UNIVERSIDADE ESTADUAL DE MARINGÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA
(Doutorado)

Rafael Afonso Barbosa

Sobre Hipersuperfícies Quase Ordinárias

Maringá - PR
2021

RAFAEL AFONSO BARBOSA

Sobre Hipersuperfícies Quase Ordinárias

Tese submetida ao corpo docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Estadual de Maringá - UEM-PR, como parte dos requisitos necessários à obtenção do grau de Doutor.

Orientador: Marcelo Escudeiro Hernandes.

Maringá - PR
2021

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
(Biblioteca Setorial BSE-DMA-UEM, Maringá, PR, Brasil)

Barbosa, Rafael Afonso
B238s Sobre hipersuperfícies quase ordinárias / Rafael Afonso Barbosa. -- Maringá, 2021.
iv, 98 f. : il.

Orientador: Prof. Dr. Marcelo Escudeiro Hernandes.
Tese (doutorado) - Universidade Estadual de Maringá, Centro de Ciências Exatas, Programa de Pós-Graduação em Matemática - Área de Concentração: Álgebra, 2021.

1. Hipersuperfície quase ordinária. 2. Invariantes topológicos. 3. Invariantes analíticos. 4. Quase-ordinary hypersurface. 5. Topological invariants. 6. Analytical invariants. I. Hernandes, Marcelo Escudeiro, orient. II. Universidade Estadual de Maringá. Centro de Ciências Exatas. Programa de Pós-Graduação em Matemática - Área de Concentração: Álgebra. III. Título.

CDD 22.ed. 512

Edilson Damasio CRB9-1.123

RAFAEL AFONSO BARBOSA

SOBRE HIPERSUPERFÍCIES QUASE ORDINÁRIAS

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática do Departamento de Matemática, Centro de Ciências Exatas da Universidade Estadual de Maringá, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do título de Doutor em Matemática tendo a Comissão Julgadora composta pelos membros:

COMISSÃO JULGADORA:

Professor Dr. Marcelo Escudeiro Hernandes - Universidade Estadual de Maringá (Presidente)
Professor Dr. Cícero Fernandes de Carvalho - Universidade Federal de Uberlândia-MG
Professor Dr. João Carlos Ferreira Costa - Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho - São José do Rio Preto-SP
Professor Dr. Jorge Luiz Deolindo Silva - UFSC-Universidade Federal de Santa Catarina – Blumenau-SC
Professor Dr. Ednei Aparecido Santulo Júnior - Universidade Estadual de Maringá

Aprovado em: 15 de março de 2021
Local de defesa: videoconferência, via https://meet.google.com/uxf-oaqj-skv

Agradecimentos

Ao Prof. Dr. Marcelo Escudeiro Hernandes pela orientação, por toda dedicação, ensinamentos, conselhos e incentivo.

Aos meus pais, Valdir e Maria Aparecida, meu irmão Renato, pela força e pelo carinho que sempre me prestaram ao longo de toda a minha vida acadêmica.

A Mariana, Elisabete e Mário por todo o seu carinho e apoio.

A todos os amigos que de uma forma direta ou indireta, contribuíram na elaboração da presente tese.

Ao DMA-PMA-UEM e FACET-UFGD por propiciarem as condições ideais para a execução deste trabalho.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

Resumo

Este trabalho trata de aspectos relacionados com hipersuperfícies quase ordinárias. Dentre as principais contribuições, destacamos a apresentação de um método que permite encontrar um conjunto de geradores para a subálgebra gerada pelas componentes de uma parametrização de uma hipersuperfície quase ordinária.

Apresentamos um modo de obter uma hipersuperfície quase ordinária em $\mathbb{C}^r$ a partir de uma hipersuperfície quase ordinária de $\mathbb{C}^s$ com $s < r$ e estudamos a relação entre dados topológicos e analíticos das mesmas.

Além disto, mostramos que os expoentes generalizados de Zariski, introduzidos em [20], são invariantes analíticos e utilizando tal invariante procedemos a classificação analítica de superfícies quase ordinárias com gênero 1 que são *quase simples*.

Palavras-chave: Hipersuperfícies quase ordinárias, Invariantes topológicos, Invariantes analíticos.

Abstract

This work deals with related aspects of quasi-ordinary hypersurface. Among the main contribuitions we present a method that allows to find a set of generators for the subalgebra generated by the components of a parameterization of a quasi-ordinary hypersurface.

We present a method of obtaining a quasi-ordinary hypersurface in $\mathbb{C}^r$ by a quasi-ordinary hypersurface of $\mathbb{C}^s$ with $s < r$ and we study the relations between topological and analytical data of them.

Moreover, we show that the generalized Zariski exponents, introduced in [20], are analytical invariants and using this invariant we proceed the analytical classification of quasi-ordinary surfaces with genus 1 that are *quasi simple*.

Key words: Quasi-ordinary hypersurface, Topological invariants, Analytical invariants.

Sumário

Introdução

No estudo de singularidades, os objetos mais básicos a serem considerados são as curvas planas. Para o passo seguinte temos várias direções naturais a serem tomadas, podemos considerar curvas espaciais, hipersuperfícies, etc.

Neste trabalho, abordamos uma categoria de hipersuperfícies que possuem algumas propriedades que são generalizações das curvas planas: hipersuperfícies quase ordinárias.

Seja $(\mathcal{X}, 0) \subset (\mathbb{C}^{r+1}, 0)$ um germe de uma hipersuperfície irredutível dada por uma equação $f = 0$, isto é, o germe do conjunto $\{P \in \mathbb{C}^{r+1}; f(P) = 0\}$. Dizemos que $(\mathcal{X}, 0) \subset (\mathbb{C}^{r+1}, 0)$ é uma hipersuperfície quase ordinária se existem coordenadas locais nas quais $f \in \mathbb{C}\{X_1, \cdots, X_r\}[X_{r+1}]$ é um polinômio de Weierstrass quase ordinário (veja Definição 1.3).

Pelo Teorema de Abhyankar-Jung (veja [1]) uma hipersuperfície quase ordinária admite uma parametrização da forma

$$H = (t_1^n, \cdots, t_r^n, S(t_1, \cdots, t_r))$$

com $S(t_1, \cdots, t_r) \in \mathbb{C}\{t_1, \cdots, t_r\}$.

Lipman, em [17], introduz a noção de parametrizações normalizadas para hipersuperfícies quase ordinárias e garante que toda hipersuperfície quase ordinária admite (a menos de mudanças de coordenadas) uma parametrização com propriedades particulares, denominada parametrização normalizada. Em particular, uma parametrização normalizada admite expoentes que se destacam e que são conhecidos como expoentes característicos generalizados. Tais expoentes são de fato especiais, pois Lipman mostrou, em [17] e [18], que ao tomarmos uma parametrização normalizada teremos sempre os mesmos expoentes característicos generalizados e que tais expoentes determinam o tipo topológico da hipersuperfície quase ordinária. A recíproca também é válida, ou seja, o tipo topológico de uma hipersuperfície quase ordinária permite recuperar os expoentes característicos generalizados. Tal resultado foi provado por Gau em [5]. Estes aspectos, que também estão presentes na teoria de curvas planas irredutíveis, ou seja, o tipo topológico é completamente determinado por certos expoentes presentes em uma parametrização particular.

Ainda para curvas planas, um outro objeto que caracteriza o tipo topológico e que é considerado por vários autores é o chamado semigrupo de valores. Objeto similar foi introduzido para uma hipersuperfície quase ordinária. Tal objeto foi descrito simultaneamente de formas distintas, porém equivalentes, por Popescu-Pampu e González Pérez. Além disto, esse semigrupo é determinado e determina os expoentes característicos e portanto, é um invariante topológico completo de uma hipersuperfície quase ordinária.

Este trabalho apresenta contribuições para a Teoria das hipersuperfícies quase ordinárias irredutíveis, dadas por meio de parametrizações normalizadas, focando principalmente as propriedades do ponto de vista analítico.

No Capítulo 1 apresentamos nosso principal objeto de estudo, as hipersuperfícies quase ordinárias. Relembramos de maneira sucinta alguns conceitos sobre séries de potências, necessários para definir as quase ordinárias, e destacamos os principais resultados relacionados a tal objeto, como por exemplo, a noção de expoente dominante $\mathcal{V}(h)$ de uma série h, o conceito de semigrupo, semirraízes, expoentes generalizados de Zariski, etc. Não apresentamos demonstrações, porém indicamos referências de onde podem ser encontradas.

O Capítulo 2, tem um apelo algébrico e introduz conceitos que podem ser futuramente usados para o estudo de tópicos mais gerais da Álgebra Comutativa com perspectivas computacionais. A principal contribuição relacionada ao tema central deste trabalho pode ser sintetizada como segue. Dada $H = (t_1^n, \cdots, t_r^n, S(t_1, \cdots, t_r))$ uma parametrização de uma hipersuperfície quase ordinária, apresentamos um método que permite obter um conjunto $F_g = \{f_1, \cdots, f_{r+g}\}$ de geradores para a subálgebra $\mathbb{C}\{B\} \subseteq \mathbb{C}\{t_1, \cdots, t_r\}$ gerada por $B = \{t_1^n, \cdots, t_r^n, S(t_1, \cdots, t_r)\}$. Para tal conjunto temos que $\{\mathcal{V}(f_i); 1 \leq i \leq r + g\}$ coincide com o conjunto de geradores do semigrupo de Γ_H de H, ou seja, apresentamos um modo alternativo para obtermos Γ_H e um sistema completo de semirraízes.

No Capítulo 3 apresentamos uma descrição de hipersuperfícies quase ordinárias particulares em $\mathbb{C}^r$ a partir de uma hipersuperfície quase ordinária de $\mathbb{C}^s$ com $s < r$. Dizemos que tais hipersuperfícies assim obtidas estão associadas uma à outra. Abordamos algumas relações entre seus invariantes, ou seja, como obter (parte dos) invariantes de uma quase ordinária em $\mathbb{C}^r$ por meio dos invariantes de uma hipersuperfície de dimensão menor associada a mesma.

