simplificação desses sistemas e então a entrada nas teorias de controle onde será discutido a transformação de equações diferenciais que descrevem sistemas em função transferência que são usadas no controle clássico, depois será apresentado as limitações para podermos entrar na teoria de controle moderno e começar a entrada nas equações de estados para até então adentrar nos conceitos de estado, controlabilidade e observabilidade de um sistema.

A modelagem pode ser obtida com utilização das equações de Newton como demonstrado na figura 2.1 da próxima seção, ou também para sistemas com coordenadas generalizas ou vários graus de liberdade podem ser utilizas as equações de Lagrange nos métodos de energia como feito em várias literaturas sobre vibrações mecânicas. Não será explicitado parte a parte das soluções ou os métodos, mas podem ser verificados no capitulo 6 do livro (RAO, 2008) ou no livro (BALACHANDRAN; MAGREB, 2010) que seguem como literaturas bases para vibrações mecânicas e entendimento das equações dinâmicas de sistemas lineares.

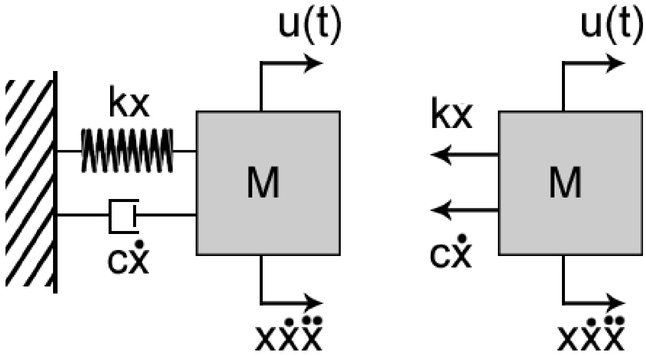
Assim a modelagem matemática pode ser utilizada pra solução analítica e numérica computacional de sistemas e logo podemos ter a resposta a excitação do sistema, sendo ela periódica ou impulsiva, e essas respostas podem estar no tempo ou no plano das frequências. Para equações de um grau de liberdade até dois graus, a teoria de controle clássica que utiliza a função de transferência pode ser utilizada e nos dá uma noção do comportamento do sistema através deste modelo. Porém quando passamos para um sistema mais complexo com vários graus a equação de espaço de estados é tratada para dar seguimento no desenvolvimento do era pra um corpo continuo.

2.1 Modelagem matemática

Uma modelagem matemática tem como finalidade descrever os principais aspectos de um sistema a ser estudado, e de tal forma obter as equações matemáticas governantes do comportamento do sistema. Um modelo matemático deve incluir detalhes suficientes para descrever o sistema em termo de equações sem torna-ló muito complexo, assim com a simples observação e entendimento dos conceitos físicos se faz necessário a criação de uma análise das taxas de variação de um sistema, que matematicamente falando são as derivadas que regem a modelagem de um fenômeno pelas equações diferenciais. Um modelo matemático é composto por parâmetros(constantes) que são características do sistema são as variáveis que afetam o sistema, mas não são foco do estudo,chamadas de varáveis independentes, e as variáveis de foco do estudo que são as variáveis dependentes. Modelos simples são mais fáceis de lidar porém dependendo do foco de estudo faz-se necessário modelos mais sofisticados. A ideia não está em criar modelos complexos que incorporem todas características do sistema, mas modelar suficientemente simples e que abrangem as principais características do sistemas.

Partindo do pressuposto discutido sobre a modelagem matemática, podemos partir de princípios físicos como os descritos por Newton, apenas com a segunda lei e objetivando sistemas mecânicos como foco de estudo, partimos da simples modelagem massa,mola e amortecedor, que descreve o movimento harmônico de um bloco.

Figura 2.1: Massa-Mola-Amortecedor



Fonte: Criada pelo autor.

Esse modelo descrito na figura 2.1, abrange um modelo simples de uma força $u(t)$ aplicada á um bloco de com elemento de inercia M, do qual resiste ao movimento, e também é resistido por duas forças, sendo a força de amortecimento $F(\dot{x}) = c\dot{x}$ que pode ser aproximada com uma função linear da velocidade, e a força de mola $F(x) = kx$, aproximado também de uma força linear restauradora da deformação da mola(deslocamento).

Para construirmos a equação dinâmica

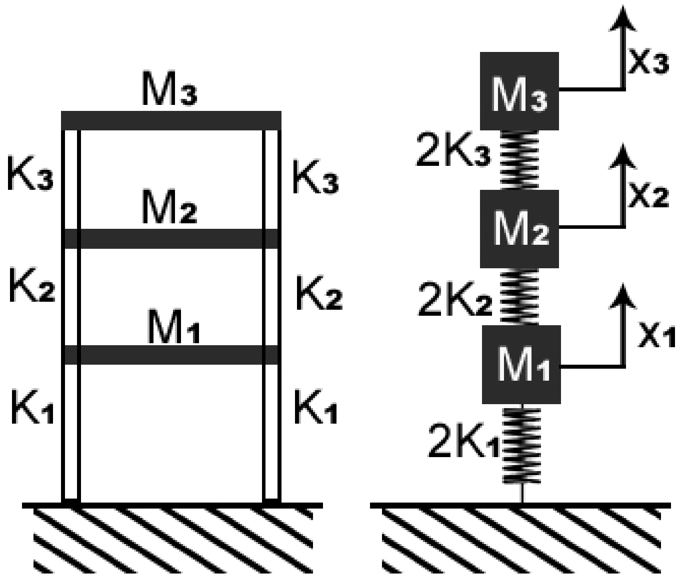
$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = u(t) \tag{2.1}$$

assim a equação diferencial (2.1) descrever sucintamente o comportamento do bloco de massa sendo excitado por uma força. A modelagem simples do sistema massa-mola-amortecedor nos trás uma sistema de um grau de liberdade, consideramos a coordenada generalizada x e suas respectivas derivadas temporais, velocidade $\dot{x}$ e aceleração $\ddot{x}$.

Esse modelo básico é utilizado em qualquer literatura sobre estudo de vibrações. Para este modelo tratado em um grau de liberdade existem algumas soluções, que podemos chegar por meio da analise de equações diferenciais ordinárias. Sua solução nos aspecto que nos de uma resposta temporal não será tratado neste momento mas podem ser verificadas nas literaturas (RAO, 2008)(BALACHANDRAN; MAGREB, 2010). Assim sendo, é possível reduzir sistemas mais complexos há alguns massa mola.

Como mostrado na figura 3.1 reduzindo um modelo de um prédio de três andares, onde os andares podem se deslocar uns em relação aos outros lateralmente, e onde os andares representam o elemento de inércia e as vigas representam os elementos de rigidez, não considerando o amortecimento, reduzimos cada viga de rigidez k_i há um conjunto $2k_i$ devido a associação de molas em paralelo, sendo $i = 1, 2, 3$, e representamos o sistema em um conjunto massa mola de três graus de liberdade. Logo haverá 3 equações dinâmicas da forma:

Figura 2.2: Modelo de um prédio de três andares reduzido.



Fonte: Criada pelo autor.

$$m_1\ddot{x}_1 + x_1(k_1 + k_2) + x_2(-k_2) = 0 \tag{2.2}$$

$$m_2\ddot{x}_2 + x_1(-k_2) + x_2(k_2 + k_3) + x_3(k_3) = 0 \tag{2.3}$$

$$m_3\ddot{x}_3 + x_2(-k_3) + x_3(k_3) = 0 \tag{2.4}$$

Com essas três equações dinâmicas podemos utilizar métodos matemáticos analíticos ou numéricos para obter a dinâmica, bem como o comportamento do sistema. Então mesmo com a equação diferencial definida, existem algumas maneiras de resolver o sistema, seja para obter a resposta temporal, bem como analise modal das frequências naturais. Esse ultimo modelo apresentando é conhecido em estudo de dinâmica de estruturas civis como "Shear building", são constantemente usadas em estudos de dinâmica linear (VARANIS; SILVA; MERELES,) (CHANDRAVANSHI; MUKHOPADHYAY, 2013) (PAPPALARDO; GUIDA, 2018).

2.2 Teoria de controle

A teoria de controle pode ser dividida em duas partes, a teoria de controle moderno e a teoria de controle clássico. A teoria de controle clássico, que abrange os métodos de resposta de frequência e as equações de Laplace, utilizam-se modelos matemáticos de sistemas junto a o método operacional da transformada de Laplace para solução de equações diferenciais lineares de sistemas como descrito em algumas literaturas sobre controle (OGATA, 2010) . Em teoria de controle as funções ditas, funções de transferência são comumente usadas para caracterizar as relações de entrada-saída de componentes ou sistemas que podem ser descritos por equações diferenciais lineares invariantes no tempo (OGATA, 2010). Em resumo a função transferência é a relação entre a transformada de Laplace do sinal de saída e a função resposta e a transformada de Laplace do sinal de entrada (função excitação).

2.2.1 Transformada de Laplace

Antes de entrar na teoria de controle moderno é necessário o entendimento sobre a transformada de Laplace. Em resumo, a transformada de Laplace é um método operacional para solução de equações diferenciais lineares, como na secção anterior foi visto, quando modelamos um sistema obtemos suas equações diferenciais, e com isso podemos usar alguns métodos para solução, entre eles a transformada de Laplace. Com a transformada de Laplace podemos transformar uma equação diferencial linear em uma equação algébrica de variável complexa s.

Seja $f(t)$ uma função do tempo em que $f(t) = 0$ para $t < 0$ a transformada de Laplace da função é dada por:

$$\pounds[f(t)] = F(s) = \int_0^{\infty} [f(t)]e^{-st}dt \tag{2.5}$$

Logo na equação 2.5 o simbolo operacional $\pounds$ indica que a função vai ser transformada por meio da integral de Laplace $\int_0^{\infty} e^{-st}dt$, visto que s é uma variável complexa e $F(s)$ é a transformada de Laplace da função temporal $f(t)$. Então se lembrarmos que um equação diferencial linear é sua função mais as derivadas delas podemos aplicar o teorema da distinção real, que prevê as transformadas da função e de suas derivadas.

- Para a primeira derivada da função:

$$\pounds\left[\frac{d}{dt}f(t)\right] = sF(s) - f(0) \tag{2.6}$$

- Para a segunda derivada da função

$$\pounds\left[\frac{d^2}{dt^2}f(t)\right] = s^2F(s) - sf(0) - \dot{f}(0) \tag{2.7}$$

- Logo para derivada de ordem n de $f(t)$, obtém-se, de modo semelhante:

$$\pounds\left[\frac{d^n}{dt^n}f(t)\right] = s^nF(s) - s^{n-1}f(0) - s^{n-2}\dot{f}(0) - ...s\overset{n-2}{f}(0) - \overset{n-1}{f}(0) \tag{2.8}$$

onde os valores que vão de $f(0), \dot{f}(0)...\overset{n-1}{f}(0)$ representam os valores das derivadas de $f(t)$. Mais detalhes sobre a transformada de Laplace podem ser encontradas em (OGATA, 2010)

2.2.2 Função de transferência

A função transferência de um sistema representado por uma equação diferencial linear e invariante no tempo (considerando que modelos reais se aproximam de sistemas lineares), ou seja é definida como a razão entre a a transformada de Laplace da saída (função resposta), transformada de Laplace das entradas (função excitação) e com condições iniciais nulas. Considerando um sistema linear invariante no tempo, definindo h com integradores que indicam a i-ésima saída e r o indicador que indica a i-ésima entrada, considerando as condições iniciais nulas, definindo pela equação diferencial:

$$a_0\overset{h}{y} + a_1\overset{h-1}{y} + ... + a_{h-1}\dot{h} + a_h y = b_0\overset{r}{u} + b_1\overset{r-1}{u} + ... + b_{r-1}\dot{x} + b_r y$$

(2.9)

sendo y a saída do sinal do sistema e u a entrada, podemos aplicar a transformada de Laplace da forma:

$$£[a_0\overset{h}{y} + a_1\overset{h-1}{y} + ... + a_{h-1}\dot{y} + a_h y] = £[b_0\overset{r}{u} + b_1\overset{r-1}{u} + ... + b_{r-1}\dot{x} + b_r y]$$

(2.10)

Então transformando as funções de acordo com definição do teorema da distinção real de acordo com as equações (2.6),(2.7),(2.8), e considerando as condições inicias nulas, obtemos as transformadas:

$$a_0 s^h Y(s) + a_1 s^{h-1} Y(s)... + a_{h-1} s Y(s) + a_h Y(s) = b_0 s^r U(s) + b_1 s^{r-1} U(s)... + b_{r-1} s U(s) + b_r U(s) \quad (2.11)$$

Isolando as funções transformadas no domínio da frequência:

$$(a_0 s^h + a_1 s^{h-1}... + a_{h-1}s + a_h)Y(s) = (b_0 s^r + b_1 s^{r-1}... + b_{r-1}s + b_r)U(s) \quad (2.12)$$

Logo se y é o sinal de saída do sistema e u é o sinal de entrada, transformando para o domínio da frequência com a função transferência do sistema aplicando Laplace e dividindo um sobre o outro:
Função de Transferência:

$$G(s) = \frac{£[saída]}{£[Entrada]} = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_0 s^r + b_1 s^{r-1}... + b_{r-1}s + b_r}{a_0 s^h + a_1 s^{h-1}... + a_{h-1}s + a_h} \quad (2.13)$$

Com essa definição da função transferência na entrada e saída dos sinais de um sistema, podemos representar a dinâmica do sistema por equações algébricas em s, como é dito na definição da transformada de Laplace.

2.2.3 Exemplos

exemplo 1

Para melhor entendimento de como funciona a função transferência em um sistema mecânico, podemos exemplificar com os modelos matemáticos de sistemas mecânicos. Usando primeiramente o modelo da figura 2.1, da qual a equação tem a forma

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = u(t) \quad (2.14)$$

Primeiro dividiremos todos os termos pela massa m, e então aplicaremos a transformada de lapace nos dois lados da equação:

$$£\left[\ddot{x} + \frac{c}{m}\dot{x} + x\frac{k}{m}x\right] = £\left[\frac{1}{m}u(t)\right] \quad (2.15)$$

De acordo com as equações (2.6),(2.7),(2.8), podemos obter:

$$s^2X(s) - sx(0) - \dot{x}(0) + \frac{c}{m}[sX(s) - x(0)] + \frac{k}{m}X(s) = \frac{1}{m}U(s) \tag{2.16}$$

Como as condições iniciais são nulas, tanto para o deslocamento inicial $x(0)$ e velocidade inicial $\dot{x}(0)$, ficaremos com tal equação no plano complexo:

$$s^2X(s) + \frac{c}{m}sXs + \frac{k}{m}X(s) = \frac{1}{m}U(s) \tag{2.17}$$

Manipulando as funções no plano da frequência:

$$(s^2 + \frac{c}{m}s + \frac{k}{m})X(s) = \frac{1}{m}U(s) \tag{2.18}$$

Dividindo a transformada da entrada pela saída para obtermos a função transferência:

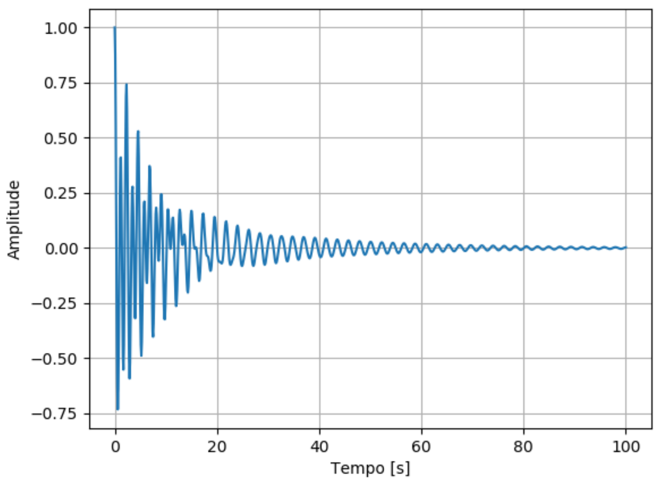
$$\frac{X(s)}{U(s)}m = \frac{1}{s^2 + s\frac{c}{m} + \frac{k}{m}} \tag{2.19}$$

Passando m para o outro lado obtemos a função transferência do sistema:

$$G(s) = \frac{X(s)}{U(s)} = \frac{1}{ms^2 + cs + k} \tag{2.20}$$

Com a a função transferência em mãos podemos avaliar a entrada e a saída, ou resolve-la com os pares transformada e inversa da transformada pra obter a resposta temporal do sistema. Usando o Python podemos fazer uma simples simulação da resposta do sistema há uma entrada impulsiva:

Figura 2.3: Resposta ao impulso unitário.

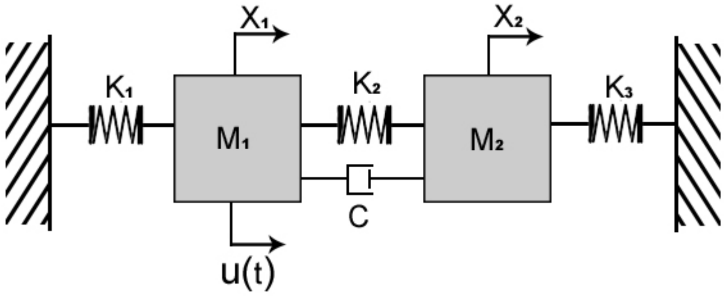


Fonte: Simulada pelo autor em linguagem Python.

exemplo 2

Para melhor entendimento da complexidade de tratar uma função de transferência para mais de um grau de liberdade, considere o seguinte exemplo:

Figura 2.4: Modelo de um sistema de dois graus de liberdade acoplado.



Fonte: Criada pelo autor.