Apresentamos um exemplo ilustrando que a propriedade de uma hipersuperfície quase ordinária estar associada à outra hipersuperfície quase ordinária é sensível por mudanças de coordenadas. Tal situação sugere, de maneira natural, a questão de identificar quais mudanças preservam tal propriedade, ou seja, o fato de uma hipersuperfície quase ordinária estar associada à uma outra hipersuperfície quase ordinária. Nesta direção, apresentamos condições suficientes para que as mudanças tenham tal propriedade. Várias questões relevantes sobre tal propriedade surgem, como por exemplo, hipersuperfícies quase ordinárias em $\mathbb{C}^r$ associadas a outras hipersuperfícies quase ordinárias equivalentes $\mathbb{C}^s$, são também equivalentes?

O Capítulo 4 tem como objetivo dar um primeiro passo na questão da equivalência analítica de superfícies quase ordinárias.

No caso de uma hipersuperfície quase ordinária dada por $f \in \mathbb{C}\{X_1, \cdots, X_{r+1}\}$, exceto para o caso em que $r = 1$, isto é, curva plana ou a hipersuperfície é normal, os invariantes clássicos como o número de Milnor $\mu_f = dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathbb{C}\{X_1, \cdots, X_r\}}{\langle f_{X_1}, \cdots, f_{X_{r+1}} \rangle}$ e o número de Tjurina $\tau_f = dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathbb{C}\{X_1, \cdots, X_r\}}{\langle f, f_{X_1}, \cdots, f_{X_{r+1}} \rangle}$ são $\mu_f = \tau_f = \infty$, não permitindo que possamos utilizá-los para estratificar o problema de classificação analítica. Deste modo, invariantes analíticos mais específicos se fazem necessários para abordar o problema da classificação analítica de hipersuperfícies quase ordinárias.

Nesta direção, retomamos o conceito expoentes generalizados de Zariski, introduzidos em [20], e mostramos que tais expoentes são invariantes analíticos. Utilizando tal invariante apresentamos a classificação de superfícies quase ordinárias de gênero 1 e com a propriedade de que em sua classe topológica há um número enumerável de classes analíticas distintas, propriedade que chamamos de *quase simples*.

Capítulo 1

Hipersuperfícies Quase Ordinárias

Vamos introduzir, neste capítulo, nosso principal objeto de estudo: as hipersuperfícies quase ordinárias. Para isso, primeiro vamos relembrar de maneira sucinta alguns conceitos sobre séries de potências necessários para definir tal objeto.

Para os conceitos básicos sobre séries de potências indicamos [9] e para as provas dos resultados sobre hipersuperfícies quase ordinária indicamos [5], [7], [16] e [21].

Considere $\mathbb{C}\{\underline{X}\} := \mathbb{C}\{X_1, \cdots, X_r\}$ a $\mathbb{C}-$álgebra das séries de potências analíticas nas indeterminadas $X_1, \cdots, X_r$ com coeficientes no corpo $\mathbb{C}$ dos números complexos, o qual é um domínio local de fatoração única.

Definição 1.1. *Seja $f \in \mathbb{C}\{\underline{X}\} \setminus \{0\}$ tal que $f = \sum_{j=n}^{\infty} P_j$, em que cada P_j é um polinômio homogêneo de grau j e $P_n \neq 0$. O inteiro n é chamado de multiplicidade de f e será denotado por $mult(f)$. Se $f = 0$, então convencionamos que $mult(f) = \infty$.*

Seguem as seguintes propriedades:

1. $mult(u) = 0$ se, e somente se, $u \in \mathbb{C}\{\underline{X}\}$ é uma unidade.
2. $mult(fh) = mult(f) + mult(h)$.
3. $mult(f \pm h) \geq min\{mult(f), mult(h)\}$ com igualdade sempre que $mult(f) \neq mult(h)$.
4. $mult(\Phi(f)) = mult(f)$ para todo $f \in \mathbb{C}\{\underline{X}\}$ e Φ um $\mathbb{C}$-automorfismo de $\mathbb{C}\{\underline{X}\}$.

Muitas das informações envolvendo séries de potências se mantêm inalteradas por multiplicação por unidade e por automorfismos. Por exemplo, segue das propriedades acima, que multiplicidade de séries é uma destas.

O conceito abaixo é importante para o que será introduzido.

Definição 1.2. *Um polinômio em* $\mathbb{C}\{\underline{X}\}[X_{r+1}]$ *da forma,*

$$p(X_1, \cdots, X_r, X_{r+1}) = X_{r+1}^n + a_1(\underline{X})X_{r+1}^{n-1} + \cdots + a_n(\underline{X})$$

com $n \geq 1$ *é chamado um polinômio de Weierstrass, se* $mult(a_i(\underline{X})) \geq i$ *para todo* $i = 1, \cdots, n$.

Segue de [9], que dado $f \in \mathbb{C}\{\underline{X}, X_{r+1}\}$ com $mult(f) = n$, existe uma unidade u e um automorfismo Φ de $\mathbb{C}\{\underline{X}, X_{r+1}\}$, tais que $u\cdot \Phi(f) \in \mathbb{C}\{\underline{X}\}[X_{r+1}]$ é um polinômio de Weierstrass de grau n.

Vamos relembrar agora o conceito de resultante e discriminante de um polinômio.

Sejam A um domínio, $p = a_0Y^n + a_1Y^{n-1} + \cdots + a_{n-1}Y + a_n$ e $q = b_0Y^m + b_1Y^{m-1} + \cdots + b_{m-1}Y + b_m \in A[Y]$, com $a_0 \neq 0 \neq b_0$. O *resultante* (em Y) dos polinômios p e q é definido por $R_Y(p, q) = det(R)$ em que R é a matriz $(n + m) \times (n + m)$ dada por

$$R = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & . & . & a_{n-1} & a_n & 0 & . & . & 0 & 0 \\ 0 & a_0 & a_1 & . & . & a_{n-1} & a_n & 0 & . & . & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & . & 0 & a_0 & a_1 & . & . & . & . & a_{n-1} & a_n \\ b_0 & b_1 & . & . & . & . & b_{m-1} & b_m & . & 0 & 0 \\ 0 & b_0 & b_1 & . & . & . & . & b_{m-1} & b_m & . & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & . & . & . & 0 & b_0 & b_1 & . & b_{m-1} & b_m \end{pmatrix}$$

onde os coeficientes de $p(Y)$ aparecem nas m primeiras linhas e os coeficientes de $q(Y)$ aparecem nas n últimas linhas.

Se $p, q \in A[Y] \setminus A$, então também podemos calcular o resultante de p e q da seguinte maneira:

$$R_Y(p, q) = a_0^m b_0^n \prod_{i=1}^{n} \prod_{j=1}^{m} (\xi_i - \eta_j) = a_0^m \prod_{i=1}^{n} q(\xi_i) = (-1)^{nm} b_0^n \prod_{j=1}^{m} p(\eta_j)$$

em que ξ_i e η_j são raízes de p e q, respectivamente. Vale observar que o resultante é zero se, e somente se, p e q têm ao menos uma raiz comum.

O *discriminante* de um polinômio $p = a_0Y^n + a_1Y^{n-1} + \cdots + a_{n-1}Y + a_n \in A[Y]$ com $a_0 \neq 0$ e $n > 1$ é definido por

$$\Delta_Y p = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}-1} a_0 R_Y(p, p_Y) = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}-1} a_0^{2n-2} \prod_{i \neq j} (\xi_i - \xi_j)$$

com ξ_k, $k=1,\cdots,n$, raízes de p e p_Y é a derivada de p com respeito a Y.

Agora, com tais conceitos, podemos apresentar a definição de polinômio de Weierstrass quase ordinário. Tal definição permite uma caracterização algébrica de uma hipersuperfície quase ordinária.

Definição 1.3. *Dizemos que um polinômio de Weierstrass $f \in \mathbb{C}\{\underline{X}\}[X_{r+1}]$ é quase ordinário se*

$$\Delta_{X_{r+1}} f = X_1^{\delta_1} X_2^{\delta_2} \cdots X_r^{\delta_r} u$$

em que $u \in \mathbb{C}\{\underline{X}\}$ é uma unidade e $\delta_i \in \mathbb{N}$ para $i = 1, \cdots, r$.

No que segue $(\mathcal{X}, 0) \subset (\mathbb{C}^{r+1}, 0)$ denota um germe de uma hipersuperfície dada por uma equação $f = 0$, isto é, o germe[1] do conjunto $\{P \in \mathbb{C}^{r+1}; f(P) = 0\}$.

Dizemos que $(\mathcal{X}, 0) \subset (\mathbb{C}^{r+1}, 0)$ é uma *hipersuperfície quase ordinária*, se existem coordenadas locais $(X_1, \cdots, X_r, X_{r+1})$ de modo que $(\mathcal{X}, 0)$, nestas coordenadas, é dada por $\{(\alpha_1, \cdots, \alpha_{r+1}) \in \mathbb{C}^{r+1}; f(\alpha_1, \cdots, \alpha_{r+1}) = 0\}$ com $f \in \mathbb{C}\{\underline{X}\}[X_{r+1}]$ um polinômio de Weierstrass e o conjunto dos zeros do discriminante da projeção $pr : (\mathcal{X}, 0) \to (\mathbb{C}^r, 0)$, dada por $(X_1, \cdots, X_r, X_{r+1}) \longmapsto (X_1, \cdots, X_r)$, estando contido em $X_1. \cdots .X_r = 0$.

A definição anterior é equivalente a dizer que f é um polinômio de Weierstrass quase ordinário nas coordenadas mencionadas, veja [17], isto é:

Definição 1.4. *Dizemos que uma hipersuperfície dada por um polinômio de Weierstrass*

$$f = X_{r+1}^n + a_1 X_{r+1}^{n-1} + \cdots + a_{n-1} X_{r+1} + a_n \in \mathbb{C}\{\underline{X}\}[X_{r+1}]$$

é quase ordinária se,

$$\Delta_{X_{r+1}} f = X_1^{\delta_1} X_2^{\delta_2} \cdots X_r^{\delta_r} u$$

com u unidade em $\mathbb{C}\{\underline{X}\}$ e $\delta_i \in \mathbb{N}$ para $i = 1, \cdots, r$.

Deste ponto em diante, com intuito de simplificar a escrita, usaremos a abreviação h.q.o. para nos referirmos a uma hipersuperfície quase ordinária. As vezes utilizamos o termo *quase ordinária* para nos referir a uma h.q.o..

Se $r = 1$, então obtemos o conjunto de exemplos mais simples de hipersuperfícies quase ordinárias, as curvas planas. De fato, dada uma curva plana definida por $f \in \mathbb{C}\{X_1, X_2\}$, por meio de mudanças de coordenadas (se necessário) e fazendo uso do

[1]Se $0 \in A \subset \mathbb{C}^{r+1}$, então o germe $(A, 0)$ de A (em 0) é a classe de equivalência determinada pela relação que identifica dois conjuntos $A, B \subset \mathbb{C}^{r+1}$ se, e somente se, existem abertos $U, V \subset \mathbb{C}^{r+1}$ contendo a origem, tais que $U \cap A = V \cap B$.

Teorema da Preparação de Weierstrass, podemos considerar, sem perda de generalidade, que $f = X_2^n + \sum_{i=1}^n a_i(X_1)X_2^{n-i}$ é um polinômio de Weierstrass. Note que $a_i(X_1) \in \mathbb{C}\{X_1\}$ para $i = 1, \cdots, n$, deste modo temos que $\Delta_{X_2} f = X_1^{\delta_1} u(X_1)$ com $\delta_1 \in \mathbb{N}^*$, $u(X_1)$ é unidade em $\mathbb{C}\{X_1\}$ e, consequentemente, f é um polinômio de Weierstrass quase ordinário.

O próximo exemplo mostra que a propriedade de um polinômio de Weierstrass ser quase ordinário pode ser afetada quando efetuamos mudanças de coordenadas.

Exemplo 1.5. *Consideremos* $f(X, Y, Z) = Z^2 - XY^2 \in \mathbb{C}\{X, Y\}[Z]$ *que determina a hipersuperfície conhecida como* Whitney Umbrella. *Note que* f *é um polinômio de Weierstrass quase ordinário, uma vez que*

$$\Delta_Z f = -4XY^2.$$

Considerando a mudança de coordenadas dada por $X = X + Y$, $Y = Y$ *e* $Z = Z$, *obtemos* $g(X, Y, Z) = f(X + Y, Y, Z) = Z^2 - (X + Y)Y^2 \in \mathbb{C}\{X, Y\}[Z]$ *que ainda se trata de um polinômio de Weierstrass mas não é quase ordinário, uma vez que* $\Delta_Z f = -4(X + Y)Y^2$.

Na teoria de curva planas, o clássico Teorema de Newton-Puiseux estabelece que todas as raízes de um polinômio de Weierstrass $f \in \mathbb{C}\{X_1\}[X_2]$ de grau n, pertencem a $\mathbb{C}\left\{X_1^{\frac{1}{n}}\right\}$. Para dimensões maiores, Jung (para polinômios em $\mathbb{C}\{X_1, X_2\}[X_3]$) e posteriormente Abhyankar (para o caso geral) mostraram que as raízes de um polinômio de Weierstrass quase-ordinário $f \in \mathbb{C}\{\underline{X}\}[X_{r+1}]$ pertencem a $\mathbb{C}\left\{X_1^{\frac{1}{k}}, \cdots, X_r^{\frac{1}{k}}\right\}$ para algum $k \in \mathbb{N}^*$, ou seja, se $f(X_1, \cdots, X_r, \xi) = 0$, então $\xi \in \mathbb{C}\left\{X_1^{\frac{1}{k}}, \cdots, X_r^{\frac{1}{k}}\right\}$. Cabe mencionar que o inteiro k não necessariamente coincide com $n = deg_{X_{r+1}}(f)$. Quando f é irredutível temos sempre que k divide n e como $\mathbb{C}\left\{X_1^{\frac{1}{k}}, \cdots, X_r^{\frac{1}{k}}\right\} \subseteq \mathbb{C}\left\{X_1^{\frac{1}{n}}, \cdots, X_r^{\frac{1}{n}}\right\}$, podemos assumir, sem perda de generalidade, que $k = n$. O leitor poderá consultar justificativas dos fatos acima mencionados em [14].

Neste trabalho, vamos considerar h.q.o. definidas por $f \in \mathbb{C}\{\underline{X}\}[X_{r+1}]$ irredutível de grau $n > 1$ e, deste modo, assumiremos que o inteiro k mencionado acima é igual a n.

Exemplo 1.6. *Considere*

$$f = X_3^4 - 4X_2^2X_3^3 + 2(3X_2^4 - X_2^5 - X_1X_2^6)X_3^2 - 4(X_2^6 - X_2^7 - X_1X_2^8)X_3 +$$

$$+ X_2^8 - 2X_2^9 + X_2^{10} - 2X_1X_2^{10} - 2X_1X_2^{11} + X_1^2X_2^{12}.$$

Temos que o discriminante de f *é:*

$$4096X_1^2Y^{32}(1 - 2X_1X_2 + X_1^2X_2^2).$$

Note que $deg_{X_3}(f) = 4$, no entanto, uma raiz de f é dada por $\xi = X_2^2 + X_2^{\frac{5}{2}} - X_1^{\frac{1}{2}} X_2^3 \in \mathbb{C}\left\{X_1^{\frac{1}{2}}, X_2^{\frac{1}{2}}\right\} \subset \mathbb{C}\left\{X_1^{\frac{1}{4}}, X_2^{\frac{1}{4}}\right\}$, ou seja, o inteiro k mencionado acima pode ser tomado igual a 2.

Denotamos por L o corpo de frações do anel $\mathbb{C}\{\underline{X}\}$ e por L_n o corpo de frações de $\mathbb{C}\{X_1^{\frac{1}{n}}, \cdots, X_r^{\frac{1}{n}}\}$.

Definição 1.7. *Seja $n \in \mathbb{N}^*$ e $\xi \in \mathbb{C}\left\{X_1^{\frac{1}{n}}, \cdots, X_r^{\frac{1}{n}}\right\}$. Dizemos que ξ é um ramo quase ordinário se o polinômio minimal de ξ sobre L é um polinômio de Weierstrass quase ordinário.*

Cabe aqui observar que um polinômio de Weierstrass cujas raízes pertencem ao anel $\mathbb{C}\left\{X_1^{\frac{1}{k}}, \cdots, X_r^{\frac{1}{k}}\right\}$, não garante que o polinômio defina uma hipersuperfície quase ordinária.

Exemplo 1.8. *Consideremos*

$$f(X_1, X_2, X_3) = X_3^4 - 2(X_1^3 + X_2^3)X_3^2 + (X_1^3 - X_2^3)^2.$$

Notemos que f tem raízes $\xi = \pm X_1^{\frac{3}{2}} \pm X_2^{\frac{3}{2}} \in \mathbb{C}\left\{X_1^{\frac{1}{2}}, X_2^{\frac{1}{2}}\right\}$, mas f não é polinômio quase ordinário, uma vez que,

$$\Delta_{X_3} f = 256(X_1 - X_2)^6(X_1^2 + X_1X_2 + X_2^2)^6 - 432(X_1 + X_2)^4(X_1^2 - X_1X_2 + X_2^2)^4.$$

Duas relações de equivalências importantes e que abordaremos são: a equivalência topológica e analítica de h.q.o..

Definição 1.9. *Dadas duas h.q.o. $(\mathcal{X}, 0)$ e $(\mathcal{Y}, 0)$ em $\mathbb{C}^{r+1}$, dizemos que elas são topologicamente equivalentes, se existem vizinhanças U e V da origem e um homeomorfismo $\Phi^* : (\mathbb{C}^{r+1}, 0) \to (\mathbb{C}^{r+1}, 0)$ tais que $\Phi^*(\mathcal{X} \cap U) = \mathcal{Y} \cap V$. Caso Φ^* seja um isomorfismo analítico, então dizemos que $(\mathcal{X}, 0)$ e $(\mathcal{Y}, 0)$ são analiticamente equivalentes.*

Um isomorfismo analítico $\Phi^* : (\mathbb{C}^{r+1}, 0) \to (\mathbb{C}^{r+1}, 0)$ sempre induz um automorfismo $\Phi : \mathbb{C}\{\underline{X}, X_{r+1}\} \to \mathbb{C}\{\underline{X}, X_{r+1}\}$. Mais ainda, se f e g definem $(\mathcal{X}, 0)$ e $(\mathcal{Y}, 0)$, temos que $(\mathcal{X}, 0)$ e $(\mathcal{Y}, 0)$ são analiticamente equivalentes se, e somente se, $u \cdot \Phi(f) = g$ com $u \in \mathbb{C}\{\underline{X}, X_{r+1}\}$ uma unidade.