Para este exemplo a equação dinâmica fica da forma:

$$m_1\ddot{x}_1 + k_1x_1 + k_2(x_1 - x_2) - c(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) = u(t) \tag{2.21}$$

$$m_1\ddot{x}_2 + k_3x_2 + k_2(x_2 - x_1) - c(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) = 0 \tag{2.22}$$

Se manipularmos um pouco as equações e deixarmos as coordenadas generalizadas e suas derivadas cada qual em lados diferentes da equação da forma:

$$m_1\ddot{x} + c\dot{x}_1 + (k_1 + k_2)x_1 = c\dot{x}_2 + k_2x_2 + u(t) \tag{2.23}$$

$$m_2\ddot{x} + c\dot{x}_2 + (k_2 + k_3)x_2 = c\dot{x}_1 + k_2x_1 \tag{2.24}$$

E se então usarmos a transformada de Laplace nas componentes da equação diferencial, consideremos as condições iniciais nulas para ambas as coordenadas, seja $x_1(0) = 0$ e $x_2(0) = 0$, bem como suas derivadas, $\dot{x}_1(0) = 0$ e $\dot{x}_1(0) = 0$, Ambas as equações derivadas ficam da forma:

$$\left[m_1s^2 + cs + (k_1 + k_2)\right] X_1(s) = [cs + k_2]\, X_2(s) + U(s) \tag{2.25}$$

$$\left[m_2s^2 + cs + (k_2 + k_3)\right] X_2(s) = [cs + k_2]\, X_1(s) \tag{2.26}$$

Agora vamos deixar em evidencia $X_2(s)$ na equação 2.26:

$$X_2(s) = \frac{[cs + k_2]X_1(s)}{m_2s^2 + cs + (k_2 + k_3)} \tag{2.27}$$

Se usarmos a equação (2.27) na equação (2.25), obtemos a seguinte equação:

$$\left[m_1s^2 + cs + (k_1 + k_2)\right] X_1(s) = \frac{(cs + k_2)(cs + k_2)X_1(s)}{m_2s^2 + cs + (k_2 + k_3)} + U(s) \tag{2.28}$$

Vamos multiplicar todos os membros dos dois lados da equação por $m_2s^2+cs+(k_2+k_3)$ dessa forma a equação fica:

$$\left[(m_1s^2+cs+k_1+k_2)(m_2s^2+cs+k_2+k_3)\right]X_1(s)=(cs+k_2)^2X_1(s)+(m_2s^2+cs+k_2+k_3)U(s) \tag{2.29}$$

E então passar o termo $(cs+k_2)^2X_1(s)$ para o lado esquerdo e deixar $X_1(s)$ em evidencia:

$$\left[(m_1s^2+cs+k_1+k_2)(m_2s^2+cs+k_2+k_3)-(cs+k_2)^2\right]X_1(s)=(m_2s^2+cs+k_2+k_3)U(s) \tag{2.30}$$

Agora podemos dividir a entrada pela saída e obter a função transferência em relação a coordenada $X_1(s)$ que tomará a forma:

$$\frac{X_1(s)}{U(s)}=\frac{m_2s^2+cs+k_2+k_3}{(m_1s^2+cs+k_1+k_2)(m_2s^2+cs+k_2+k_3)-(cs+k_2)^2} \tag{2.31}$$

Da mesma forma que resolvemos para $X_1(s)$, devemos resolver para $X_2(s)$ para achar a função transferência em relação a segunda coordenada generalizada:

$$\frac{X_2(s)}{U(s)}=\frac{cs+k_2}{(m_1s^2+cs+k_1+k_2)(m_2s^2+cs+k_2+k_3)-(cs+k_2)^2} \tag{2.32}$$

Assim para dois graus de liberdade necessitamos obter duas funções transferências, com isso podemos ver também complexidade que aumenta.

Mesmo que por definição a equação (2.13) e equação (2.8) a função transferência garanta a transformada de uma equação diferencial de grau n, o que não se faz necessário pois sistemas mecânicos necessitam de até dois graus ($\dot{x}$ e $\ddot{x}$), ela se torna difícil de manipular quando envolvemos mais de um grau de liberdade, também é necessário criar uma equação de transferência por grau de liberdade, o que não nos permite um tratamento abrangente quando queremos analisar sistemas mecânicos de vários graus de liberdade, bem como sistemas contínuos.

Pondo em vista tais definições e exemplificando elas com variações de sistemas mecânicos modelados, podemos observar que algumas noções de teoria de controle clássico são abrangentes para tratamento de sistemas, principalmente quando se trata do plano da frequência, porém apenas se da a sistemas de única entrada e saída, com isso para dar continuidade ao escopo deste trabalho é necessário entrar na teoria de controle moderno que tem um tratamento no plano do tempo e pode-se usar analises matriciais de múltiplas entradas e múltiplas saídas.

2.3 Espaço de Estados

As equações de espaço de estados são parte da teoria de controle moderno, da forma que são necessária para sistemas complexas com múltiplas entradas e saídas e trabalha-se com o conceito de estado. Então faz se necessário entender os estados de um sistema, para isso é avaliado as variáveis de estado, que são o menor conjunto de variáveis capaz de determinar o estado do sistema. Entramos assim no espaço n-dimensional dos possíveis estados de um sistema. Dessa forma pensando matematicamente um sistema teria n-variáveis de n-equações diferenciais, com essas variáveis dependentes da função podendo estar relacionadas ou não, variando uma em função da outra. De forma mecanicista, pode-se descrever melhor o espaço de estamos como um sistema mecânico, apesar da teoria de controle moderno poder abranger outros sistemas, um sistema mecânico pode ter n-graus de liberdade, ou seja que podem realizar movimentos em várias coordenadas, sejam de movimentos lineares ou rotativos.

Considere o sistema com múltiplas entradas e múltiplas saídas:

$$u_1(t), u_2(t), ..., u_r(t)$$

E então haja h sinais de saída:

$$y_1(t), y_2(t), ..., y_h(t)$$

Definindo as n variáveis de saída dos integradores como variáveis de estados:

$$x_1(t), x_2(t), ..., x_n(t)$$

O sistema pode então ser descrito por:

$$\begin{gathered}\dot{x}_1(t) = f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n; u_1, u_2, \ldots, u_r; t)\\ \dot{x}_2(t) = f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n; u_1, u_2, \ldots, u_r; t)\\ \vdots\\ \dot{x}_n(t) = f_n(x_1, x_2, \ldots, x_n; u_1, u_2, \ldots, u_r; t)\end{gathered}$$

(2.33)

E os valores de sinais de saída são dados:

$$\begin{gathered}y_1(t) = g_1(x_1, x_2, \ldots, x_n; u_1, u_2, \ldots, u_r; t)\\ y_2(t) = g_2(x_1, x_2, \ldots, x_n; u_1, u_2, \ldots, u_r; t)\\ \vdots\\ y_h(t) = g_h(x_1, x_2, \ldots, x_n; u_1, u_2, \ldots, u_r; t)\end{gathered}$$

(2.34)

logo definindo os vetores como:

$$x(t) = \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \vdots \\ \dot{x}_n(t) \end{bmatrix}, f(x,u,t) = \begin{bmatrix} f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n; u_1, u_2, \ldots, u_r; t) \\ f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n; u_1, u_2, \ldots, u_r; t) \\ \vdots \\ f_n(x_1, x_2, \ldots, x_n; u_1, u_2, \ldots, u_r; t) \end{bmatrix} \tag{2.35}$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} \dot{y}_1(t) \\ \dot{y}_2(t) \\ \vdots \\ \dot{y}_h(t) \end{bmatrix}, g(x,u,t) = \begin{bmatrix} g_1(x_1, x_2, \ldots, x_n; u_1, u_2, \ldots, u_r; t) \\ g_2(x_1, x_2, \ldots, x_n; u_1, u_2, \ldots, u_r; t) \\ \vdots \\ g_h(x_1, x_2, \ldots, x_n; u_1, u_2, \ldots, u_r; t) \end{bmatrix},$$

$$u(t)=\begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ \vdots \\ u_r(t) \end{bmatrix} \quad (2.36)$$

logo as equações 2.35 e 2.36 se tornam as seguintes funções:

$$\dot{x}(t) = f(x, u, t) \quad (2.37)$$

$$y(t) = g(x, u, t) \quad (2.38)$$

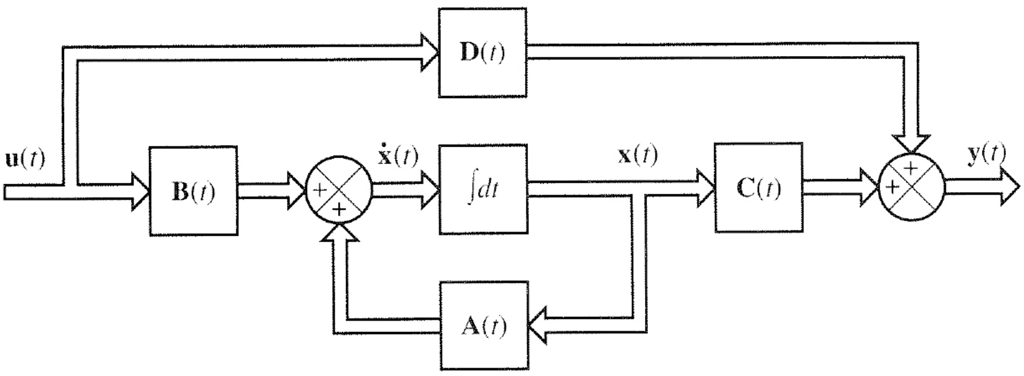
Sendo a equação 2.37 a equação de estados e a equação 2.38 a equação de saída. Linearizando em torno do estado de operação, resulta na seguinte equação linear para o estado e saída:

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) \quad (2.39)$$

$$y(t) = C(t)x(t) + D(t)u(t) \quad (2.40)$$

Sendo $A(t)$ a matriz de estado, $B(t)$ a matriz de entrada, $C(t)$ é a matriz de saída e $D(t)$ é a matriz de transmissão direta. Para entendermos melhor podemos demonstrar com um diagrama de blocos:

Figura 2.5: Diagrama de blocos de um sistema representando no espaço de estados.



Fonte:(OGATA, 2010).

Como a matriz de espaço de estados foi desenvolvido como método computacional da matemática aplicada, as definições de seus parâmetros levamo muito em conta definições de saída e entrada de sinal no sistema. A matriz de entrada define aonde é a aplicada a entrada do sistema, se um sistema mecânico, ela indica em qual grau de liberdade está sendo aplicado a força e sua magnitude. A matriz de estado é a matriz que define as propriedades mecânicas do sistema, dela, podemos tirar as informações pertinentes do sistema, como inercia, rigidez e amortecimento, a matriz de saída, indica de qual grau de liberdade eu quero avaliar a resposta, visto que é uma resposta temporal, obtemos qual o comportamento daquele elemento em questão. Usarei mais adiante demonstrações simples e computacionais para salientar isto.

exemplo

Conhecendo agora a equação de espaço de estados e as equações de controle, demonstraremos com o a figura 2.1 e sua equação dinâmica, como montar a matiz de estado para um sistema de um grau de liberdade, da forma que:
Se a equação dinâmica do sistema é:

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = u(t)$$

(2.41)

Primeiro vamos manipular um pouco e deixar $\ddot{x}$ do lado esquerdo:

$$\ddot{x} = \frac{1}{m}(-kx - c\dot{x}) + \frac{1}{m}u$$

Esta equação por definição é um sistema de segunda ordem, ou seja há dois integradores no sistema, com isso linearizamos os sistema da forma que definiremos duas variáveis de estado, seja $x_1(t)$ e $x_2(t)$, então definimos:

$$x_1(t) = x(t)$$
$$x_2(t) = \dot{x}(t)$$

logo avaliando que a equação derivada de x_1, ou seja $\dot{x_1}$ é igual ao x_2, pois é a derivada de x que é igual $\dot{x}$, então a derivada segunda de x, ou seja $\ddot{x}$, é a primeira derivada de x_2, ou seja

$$\dot{x}_2 = \ddot{x}$$

Dessa forma:

$$\dot{x}_1 = x_2$$
$$\dot{x}_2 = \frac{1}{m}(-kx_1 - cx_2) + \frac{1}{m}u$$

Ou seja, foi encontrado dois componentes da primeira equação do espaço de estados, com isso ainda podemos obter duas respostas em $y = x$, uma que definimos como x_1 e a outra que é x_2. Para melhor visualização podemos escrever na forma matricial:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{-k}{m} & \frac{-c}{m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{bmatrix} \text{u}$$

(2.42)

E a resposta fica da forma:

$$\text{y} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

(2.43)

Lembrando da definição da equação de espaço de estados das equações 2.39 e 2.40 podemos comparar da forma:

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t)$$
$$y(t) = C(t)x(t) + D(t)u(t)$$

De forma matricial foi descrito os três componentes principais: Matriz de estados:

$$\mathbf{A}\text{=-}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{-k}{m} & \frac{-c}{m} \end{bmatrix}$$

(2.44)

Matriz de entrada:

$$\mathbf{B}\text{=} \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{bmatrix}$$

(2.45)

Matriz de saída:

$$\mathbf{C}\text{=} \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$$

(2.46)

Este exemplo trivial, serviu para entender como é feito a analise de um sistema mecânico saindo de sua equação dinâmica para o tratamento matricial do mesmo.

2.3.1 Representação dos sistemas dinâmicos

Para melhor entendimento de como a equação de espaço de estados funciona para um sistema dinâmico de várias entradas bem como várias saídas, primeiro consideremos que um sistema dinâmico de um numero finito de elementos contém um numero também finito de equações diferenciais ordinárias com o tempo como variável independente. Usando a notação matricial-vetorial podemos representar tal equação diferencial de ordem n por uma equação matricial-diferencial de primeira ordem, assim os n elementos do vetor que representa cada a linearização de cada equação diferencial são um conjunto de variáveis de estado, e a equação matricial vetorial é a equação de estado.

Para as representações sem derivada de entrada, e também a representação com n derivadas de entradas podem ser encontradas em (OGATA, 2010) ou (NISE, 2017).

Ponderando-se que há varias formas de representar um sistema no espaço de estados, vale lembrar que existem alguns métodos com representações canônicas, como a forma canônica controlável, a forma canônica observável, a forma canônica diagonal e a canônica de Jordan, (OGATA, 2010).

Uma das formas mais usual e demonstrada por Juang (JUANG, 1994),quando tratamos das equações de um sistema linear dinâmico onde há n coordenadas independentes, logo n graus de liberdade e n equações, onde M, C e K são matrizes de massa, amortecimento e rigidez respectivamente da forma:

$$M\ddot{x} + C\dot{x} + Kx = f(x,t) \tag{2.47}$$

Onde pode-se observar novamente os vetores generalizados de $\ddot{x}$,$\dot{x}$ e x, e sendo assim $f(x,t)$ representa a função da força aplicada no período de interesse em um localização específica. Então uma das formas matricial vetorial é apresentada:

$$\mathbf{A}= \begin{bmatrix} 0_{n,n} & I_{n,n} \\ -M^{-1}_{n,n}K_{n,n} & -M^{-1}_{n,n}C_{n,n} \end{bmatrix}, \mathbf{x}= \begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \end{bmatrix}, \mathbf{B}= \begin{bmatrix} 0 \\ M^{-1}_{n,n}\beta_{n,n} \end{bmatrix}, \text{f(x,t)}=\beta u(t) \tag{2.48}$$

Computacionalmente essa maneira de tratar a equação de estados é muito mais adequado, visto que dependendo do numero de graus de liberdade e por consequente o numero n de equações diferenciais, precisamos apenas com a modelagem matemática obter as matrizes de massa $M_{n,n}$ a matriz de rigidez $K_{n,n}$ e a matriz de amortecimento $C_{n,n}$, e a parte de cima da matriz de estados temos uma matriz de zeros $0_{n,n}$ e uma matriz inidentidade $I_{n,n}$, logo a matriz de estado A se torna uma matriz de tamanho $2n \times 2n$, e a matriz resposta é B que contém o fator β uma matriz $n \times r$ que caracteriza a localização e o tipo de entrada, e que r indica o numero de entradas. A matriz de resposta dos sistemas é mensurada a partir do numero m de repostas que queremos obter do vetor $y(t)$, seria e qual grau de liberdade eu quero obter a resposta do sistema, em uma forma prática, indica de quantos sensores poderá se obter a resposta.

$$y = C_a\ddot{x} + C_v\dot{x} + C_dx \tag{2.49}$$

Da forma que C_a,$+C_v$ e C_d representam a matrizes de influencia da saída da aceleração, velocidade e deslocamento respectivamente. Essas matrizes descrevem a comunicação entre os vetores $\ddot{x}$,$\dot{x}$ e x, e o vetor de reposta, assim podemos obter as repostas de uma entrada de aceleração em termos de velocidade e deslocamento, Se for resolvida para $\ddot{x}$ na equação 2.47 e depois for substituída na equação 2.49, pode-se observar:

$$y = C_aM^{-1}[B_2u - C\dot{x} - Kx + C_v\dot{x} + C_dx] \tag{2.50}$$

Então de acordo com a equação de resposta do sistema:

$$y = Cx + Du \tag{2.51}$$

Pode ser descrita como:

$$\mathbf{C} = [C_d - C_aM^{-1}K \quad C_v - C_aM^{-1}C],\ \mathbf{D} = C_aM^{-1}\beta \tag{2.52}$$

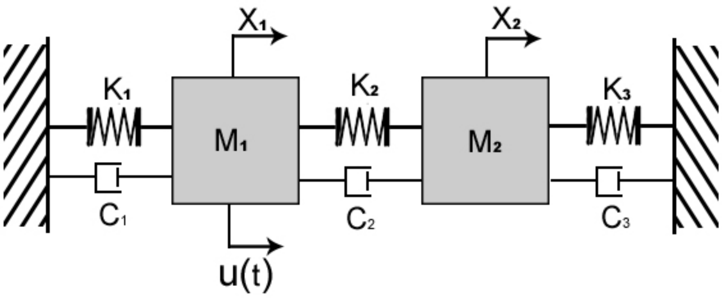
Isso o nos mostra que C é uma matriz $m \times n$ de resposta, que inclui velocidade e deslocamento, e D a matriz de transmissão direta $m \times n$, tal matriz tem sentindo físico por que se mudar um degrau da força de entrada u produz uma mudança em degrau na aceleração do vetor resposta y, e o tamanho do degrau na aceleração é ditado pelo ganho na matriz D. A matriz de transmissão direta desaparecem quando acelerômetros não são usados nas medições.

Em suma apesar de da complicação matricial em entender com funcionam as entradas e saídas de forma matricial e vetorial, exemplificarei com modelos a forma de analisar um modelo na forma de espaço de estados, e observaremos como é facilitado a simulação da resposta de um sistema no espaço de estados.