1.1 Expoentes característicos generalizados

Seja $f \in \mathbb{C}\{\underline{X}\}[X_{r+1}]$ um polinômio mônico quase ordinário de grau n, temos que

$$\Delta_{X_{r+1}} f = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \prod_{i \neq j} (\xi_i - \xi_j) = X_1^{\delta_1} \cdots X_r^{\delta_r} u \in \mathbb{C}\{\underline{X}\}$$

com $u \in \mathbb{C}\{\underline{X}\}$ uma unidade e ξ_k, $k = 0, \cdots, n-1$ são raízes de f. Uma vez que temos a inclusão dos domínios $\mathbb{C}\{\underline{X}\} \subset \mathbb{C}\left\{X^{\frac{1}{n}}, \cdots, X^{\frac{1}{n}}\right\}$, podemos assegurar que cada fator do discriminante acima satisfaz

$$\xi_i - \xi_j = X_1^{\frac{\lambda_1(i,j)}{n}} X_2^{\frac{\lambda_2(i,j)}{n}} \cdots X_r^{\frac{\lambda_r(i,j)}{n}} u_{ij} \in \mathbb{C}\left\{X_1^{\frac{1}{n}}, \cdots, X_r^{\frac{1}{n}}\right\}$$

onde u_{ij} é unidade em $\mathbb{C}\left\{X_1^{\frac{1}{n}}, \cdots, X_r^{\frac{1}{n}}\right\}$ e $\lambda_l(i,j) \in \mathbb{N}$ para $l = 1, \cdots, r$.

Definição 1.10. *Os monômios* $M_{ij} = X_1^{\frac{\lambda_1(i,j)}{n}} X_2^{\frac{\lambda_2(i,j)}{n}} \cdots X_r^{\frac{\lambda_r(i,j)}{n}}$ *destacados acima, são chamados de monômios característicos de* f *e as* r*-uplas* $(\lambda_1(i,j), \lambda_2(i,j), \cdots, \lambda_r(i,j))$, *para todos* $1 \leq i, j \leq n$ *distintos, são chamados de expoentes característicos (generalizados) de* f.

Vamos ilustrar o conceito anterior retomando a hipersuperfície quase ordinária determinada pelo polinômio do Exemplo 1.6.

Exemplo 1.11. *Para o polinômio* f *dado no Exemplo 1.6, temos que suas raízes são:*

$$\xi_0 = X_2^2 + X_2^{\frac{5}{2}} - X_1^{\frac{1}{2}} X_2^3 \qquad \xi_1 = X_2^2 - X_2^{\frac{5}{2}} - X_1^{\frac{1}{2}} X_2^3$$

$$\xi_2 = X_2^2 + X_2^{\frac{5}{2}} + X_1^{\frac{1}{2}} X_2^3 \qquad \xi_3 = X_2^2 - X_2^{\frac{5}{2}} + X_1^{\frac{1}{2}} X_2^3.$$

Assim, os monômios característicos são dados por:

$$\begin{array}{rcl}
\xi_0 - \xi_1 = & 2X_2^{\frac{5}{2}} & \Rightarrow M_{01} = X_2^{\frac{5}{2}} \\
\xi_0 - \xi_2 = & -2X_1^{\frac{1}{2}} X_2^3 & \Rightarrow M_{02} = X_1^{\frac{1}{2}} X_2^3 \\
\xi_0 - \xi_3 = & 2X_2^{\frac{5}{2}}(1 - X_1^{\frac{1}{2}} X_2^{\frac{1}{2}}) & \Rightarrow M_{03} = X_2^{\frac{5}{2}} \\
\xi_1 - \xi_2 = & -2X_2^{\frac{5}{2}}(1 + X_1^{\frac{1}{2}} X_2^{\frac{1}{2}}) & \Rightarrow M_{12} = X_2^{\frac{5}{2}} \\
\xi_1 - \xi_3 = & -2X_1^{\frac{1}{2}} X_2^3 & \Rightarrow M_{13} = X_1^{\frac{1}{2}} X_2^3 \\
\xi_2 - \xi_3 = & 2X_2^{\frac{5}{2}} & \Rightarrow M_{23} = X_2^{\frac{5}{2}}
\end{array}$$

e os expoentes característicos generalizados são $(0, 10)$ *e* $(2, 12)$.

No exemplo acima, apresentamos todas as raízes do polinômio de Weierstrass quase ordinário. No entanto, bastaria obter uma raiz para determinar as demais com a ajuda do grupo de Galois, que neste contexto tem uma descrição explícita.

Considerando um ramo quase ordinário ξ e a inclusão dos domínios

$$\mathbb{C}\{\underline{X}\} \subset \mathbb{C}\{\underline{X}\}[\xi] \subset \mathbb{C}\left\{X_1^{\frac{1}{n}}, \cdots, X_r^{\frac{1}{n}}\right\}$$

obtemos as seguintes inclusões de seus respectivos corpos de frações

$$L \subset L(\xi) \subset L_n.$$

É mostrado em [1] que a extensão de corpos $L \subset L_n$ é finita e galoisiana cujo grupo de Galois $G = gal(L_n : L)$ é determinado pela ação de r-uplas $(\eta_1, \cdots, \eta_r)$ de raízes n-ésimas da unidade dada por $X_i^{\frac{1}{n}} \longmapsto \eta_i X_i^{\frac{1}{n}}$, para $i = 1, \cdots, r$. Deste modo, se $\xi = \xi_0$ é uma raiz de f, então o conjunto de todas as raízes de f é dado por

$$Z(f) = \{\xi_0, \xi_1, \cdots, \xi_{n-1}\} = \{\xi_i = \varphi_i(\xi); \varphi_i \in G\}.$$

Assim, temos que

$$\begin{aligned}
\xi_i - \xi_j &= \varphi_i(\xi) - \varphi_j(\xi) = \varphi_j \varphi_j^{-1} \varphi_i(\xi) - \varphi_j(\xi) \\
&= \varphi_j(\varphi_j^{-1}\varphi_i(\xi) - \xi) = \varphi_j(\xi_k - \xi),
\end{aligned}$$

com $\varphi_k = \varphi_j^{-1}\varphi_i \in G$ e $\varphi_k(\xi) = \xi_k$.

Lembremos que $\xi_i - \xi_j = M_{ij}u_{ij}$. Considerando a ação de um elemento $\varphi_j \in G$ determinado por $(\eta_{1j}, \cdots, \eta_{rj})$ em L_n e denotando M_{k0} por M_k, obtemos

$$\begin{aligned}
\varphi_j(M_k) &= \varphi_j\left(X_1^{\frac{\lambda_1(k,0)}{n}} \cdots X_r^{\frac{\lambda_r(k,0)}{n}}\right) \\
&= \eta_{1j}^{\lambda_1(k,0)} X_1^{\frac{\lambda_1(k,0)}{n}} \cdots \eta_{rj}^{\lambda_r(k,0)} X_r^{\frac{\lambda_r(k,0)}{n}} \\
&= \left(\eta_{1j}^{\lambda_1(k,0)} \cdots \eta_{rj}^{\lambda_r(k,0)}\right) X_1^{\frac{\lambda_1(k,0)}{n}} \cdots X_r^{\frac{\lambda_r(k,0)}{n}} \\
&= \alpha M_k,
\end{aligned}$$

onde $\alpha = \eta_{1j}^{\lambda_1(k,0)} \cdots \eta_{rj}^{\lambda_r(k,0)} \neq 0$.

Concluímos, desta maneira, que os monômios característicos, equivalentemente, os expoentes característicos generalizados, são invariantes pela ação de elementos de G. Isto mostra que $M_k = M_{ij}$ e, consequentemente,

$$\{M_{ij}; 0 \leq i, j \leq n-1\} = \{M_k; 1 \leq k \leq g\}$$

para algum $g \leq n$.

O inteiro $g \geq 1$ acima é chamado de gênero da h.q.o. dada por ξ.

O conjunto dos monômios característicos possuem uma propriedade particular, como notada por Lipman.

Lema 1.12. *O conjunto* $\{M_k\}_{1\leq k\leq g}$ *dos monômios característicos de um polinômio de Weierstrass quase ordinário* f *é totalmente ordenado pela relação de divisibilidade* $\preceq$*, isto é,* $M_i \preceq M_j$ *se, e somente se,* M_i *divide* M_j *em* $\mathbb{C}\left\{X_1^{\frac{1}{n}},\cdots,X_r^{\frac{1}{n}}\right\}$.

Demonstração. Veja [17]. □

No que segue, denotaremos os expoentes característicos de uma hipersuperfície quase ordinária por $\lambda_i = (\lambda_{i1},\cdots,\lambda_{ir})$ para $i = 1,\cdots,g$. Observe que os monômios característicos e os inteiros n, λ_i com $1 \leq i \leq g$ se determinam mutuamente.

Doravante, vamos usar as seguintes notações para os elementos de $\mathbb{R}^r$:

$$\begin{aligned} (\underline{a}) &= (a,\cdots,a),\\ \underline{a} &= (a_1,\cdots,a_r) \text{ cujas coordenadas não são necessariamente iguais,}\\ \underline{a}_i &= (a_{i1},\cdots,a_{ir}). \end{aligned}$$

Além disto, vamos adotar a notação $X^{\underline{\gamma}}$ para indicar $X_1^{\gamma_1}\cdots X_r^{\gamma_r}$ em que $\underline{\gamma} = (\gamma_1,\cdots,\gamma_r)$. No caso dos expoentes característicos escrevemos X^{λ_i} para indicar $X_1^{\lambda_{i1}}\cdots X_r^{\lambda_{ir}}$.

Dados $\underline{\alpha} = (\alpha_1,\cdots,\alpha_r)$, $\underline{\beta} = (\beta_1,\cdots,\beta_r) \in \mathbb{Q}^r$, dizemos que

$$\begin{aligned} \underline{\alpha} \succ \underline{\beta} &\iff \alpha_i \geq \beta_i \text{ para todo } i = 1,\cdots,r \text{ e } \alpha_j > \beta_j \text{ para algum } j \in \{1,\cdots,r\}.\\ \underline{\alpha} >_{lex} \underline{\beta} &\iff \text{existe } j \in \{1,\cdots,r\} \text{ tal que } \alpha_j > \beta_j \text{ e } \alpha_i = \beta_i \text{ para todo } i < j. \end{aligned}$$

Seja $f \in \mathbb{C}\{\underline{X}\}[X_{r+1}]$ um polinômio quase ordinário irredutível. O próximo resultado permite obtermos os expoentes característicos de f sem explicitar todas as suas raízes.