2.3.2 Exemplo

Usando o exemplo apresentando no memorando técnico escrito por Juang e Richard S. Pappa(JUANG, 1994), da forma apresentando:

Figura 2.6: Modelo matemático de um sistema de dois graus de liberdade.



Fonte: Adaptado de (JUANG, 1994).

Se fizermos a equação dinâmica e separar as matrizes de massa, amortecimento e rigidez, considerando que $c_1 = c_2 = c_3$ e $k_1 = k_2 = k_3$ podemos obter as seguintes notações vetorial:

$$\mathbf{M}=\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \quad , \mathrm{C}=\begin{bmatrix} 2c & -c \\ -c & 2c \end{bmatrix} \quad ,\mathbf{K}=\begin{bmatrix} 2k & -k \\ -k & 2k \end{bmatrix} \tag{2.53}$$

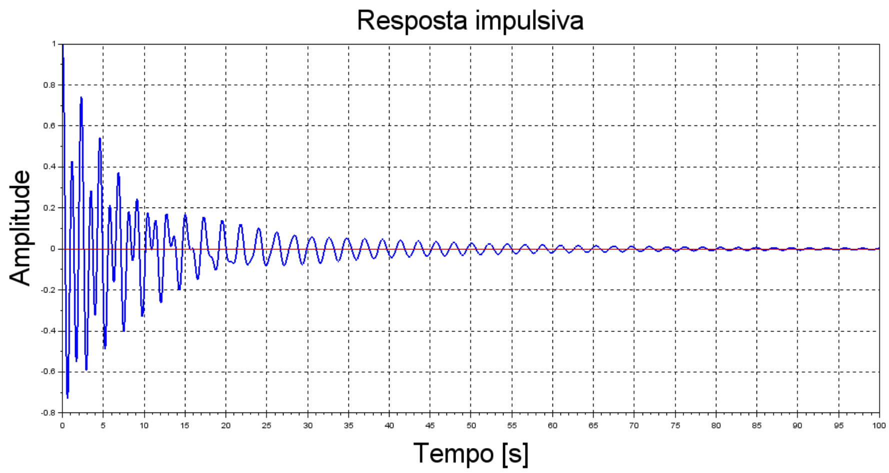
Segundo o paper de Juang, usando os parâmetros físicos, $m_1 = 0.8$,$m_2 = 1.5$,$c = 0.1$ e $k = 10$, então podemos observar duas frequências naturais relativa aos dois graus de liberdade, sendo elas $0.4594[Hz]$ e $0.8714[Hz]$, como método de comparação podemos utilizar programação para simular tal sistema considerando as entradas de força como um impulso, utilizando a notação de equação de estados descrita na equação 2.3.2, podemos então simular em Sci-lab a resposta temporal e as repostas em frequência. A matriz de estados pode ser escrita da forma:

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{-K}{m_1} & \frac{-2K}{m_2} & \frac{-c}{m_1} & \frac{-2c}{m_2} \\ \frac{-2K}{m_1} & \frac{K}{m_2} & \frac{-2c}{m_1} & \frac{c}{m_2} \end{bmatrix}$$

(2.54)

Utilizando das notações descritas,pode-se apenas construir as matrizes de rigidez, massa e amortecimento, depois construir a matriz de estados. Também podemos observar que quanto os vetores de entrada B e saída C atribui o tamanho relativo a $2n$, e apenas atribuindo uma unidade aonde queremos impulsionar o sistema, neste caso $B = [1, 0, 0, 0]$ para impulsionarmos no primeiro grau de liberdade, e $C = [1, 0, 0, 0]$ para obter a resposta no mesmo e no deslocamento, ou seja, na função, e se colocar a unidade no segundo elemento obtém-se então a resposta em velocidade.

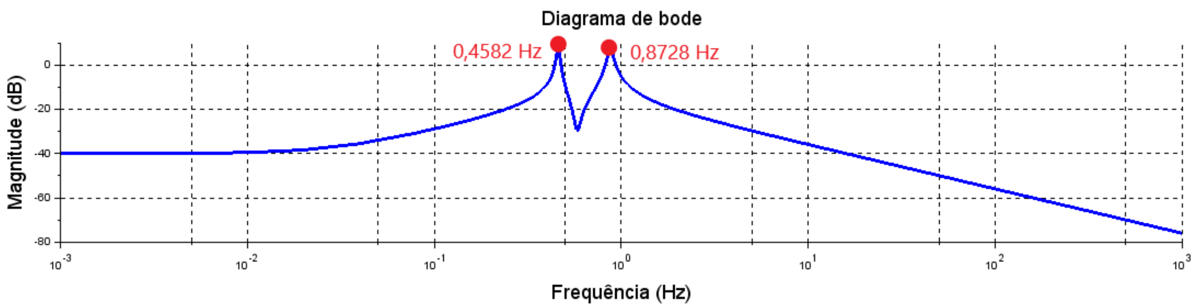
Figura 2.7: Resposta temporal há um impulso



Fonte: Obtida via simulação em Scilab.

Aqui podemos ver o diagrama de Bode, que nos dá os pico de frequência do sinal recebido, e que batem com as frequências dadas.

Figura 2.8: Diagrama de Bode mostrando as frequências.



Fonte: Obtida via simulação em Scilab.

Com este exemplo pode-se então demonstrar como é trivial a analise computacional de um sistema dinâmico usando as equações de estado de espaços, isso é muito útil para tratarmos da modelagem de sistemas bem como simularmos seu comportamento.

2.4 Solução das equações de Estado

Para fins de dar continuidade a construção do objetivo deste trabalho, precisamos entrar em alguns conceitos novos, e para isso precisamos resolver a equação de estados, visto que podemos observa-la como uma equação diferencial com a função x e sua primeira derivada $\dot{x}$ ela é então uma equação diferencial de primeira ordem, observando desta forma:

$$\dot{x} = ax + bu$$

ou observando desta forma:

$$\dot{x} - ax = bu$$

vemos que ela é uma equação diferencial de primeira ordem não homogênea.
Primeiro considerando segundo se prova em (OGATA, 2010), a solução homogênea:

$$x(t) = \left(1 + at + \frac{1}{2!}a^2t^2 + \cdots + \frac{1}{i!}a^it^i + \ldots\right) x_0 = e^{at}x_0 \tag{2.55}$$

E então para a solução da equação de estado não homogênea:

$$x(t) = e^{at}(t)x_0 + \int_0^t e^{a(t-\tau)}bu(\tau)d\tau \tag{2.56}$$

Assim temos que a resposta nesta resposta que o primeiro termo é a parcela devida a condição inicial e a segunda parcela devida ao sinal de entrada $u(t)$. Este exemplo foi feito pra a notação escalar a, e para a notação matricial-vetorial que é de interesse deste trabalho a solução é semelhante e nos dá:

$$x(t) = e^{At}(t)x_0 + \int_0^t e^{A(t-\tau)}bu(\tau)d\tau \tag{2.57}$$

Porém na analise matricial vetorial é necessário nos atentarmos ao termo $e^{At}(t)$, pois estamos fazendo a exponencial de uma matriz, exponencial matricial, o que não tem uma solução fácil. Dentre os resultados uteis para tal analise matricial vetorial alguns resultados como o teorema de Cayley-Hamilton e o método de interpolação de Sylvester para o calculo de e^{At} e a independência linear de vetores, porém utilizando destes, só o ultimo citado. Ou seja para a interpolação de Sylvester (OGATA, 2010) temos:

$$e^{-At} = \sum_{i=0}^{n-1} a_i(\tau)A^i \tag{2.58}$$

Esta solução da exponencial matricial é de importância em solução de problemas computacional bem como na continuidade da analise das equações de espaço de estados pois bem, provamos que tal termo aparece diversas vezes. E com isso nos provamos alguns termos da equação de estados, tal como sua solução não homogênea 2.57 e também resolvemos a exponencial matricial, tais formas de solução leva em conta a matemática crua, com apenas algumas analises físicas com os problemas computacionais, porém são de necessárias construções para continuar a construção de conceitos de teoria de controle moderno, bem como objetivar a ideia deste trabalho.

2.5 Controlabilidade

Segundo Kalman, (KALMAN, 1963) o estado é uma quantidade miníma uma quantidade sobre a história passada do sistema que é o suficiente para prever o efeito do passado sobre o futuro.Logo quando falamos de sistemas lineares, bem como tratamos neste presente trabalho os sistemas dinâmicos, ocorrem os conceitos de controlabilidade e observabilidade aplicado a esses sistemas analisando os conceitos tratados pelas equações de espaço de estados. Embora a maioria dos sistemas físicos sejam controlável e observável, os modelos matemáticos correspondentes podem não possuir as propriedades de controlabilidade e observabilidade. Tais conceitos introduzidos por Kalman e Gilbert (GILBERT, 1963), fazem parte de conceitos de realização de sistemas.
Para a controlabilidade em resumo, é de entendimento que, se considerarmos um sistema com suas n equações diferenciais em forma matricial na forma de espaço de estados, então precisamos saber quais variáveis podemos controlar, tratando assim como na literatura, precisamos de um sinal de controle (geralmente aplicado a entrada do sistema) que transfere o sistema de um estado inicial em t_0 para um tempo final qualquer t_1, assim como tratamos de um sistema de múltiplas entradas e saídas, podemos tratar deste sinal como um vetor de sinais que podem modificar o estado do sistema, ou estados, e tal estado só é modificado se todas as variáveis do sistema, ou as n equações que o descrevem, forem afetadas, então o sistema é totalmente controlável, pois todas suas variáveis podem ser controlada.

Sendo a equação de estado matricial de um sistema:

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

E sua resposta:

$$x(t) = e^{At}x(0) + \int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau$$

Como estamos tratando de um sistema fechado, um sinal que entra no sistema passa pela sua matriz de estado e sai, deve retornar ao estado inicial, então mesmo o tempo t_1 é nulo, pois voltamos ao estado inicial, mesmo $t_0 \leq t \leq t_1$. Assim:

$$x(t_1) = 0 = e^{A0}x(0) + \int_0^{t_1} e^{A(0-\tau)}Bu(\tau)d\tau \tag{2.59}$$

Então resolvendo para $x(0)$, obtemos a condição inicial do sistema da forma:

$$x(0) = -\int_0^{t_1} e^{-A\tau}Bu(\tau)d\tau \tag{2.60}$$

Como já foi definindo qual a resposta de uma exponencial matricial, como a presente $e^{-A\tau}$, pela interpolação de Sylvester em 2.58 :

$$e^{-A\tau} = \sum_{i=0}^{n-1} a_i(\tau)A^i \tag{2.61}$$

Substituindo na equação 2.60:

$$x(0) = -\int_0^{t_1} \sum_{i=0}^{n-1} a_i(\tau)A^iBu(\tau)d\tau$$

(2.62)

retirando os termos não dependentes da integral temporal:

$$x(0) = -\sum_{i=0}^{n-1} A^i B \int_0^{t_1} a_i(\tau)u(\tau)d\tau$$

(2.63)

Temos então os termos dependentes do tempo, que podemos descrever como vetores no tempo discreto dependentes apenas $p = 1, 2, 3, \ldots, n$, pois agora o integrador numérico i que apenas denotava uma quantidade qualquer de vetores ou fatores associados as notações matemáticas se tornará p que indicará a notação de tempo discreto:

$$\int_0^{t_1} a_p(\tau)u(\tau)d\tau = \beta_p \tag{2.64}$$

Assim o sistema em sua forma de série para qualquer tempo discreto p pode ser descrito como de estado inicial:

$$x(0) = -\sum_{p=0}^{n-1} A^p B \beta_p$$

(2.65)

ou expandindo o vetor que chamaremos vetor de controlabilidade:

$$x(0) = -\begin{bmatrix} B \ AB \ \ldots \ A^{n-1}B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_{n-1} \end{bmatrix} \tag{2.66}$$

Logo o vetor de controlabilidade que contem as matrizes do sistema é :

$$\mathcal{Q}_b = -\begin{bmatrix} B \ AB \ \ldots \ A^{n-1}B \end{bmatrix} \tag{2.67}$$

Então observando como se prova em Ogata (OGATA, 2010), que o vetor controlabilidade é nada mais que um vetor que contenha as matrizes de estado e entrada, por consequente diz-se que, para que um sistema seja de estado completamente controlável dado um estado qualquer $x(0)$, o vetor que engloba a dependência a entrada e do estado, deve ter posto igual ao das matrizes A e B, ou seja n, assim prova que todas a equações contidas dentro destas matrizes, quando reduzimos elas através da escalonação obtermos posto igual ao numero de equações que são linearmente dependentes. Em outras palavras, manipulamos as matrizes através do escalonamento, e obtemos a matriz na sua forma reduzida e verificamos quais linhas zeram, e se nenhuma zerar, o estado deste sistema pode ser totalmente controlado, ou seja, uma entrada $u(t)$, ou como definimos para um tempo discreto β, se aplicada a entrada e avaliado na saída, verificamos quais podem afetar todos os estados do sistema ou quantos estados são possíveis serem controlados com um sinal de entrada no tempo inicial.

2.6 Observabilidade

Como já definimos, a controlabilidade é aplicado ao sistema onde observarmos suas respostas a entrada e definimos o número de variáveis que podemos ter acesso de um dado sistema. Contudo também podemos definir qual o numero de estados que podemos observar dentro um sistema, porém aplicando o tratamento matemático a entrada do sistema onde de fato observamos suas respostas.

Para determinarmos a observabilidade de um sistema, primeiro levemos em conta a equação de estados da forma:

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

$$y = Cx + Bu$$

E considerando a resposta encontrada na equação (2.57), obtemos a resposta para o estado e sua resposta da forma:

$$x(t) = e^{At}x(0) + \int_0^{\tau} e^{A(t-\tau)}bu(\tau)d\tau \tag{2.68}$$

$$y(t) = Ce^{At}x(0) + C\int_0^{\tau} e^{A(t-\tau)}bu(\tau)d\tau + Du \tag{2.69}$$

Considerando agora um tempo discreto $p = 0, 1, 2, \ldots$, o estado de um sistema é dito completamente observável se qualquer estado inicial puder ser observado pela saída, ou seja, no estado inicial, com entradas $u(p) = 0$, podem ser determinado pela saída $y(p)$.

Assim se $u = 0$, e considerarmos o estado inicial $x(0)$:

$$x(p) = Ce^{At}x(0) \tag{2.70}$$

Lembrando da resposta para uma exponencial matricial declarado pela interpolação de Sylvester na equação (2.58), usamos ela na equação (2.70) e obtemos:

$$x(p) = \sum_{p=0}^{n-1} a_p(t)A^p x(0) \tag{2.71}$$

Então expandindo:

$$x(0) = a_0 x(0)$$

$$x(1) = a_1 A x(0)$$

$$x(2) = a_2 A^2 x(0)$$

Então para y podemos expandir:

$$y(0) = Cx(0) = Ca_0 x(0)$$

$$y(1) = Cx(1) = Ca_1 A x(0)$$

$$y(2) = Cx(2) = Ca_2 A^2 x(0)$$

$$\vdots$$
$$y(p) = Ca_pA^px(0)$$

Então se nos se pararmos os fatores:

$$\begin{bmatrix} y(0) \\ y(1) \\ y(2) \\ \vdots \\ y(p) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{p-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \dots & a_p \end{bmatrix} \mathrm{x}(0)$$

(2.72)

Então chamamos tal vetor que contenha as matrizes de estado a matriz resposta de vetor de observabilidade:

$$\mathcal{P}_a = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{p-1} \end{bmatrix} \tag{2.73}$$

Então o principio da observabilidade nos diz que um sistema de n variáveis é completamente observável se e somente se uma saída $y(t)$, ou $y(p)$ para o caso discreto, tiver matriz de observabilidade de posto igual a n, ou seja se determinando-se para cada $y(p)$ o estado $x(0)$ isso só ocorrerá se todas as equações que compõe o sistema estejam linearmente dependentes. e isso só ocorrerá se o posto da matriz observabilidade foi igual a n. Desta forma a observabilidade nos diz quantos estados de um sistema podem ser observados na saída, mesmo que uma entrada seja posta, talvez esse estado não ofereça maneiras de observar sua resposta. Na forma de uma análise física, talvez possamos excitar um sistema em todos os seus estados, porém não teremos sensores para observar todos eles.

Capítulo 3

Construção do Algorítimo de Realização de Auto-sistemas

Pondo em vista todos os conceitos até aqui apresentados principalmente quanto ao tratamento de sistemas dinâmicos em conceitos de estados, podemos começar a construção do algoritmo para identificação modal de sistemas mecânicos a partir de uma entrada impulsiva, o que difere dos tratamentos modais referenciados quanto aos tratamentos usais usando transformadas de Fourier.Todos conceitos trazidos até o presente momento foram desenvolvidos como teorias de sistemas em gerais, porém Juang e Richard Pappa utilizaram de conceitos desenvolvidos para representação de sistemas no espaço de estados, bem como conceitos como controlabilidade e observabilidade, já presentes neste trabalho, para identificação de parâmetros modais, ou seja, para a construção de um sistema a partir da resposta do mesmo a entrada impulsiva de uma força e construção a partir dos dados de resposta de um modelo do mesmo e por consequente conseguir retirar disto suas propriedades dinâmicas como, frequências naturais amortecidas e seu coeficiente de amortecimento.

3.1 Realização de sistemas

Os conceitos de realizações, ou miníma realização de um sistema, apresentados por Ho e Kalman (HO; KALMAN, 1966) levam em conta alguns métodos matemáticos apresentados ao longo da historia por outros cientistas sobre o tratamento de dados e construção de modelos matemáticos a partir de resposta de dados reais. O processo de construção da representação no espaço de estados a partir de dados experimentais é chamado de realização de sistemas (JUANG; PAPPA, 1984).

Os métodos no domínio do tempo para a identificação de parâmetros modais no campo de estruturas, traz o conceito de realização, onde a partir de respostas de um sistema começamos com construções de conceitos matemáticos como os parâmetros de Markov (Será provado seu funcionamento para a resposta ao impulso) e de conhecimento deste parâmetros a construção de uma matriz chamada matriz de Hankel, que são bases da teoria de realização. Para construir um modelo, uma questão também deve ser levado em conta, se todos os estados do sistema podem ser controlados (ou excitados) ou se podem ser observado, visto que esses conceitos já foram introduzidos, levaram muito em conta quando definiremos para dados experimentais como reduzir tais dados para termos o mínimo estados que descrevem todo o sistema. Assim a realização de sistemas nos diz a partir de construções matemáticas que um sistema precisa de um número mínimo de dados para descrever o comportamento modal do mesmo.