Lema 1.13. *Seja* $\xi = \sum c_{\underline{\delta}} X^{\underline{\delta}} \in \mathbb{C}\left\{X_1^{\frac{1}{n}},\cdots,X_r^{\frac{1}{n}}\right\}$ *não unidade. Temos que* ξ *é um ramo quase ordinário se, e somente se, existem elementos* $\lambda_i \in \mathbb{N}^r$*, para* $i = 1,\cdots,g$*, tais que:*

1. $\lambda_1 \prec \lambda_2 \prec \cdots \prec \lambda_g$ *e* $c_{\frac{\lambda_i}{n}} \neq 0$ *para* $1 \leq i \leq g$.

2. *Se* $c_{\underline{\delta}} \neq 0$*, então* $n\underline{\delta}$ *pertence ao subgrupo de* $\mathbb{Q}^r$ *dado por* $n\mathbb{Z}^r + \sum_{\lambda_i \preceq n\underline{\delta}} \mathbb{Z}\lambda_i$.

3. λ_j *não pertence ao subgrupo de* $\mathbb{Q}^r$ *dado por* $n\mathbb{Z}^r + \sum_{\lambda_i \prec \lambda_j} \mathbb{Z}\lambda_i$.

Demonstração. Ver Proposição 1.3 em [5]. Note que na referência mencionada, o resultado foi apresentado considerando os dados em $\frac{1}{n}\mathbb{N}^r$. □

O lema anterior permite concluir que qualquer truncamento de um ramo quase ordinário, ainda é um ramo quase ordinário.

Lembremos que uma hipersuperfície quase ordinária leva em consideração projeções (quase ordinárias) que podem determinar polinômios de Weierstrass quase ordinários distintos e consequentemente distintos ramos quase ordinários e diferentes conjuntos de expoentes característicos de acordo com cada escolha da projeção. Por cerca de 20 anos, isto foi obstáculo para o estudo de tal classe de hipersuperfície.

No entanto, a dificuldade acima foi superada. Para entender os aspectos de como se livrar de tais inconvenientes, vamos apresentar alguns conceitos.

Definição 1.14. *Dizemos que um ramo quase ordinário ξ tem variáveis bem ordenadas se as g-uplas $(\lambda_{1i}, \cdots, \lambda_{gi})$ das i-ésimas coordenadas dos expoentes característicos $\lambda_1, \cdots, \lambda_g$ são ordenadas lexicograficamente, mais precisamente, se, para $1 \leq i < j \leq r$, temos que*

$$\lambda^i := (\lambda_{1i}, \cdots, \lambda_{gi}) \geq_{lex} (\lambda_{1j}, \cdots, \lambda_{gj}) =: \lambda^j.$$

A representação abaixo pode ajudar a visualizar o conceito anterior.

$$\begin{array}{ccccccccc}
\lambda_1 & = & (\lambda_{11}, & \cdots, & \lambda_{1i}, & \cdots, & \lambda_{1r}) \\
\lambda_2 & = & (\lambda_{21}, & \cdots, & \lambda_{2i}, & \cdots, & \lambda_{2r}) \\
\vdots & & & & & & \\
\lambda_g & = & (\lambda_{g1}, & \cdots, & \lambda_{gi}, & \cdots, & \lambda_{gr}) \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & \lambda^1 & \geq_{lex} & \lambda^i & \geq_{lex} & \lambda^r
\end{array}$$

Note que, dado um ramo quase ordinário, podemos sempre renomear as variáveis $X_1, ..., X_r$, isto é, proceder uma mudança de coordenadas, de modo a obtermos um ramo com variáveis bem ordenadas. Desta forma, sem perda de generalidade, vamos sempre considerar ramos quase ordinários com tal propriedade.

Exemplo 1.15. *No Exemplo 1.11 vimos que os expoentes característicos dos ramos de*

$$f = X_3^4 - 4X_2^2X_3^3 + 2(3X_2^4 - X_2^5 - X_1X_2^6)X_3^2 - 4(X_2^6 - X_2^7 - X_1X_2^8)X_3 +$$
$$+ X_2^8 - 2X_2^9 + X_2^{10} - 2X_1X_2^{10} - 2X_1X_2^{11} + X_1^2X_2^{12},$$

são $(0, 10)$ e $(2, 12)$. Neste caso, $(0, 2) = \lambda^1 \leq_{lex} \lambda^2 = (10, 12)$, ou seja, as variáveis não estão bem ordenadas. No entanto, considerando a mudança de coordenadas $X_1 \mapsto X_2$, $X_2 \mapsto X_1$ e $X_3 \mapsto X_3$, obtemos

$$X_3^4 - 4X_1^2X_3^3 + 2(3X_1^4 - X_1^5 - X_1^6X_2)X_3^2 - 4(X_1^6 - X_1^7 - X_1^8X_2)X_3 +$$

$$+X_1^8-2X_1^9+X_1^{10}-2X_1^{10}X_2-2X_1^{11}X_2+X_1^{12}X_2^2,$$

que é um polinômio quase ordinário que admite o ramo $\xi = X_1^2 + X_1^{\frac{5}{2}} - X_1^3X_2^{\frac{1}{2}}$ *que tem variáveis bem ordenadas. Note que, para o ramo anterior temos os expoentes característicos* $\lambda_1 = (10,0)$ *e* $\lambda_2 = (12,2)$*, então* $\lambda^1 = (10,12) \geq_{lex} \lambda^2 = (0,2)$*.*

Dado um ramo quase ordinário ξ com expoentes característicos $\lambda_1 \prec \cdots \prec \lambda_g$ definido por um polinômio de Weierstrass de grau n, associamos os grupos $Q_0 = n\mathbb{Z}^r$ e $Q_i = Q_{i-1} + \mathbb{Z}\lambda_i$ para $i = 1, \cdots, g$.

No que segue denotaremos $n_0 = 1, n_i = \sharp(Q_i/Q_{i-1})$ para $i = 1, \cdots, g$, $e_0 = n, e_{j-1} = n_j \cdots n_g$ para $j = 2, ..., g$ e $e_g = 1$.

É fácil ver que os inteiros e_j e n_j são os graus das extensões de corpos

$$\begin{aligned} e_j &:= [L(\xi) : L(M_1, \cdots, M_j)] \text{ para } j = 1, \cdots, g, \\ n_j &:= [L(M_1, \cdots, M_j) : L(M_1, \cdots, M_{j-1})] \text{ para } j = 2, \cdots, g, \end{aligned} \tag{1.1}$$

e $n_1 = [L(M_1) : L]$, onde M_i é monômio característico para $i = 1, \cdots, g$ e $L(M_1, \cdots, M_i)$ é o corpo de frações do anel $\mathbb{C}\{M_1, \cdots, M_i\}$(Veja [17]).

Note que temos as extensões de corpos

$$L \subsetneq L(M_1) \subsetneq L(M_1, M_2) \subsetneq \cdots \subsetneq L(M_1, \cdots, M_g) = L(\xi),$$

com inclusões estritas graças ao Lema 1.13. Deste modo, como o polinômio minimal de ξ é $f \in \mathbb{C}\{\underline{X}\}[X_{r+1}]$ e $deg_{Xr+1} f = n$, segue que

$$\begin{aligned} n &= [L(\xi) : L] \\ &= [L(M_1, \cdots, M_g) : L] \\ &= [L(M_1, \cdots, M_g) : L(M_1, \cdots, M_{g-1})] \cdots [L(M_1) : L] \\ &= n_g \cdots n_1. \end{aligned}$$

Veja que, no caso em que n é um número primo, temos apenas um monômio característico generalizado, isto é, $g = 1$.

Na busca de uma padronização para ramos quase ordinários, Lipman, em [17], introduz a seguinte noção:

Definição 1.16. *Um ramo quase ordinário* $\xi = \sum c_{\underline{\delta}} X^{\underline{\delta}} \in \mathbb{C}\left\{X_1^{\frac{1}{n}}, \cdots, X_r^{\frac{1}{n}}\right\}$ *é normalizado se:*

1. $c_{\underline{\delta}} \neq 0$ *então* $n\underline{\delta} \succeq \lambda_1$*, ou seja,* $\xi = c_{\frac{\lambda_1}{n}} X^{\frac{\lambda_1}{n}} u$ *com* $u \in \mathbb{C}\left\{X_1^{\frac{1}{n}}, \cdots, X_r^{\frac{1}{n}}\right\}$ *e* $u(0) = 1$*;*

2. ξ *tem variáveis bem ordenadas;*

3. Se $\lambda_1 = (\lambda_{11}, 0, \cdots, 0)$*, então* $\lambda_{11} > n$*.*

Se traduzirmos à condição acima para o caso de curvas planas, então afirmar que um ramo seja normalizado significa que a multiplicidade da curva (na origem) é igual ao grau do polinômio de Weierstrass quase ordinário que a define.

Segue que se uma h.q.o. definida por $f \in \mathbb{C}\{\underline{X}\}[X_{r+1}]$ e com ramo normalizado ξ, então $mult(f) = min\{n, |\lambda_1|\}$ em que $|\lambda_1| = \sum_{i=1}^{r} \lambda_{1i}$. Chamamos $mult(f)$ de multiplicidade da h.q.o. definida por ξ.

Vimos no Exemplo 1.15 que a condição (2.) da definição acima sempre pode ser obtida por meio de convenientes mudanças de coordenadas. O exemplo abaixo ilustra que o mesmo se pode conseguir no que diz respeito a condição (1.).

Exemplo 1.17. *Seja* $\xi = X_1^2 + X_1^{\frac{5}{2}} - X_1^3 X_2^{\frac{1}{2}}$ *que, como vimos no Exemplo 1.15, tem variáveis bem ordenadas. Note no entanto, que tal ramo não satisfaz a condição (1.) da Definição 1.16, ou seja, o ramo não é normalizado.*

Podemos obter um ramo normalizado, considerando as mudanças de coordenadas $X_1 \mapsto X_1$*,* $X_2 \mapsto X_2$ *e* $X_3 \mapsto X_3 - X_1^2$*. De fato, tais mudanças nos dão o polinômio quase ordinário*

$$f(X_1, X_2, X_3) = X_3^4 - 2X_1^5(1 + X_1X_2)X_3^2 + X_1^{10} - 2X_1^{11}X_2 + X_1^{12}X_2^2,$$

que admite raiz $X_1^{\frac{5}{2}} - X_1^3 X_2^{\frac{1}{2}} = X_1^{\frac{10}{4}} - X_1^{\frac{12}{4}} X_2^{\frac{2}{4}}$ *que é um ramo normalizado.*

Quanto a condição (3.) da Definição 1.16, não é tão evidente que a consigamos obter. Embora sempre possamos realizar mudanças de coordenadas de modo a satisfazê-la, tais mudanças não são facilmente determinadas quanto aquelas para obter as condições (1.) e (2.). O lema abaixo, demonstrado inicialmente por Lipman, garante, juntamente com as considerações anteriores, que toda hipersuperfície quase ordinária admite (a menos de mudanças de coordenadas) um ramo quase ordinário normalizado.

Lema 1.18. *Seja* $(\mathcal{X}, 0) \in (\mathbb{C}^{r+1}, 0)$ *uma hipersuperfície quase ordinária definida por* $f \in \mathbb{C}\{\underline{X}\}[X_{r+1}]$ *e que possui uma raiz* $\xi = X_1^{\frac{k}{s_1}} u(X_1^{\frac{1}{s_1}}, \cdots, X_r^{\frac{1}{s_r}})$ *com* $u(\underline{0}) \neq 0$*, então* $(\mathcal{X}, 0)$ *também pode ser definida (a menos de mudanças analíticas de coordenadas) por um polinômio quase ordinário em* $\mathbb{C}\{X_2, \cdots, X_r, X_{r+1}\}[X_1]$ *que possui uma raiz da forma*

$$\tau = X_{r+1}^{\frac{s_1}{k}} u'(X_{r+1}^{\frac{1}{k}}, X_2^{\frac{1}{s_2}}, \cdots, X_r^{\frac{1}{s_r}})$$

com $u'(\underline{0}) \neq 0$*.*

Demonstração. Indicamos o Lema 2.3 de [16] ou o Apêndice de [5]. □

No caso de curvas planas, Zariski e outros, mostraram que o tipo topológico é totalmente determinado pelos expoentes característicos. Na busca de um resultado análogo para hipersuperfícies quase ordinárias, a falta de uniformidade de tais dados ao considerarmos projeções distintas impediu tal feito.

Tal avanço coube a Lipman, que em [17] e [18] mostrou que ao tomarmos um ramo quase ordinário normalizado (cuja existência garantimos acima) teremos sempre os mesmos expoentes característicos generalizados. Utilizando-se de resultados sobre saturação de anéis locais mostrados por Zariski (veja [17], [19] e [23]), Lipman mostrou que os expoentes característicos determinam o tipo topológico de uma h.q.o.. Coube a um de seus alunos, Gau (em [5]), provar que a recíproca também é válida, ou seja, o tipo topológico de uma h.q.o. permite recuperar os expoentes característicos generalizados.

O comentário acima pode ser sintetizado no seguinte teorema:

Teorema 1.19 (Lipman-Gau)**.** *O tipo topológico de uma hipersuperfície quase ordinária é totalmente caracterizado pelos inteiros n e λ_i, para $i = 1, \cdots, g$.*

Demonstração. Veja [5] e [18]. □

1.2 Semirraízes e semigrupo

Na teoria de curvas planas, um outro objeto que determina e é determinado pelo tipo topológico é o semigrupo de valores que pode ser definido como

$$\{\mathcal{V}_f(h) = mult_T(h(T^n, \varphi(T))),\ h \in \mathbb{C}\{X, Y\}/(f)\}$$

em que $(T^n, \varphi(T))$ é uma parametrização da curva definida por $f \in \mathbb{C}\{X, Y\}$. Observe que $\mathcal{V}(h)$ é o expoente dominante de $h(T^n, \varphi(T)) \in \mathbb{C}\{T\}$.

Podemos obter algo análogo para o caso geral quase ordinário.

Seja

$$\xi = \sum_{\underline{\gamma}} c_{\underline{\gamma}} X^{\underline{\gamma}} \in \mathbb{C}\left\{X_1^{\frac{1}{n}}, \cdots, X_r^{\frac{1}{n}}\right\}$$

um ramo quase ordinário de um polinômio quase ordinário $f \in \mathbb{C}\{\underline{X}\}[X_{r+1}]$ irredutível com $deg_{X_{r+1}} f = n$. Se denotarmos $t_i = X_i^{\frac{1}{n}}$, ou seja, $X_i = t_i^n$ para $i = 1, \cdots, r$, então de ξ obtemos $S(t_1, \cdots, t_r) = \sum_{\underline{\alpha}} c_{\underline{\alpha}} t_1^{\alpha_1} \cdots t_r^{\alpha_r}$ em que $\underline{\alpha} = n\underline{\gamma} \in \mathbb{N}^r$ e podemos definir um homomorfismo sobrejetor de $\mathbb{C}$-álgebras

$$\begin{array}{rcl}\mathbb{C}\{X_1,\cdots,X_{r+1}\} & \longrightarrow & \mathbb{C}\{t_1^n,\cdots,t_r^n,S(t_1,\cdots,t_r)\}\subset\mathbb{C}\{t_1,\cdots,t_r\}:=\mathbb{C}\{\underline{t}\}\\ h(X_1,\cdots,X_{r+1}) & \mapsto & h(t_1^n,\cdots,t_r^n,S(t_1,\cdots,t_r))\end{array}$$

cujo núcleo é o ideal (f), uma vez que f é o polinômio minimal de ξ. Deste modo, temos que

$$\frac{\mathbb{C}\{\underline{X}\}[X_{r+1}]}{(f)}\approx\frac{\mathbb{C}\{X_1,\cdots,X_{r+1}\}}{(f)}\approx\mathbb{C}\{t_1^n,\cdots,t_r^n,S(t_1,\cdots,t_r)\}.$$

Seguindo as notações acima, denominaremos

$$H=H_f=(t_1^n,\cdots,t_r^n,S(t_1,\cdots,t_r))$$

de uma *parametrização* (quase ordinária) de f ou de ξ.

Seja $\zeta=\sum_{\underline{\alpha}}c_{\underline{\alpha}}t_1^{\alpha_1}\cdots t_r^{\alpha_r}\in\mathbb{C}\{\underline{t}\}$. Recordamos que se $\zeta=t_1^{\delta_1}\cdots t_r^{\delta_r}u(t_1,\cdots,t_r)$ com $\underline{\delta}\in\mathbb{N}^r$ e u uma unidade, dizemos que ζ possui *expoente dominante* $\mathcal{V}(\zeta)=\underline{\delta}$.

Sejam $h\in\mathbb{C}\{X_1,\cdots,X_{r+1}\}$ e $H=(t_1^n,\cdots,t_r^n,S(t_1,\cdots,t_r))$ uma parametrização de um ramo quase ordinário. Dizemos que h tem *expoente dominante* $\underline{\delta}$ *com respeito a* H, se $H^*(h):=h(t_1^n,\cdots,t_r^n,S(t_1,\cdots,t_r))$ tem expoente dominante $\underline{\delta}$. Neste caso, denotamos

$$\mathcal{V}_H(h)=\mathcal{V}(H^*(h))=\underline{\delta}.$$

Além disto, se $h(t_1^n,\cdots,t_r^n,S(t_1,\cdots,t_r))=0$, então convencionamos que $\mathcal{V}_H(h)=(\underline{\infty})$.

Exemplo 1.20. *Consideremos a hipersuperfície quase ordinária definida pelo ramo normalizado apresentado no Exemplo 1.17, ou seja,* $\xi=X_1^{\frac{5}{2}}-X_1^3X_2^{\frac{1}{2}}=X_1^{\frac{10}{4}}-X_1^{\frac{12}{4}}X_2^{\frac{2}{4}}$. *Considerando* $t_1=X_1^{\frac{1}{4}}$ *e* $t_2=X_2^{\frac{1}{4}}$ *obtemos a parametrização quase ordinária*

$$H=(t_1^4,t_2^4,t_1^{10}-t_1^{12}t_2^2).$$

Seja $h=X_3^2-X_1^5+aX_2^5\in\mathbb{C}\{X_1,X_2,X_3\}$, *temos que*

$$H^*(h)=-2t_1^{22}t_2^2+t_1^{24}t_2^4+at_2^{20}$$

e assim, h *não tem expoente dominante para* $a\neq 0$. *No caso em que* $a=0$, *temos que* h *tem expoente dominante igual a* $\mathcal{V}_H(h)=(22,2)$.