3.1.1 Parâmetros de Markov

Considere uma representação de um espaço de estados é no tempo discreto:

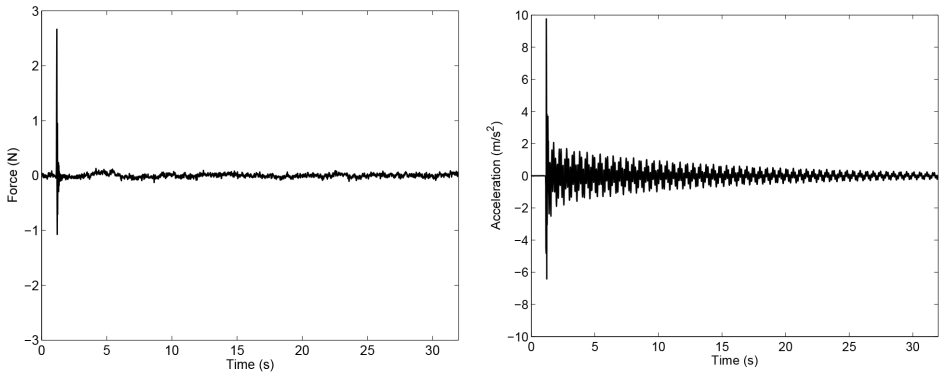
$$x(p+1) = Ax(p) + Bu(p) \tag{3.1}$$

e

$$y(p) = Cx(p) + Du(p) \tag{3.2}$$

Se uma força inicial for aplicada da forma $u_i(0) = 1$, ou seja é impulsiva independente de onde esta sua localização $i = 1, 2, \ldots, r$, ela está aplicada no tempo zero, da forma que está no inicio da amostragem, e toda força $u_i(p) = 0$ sendo $p > 0$, então não há repetição dessa força, como são feitos em analises modais via $FRF's$.

Figura 3.1: Exemplo de impulso e resposta real.



Fonte: (PAPPALARDO; GUIDA, 2018).

Assim utilizando as definições de que em $u(0) = 1$ e também consideramos o sistema com condições iniciais nulas $x(0) = 0$, expandiremos as equações de espaço de estados para $p = 0, 1, 2, \ldots$ da forma:

- $p = 0$

$$x(0+1) = x(1) = Ax(0) + Bu(0) \rightarrow x(1) = B \tag{3.3}$$

$$y(0) = Cx(0) + Du(0) \rightarrow y(0) = D \tag{3.4}$$

- $p = 1$

$$x(1+1) = x(2) = Ax(1) + Bu(1) \rightarrow x(2) = BA \tag{3.5}$$

$$y(1) = Cx(1) + Du(1) \rightarrow y(1) = CB \tag{3.6}$$

- $p = 2$

$$x(2+1) = x(3) = Ax(2) + Bu(2) \rightarrow x(3) = BAA \tag{3.7}$$

$$y(2) = Cx(2) + Du(2) \rightarrow y(0) = CBA \tag{3.8}$$

Logo, observando a construção das repostas com o tempo observados que há uma sequencia de matrizes que satisfazem a resposta ao impulso, esta sequência é chamada de parâmetros de Markov, e elas podem ser expressas da forma:

$$\begin{aligned} y_0 = &\quad D \\ y_1 = &\quad CB \\ y_2 = &\quad CAB \\ y_3 = &\quad CA^2B \\ \vdots & \\ y_p = &\quad CA^{p-1}B \end{aligned} \tag{3.9}$$

Então dando continuidade a teoria de realização, observamos que as matrizes constantes dos parâmetros de Markov, relacionam os vetores de entrada, reposta e a matriz de estados, ou seja A, B, C, D, porém como $y(0) = D$, precisamos identificar apenas as matrizes A, B, C logo isso será muito útil na construção do Algoritmo de realização miníma. Qualquer sistema tem um número infinito de realizações que preverão a resposta idêntica para qualquer entrada em particular. Então denotando os parâmetros de Markov pela letra maiúscula Y desta forma os parâmetros de Markov são:

$$Y_0 = D\ , Y_1 = CB\ , Y_2 = CAB\ , \ldots\ , Y_p = CA^{p-1}B \tag{3.10}$$

Miníma realização significa um modulo com menores dimensões de espaço de estados entre todos os possíveis do sistema que possuem a mesma relação de entrada e saída, ou seja mesmo se reduzirmos os estados analisados a informação contida será a mesma. Toda realização miníma tem o mesmo conjunto de autovalores, que são parâmetros modais do próprio sistema.

Assuma então que uma matriz A de ordem n tenha um conjunto completo de autovetores linearmente independentes $(\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n)$ que correspondem as seus autovalores $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$, dos quais não são necessários a distinção. Se definirmos Λ como a matriz que contenha em suas diagonais os autovalores e Ψ como a matriz que contenha tais autovetores:

$$\Lambda = diag(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n) \tag{3.11}$$

$$\Psi = (\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n) \tag{3.12}$$

A realização que contenha A, B, C pode ser transformada numa realização que contenha $\Lambda, \Psi^{-1}B, C\Psi$, sendo que ao obtermos a matriz diagonal que contenha os autovalores Λ, ela contem informações sobre as taxas de amortecimento modais e as frequências naturais amortecidas do sistema. A matrizes $\Psi^{-1}B$ definem as amplitudes inicias e a matriz $C\Psi$ contém os modos nos pontos de cada sensor que obterá a resposta.

As taxas de amortecimento modal desejado e as frequências naturais amortecidas são simplesmente a parte real e imaginária dos Autovalores de Λ. Assim o modelo em espaço de estados podem nos dizer muito sobre os parâmetros físicos de um sistema.

Com os parâmetros de Markov, pode-se montar então a matriz de Hankel, definida como: (CHEN, 1999)

$$\mathbf{H(p\text{-}1)} = \begin{bmatrix} Y_p & Y_{p+1} & \dots & Y_{p+\beta-1} \\ Y_{p+1} & Y_{p+2} & \dots & Y_{p+\beta} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ Y_{p+\alpha-1} & Y_{p+\alpha} & \dots & Y_{p+\alpha+\beta-2} \end{bmatrix}$$

(3.13)

Para o caso de $p = 1$ notamos que a matriz de Hankel pode ser transformado em:

$$\mathbf{H(0)} = \begin{bmatrix} Y_1 & Y_2 & \dots & Y_\beta \\ Y_2 & Y_3 & \dots & Y_{1+\beta} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ Y_\alpha & Y_{1+\alpha} & \dots & Y_{\alpha+\beta-1} \end{bmatrix}$$

(3.14)

Então note que se substituir os parâmetros de Markov pelas suas definições de (3.19) na matriz (3.14), obtém-se:

$$\mathbf{H(0)} = \begin{bmatrix} CB & CAB & \dots & CA^{n-1}B \\ CAB & CA^2B & \dots & cA^nB \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ CA^{n-1}B & CA^n & \dots & CA^{2(n-1)}B \end{bmatrix} \tag{3.15}$$

Note primeiro que $Y_0 = D$ não é incluso em $H(0)$, e se $\alpha \geq n$ e $\beta \geq n$ (a ordem do sistema) a matriz $H(p-1)$ tem posto n. Pois se observando na matriz (3.15) em $H(0)$ podemos entender que a matriz de Hankel obedece as ordens do sistema visto que são compostas pelas triplete A, B, C, logo também se utilizarmos da multiplicação da matriz de controlabilidade (3.16) e observabilidade 3.17 e o termo A^{p-1}, porém definindo que as matrizes de controlabilidade e observabilidade podem ser denotadas:

$$\mathcal{Q}_b = \begin{bmatrix} B \; AB \; \dots \; A^{\beta-1}B \end{bmatrix} \tag{3.16}$$

Onde β denota um integrador arbitrário que define o tamanho do vetor de controlabilidade, e então também:

$$\mathcal{P}_a = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{\alpha-1} \end{bmatrix} \tag{3.17}$$

Onde α é um integrador arbitrário que denota o tamanho do vetor de observabilidade. E então usando da multiplicação matricial da forma:

$$H(p-1) = \mathcal{P}_a A^{p-1} \mathcal{Q}_b = \begin{bmatrix} CA^{p-1}B & CA^pB & \dots & CA^{p+\beta-2}B \\ CA^pB & CA^{p+1}B & \dots & cA^{p+\beta-1}B \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ CA^{+p-1}B & CA^{\alpha+p-2} & \dots & CA^{\beta+\alpha+p-3}B \end{bmatrix} \tag{3.18}$$

Porém como os parâmetros de Markov são da forma:

$$Y_p = CA^{p-1}B \tag{3.19}$$

substituindo os termos por Y_p e mantendo as proporções de α e β prova-se que:

$$\mathbf{H(p\text{-}1)} = \begin{bmatrix} Y_p & Y_{p+1} & \dots & Y_{p+\beta-1} \\ Y_{p+1} & Y_{p+2} & \dots & Y_{p+\beta} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ Y_{p+\alpha-1} & Y_{p+\alpha} & \dots & Y_{p+\alpha+\beta-2} \end{bmatrix}$$

$$= \mathrm{P}_a A^{k-1} \mathcal{Q}_b = \begin{bmatrix} CA^{p-1}B & CA^pB & \dots & CA^{p+\beta-2}B \\ CA^pB & CA^{p+1}B & \dots & CA^{p+\beta-1}B \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ CA^{+p-1}B & CA^{\alpha+p-2} & \dots & CA^{\beta+\alpha+p-3}B \end{bmatrix} \tag{3.20}$$

Com a matriz de Hankel que é composta pelos parâmetros de Markov contém as propriedades de observabilidade e o controlabilidade do sistema. Logo a ordem do sistema é n, se então o mínimo de dimensões da matriz de estados é $n \times n$. Se o sistema é observável e controlável, as matrizes $\mathcal{P}_a$ e $\mathcal{Q}_b$ tem posto n, assim sendo a matriz de Hankel também terá posto n.

Em resumo, observamos que a teoria de realização engloba outras teorias sobre sistema, e nos diz que um sinal de saida Y pode construir segundo Chen (CHEN, 1999), Ho e Kalman (HO; KALMAN, 1966), Wiberg (WIBERG, 1971) e Kailath (KAILATH, 1980), a matriz de Hankel, que é compostas pelos parâmetros de Markov provados para um sistema excitado impulsivamente em seu tempo inicial, e isto nos retorna as matrizes que descrevem um sistema tratado no espaço de estados. Assim a realização também nos diz que pode-se construir uma matriz que deve ser avaliada quanto a controlabilidade do sistema tanto quanto sua observabilidade.

3.2 Decomposição em valores singulares

Uma das técnicas que será aplicada, a decomposição de valores singulares de uma matriz. Dada uma matriz qualquer A ela pode ser decomposta da forma:

$$A = R\Sigma S^T \tag{3.21}$$

A decomposição em valores singulares, relatada por Eugenio Beltrami (1835-1899), Camille Jordan (1838-1921), James Joseph Sylvester (1814-1897), Erhard Schmidt (1876-1959) e Hermann Weyl (1885-1955), responsáveis por estabelecendo a existência da decomposição do valor singular e desenvolvendo tal teoria (STEWART, 2006) .

A decomposição no produto $R\Sigma S^T$, nos entrega uma matriz unitária R, uma matriz diagonal que contenha os valores singulares Σ e outra matriz unitária S^T, onde T denota sua transposição. Uma das utilidade computacionais se deve ao fato que uma pequena pertubação na matriz A corresponde a uma pequena pertubação nos valores singulares Σ, também é observado que os valores singulares de Σ dizem muito sobre o posto da matriz fatorada, visto que os valores decrescem e podem indicar valores nulos, ou valores muito próximos de zero, e isso demonstra a relação de uma matriz por exemplo composta por coordenadas correlacionados, e pode ser aplicada para verificar os reais estados que afetam um sistema.

Então construímos a matriz diagonal dos valores singulares:

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_1 & & & \\ & \sigma_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \sigma_n \end{bmatrix} \tag{3.22}$$

Com isso definimos os componentes da decomposição de valores singulares. Os conceitos sobre a utilização computacional apresentados por Klema (KLEMA; LAUB, 1980) e Golub (GOLUB; REINSCH, 1971) foram de importância nítida na utilização do mesmo na interação do método de decomposição o singular na teoria de realização de sistemas bem como utilizada na matriz de Hankel que será discutido mais em breve. Como podemos analisar os componentes $R\Sigma S^T$ mantém a informação sobre o sistema e apresentam informações importantes de um sistema composto em forma matricial-vetorial. De exemplo podemos tomar que os valores singulares podem apresentar um decréscimo significativo o que demonstra que se uma matriz foi obtida através de um sistema linear, tais valores apresentaram qual o nível de interação das coordenadas que cada valor deste representa, de tal forma se valores forem nulos ou muito próximo de nulos isso representa que nessas ordens o sistema pode não apresentar informação útil, então podemos reduzir mais o sistema.

3.3 Construção do ERA

O algoritmo de realização miníma é um algoritmo de entrada e saída múltipla de dados no domínio do tempo para construção da ordem miníma da realização de um sistema e identificação modal (PAPPA; JUANG, 1988).

O algorítimo de realização miníma visto como objetivo deste trabalho é um composto das teorias de realizações, que foram desenvolvidas a partir das teorias de controle moderno, e métodos matemáticos aplicados a métodos computacionais. O algoritmo consiste em duas maiores partes, a formulação básica da ordem miníma da estrutura analisada e a identificação dos parâmetros modais. Quando nos referimos a ordem miníma, ou miníma realização, isso nos diz que podemos utilizar os dados e manipular os métodos matemáticos como de exemplo a matriz de Hankel, para que com o mínimo de dados nos descreva o comportamento dinâmico da estrutura a partir da analise de seu parâmetros modais.

O ERA desenvolvido por Juang e Richard Pappa (JUANG, 1986), é um algorítimo que analisa dados de vibrações que sejam os mesmos uma resposta coletada ao um impulso imposto á estrutura flexível, que apresente decaimento do sinal devido ao seu amortecimento, e então com a coleta de dados pelos sensores que dispusemos a analise experimental podemos começar formando um bloco de dados na matriz de Hankel como descrito nas teorias de realização, e de uma matriz generalizada de Hankel para todos os dados podemos decidir seu tamanho reduzindo assim suas linhas e colunas, porém mantendo sempre os primeiros blocos intactos.

Comecemos definindo que r é um numero de entradas e h um numero de saídas (ou leituras). Salientado como são definidas a matrizes de entradas e saídas:

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & \dots & b_r \end{bmatrix}; \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_h \end{bmatrix} \tag{3.23}$$

Onde o vetor coluna b_i $(i = 1, 2, \dots, r)$ pode ser tanto a entrada de excitação, como uma variável de controle (quando utilizado métodos de controle juntamente ao Era) da i-ésima entrada, e o vetor linha c_j $(j = 1, 2, \dots, h)$ é a mensuração da j-ésima sensor que obtém a resposta. Logo os dados em forma vetorial são subconjuntos das matrizes B e C. Lembrando que essa matrizes são relacionadas com o espaço de estados no tempo discreto, ou seja, para um tempo discretizado em p:

$$x(p+1) = Ax(p) + Bu(p) \tag{3.24}$$

$$y(p) = Cx(p) \tag{3.25}$$

E como foi provado para os parâmetros de Markov e sua correlação com as matrizes das equações de estados, mostra a forma que o bloco de dados pode ser construído a partir das informações de entrada em y, seja agora uma forma discreta e matricial, considerando $y(p) = Y(p)$ para denotar um vetor de dados:

$$Y(p) = CA^{p-1}B \tag{3.26}$$

O bloco de dados que deve-se construir com o ERA deve incluir apenas sinais bons ou fortemente medidos, isso é útil, pois alguns dados de medição podem ser ruidosos do que outros ou os sensores podem funcionar mal durante o teste. Uma escolha criteriosa dos dados e uma boa disposição dos messo na matriz de Hankel também podem ser usadas para minimizar os requisitos computacionais do método. Este esforço poderia reduzir substancial,ente a ordem da matriz para problemas grandes de quantidades muito altas de dados, ou variedades de dados. Para dados de ruídos baixos a ordem pode ser a mesma que a verdadeira matriz, ou seja, a ordem pode abranger todos os dados. Esses fatos nos levam de volta a examinação da controlabilidade e observabilidade das matrizes. Segundo Juang (JUANG, 1986) (JUANG, 1994) (JUANG; PAPPA, 1984) para um sistema em seu estado inicial podemos simplesmente reafirmar a forma da matriz de Hankel de $H(p-1)$ para $H(p)$, então observando a relação novamente:

$$H(p-1) = \mathcal{P}_a A^{p-1} \mathcal{Q}_b \tag{3.27}$$

$$H(p) = \mathcal{P}_a A^{p} \mathcal{Q}_b \tag{3.28}$$

Segundo Juang devemos assumir que existe uma matriz $H^\top$ que satisfaz a seguinte proposição:

$$\mathcal{P}_a H^\top \mathcal{Q}_b = I_n \tag{3.29}$$

Onde I_n é uma matriz identidade de ordem n. Essa notação junto a matriz definida $H^\top$ são de maior importância em demonstrar o algorítimo ERA a partir das equações de estado e das formulações de realização. Vamos observar primeiro que na equação (3.28) se consideramos o estado inicial ou seja $p = 0$, a equação matricial torna-se $H(0) = \mathcal{P}_a\mathcal{Q}_b$, visto que $A^0 = 1$, isso nos volta a teoria de controlabilidade e observabilidade que nos informa que precisamos do estado inicial do sistema para informar suas controlabilidade e observabilidade. Posto isso em evidencia e usando a equação (3.29), vamos a seguinte prova:

$$H(0)H^\top H(0) = \mathcal{P}_a\mathcal{Q}_bH^\top\mathcal{P}_a\mathcal{Q}_b = \mathcal{P}_a\mathcal{Q}_b = H(0) \tag{3.30}$$

Lembrando da definição (3.29) quando substituímos ela e multiplicamos os vetores observabilidade e controlabilidade que sobraram pela identidade, obtemos eles mesmos o que nos retorna a matriz $H(0)$, isso é definido segunda a literatura (JUANG, 1994) que a matriz $H^\top$ é a pseudo-inversa de $H(0)$. Tal matriz é usada em campos de dinâmica estrutural para identificar o parâmetros modais e frequências de tais sistemas (IBRAHIM; MIKULCIK, 1977). Este é um caso especial que representa uma única entrada que não pode realizar um sistema que tenha autovalores repetidos ou um sistema sem ruído, a menos que a ordem do sistema seja conhecida a priori. Deixaremos a agora tal definição em segundo plano.

O processo de obtenção do era começa com o processo de decomposição da matriz de Hankel em valores singulares (GOLUB; REINSCH, 1971) (KLEMA; LAUB, 1980), e se para $p = 1$ usando da forma:

$$H(0) = R\Sigma S^T \tag{3.31}$$

Onde as matrizes R e S são matrizes isométricas, todas as colunas são ortonormais, e a matriz Σ é tal matriz diagonal que contém os valores singulares $[\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_i]$, onde i é um integrador qualquer que representa o tamanho original da matriz de Hankel decomposta, ou seja as matrizes da decomposição mantém a proporção da matriz de Hankel.

A parte de decomposição singular é de suma importância no ERA, pois depois da decomposição obtemos os valores singulares na matriz diagonal Σ que ainda mantém o tamanho do sistema definido pela matriz de Hankel como os *iésimos* valores singulares do sistema, que são monotonicamente não crescente, ou seja os valores se comportam da forma:

$$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \cdots \geq \sigma_i \geq 0 \tag{3.32}$$

Quando fizemos tal decomposição, alguns valores singulares podem tornar-se pequenos e insignificantes no sentindo que eles contém mais informações sobre o ruido do sinal que foi construído na matriz de Hankel que informações do próprio sistema, como dito nas literaturas, a decomposição serve para observar também o posto do sistema e entender qual a real ordem do mesmo. Em outras palavras, as direções determinadas pela decomposição de valores têm graus menos significativos de controlabilidade e observabilidade. Então com essa informação podemos reduzir o sistema de acordo com valores singulares grandes o suficiente, ou seja, a partir daqui reduzimos os valores singulares de $[\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_i]$ para $[\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n]$ sendo $n > i$, ou seja devemos reduzir as três matrizes obtidas na decomposição singular para uma ordem menor de acordo com a analise dos valores singulares que consideramos grandes o suficiente para manter informações sobre o sistema. Fazendo uma redução no tamanho da matriz, considerando pois que construirmos as matrizes de Hankel e por consequente as matrizes de valores singulares de forma quadrada:

$$R\Sigma S^T = Redu\textit{ç}\tilde{a}o = R_n\Sigma_n S_n^T \tag{3.33}$$

Contudo agora temos as matrizes R e S contendo as n primeiras colunas e linhas. Consequentemente a matriz $H(0)$ e a pseuda-inversa tornam:

$$H(0) = R_n\Sigma_n S_n^T \tag{3.34}$$

Onde:

$$R_n^T R_n = I_n = S_n^T S_n \tag{3.35}$$

e também:

$$H^\top = S_n\Sigma^1 R_n^T \tag{3.36}$$

Em comparação com as equações (3.34) e (3.35) com a equação (3.28) quando $p = 0$, ou seja se $H(0) = \mathcal{P}_a\mathcal{Q}_b = R_n\Sigma_n S_n^T$, para relacionarmos as matrizes provindas da decomposição singular com as matrizes observabilidade e controlabilidade, de fato, uma escolha possível é se:

$$\mathcal{P}_a = R_n\Sigma_n^{\frac{1}{2}} \tag{3.37}$$

$$\mathcal{Q}_b = \Sigma_n^{\frac{1}{2}} S_n^T \tag{3.38}$$

Esta escolha parece fazer com que $\mathcal{P}_a$ e $\mathcal{Q}_b$ sejam balanceados. A partir da (3.28) fica claro que as primeiras r colunas formam a matriz de entrada B, enquanto as primeiras linhas de h formam a matriz de saída C. Agora com $p = 1$ podemos obter da equação (3.28) a seguinte notação:

$$H(1) = \mathcal{P}_a A\mathcal{Q}_b = R_n\Sigma_n^{\frac{1}{2}} A\Sigma_n^{\frac{1}{2}} S_n^T \tag{3.39}$$

Se isolarmos a matriz A a solução do sistema é de tal forma que:

$$A = R_n^T\Sigma_n^{-\frac{1}{2}} H(1)\Sigma_n^{-\frac{1}{2}} S_n \tag{3.40}$$

Embora a observação acima seja de alguma forma válida, uma prova matemática rigorosa é necessária para suportá-la.

Comecemos definindo uma matriz O_h como uma matriz nula de ordem h, e I_h uma matriz identidade de ordem h, sendo então um vetor que contenha esses valores, $E_h^T = [I_h, O_h, \ldots, O_h]$ onde h além de ordenar o tamanho do sistema é o numero de saídas, pois então há um vetor $E_r^T = [I_r, O_r, \ldots, O_r]$ em que r é o numero de entradas, esses vetores contendo tais matrizes nulas servem para a prova apenas como método de referencia as matrizes C e B. Agora usando todas definições postas até aqui, como das equações (3.27) , (3.28), (3.29), (3.34),(3.35) e (3.36), comecemos:

$$Y_p = E_h^T H(p-1)E_r \quad Da\ \ equa\textit{ç}\tilde{a}o(3.27) \tag{3.41}$$

$$= E_h^T\mathcal{P}_a A^{p-1}\mathcal{Q}_b E_r \quad Da\ \ equa\textit{ç}\tilde{a}o(3.27)\ \ e\ \ equa\textit{ç}\tilde{a}o(3.28) \tag{3.42}$$

Se multiplicarmos pela inidentidade a matriz não perderá a informação:

$$= E_h^T \mathcal{P}_a I A^{p-1} I \mathcal{Q}_b E_r \tag{3.43}$$

Porem da equação (3.29) :

$$= E_h^T \mathcal{P}_a \left(\mathcal{P}_a H^\top \mathcal{Q}_b\right) A^{p-1} \left(\mathcal{P}_a H^\top \mathcal{Q}_b\right) \mathcal{Q}_b E_r \tag{3.44}$$

Reorganizando os termos:

$$= E_h^T \mathcal{P}_a \mathcal{Q}_b H^\top \mathcal{P}_a A^{p-1} \mathcal{Q}_b H^\top \mathcal{P}_a \mathcal{Q}_b E_r \tag{3.45}$$

Observa-se que $\mathcal{P}_a \mathcal{Q}_b = H(0)$ e que $H^\top = S_n \Sigma^{-1} R_n^T$, logo:

$$= E_h^T H(0) S_n \Sigma^{-1} R_n^T \mathcal{P}_a A^{p-1} \mathcal{Q}_b S_n \Sigma^{-1} R_n^T H(0) E_r \tag{3.46}$$

Usando a equação (3.29) em $H(0)$:

$$= E_h^T R_n \Sigma_n S_n^T S_n \Sigma^{-1} R_n^T \mathcal{P}_a A^{p-1} \mathcal{Q}_b S_n \Sigma^{-1} R_n^T R_n \Sigma_n S_n^T E_r \tag{3.47}$$

Lembrando da definição da equação (3.35) e de que $\Sigma^{-1}\Sigma = 1$

$$= E_h^T \mathcal{P}_a A^{p-1} \mathcal{Q}_b E_r \tag{3.48}$$

Das equações (3.37) e (3.38) onde definimos $\mathcal{P}_a$ e $\mathcal{Q}_b$ pra decomposição singular:

$$= E_m^T R_n \Sigma_n^{\frac{1}{2}} A^{p-1} \Sigma_n^{\frac{1}{2}} S_n^T E_r \tag{3.49}$$

Agora abrindo o termo A^{p-1}, porém considerando a definição posta $A = R_n^T \Sigma_n^{-\frac{1}{2}} H(1) \Sigma_n^{-\frac{1}{2}} S_n$
:

$$= E_h^T R_n \Sigma_n^{\frac{1}{2}} \left(R_n^T \Sigma_n^{-\frac{1}{2}} H(1) \Sigma_n^{-\frac{1}{2}} S_n\right)^{p-1} \Sigma_n^{\frac{1}{2}} S_n^T E_r \tag{3.50}$$

Essa é a formulação básica da realização obtida pelo ERA, a triplete de equação que definiremos como matrizes realizadas, sendo a matriz de estados realizada:

$$\hat{A} = R_n^T \Sigma_n^{-\frac{1}{2}} H(1) \Sigma_n^{-\frac{1}{2}} S_n \tag{3.51}$$

a matriz de entrada realizada:

$$\hat{B} = \Sigma_n^{\frac{1}{2}} S_n^T E_r \tag{3.52}$$

A matriz de repostas realizada:

$$\hat{C} = E_h^T R_n \Sigma_n^{\frac{1}{2}} \tag{3.53}$$

Essa triplete de equações matriciais que são obtidas quando usamos a decomposição singular sobre a matriz de Hankel em $H(0)$ e então reduzimos a ordem da matrizes singulares, é chamado de minίma realização do sistema, ou seja, é de ordem n, sendo n definida a partir dos valores singulares. A realização do modelo no tempo discreto é representado então pelas matrizes $\hat{A}$, $\hat{B}$, $\hat{C}$ e $\hat{D} = 0$, que então podem ser retornados ao modelo continuo dependendo da linguagem de programação tratada.

Com essa formulação posta e a sequencia que vem desde a construção do modelo em matriz de Hankel da qual já reduziríamos o sinal, depois sua redução quando avaliarmos os valores singulares, e então a obtenção da triplete, nos informa as frequências e amortecimentos do sistema que podem então ser calculadas a partir dos autovalores da matriz estimada a partir das tripletes, porém é necessário que se faça o tratamento do sistema discreto para o continuo, seja nas matrizes de estados, ou nos autovalores obtidos da triplete discreta e então tratada para o modelo continuo.

Algumas informações devem ser salientadas, visto que devido ao ruído de medição, a não linearidade e o arredondamento pelo computador de um sinal real que será digitalizado, ou até perca informação devido a resolução do sensor usado, a matriz do bloco de dados $H(p)$ sera geralmente de classificação completa, o que não é, em geral, igual à ordem real do sistema em teste. Não deve ser o objetivo de obter uma realização do sistema que reproduza exatamente a sequência de informações do sistema a partir dos dados. Uma realização que produz uma versão suavizada da sequência de dados, e que represente de perto a dinâmica linear subjacente do sistema, é mais desejável.

Agora que realizamos o sistema, ou seja, criamos seus espaço de estados a partir do sinal de entrada, precisamos retirar suas informações modais que é o objetivo final deste trabalho. Primeiro devemos levar em conta que as saídas são consideradas matrizes discretas no tempo, visto que discretizamos sempre o sistema para tratarmos com dados reais.

Com o sistema agora realizado então as equações de espaço de estados ficará:

$$x(p) = \hat{A}x(p) + \hat{B}u(p) \tag{3.54}$$

$$y(p) = \hat{C}x(p) \tag{3.55}$$

Configurando assim a equação de espaço de estados, e rememorando pois o que é definindo sobre composição da matriz de estados, onde tal apresenta a informação sobre o aspecto físico do sistema, e tal aspecto é a parte necessária para a partir do sinal observarmos as propriedade modais como os modos de vibrar, as frequências naturais amortecidas e os coeficientes de amortecimento. Então primeiro vamos tirar os autovalores da matriz de estado realizada $\hat{A}$, expondo:

$$\lambda I - \hat{A} = 0 \tag{3.56}$$

Portanto obteremos segundo Juang e Richard S. Pappa (JUANG; PAPPA, 1984), autovalores repetidos devido ao tratamento matemático e obtenção computacional. Assim vamos retirar as n frequências de acordo com o tamanho do modelo reduzido da matriz de estado realizada, ou seja os autovalores $\Lambda = [\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n]$ e então os autovetores também podem ser obtidos $\Psi = [\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n]$.

Agora com os autovalores vamos extrair os parâmetros modais transformando os autovalores do modelo discreto em autovalores no espaço continuo (JUANG, 1994), se os autovalores são:

$$\lambda = \delta \pm j\omega \tag{3.57}$$

Ou seja os autovalores se constituem um valor real e um valor imaginário, onde δ é as taxas de amortecimento modais estruturais e frequências naturais amortecidas ω, porém agora passando para o tempo continuo com a formulação (JUANG, 1994) :

$$\lambda_{c_n} = \frac{ln(\lambda_n)}{dt} \tag{3.58}$$

Onde dt que denota a derivada temporal, em termos computacionais ou de um sinal real é o intervalo de tempo entre um sinal e outro, ou time-step. Com os autovalores contínuos podemos retirar as frequência naturais da parte imaginaria dos autovalores computados:

$$\omega_{c_n} = ima|\lambda_{c_n}| \tag{3.59}$$

Isso já nos informa a frequência natural do sistema em radianos por segundo Rad/s para a conversão em hertz apenas precisamos da trivial divisão:

$$f_n = \frac{\omega_{c_n}}{2\pi} \tag{3.60}$$

Com isso chegamos a principal definição do sistema, a frequência natural de resposta ao impulso, agora também podemos obter o fator de amortecimento quando retiramos o taxa de amortecimento δ_n que corresponde a parte real do autovalor:

$$\delta_{c_n} = rea|\lambda_{c_n}| \tag{3.61}$$

E com isso vamos obter o fator de amortecimento modal (fração do amortecimento crítico):

$$\zeta_n = \frac{\delta_{c_n}}{\omega_{c_n}^2 + \lambda_{c_n}^2} \quad (\times 100\%) \tag{3.62}$$

Dessarte obtemos os principais componentes que descrevem a resposta dinâmica de uma estrutura excitada há um impulso, ou seja, f_n que são as frequências naturais do sistema realizado, e também os fatores de amortecimento ζ_n dos n graus de liberdade definidos na redução do sistema pelos valores singulares, porém vale lembrar que de acordo com a literatura vigente neste trabalho, são sempre obtidos autovalores repetidos ou seja, se definimos a redução como n obteremos na saída do algoritmo $n/2$ frequências naturais e fatores de amortecimento, isso nos leva á um aspecto físico e aplicado a redução dos valores singulares, que devemos usar a redução de acordo com a quantidade de valores de frequências naturais que esperamos do sistema.

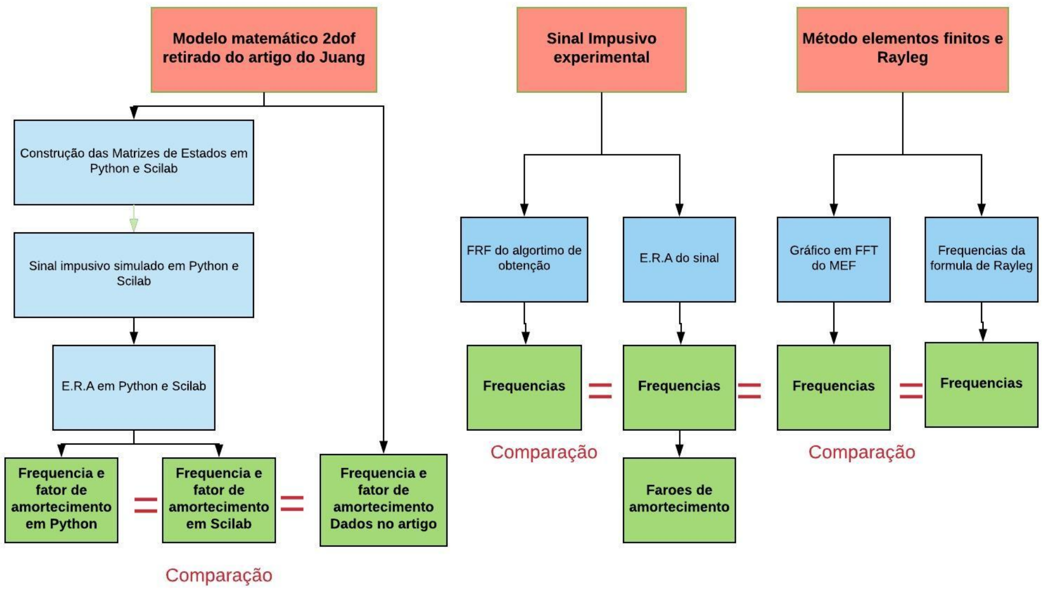
Formalmente construímos o algorítimo de realização miníma através do tratamento matemático, tal algorítimo é usado para analise modal aplicada porém com embasamento nas equações de teoria de controle como foi demonstrado. Toda forma matemática posta até aqui já serve para uma analise modal simplificada de um sistema controlado, essa forma é explicita de forma que seja feita e explorada pelos diferentes métodos computacionais bem como aberto há programação e construção do próprio sistema de aquisição baseado nas teorias de realização de sistema. O ERA apesar do tratamento matemático embasado pode ser utilizado para uma simples analise modal sem a necessidade dos usos de forças harmônicas como é de uso em formas de analises baseadas em FRF's, visto que é necessário apenas o impulso aplicado e a obtenção desse sinal em decaimento que será extraído tanto a frequência do sinal obtido quanto o amortecimento.

Capítulo 4

Conclusão

Para construir o algoritmo ERA e testar seu funcionamento antes de partirmos para parte experimental é necessário testa-lo em algum modelo já prefixado para compararmos seu funcionamento. Utilizando-se do modelo já presente neste trabalho utilizado por Juang (JUANG, 1994) de dois graus de liberdade, poderemos verificar o processo de identificação de sistemas. Depois com a verificação do funcionamento, passaremos para a parte experimental, começando para o teste em uma viga engastada, viga essa que podemos verificar suas frequências naturais através de métodos de elementos finitos (forma gráfica) e verificar também através do método de Rayleg (numérica) (LALANNE; BERTHIER; HAGOPIAN, 1983) , assim temos um método de comparação, porém dentro do algoritmo que obteremos o sinal há também embutido a FFT do sinal que nos dirá também as frequências, porém como estado do sinal em decaimento será uma resposta do tipo FRF, e assim podemos passar o sinal em decaimento através no algoritmo ERA e comprar sua identificação do modelo com a modelagem numérica e também com o sinal da FRF.

Figura 4.1: Diagrama sobre a obtenção dos resultados.