Associados aos expoentes generalizados, podemos definir também os seguintes vetores $\gamma_1,\cdots,\gamma_{g+1}\in\mathbb{N}^r$:

$$\begin{array}{rcl}\gamma_1 & = & \lambda_1;\\ \gamma_i & = & n_{i-1}\gamma_{i-1}+\lambda_i-\lambda_{i-1}\ \text{ para todo }\ i=2,\cdots,g;\\ \gamma_{g+1} & = & (\underline{\infty}).\end{array}\tag{1.2}$$

Além disto, por recorrência, obtemos que

$$\begin{aligned}\gamma_{k+1} &= n_k \cdots n_2(n_1-1)\lambda_1 + n_k \cdots n_3(n_2-1)\lambda_2 + \cdots + (n_k-1)\lambda_k + \lambda_{k+1}\\ &= \left(\frac{e_0-e_1}{e_k}\right)\lambda_1 + \left(\frac{e_1-e_2}{e_k}\right)\lambda_2 + \cdots + \left(\frac{e_{k-1}-e_k}{e_k}\right)\lambda_k + \lambda_{k+1}.\end{aligned}$$

Elementos de $\mathbb{C}\{\underline{X}\}[X_{r+1}]$ que admitem expoentes dominantes iguais a $\gamma_1, \cdots, \gamma_{g+1} \in \mathbb{N}^r$ recebem uma denominação particular.

Definição 1.21. *Sejam $\xi \in Z(f)$ e $k \in \{0, \cdots, g\}$. Chamamos um polinômio mônico $f_k \in \mathbb{C}\{\underline{X}\}[X_{r+1}]$ de uma k-semirraiz de f se $deg_{X_{r+1}}(f_k) = n_0n_1 \cdots n_k$ e f_k possui expoente dominante $\mathcal{V}_H(f_k) = \gamma_{k+1}$. Uma (g + 1)-upla $(f_0, \cdots, f_g)$ tal que, para todo $k \in \{0, \cdots, g\}$, f_k é uma k-semirraiz de f, é chamada um sistema completo de semirraízes para f.*

Veja que sempre podemos considerar f como a g-ésima semirraiz de si própria.

As semirraízes de f não dependem da escolha de $\xi \in Z(f)$ e sempre existe um sistema completo de semirraízes para f. Por exemplo, podemos obter um sistema completo de semirraízes para uma h.q.o. determinando os polinômios minimais de truncamentos adequados de ξ (Veja mais detalhes em [21]). No Capítulo 2, apresentaremos um novo método para determinar semirraízes a partir de um ramo quase ordinário.

Exemplo 1.22. *Sejam*

$$f = X_3^4 - 2X_1^5(1 + X_1X_2)X_3^2 + X_1^{10} - 2X_1^{11}X_2 + X_1^{12}X_2^2,$$

e $\xi = X_1^{\frac{10}{4}} - X_1^{\frac{12}{4}}X_2^{\frac{2}{4}}$ um ramo normalizado de f conforme considerado no Exemplo 1.17 cuja parametrização quase ordinária associada é $H = (t_1^4, t_2^4, t_1^{10} - t_1^{12}t_2^2)$ com expoentes característicos $\lambda_1 = (10, 0)$ e $\lambda_2 = (12, 2)$.

Como $g = 2$ e $4 = n = n_1n_2$, segue que $n_1 = n_2 = 2$. De (1.2), temos os vetores $\gamma_1 = \lambda_1 = (10, 0)$ e $\gamma_2 = n_1\gamma_1 + \lambda_2 - \lambda_1 = (22, 2)$.

Vamos exibir um sistema completo de semirraízes (f_0, f_1, f_2) para f.

Como vimos, f pode ser considerada uma g-semirraiz de si própria, ou seja, $f_2 = f$.

Sabemos que $f_0 \in \mathbb{C}\{X_1, X_2\}[X_3]$ deve ter grau $deg_{X_3} f_0 = n_0 = 1$ e $\mathcal{V}_H(f_0) = (10, 0)$. Deste modo, podemos tomar $f_0 = X_3$.

Uma vez que $f_1 \in \mathbb{C}\{X_1, X_2\}[X_3]$ deve ter grau $deg_{X_3} f_1 = n_0n_1 = 2$ com $\mathcal{V}_H(f_1) = \gamma_2 = (22, 2)$, podemos considerar $f_1 = h = X_3^2 - X_1^5$ dado no Exemplo 1.20.

O lema a seguir apresenta uma propriedade importante que será utilizada no contexto de um sistema completo de semirraízes.

Lema 1.23. *Sejam $f \in \mathbb{C}\{\underline{X}\}[X_{r+1}]$ um polinômio quase ordinário com $n = deg_{X_{r+1}}(f)$ e $f_0, f_1, \cdots, f_g \in \mathbb{C}\{\underline{X}\}[X_{r+1}]$ com $deg(f_i) = n_0 n_1 \cdots n_i$ para todo $i \in \{0, \cdots, g\}$. Qualquer $h \in \mathbb{C}\{\underline{X}\}[X_{r+1}]$ pode ser escrito de modo único como uma soma finita $h = \sum c_{i_0 \cdots i_g} f_0^{i_0} \cdots f_g^{i_g}$ com $c_{i_0 \cdots i_g} \in \mathbb{C}\{\underline{X}\}$, onde as $(g+1)$-uplas $(i_0, \cdots, i_g) \in \mathbb{N}^{g+1}$ verificam $0 \leq i_k < n_{k+1}$, para todo $k \in \{0, \cdots, g-1\}$ e $i_g \leq \left[\frac{deg_{X_{r+1}}(h)}{n}\right]$.*

Demonstração. Veja [6]. □

Definição 1.24. *Seja $(f_0, f_1, \cdots, f_g)$ um sistema completo de semirraízes para f. A expansão apresentada no lema anterior $h = \sum c_{i_0 \cdots i_g} f_0^{i_0} \cdots f_g^{i_g}$ é chamada expansão $(f_0, \cdots, f_g)$-ádica de h. O conjunto finito $\{(i_0, \cdots, i_g); c_{i_0 \cdots i_g} \neq 0\}$ é chamado o suporte $(f_0, \cdots, f_g)$-ádico de h.*

Um outro conceito associado à série de potências que utilizaremos é o de poliedro de Newton. Para maior conveniência do leitor, apresentamos sucintamente sua definição e algumas propriedades.

Definição 1.25. *Seja $\eta = \sum c_{\underline{\alpha}} t_1^{\alpha_1} \cdots t_r^{\alpha_r} \in \mathbb{C}\{\underline{t}\}$ e considere $Supp(\eta) = \{\underline{\alpha} \in \mathbb{N}^r; c_{\underline{\alpha}} \neq 0\}$. O poliedro de Newton de η é o fecho convexo em $\mathbb{R}^r$ do conjunto $Supp(\eta) + \mathbb{R}^r_+$, ou seja, $\overline{Supp(\eta) + \mathbb{R}^r_+}$ que denotaremos por $\mathcal{N}(\eta)$.*

Indicaremos por $V_{\mathcal{N}}(\eta) := \{\underline{\delta}; \underline{\delta}$ é vértice de $\mathcal{N}(\eta)\}$ o conjunto dos vértices de $\mathcal{N}(\eta)$.

O lema a seguir relaciona propriedades de uma expansão $(f_0, \cdots, f_g)$-ádica de h e de seu poliedro de Newton.

Lema 1.26. *Seja $(f_0, \cdots, f_g)$ um sistema completo de semirraízes para f. Se $h = \sum c_{i_0 \cdots i_g} f_0^{i_0} \cdots f_g^{i_g}$ é a expansão $(f_0, \cdots, f_g)$-ádica de $h \in \mathbb{C}\{\underline{X}\}[X_{r+1}]$, então para todo $\xi \in Z(f)$, os conjuntos dos vértices do poliedro de Newton $\mathcal{N}(c_{i_0 \cdots i_g}(f_0(\xi))^{i_0} \cdots (f_g(\xi))^{i_g})$ são dois a dois disjuntos quando $(i_0, \cdots, i_g)$ varia no suporte $(f_0, \cdots, f_g)$-ádico de h.*

Demonstração. A demonstração pode ser encontrada [7]. □

O conceito de vértices do poliedro de Newton também é útil para introduzirmos o objeto a seguir.

Consideremos $H = (t_1^n, \cdots, t_r^n, S(t_1, \cdots, t_r))$ uma parametrização quase ordinária de f, definimos

$$\Gamma_{\mathcal{N}}(f) = \{\underline{\gamma} \in \mathbb{N}^r_+; \underline{\gamma} \in V_{\mathcal{N}}(h(X_1, \cdots, X_r, \xi)), \text{ para } h \in \mathbb{C}\{\underline{X}\}[X_{r+1}] \setminus (f)\}.$$

A seguir apresentamos um resultado que garante que o conjunto $\Gamma_{\mathcal{N}}(f)$ definido acima é um semigrupo aditivo de $\mathbb{N}^r$ e cuja demonstração pode ser encontrada em [8].

Proposição 1.27. *Seja $f \in \mathbb{C}\{\underline{X}\}[X_{r+1}]$ um polinômio de Weierstrass quase ordinário irredutível tal que $deg_{X_{r+1}}(f) = n$. Temos a seguinte igualdade de conjuntos:*

$$\Gamma_{\mathcal{N}}(f) = n\mathbb{N}^r + \mathbb{N}\gamma_1 + \cdots + \mathbb{N}\gamma_g,$$

em que γ_i para $i = 1, \cdots, g$ são como em (1.2).

Baseando-se no caso de curvas planas, como comentamos no início desta seção, se considerarmos agora somente as séries que possuem expoente dominante com respeito a H, então podemos definir:

$$\Gamma_{\mathcal{D}}(f) = \{\mathcal{V}_H(h); h \in \mathbb{C}\{\underline{X}\}[X_{r+1}] \setminus (f) \text{ e } \sharp V_{\mathcal{N}}(H^*(h)) = 1\}.$$

Obviamente temos que $\Gamma_{\mathcal{D}}(f) \subseteq \Gamma_{\mathcal{N}}(f)$ e $\Gamma_{\mathcal{D}}(f)$ também tem estrutura de semigrupo de $\mathbb{N}^r$. Mais ainda, González Pérez apresenta o seguinte resultado:

Proposição 1.28. *Com as notações acima temos que $\Gamma_{\mathcal{D}}(f) = \Gamma_{\mathcal{N}}(f)$.*

Demonstração. Veja [7]. □

As proposições anteriores garantem que no caso de uma hipersuperfície quase ordinária definida por $f \in \mathbb{C}\{\underline{X}\}[X_{r+1}]$ podemos adotar a seguinte definição:

Definição 1.29. *O semigrupo*

$$\Gamma_H = \Gamma_H(f) = \Gamma(f) := \Gamma_{\mathcal{N}}(f) = \Gamma_{\mathcal{D}}(f)$$

é chamado de semigrupo de f ou da hipersuperfície definida por f.