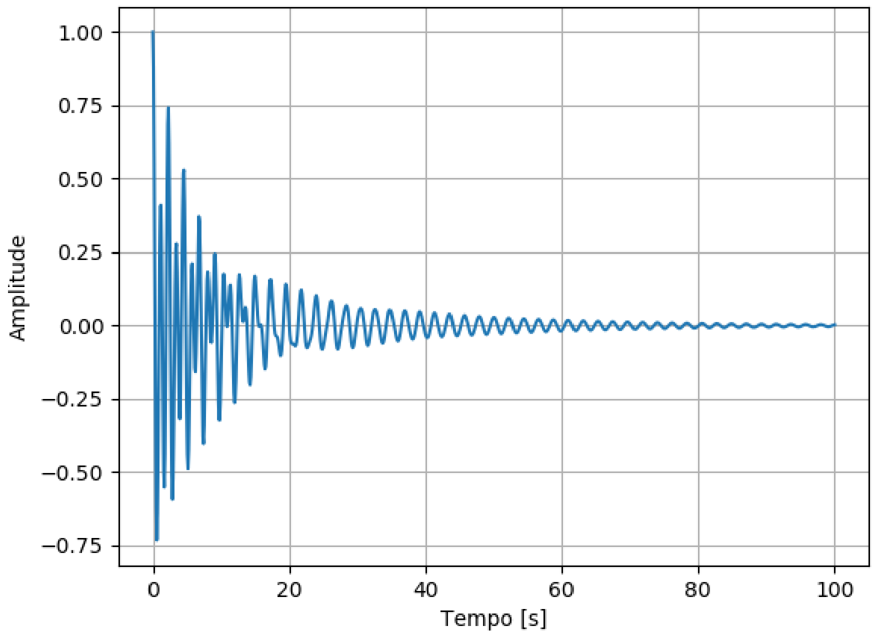
Fonte: Obtida pelo autor.

4.1 Simulação numérica para um sistema Massa-Mola-Amortecedor

Assim utilizaremos o modelo da figura 4.2 e como já foi feito na seção 2.3 sobre espaço de estados podemos simular ela como um resposta impulsiva e com o sinal proveniente alimentar o ERA seja na programação em Python ou em Scilab, ambas desenvolvidas neste trabalho.

Logo utilizando o modelo já simulado de dois graus de liberdade igual ao exemplo da seção 2.3.2 da figura 2.6 e do modelo matemático da equação (2.3.2), pode inferir o seguinte sinal impulsivo simulado.

Figura 4.2: Exemplo do Sinal simulado em Python.



Fonte: Obtida via simulação em Python.

O sinal referente a figura **??** simulado em Python é o mesmo referente ao simulado em Scilab no exemplo 2.3.2, a diferença entre os sinais está no numero de pontos visto que em Python foi feito um vetor de de 1000 pontos espaçados na razão de 0,1, isso é de acordo com a literatura o que chamamos de "*dt*"ou Time-step ou seja a razão de tempo entre os sinais, esse é um ponto muito importante no tratamento do sinal no que se refere a conversão do tempo discreto para o continuo, tanto em Python quanto em Scilab. Em Scilab a razão entre os ponto é de 0,01.

Também é necessário ponderar algumas questões quanto as bibliotecas utilizadas. Em Scilab como é um programador com uma IDE especifica para engenharia ele já apresenta algumas bibliotecas nativas como as funções *hank* que é a construção da matriz de Hankel, *svd* que é a decomposição em valores singulares, e para a simulação do impulso e construção do modelo no espaço de estados a função *syslin* e função *csim* atrelada ao *'impulse'*. Porém em Python como uma linguagem mais aberta é necessário a obtenção de bibliotecas importadas que contenham tais funções, a biblioteca *scipy.signal* que utiliza as funções *StateSpace* para construir o modelo no estado de espaços e *impulse* para simular o impulso no mesmo. E para a construção do ERA a biblioteca *scipy.linalg* da qual contem a função *hankel* para construção da matriz de Hankel e a função *svd* para a decomposição em valores singulares.

Tabela 4.1: Resultados computacionais comparados com (JUANG, 1994)

Parâmetro	Juang	ERA Python	ERA Scilab
Frequência 1 Hz	0.4594	0.4539	0.4594
Frequência 2 Hz	0.8714	0.8609	0.8714
Fator 1	1.443	1.4594	1.4434
Fator 2	2.739	2.7383	2.7386

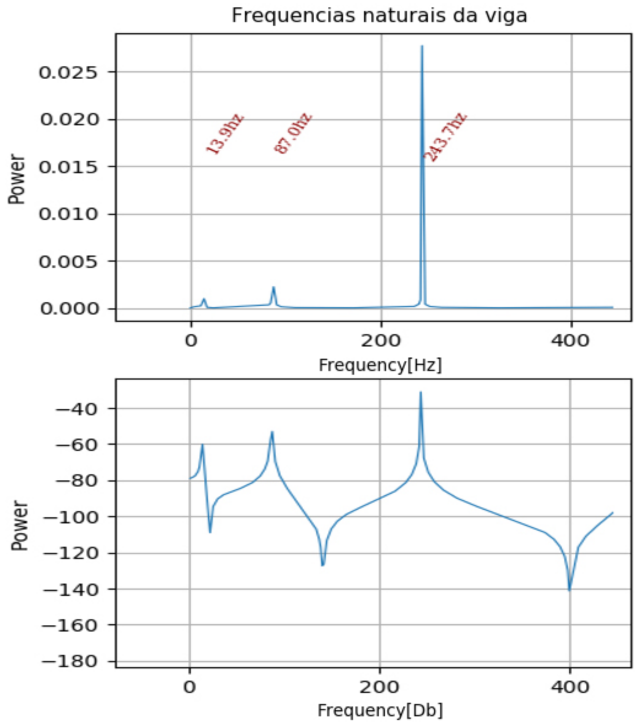
Assim os primeiros resultados apresentados na tabela 4.1 são apenas para o teste do funcionamento do ERA para um sinal de resposta impulsiva.

Ponderando-se as operações computacionais bem como a narrativa de ter que saber o tempo entre os sinais o ERA em Scilab representa uma certa precisão, claro que com pontos devidamente espaçados, o que não retira do Python tal precisão do método. Porém devemos levar em conta que esses dados são devidamente simulados sem qualquer indicio de ruido ou tratamento de sinal necessário, a precisão pode ser discutida devido a simulação e a o espaçamento entre os dados já posto na simulação, o que não acontece na obtenção experimental visto que a obtenção de sinal pode ter fatores como o ruido proveniente do próprio acelerômetro, da rede elétrica ou até mesmo do impacto.

4.2 Simulação numérica via método dos Elementos Finitos

Precedente aos resultados experimentais é necessário um método de comparação, os dois métodos utilizados sendo o MEF, método de elementos finitos, e a formulação introduzida pelos conceitos de Rayleigh onde chega na equação da frequência para viga engasta, ambas podem ser encontrada em literaturas elementos finitos e vibrações mecânicas (LALANNE; BERTHIER; HAGOPIAN, 1983), como não fazem parte do escopo deste trabalho apenas passarei explicando rapidamente como foi utilizada ambas. Primeiro com o método de elementos finitos descrito para a viga e com as entradas sendo os parâmetros físicos da mesma obtemos uma resposta gráfica como segue na figura:

Figura 4.3: Três primeiras frequências do Método de elementos Finitos.



Fonte: Obtida via simulação em Python.

E com a formulação dada em (LALANNE; BERTHIER; HAGOPIAN, 1983) para a viga também obtemos as repostas de frequências.

$$w_i = \frac{\eta_i^2}{L^2} * \sqrt{\frac{EI_0}{\rho Ar}} \tag{4.1}$$

Como dita na (4.1) podemos obter as frequências sabendo as i-ésimas condições de contorno. Para a viga engastada de um lado e livre do outro a literatura nos entrega η, que são os parâmetros de condições iniciais, como segue na tabela a seguir:

Agora com ambos os métodos podemos por em evidencia as três primeiras frequências da viga esperada devido a simulação e devida a equação proposta na tabela 4.3.

Os resultados do Métodos dos elementos finitos FEM, foi obtido via autovalores da matriz rigidez K, e da matriz rigidez M que foram construídas para a simulação.

Tabela 4.2: Coeficientes η .

Coeficiente	1	2	3	4
η	1.8751	4.6941	10.9956	14.1371

Fonte:(LALANNE; BERTHIER; HAGOPIAN, 1983)

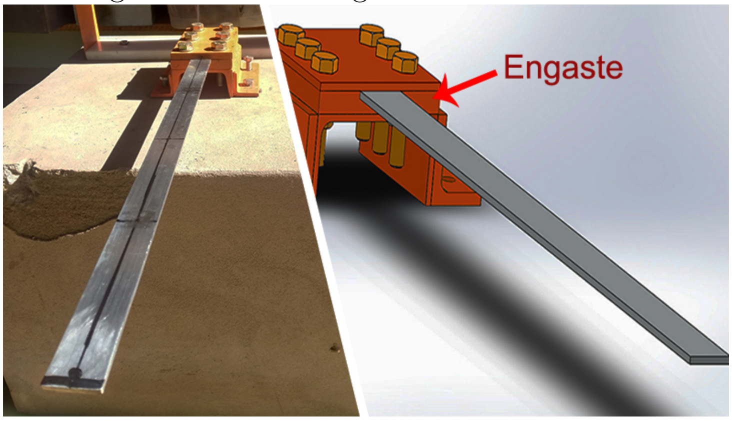
Tabela 4.3: Resultados computacionais da viga.

Frequências	FEM	Equação da Frequência
Frequência 1 Hz	14.304	13.895
Frequência 2 Hz	87.655	87.079
Frequência 3 Hz	243.873	243.826

4.3 Indentificação Experimental

Para o começo dos testes experimentais foi utilizado uma viga devidamente engastada com um mecanismo já projetado para testes do tipo modal e de deformação, assim a viga de alumino apresenta um bom engaste, e também foi utilizado um bloco de concreto como uma bancada inercial para o teste onde será fixado o experimento.

Figura 4.4: Viga de alumínio engastada e fixada no bloco inercial.

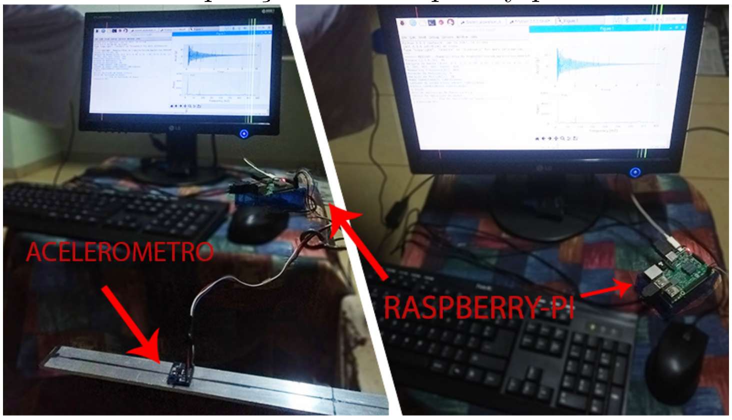


Fonte: Obtida e editada pelo autor.

4.4 Materiais e Métodos

Para a utilização do experimento foi posto em evidencia uma viga que será nosso material de teste, tal viga está fixada em um tipo de engaste projetado para que ela fique fixa o mais firme possível e todo esse conjunto está fixo em uma bancada inercial. O sistema de aquisição fica por conta de um Raspberry-Pi 3 conectando em suas portas GPIO um acelerômetro do tipo MEMS, micro machinado, e com o algorítimo de obtenção de sinal na linguagem Python com o mostrador do sinal do tempo e também na FFT, isso será de muita utilidade para comparação com o ERA.

Figura 4.5: Sistema de aquisição com Raspberry-pi e micro Acelerômetros

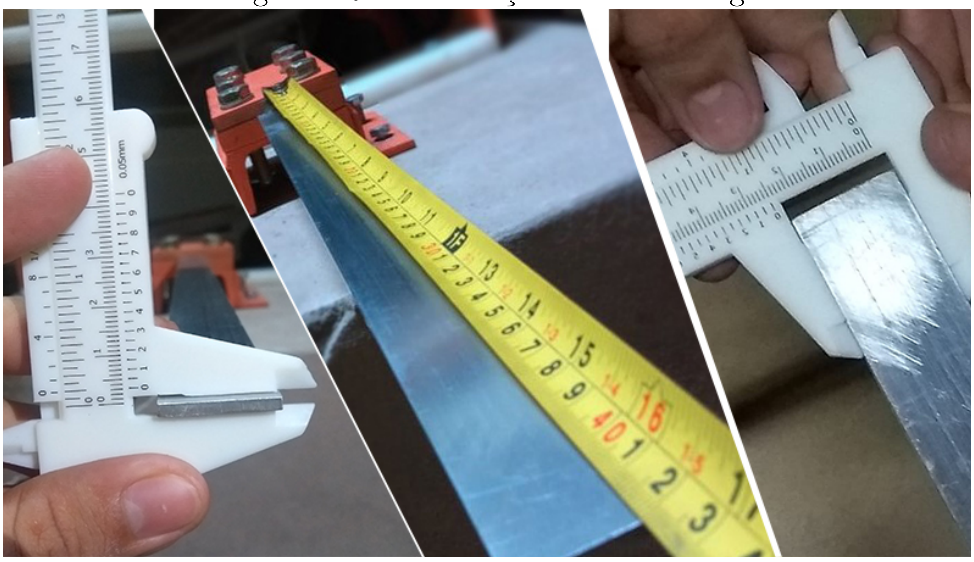


Fonte: Obtida e editada pelo autor.

Então dos itens utilizados como materiais:

- Viga de alumino: largura $420mm$, espessura $25mm$ e altura $3mm$, com massa especifica segundo as literaturas $2700[kg/m^3]$ e Módulo de Young de $69[GPa]$;

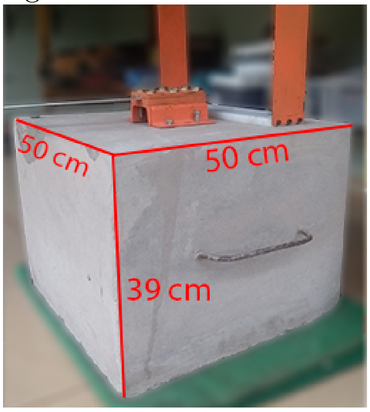
Figura 4.6: Mensurações físicas da viga



Fonte: Obtida e editada pelo autor.

- Bloco inercial: $39cm \times 50cm \times 50cm$, peso estimado de $195Kg$;

Figura 4.7: Bancada inercial



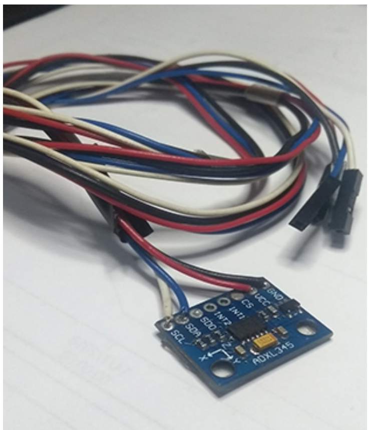
Fonte: Obtida e editada pelo autor.

Figura 4.8: Raspberry Pi 3 model B

Fonte: Obtida e editada pelo autor.

- Raspberry Pi 3 model B;
- Acelerômetro Adxl345;

Figura 4.9: Acelerômetro Adxl345



Fonte: Obtida e editada pelo autor.

- Martelo de impacto com cabeça de Nylon;

Figura 4.10: Martelo de cabeça de nylon arredondado

Fonte: Obtida e editada pelo autor.

Dentre os Materiais citados o objeto de impulso utilizado é um martelo de porte pequeno de cabeça de nylon, da forma que ele apresenta uma forma arredondada no local de impacto torna mais pontual a localidade do impulso. Tal martelo é utilizado por profissionais que reparam latarias de carro e por isso é indicado para materiais metálicos.

Dentre o método do experimento a viga foi dívida como mostra na figura a seguir, assim obtemos localidades espaçadas chamando de ponto zero o começo da viga aonde fica o engaste, e a partir dali numa razão de $105mm$ a partir do ponto zero foi traçado pontos onde seriam fixados os acelerômetros e aonde seria posto o impulso através do martelo utilizado para tal. assim chamando de localização do acelerômetro de 1,2,3 e 4, começando da ponta da viga, desta forma começando fixando o acelerômetro em 1 obtendo três sinais referentes ao impulso em $315mm, 210mm, 105mm$ e depois realocando o acelerômetro para o ponto 2 e aplicando o impulso em $420mm, 210mm, 105mm$ e assim por diante até o ponto 4. Logo podemos obter uma variedade de sinais para posteriormente serem analisados pelo ERA e comparados juntamente a FFT já embutida no sistema de aquisição e ao modelos numéricos de elementos finitos e a equação das frequências para viga engasta.

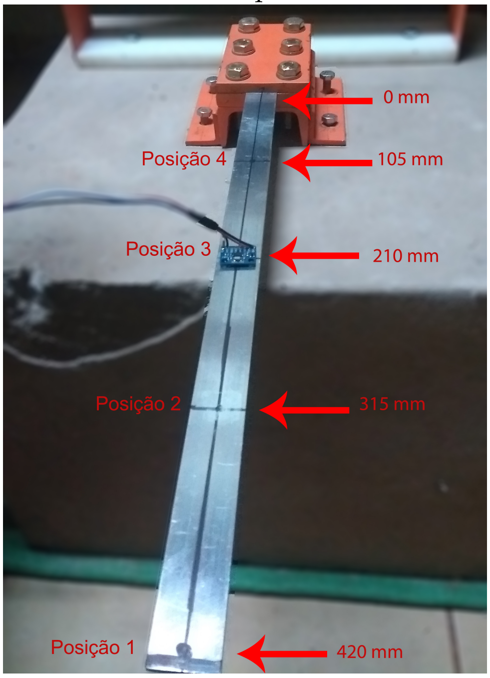
Outra problemática sobre a aquisição de sinal é quanto a janela de obtenção de sinal, uma das entradas do algoritmo é a o tempo de aquisição, com isso é decidido em tela o momento de começo da obtenção do sinal, e então quando impulsionamos a viga existe um tempo entre a leitura do primeiro sinal devido ao impulso e o começo da janela, assim existe um número de sinais que são apenas ruídos e que devem ser eliminados (ou cortados) para que a entrada do algoritmo ERA comece de fato na entrada do impulso e depois siga pelo decaimento do sinal.

Da forma que é mostrada na figura a seguir:

4.5 Resultados

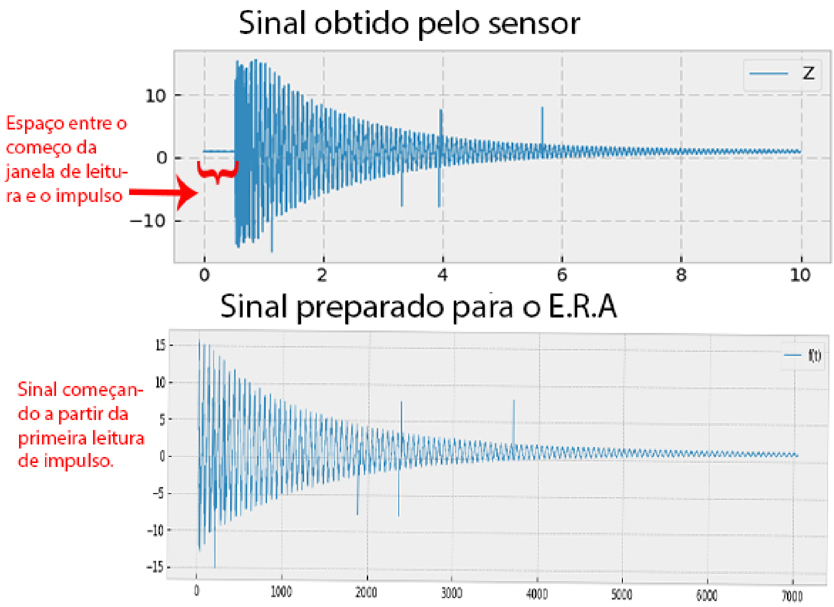
Com todos os materiais pré-dispostos, foi utilizado daqui em diante tanto a programação do sistema de aquisição quanto o próprio ERA em linguagem Python, e então foi obtido uma variedade de sinais em variação dos pontos de medição de acordo com os posicionamentos do sensor e da aplicação de força, logo dentre os sinais seleciona-se os que tem os melhores desempenhos quanto ao numero de frequência e a limpeza do ruido. Dentre alguns sinais obtidos serão listado a seguir de acordo com a posição do sensor e do local de impulso e mostrado as frequências obtidas pela FFT embutida no algorítimo de aquisição e comparado com o mesmo sinal quando tratado no algorítimo ERA. Todas

Figura 4.11: Posicionamentos do impulso e das localizações do sensores



Fonte: Obtida e editada pelo autor.

Figura 4.12: Corte necessário ao sinal

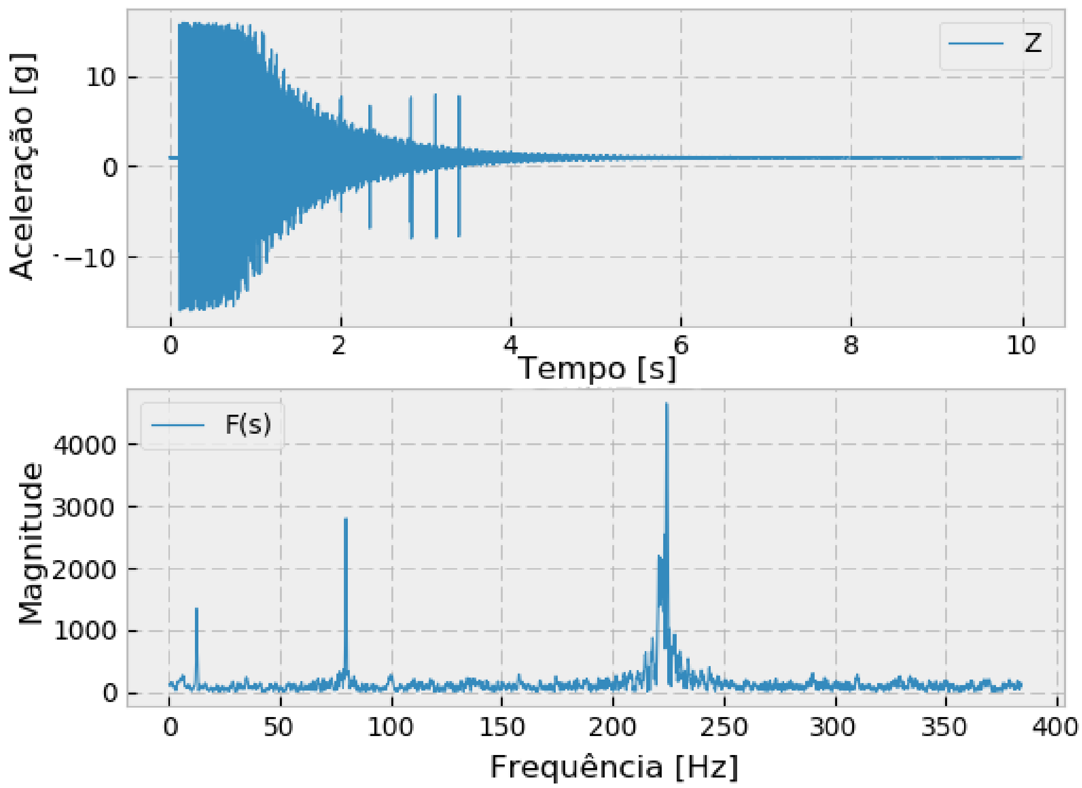


Fonte: Obtida via Python e editada pelo autor.

matrizes de Hankel foram fixadas em 3500×3500 pontos visto que as janelas de obtenção foram fixadas em 10 segundos de aquisição e geram em torno de 10000 pontos.A frequência de obtenção fixada em 800 Hz visto que de acordo com a analise numérica iriamos obter até a terceira frequência e esta é uma frequência que o acelerômetro Adxl345 apresenta uma boa resolução de sinal. A redução usada na decomposição fico a cargo de quantos frequências seriam possíveis visualizar, e isso depende de quantos pico de frequência a FFT apresenta, assim se usarmos uma redução em 8 obteremos 4 frequências, visto que já foi comentado o fato do método matemático usado dar autovalores repetidos.

4.5.1 Posição do sensor em 1 e impulso em 105mm

Figura 4.13: Sinal no sensor localizado em 1 em impulso aplicado há 105mm do engaste.



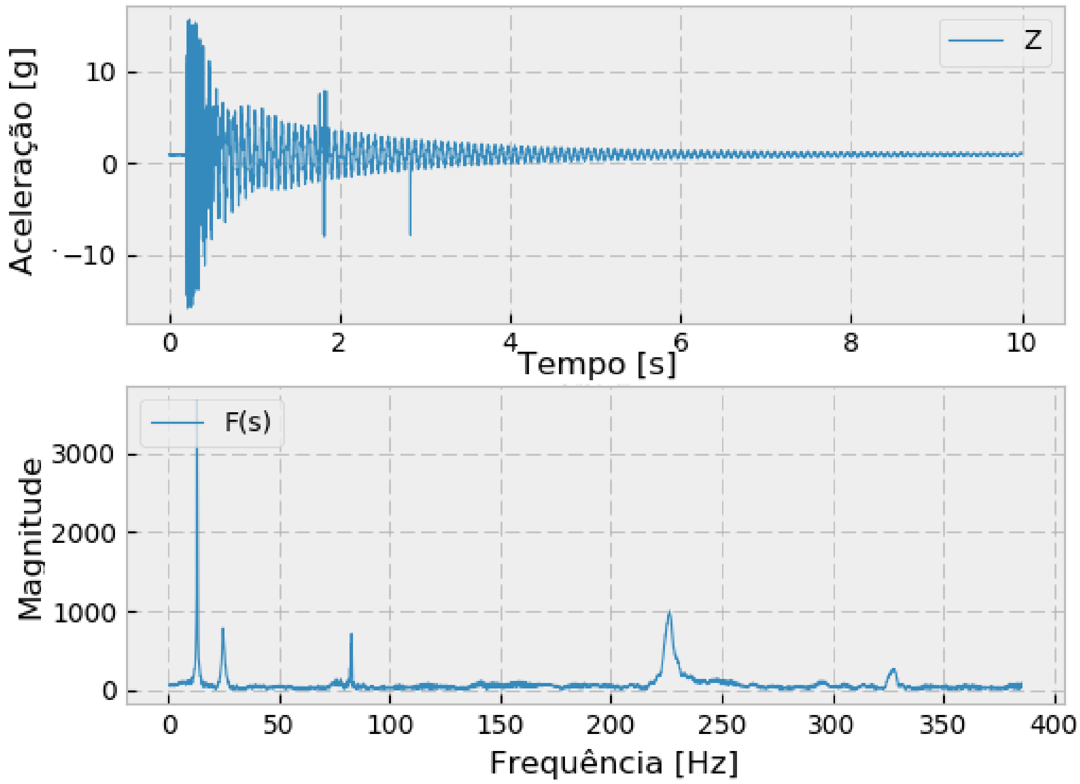
Fonte: Obtida em experimento realizado pelo autor.

Tabela 4.4: Resultados do ERA e da FRF.

	FRF do Sinal [Hz]	Frequência ERA [Hz]	Amortecimento ERA [%]
1	12.3645	none	0.6554
2	79.8205	78.75	1.3078
3	224.3597	221.44	0.5957

4.5.2 Posição do sensor em 2 e impulso em 105mm

Figura 4.14: Sinal no sensor localizado em 2 em impulso aplicado há 105mm do engaste.



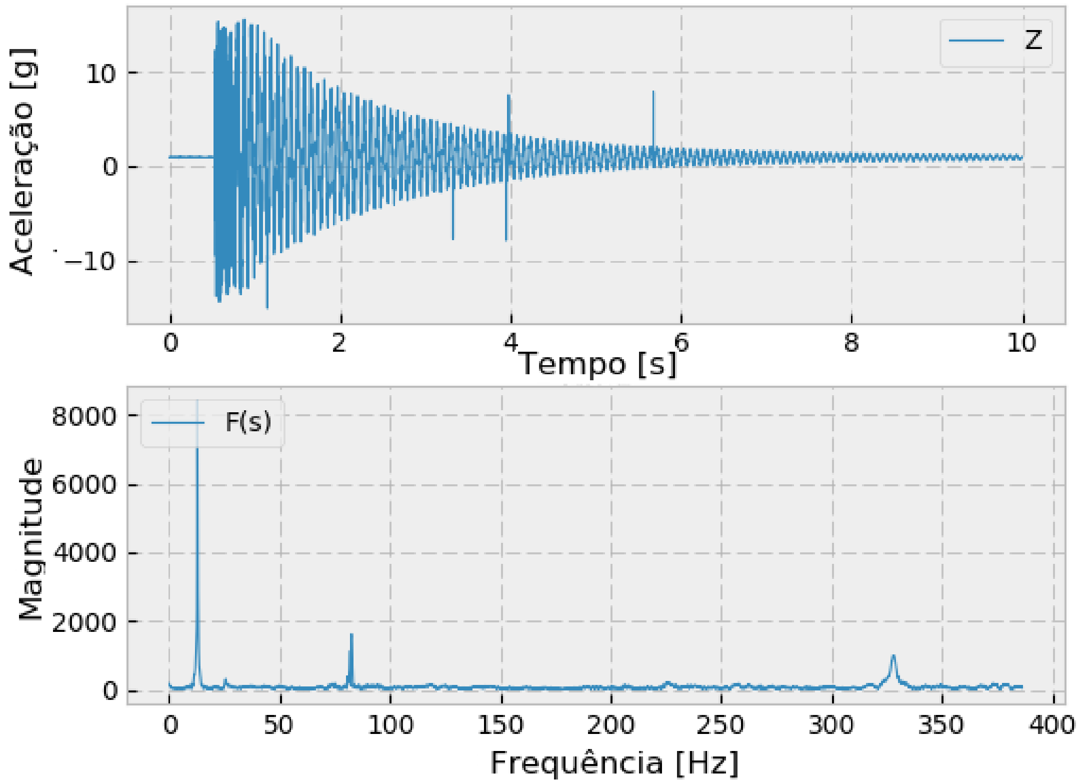
Fonte: Obtida em experimento realizado pelo autor.

Tabela 4.5: Resultados do ERA e da FRF.

	FRF do Sinal [Hz]	Frequência ERA [Hz]	Amortecimento ERA %
1	12.8029	12.6955	0.6554
2	82.7071	78.7446	1.3078
3	226.451	222.9997	0.5957

4.5.3 Posição do sensor em 2 e impulso em 210mm

Figura 4.15: Sinal no sensor localizado em 2 em impulso aplicado há 210mm do engaste.



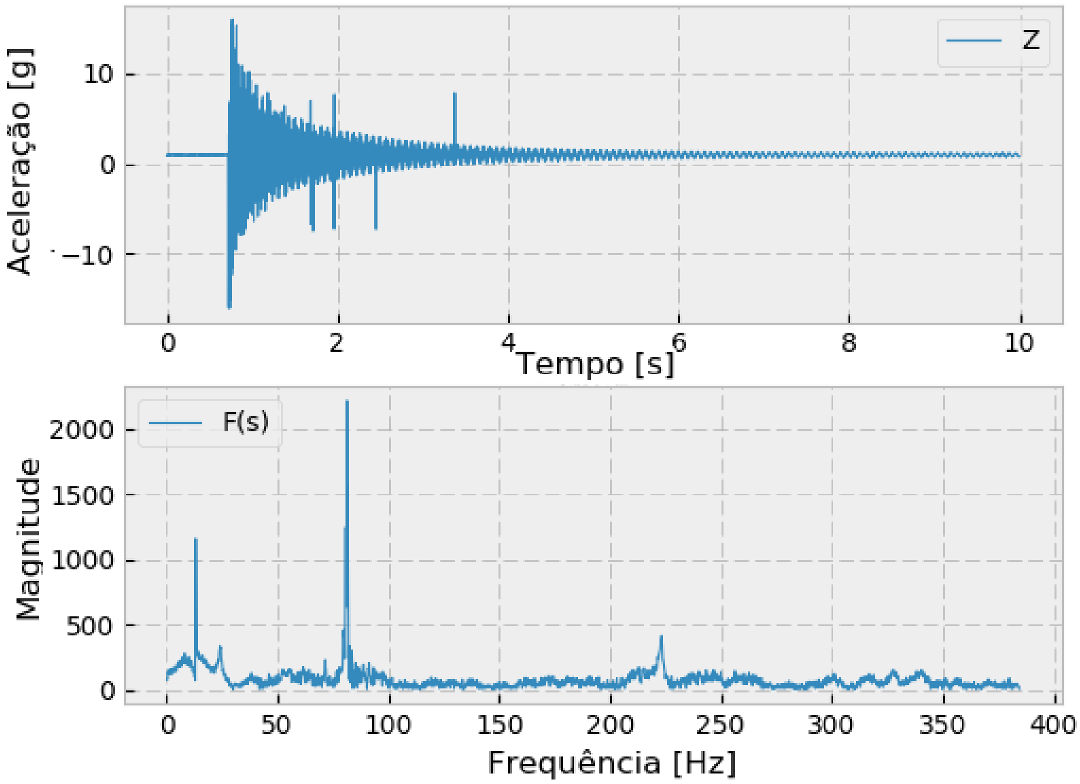
Fonte: Obtida em experimento realizado pelo autor.

Tabela 4.6: Resultados do ERA e da FRF.

	FRF do Sinal [Hz]	Frequência ERA [Hz]	Amortecimento ERA [%]
1	12.8033	12.6616	0.539
2	82.6212	81.4313	0.0739
3	none	none	none

4.5.4 Posição do sensor em 4 e impulso em 420mm

Figura 4.16: Sinal no sensor localizado em 4 em impulso aplicado há 420mm do engaste.



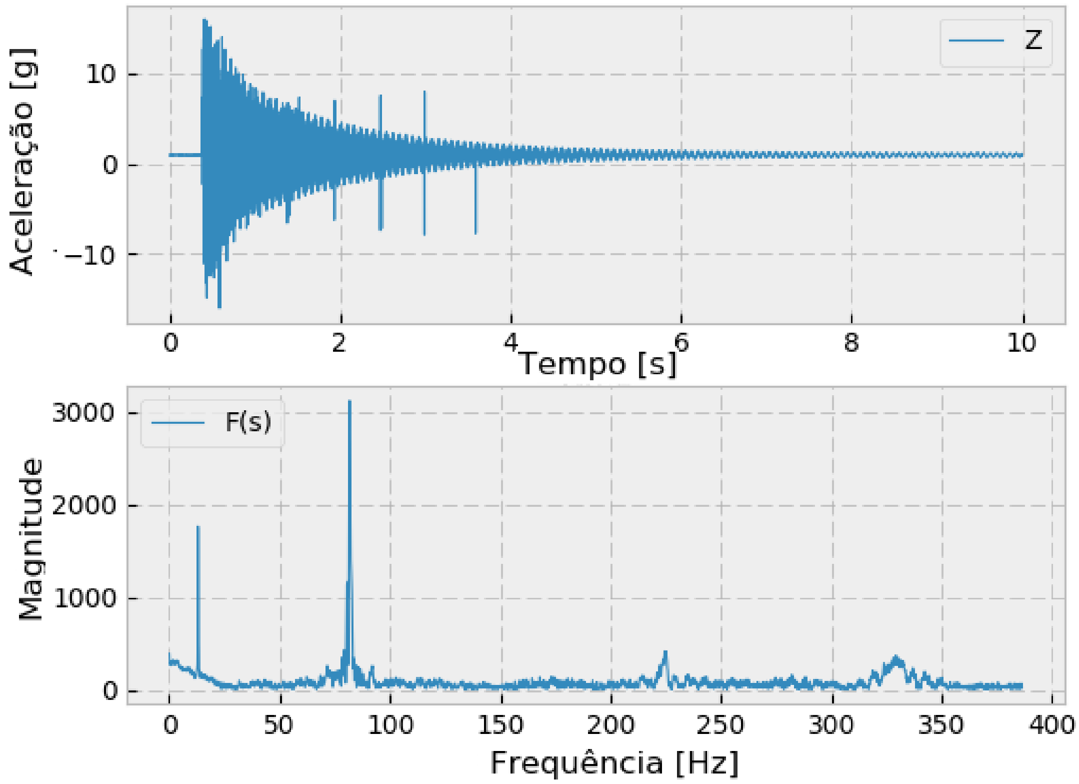
Fonte: Obtida em experimento realizado pelo autor.

Tabela 4.7: Resultados do ERA e da FRF.

	FRF do Sinal [Hz]	Frequência ERA [Hz]	Amortecimento ERA [%]
1	13.1023	12.9686	0.4935
2	81.435	80.3972	0.1401
3	none	none	none

4.5.5 Posição do sensor em 4 e impulso em 210mm

Figura 4.17: Sinal no sensor localizado em 4 em impulso aplicado há 210mm do engaste.



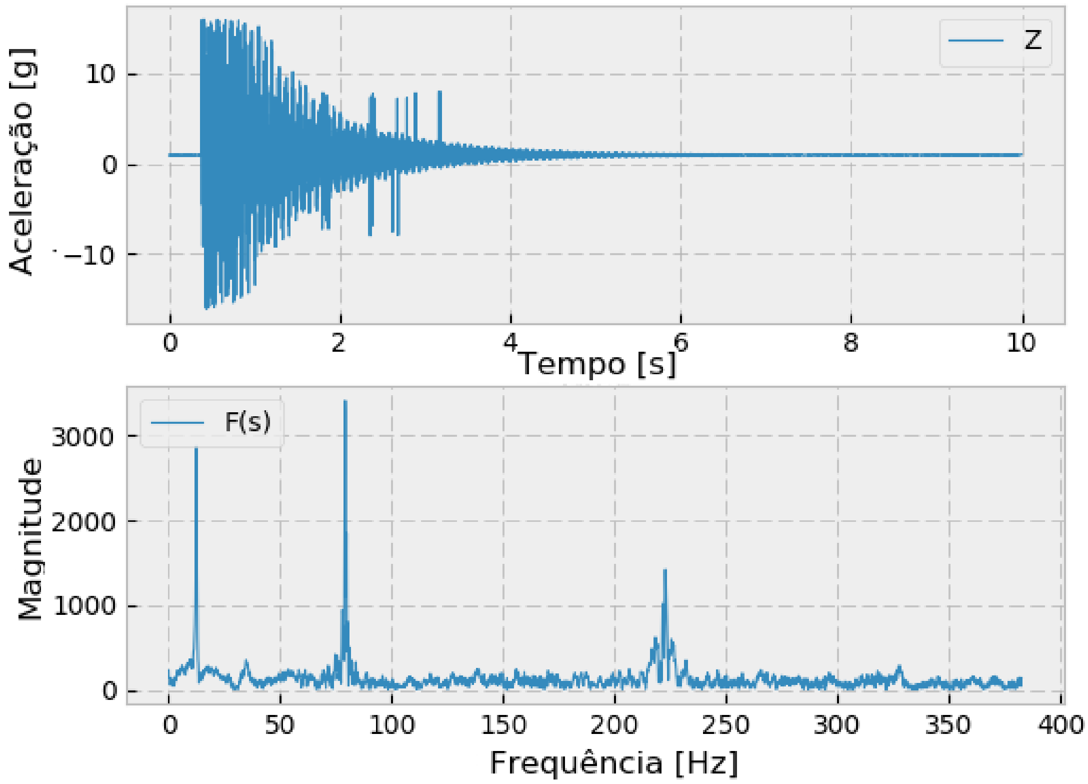
Fonte: Obtida em experimento realizado pelo autor.

Tabela 4.8: Resultados do ERA e da FRF.

	FRF do Sinal [Hz]	Frequência ERA [Hz]	Amortecimento ERA [%]
1	13.1039	12.9071	1.0648
2	81.8216	80.8283	0.2489
3	none	none	none

4.5.6 Posição do sensor em 1 e impulso em 210mm

Figura 4.18: Sinal no sensor localizado em 1 em impulso aplicado há 210 mm do engaste.



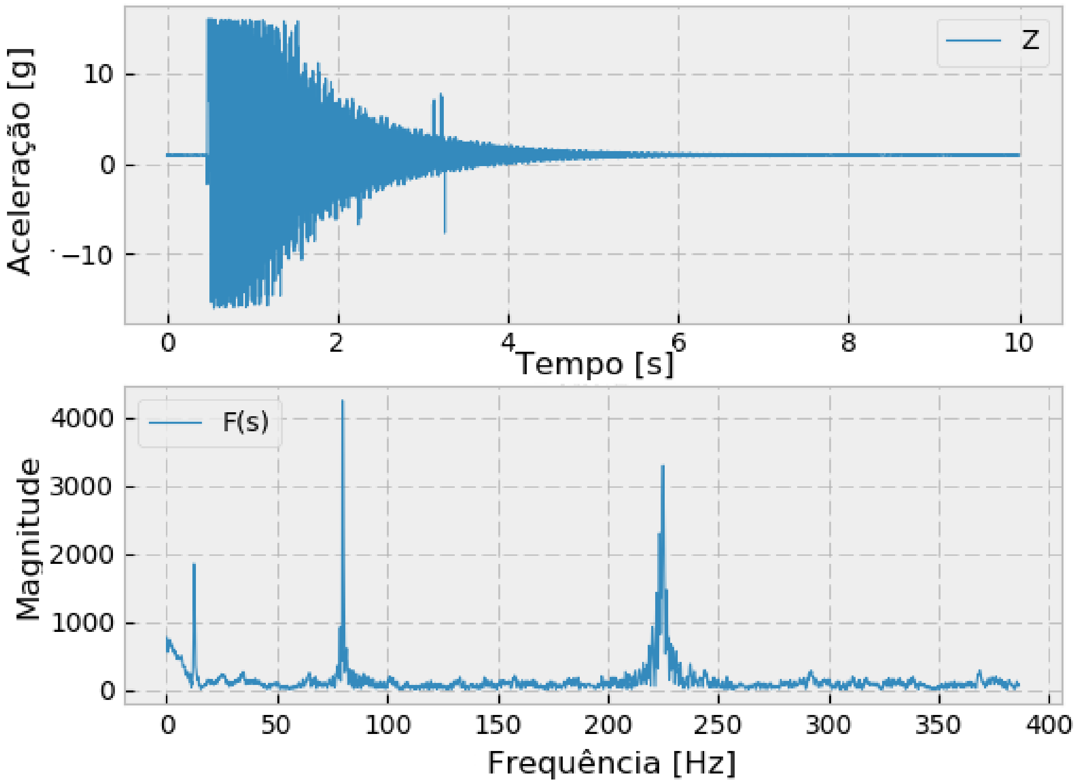
Fonte: Obtida em experimento realizado pelo autor.

Tabela 4.9: Resultados do ERA e da FRF.

	FRF do Sinal [Hz]	Frequência ERA [Hz]	Amortecimento ERA [%]
1	12.4024	12.2251	1.4143
2	79.2161	78.1992	0.1311
3	222.845	219.8308	0.0889

4.5.7 Posição do sensor em 1 e impulso em 315mm

Figura 4.19: Sinal no sensor localizado em 1 em impulso aplicado há 315 mm do engaste.



Fonte: Obtida em experimento realizado pelo autor.

Tabela 4.10: Resultados do ERA e da FRF.

	FRF do Sinal [Hz]	Frequência ERA [Hz]	Amortecimento ERA [%]
1	12.4037	12.3465	1.6366
2	79.8222	78.8712	0.0821
3	225.162	223.2039	0.0926

4.6 Considerações Finais

Os sinais apresentados foram devidamente selecionados apos a obtenção e alimentados no algoritmo ERA, então os resultados provenientes foram comparados aos da FRF. Também podemos observar que há algumas diferenças entre os sinais, alguns apresentam melhor a terceira frequência, e os mesmos quando alimentados no ERA apresentam também a terceira frequência, isso evidencia ainda mais a certeza da identificação. Podemos discorrer também sobre os resultados da 4.4 onde apesar de apresentar na FRF do sinal as três primeiras frequências, não foi identificada no E.R.A a primeira frequência, mesmo que mudando os mudado o tamanho da redução da qual fixei para obter 8 valores singulares, logo 8 solução por autovetores repetidos e então 4 frequência, e disso para 6 valores singulares e depois para 10 , mas mesmo assim continuou fixo os valores entorno de 80 hz e 220 hz sem um valor que aproximasse da primeira frequência nos outros resultados pedidos.

Para que seja posto as diferenças do modelo simulado e do modelo identificado, utilizarei dos resultados da tabela 4.12 4.9 e 4.5 pois apresentam as três primeiras frequências identificadas, e com a media aritmética dos resultados que abrangem as três frequências para que os dados fiquem dispostos igualmente:

Tabela 4.11: Média aritmética dos Resultados do ERA e da FRF.

	FRF [Hz]	ERA [Hz]
1	12.5363	12.4224
2	80.5818	78.6050
3	224.8193	222.0115

Então podemos comparar agora com os outros dois métodos para uma aproximação dos resultados teóricos do modelo com os resultados identificados do modelo.

Tabela 4.12: Comparação dos Resultados

	FRF [Hz]	ERA [Hz]	Elementos Finitos [Hz]	Equação da frequência [Hz]
1	12.5363	12.4224	14.304	13.895
2	80.5818	78.6050	87.655	87.079
3	224.8193	222.0115	232.873	243.826

Com essa comparação numérica dos resultados podemos observar algumas questões, primeiro que os dados do ERA se comparados a resposta gráfica do FRF apresenta um bom resultado do método experimental, segundo que apesar de em uma escala numérica maior todos os resultados se mostram apresentáveis, o modelo simulado apresenta uma certa distancia dos outros dois métodos experimentais, visto que as entradas deles são apenas os dados geométricos da viga, que foram fielmente medidos, e os dados de massa especifica e módulo de Youg, dados esses que foram utilizados de literaturas, visto que não temos acesso a esses dados. Então comprometo a dizer que o modelo matemático desta viga apresenta a necessidade de modificação em discrepância aos resultados experimentais, principalmente quanto a essas duas entradas (Massa especifica e módulo de Young).

Outro juízo a cerca do ERA é quanto as identificações das matrizes de estados, A, B, C, que claro são parte do algorítimo e são de uso em sistemas de controle moderno, e que são identificadas no modelo experimental em tempo discreto, e que deixo em aberto a talvez utilização posterior em foco deste assunto.

Fechando mais a cerca do desenvolvimento matemático do ERA, foi posto em evidencia as formulações matemáticas e também as evidencias computacionais, e de fato o ERA se mostra com menos operações matemáticas arrojadas comparados a FFT ou FRF, apesar de especificas, para o tratamento dos sinais, e pondero que sua conclusão e talvez um posterior refino se deve ao tratamento discreto-continuo, que deve ser mais aprofundado se utilizado em função de teorias de controle. Ouve limitações quanto as programações no que se refere a este fato, visto que as linguagens utilizadas não apresentam bibliotecas (conhecidas pelo autor) que abrangem esse tratamento se não as operações utilizadas para retirar as frequências e fatores de amortecimento.

Por vias dos fatos, o Eigensystem Realization Algorithm ou ERA, ou ainda algorítimo de realização de auto sistemas, mostrou-se de fato funcional na identificação do modelo da viga, ponderando-se que a simulação numérica apresentou uma certa distancia da FRF e do ERA, porém ambos se correlacionaram bem (ERA e FRF) o que nos indicam que a teoriza de realização foi de fato concluída, visto que identificamos o modelo através do sinal pelo ERA comparamos um de seus parâmetros, a frequência, á um tratamento já disposto a FRF, e demonstramos que o modelo simulado necessita de um certo ajuste, ou seja é exatamente o ponto principal do trabalho, identificar o modelo através da experimentação e realizar os ajustes de modelo.

Referências Bibliográficas

AVITABILE, P. Experimental modal analysis - A simple non-mathematical presentation. *S V*, v. 35, n. A simple non-mathematical presentation, p. 20–31, Jan 2001. ISSN 0038-1810. Disponível em: ⟨https://www.researchgate.net/publication/292660833_Experimental_modal_analysis_-_A_simple_non-mathematical_presentation⟩.

BALACHANDRAN, B.; MAGREB, E. B. *Vibrações Mecânicas*. Cengage CTP, 2010. ISBN 978-852210905-0. Disponível em: ⟨https://www.amazon.com.br/Vibra\%C3\%A7\%C3\%B5es-Mec\%C3\%A2nicas-Balakumar-Balachandran/dp/8522109052⟩.

CHANDRAVANSHI, M. L.; MUKHOPADHYAY, A. K. Modal Analysis of Structural Vibration. *ResearchGate*, v. 14, Nov 2013.

CHEN, C.-T. *Linear System Theory and Design*. Oxford University Press, USA, 1999. ISBN 978-019995957-0. Disponível em: ⟨https://www.amazon.com.br/Linear-System-Theory-Design-Chi-Tsong/dp/0199959579⟩.

GILBERT, E. G. Controllability and Observability in Multivariable Control Systems. *Journal of the Society for Industrial and Applied Mathematics, Series A: Control*, Society for Industrial and Applied Mathematics, Jul 1963. Disponível em: ⟨https://epubs.siam.org/doi/abs/10.1137/0301009⟩.

GOLUB, G. H.; REINSCH, C. Singular Value Decomposition and Least Squares Solutions. *SpringerLink*, Springer, Berlin, Heidelberg, p. 134–151, 1971.

HE, W.; LIU, J. *Active Vibration Control and Stability Analysis of Flexible Beam Systems*. Springer, 2019. ISBN 978-981107538-4. Disponível em: ⟨https://www.amazon.com.br/Vibration-Control-Stability-Analysis-Flexible/dp/9811075387⟩.

HO, B. L.; KALMAN, R. E. Editorial: Effective construction of linear state-variable models from input/output functions. *at - Automatisierungstechnik*, OLDENBOURG WISSENSCHAFTSVERLAG, v. 14, n. 1-12, p. 545–548, Dec 1966. ISSN 2196-677X.

IBRAHIM, S. R.; MIKULCIK, E. C. A Method for the Direct Identification of Vibration Parameters from the Free Response. *Shock Vibration Bull*, v. 47, n. 4, Oct 1977. Disponível em: ⟨https://www.researchgate.net/publication/23589765_A_Method_for_the_Direct_Identification_of_Vibration_Parameters_from_the_Free_Response⟩.

JUANG, J.-N. *Applied System Identification*. Prentice Hall, 1994. ISBN 978-013079211-2. Disponível em: ⟨https://www.amazon.com/Applied-System-Identification-Jer-Nan-Juang/dp/013079211X⟩.

JUANG, J.-N.; PAPPA, R. S. An eigensystem realization algorithm for modal parameter identification and model reduction. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, Nov 1984.

JUANG, R. Mathematical correlation of modal parameter identification methods via system realization theory. *NASA Langley Research Center; Hampton, VA, United States*, Apr 1986. [Online; accessed 14. Oct. 2018]. Disponível em: ⟨https://ntrs.nasa.gov/search.jsp?R=19860015548⟩.

JUANG, R. S. P. *Eigensystem Realization Algorithm User's Guide* . NASA Technical Memorandum 109066, 1994. ISBN 321. Disponível em: ⟨https://ntrs.nasa.gov/archive/nasa/casi.ntrs.nasa.gov/19940032311.pdf⟩.

KAILATH, T. *Linear Systems*. Prentice-Hall, Inc., 1980. ISBN 978-013536961-6. Disponível em: ⟨https://www.amazon.com/Linear-Systems-Thomas-Kailath/dp/0135369614⟩.

KALMAN, R. E. Mathematical Description of Linear Dynamical Systems. *Journal of the Society for Industrial and Applied Mathematics, Series A: Control*, Society for Industrial and Applied Mathematics, Jul 1963. Disponível em: ⟨https://epubs.siam.org/doi/abs/10.1137/0301010?journalCode=sjcodc.1&⟩.

KLEMA, V.; LAUB, A. The singular value decomposition: Its computation and some applications. *IEEE Trans. Autom. Control*, IEEE, v. 25, n. 2, p. 164–176, Apr 1980. ISSN 0018-9286.

LALANNE, M.; BERTHIER, P.; HAGOPIAN, J. D. *Mechanical Vibrations for Engineers*. John Wiley & Sons Inc, 1983. ISBN 978-047190197-6. Disponível em: ⟨https://www.amazon.com/Mechanical-Vibrations-Engineers-Michel-Lalanne/dp/0471901970⟩.

NISE, N. S. *Engenharia de Sistemas de Controle*. LTC, 2017. ISBN 978-852163435-5. Disponível em: ⟨https://www.amazon.com.br/Engenharia-Sistemas-Controle-Norman-Nise/dp/8521634358⟩.

OGATA, K. *Engenharia de Controle Moderno*. Pearson, 2010. ISBN 978-857605810-6. Disponível em: ⟨https://www.amazon.com.br/Engenharia-Controle-Moderno-Katsuhiko-Ogata/dp/8576058103⟩.

PAPPA, R. S.; JUANG, J.-N. Some experiences with the Eigensystem Realization Algorithm. *ResearchGate*, v. 22, n. 1, Mar 1988. Disponível em: ⟨https://www.researchgate.net/publication/23816182_Some_experiences_with_the_Eigensystem_Realization_Algorithm⟩.

PAPPALARDO, C. M.; GUIDA, D. System identification and experimental modal analysis of a frame structure. *Engineering Letters*, v. 26, n. 1, p. 56–68, Feb 2018. ISSN 1816-093X. Disponível em: ⟨https://www.researchgate.net/publication/323277067_System_identification_and_experimental_modal_analysis_of_a_frame_structure⟩.

RAO, S. *Vibrações Mecânicas*. Pearson, 2008. ISBN 978-857605200-5. Disponível em: ⟨https://www.amazon.com.br/Vibra\%C3\%A7\%C3\%B5es-Mec\%C3\%A2nicas-Singiresu-Rao/dp/8576052008⟩.

STEWART, G. W. On the Early History of the Singular Value Decomposition. *SIAM Rev.*, Society for Industrial and Applied Mathematics, Jul 2006. Disponível em: ⟨https://epubs.siam.org/doi/abs/10.1137/1035134⟩.

VARANIS, M.; SILVA, A. L.; MERELES, A. G. On mechanical vibration analysis of a multi degree of freedom system based on arduino and MEMS accelerometers. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, v. 40, n. 1. ISSN 1806-1117.

WIBERG, D. *State space and linear systems*. McGraw-Hill, 1971. (Schaum's outline of theory and problems). Disponível em: ⟨https://books.google.com.br/books?id=DbbnMgEACAAJ⟩.