Pelos resultados anteriores, segue que $\Gamma(f)$ é finitamente gerado. Vamos denotar os geradores do semigrupo $\Gamma(f)$ da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} \nu_i &= n\theta_i, \text{ para } i = 1, \cdots, r \\ \nu_{r+j} &= \gamma_j, \text{ para } j = 1, \cdots, g, \end{aligned} \tag{1.3}$$

em que $\{\theta_i = (0, \cdots, 1, \cdots, 0),\ i = 1, \cdots, r\}$ é a base canônica de $\mathbb{R}^r$.

No decorrer do texto, vamos adotar as notações $\Gamma(f) = \langle \nu_1, \cdots, \nu_{r+g} \rangle \subset \mathbb{N}^r$ e $\Gamma_j(f)$ (ou simplesmente Γ_j) o subsemigrupo de $\Gamma(f)$ gerado por $\langle \nu_1, \cdots, \nu_{r+j} \rangle$, para $j = 0, \cdots, g$.

Muitas propriedades do semigrupo de curvas planas (veja [9] para algumas delas) também são válidas para o semigrupo de hipersuperfícies quase ordinárias em $\mathbb{C}^{r+1}$. Por exemplo, pelas relações (1.2) e (1.3) temos que o semigrupo $\Gamma(f)$ e os expoentes característicos generalizados juntamente com n se determinam mutuamente, ou seja, $\Gamma(f)$ é um invariante completo para o tipo topológico de uma h.q.o.. Além disto, temos:

Proposição 1.30. *Com as notações anteriores temos:*

1. *O subgrupo de* $\mathbb{Z}^r$ *gerado por* $\nu_1, \cdots, \nu_{r+j}$ *é igual a* Q_j *para* $0 \leq j \leq g$.

2. *A ordem da classe de* ν_{r+j} *no grupo* $\frac{Q_j}{Q_{j-1}}$ *é igual a* n_j *para* $j = 1, \cdots, g$.

3. *Temos que* $\nu_{r+j} \succ n_{j-1}\nu_{r+j-1}$ *para* $j = 2, \cdots, g$.

4. *Se um vetor* $u_j \in Q_j$ *possui coordenadas não negativas, então* $u_j + n_j\nu_{r+j} \in \Gamma_j(f)$, *para* $j = 1, \cdots, g$.

5. *O vetor* $n_j\nu_{r+j}$ *pertence ao semigrupo* $\Gamma_{j-1}(f)$ *para* $j = 1, \cdots, g$.

Demonstração. A demonstração pode ser consultada em [7]. $\square$

Exemplo 1.31. *Consideremos*

$$f = X_3^4 - 2X_1^5(1 + X_1X_2)X_3^2 + X_1^{10} - 2X_1^{11}X_2 + X_1^{12}X_2^2,$$

apresentado no Exemplo 1.22 que admite um ramo normalizado $\xi = X_1^{\frac{10}{4}} - X_1^{\frac{12}{4}}X_2^{\frac{2}{4}}$, *parametrização quase ordinária* $H = (t_1^4, t_2^4, t_1^{10} - t_1^{12}t_2^2)$ *e expoentes característicos* $\lambda_1 = (10, 0)$ *e* $\lambda_2 = (12, 2)$.

Como vimos, $\gamma_1 = \lambda_1 = (10, 0)$ *e* $\gamma_2 = n_1\gamma_1 + \lambda_2 - \lambda_1 = (22, 2)$. *Assim,*

$$\Gamma(f) = 4\mathbb{N}^2 + (10, 0)\mathbb{N} + (22, 2)\mathbb{N}$$

e os geradores de $\Gamma(f)$ *são* $\nu_1 = (4, 0), \nu_2 = (0, 4), \nu_3 = \gamma_1 = (10, 0)$ *e* $\nu_4 = \gamma_2 = (22, 2)$.

Seja $H = (t_1^n, \cdots, t_r^n, S(t_1, \cdots, t_r))$ uma parametrização de uma hipersuperfície quase ordinária e $\Gamma_H = \langle \nu_1, \cdots, \nu_{r+g} \rangle = \left\{\sum_{i=1}^{r+g} a_i\nu_i; a_i \in \mathbb{N}\right\} \subset \mathbb{N}^r$ com ν_j, $j = 1, \cdots, r + g$ como definidos em (1.3).

Teorema 1.32. *Seja* $\Gamma_H = \langle \nu_1, \cdots, \nu_{r+g} \rangle$ *o semigrupo de uma hipersuperfície quase ordinária com parametrização* H *e defina*

$$\underline{\omega} = \sum_{k=1}^{g}(n_k - 1)\nu_{r+k} - \sum_{i=1}^{r} \nu_i$$

em que $n_k = \sharp\,(Q_k/Q_{k-1})$. *Então as seguintes propriedades são válidas:*

(i) $\underline{\omega} \notin \Gamma_H$;

(ii) Para todo $\underline{v} \in \mathbb{Z}^r$ *com* $v_i > \omega_i$, $i = 1, \cdots, r$, *se* $\underline{v} \in Q_g$, *então* $\underline{v} \in \Gamma_H$.

Demonstração. A demonstração pode ser consultada em [2]. $\square$

O vetor $\underline{\omega}$, dado no teorema acima, é chamado *vetor de Frobenius de* Γ_H, e será denotado por $\mathcal{F}_H$.

Se $k \in \{0, \cdots, g\}$ e $\underline{v} \in Q_k$, então existem únicos $a_1, \cdots, a_{r+k} \in \mathbb{Z}$ com $0 \leq a_{r+j} < n_j$ e $j = 1, \cdots, k$, tais que $\underline{v} = \sum_{i=1}^{r+k} a_i \nu_i$. Tal representação de $\underline{v}$ é chamada *representação padrão*. Além disto, se $\underline{v} = \sum_{i=1}^{r+k} a_i \nu_i \in Q_k$ é dado por uma representação padrão, temos que $\underline{v} \in \Gamma_k = \langle \nu_1, \cdots, \nu_{r+k} \rangle$ se, e somente se, $a_i \geq 0$ para todo $1 \leq i \leq r$ (veja [2]).

Exemplo 1.33. *O vetor de Frobenius do semigrupo* $\Gamma(f)$ *apresentado no Exemplo 1.31 é*

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_H &= (n_1 - 1)\nu_3 + (n_2 - 1)\nu_4 - \nu_1 - \nu_2 \\ &= (2-1)(10,0) + (2-1)(22,2) - (4,0) - (0,4) \\ &= (28, -2). \end{aligned}$$

Deste modo, dado $\underline{v} = (v_1, v_2) \in 4\mathbb{Z}^2 + (10,0)\mathbb{Z} + (22,2)\mathbb{Z}$ *com* $v_1 > 28$ *e* $v_2 > -2$*, temos que* $\underline{v} \in \Gamma(f)$*. Em particular, todo vetor da forma* $2(15+a, b)$ *com* $(a,b) \in \mathbb{N}^2$ *é um elemento de* $\Gamma(f)$*.*

1.3 $\mathcal{A}$-equivalência e o conjunto Λ

Para os conceitos desta seção indicamos [12] e [20].

Sejam $(\mathcal{X}, 0)$, $(\mathcal{Y}, 0) \subset (\mathbb{C}^{r+1}, 0)$ hipersuperfícies quase ordinárias dadas por polinômios de Weierstrass $f, g \in \mathbb{C}\{\underline{X}\}[X_{r+1}]$, respectivamente. Como vimos, $(\mathcal{X}, 0)$ e $(\mathcal{Y}, 0)$ são analiticamente equivalentes, se existem vizinhanças U, V da origem e um isomorfismo analítico $\Phi^* : (\mathbb{C}^{r+1}, 0) \longrightarrow (\mathbb{C}^{r+1}, 0)$ tais que $\Phi^*(\mathcal{X} \cap U) = \mathcal{Y} \cap V$. O isomorfismo analítico Φ^* induz um automorfismo $\Phi : \mathbb{C}\{X_1, \cdots, X_{r+1}\} \longrightarrow \mathbb{C}\{X_1, \cdots, X_{r+1}\}$ tal que $\Phi(f) = ug$ com $u(0) \neq 0$, isto é, temos a igualdade de ideais $(\Phi(f)) = (g)$. Consequentemente, temos um isomorfismo entre as álgebras analíticas $\mathcal{O}_f$ e $\mathcal{O}_g$ de $(\mathcal{X}, 0)$ e $(\mathcal{Y}, 0)$ respectivamente, ou seja,

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{O}_f & := & \dfrac{\mathbb{C}\{X_1, \cdots, X_{r+1}\}}{(f)} = \dfrac{\mathbb{C}\{\underline{X}\}[X_{r+1}]}{(f)} \\ \wr\wr & & \\ \mathcal{O}_g & := & \dfrac{\mathbb{C}\{X_1, \cdots, X_{r+1}\}}{(g)} = \dfrac{\mathbb{C}\{\underline{X}\}[X_{r+1}]}{(g)}. \end{array}$$

Note que considerando os germes de aplicações $f, g : (\mathbb{C}^{r+1}, 0) \longrightarrow (\mathbb{C}, 0)$, temos que a equivalência analítica de $(\mathcal{X}, 0)$ e $(\mathcal{Y}, 0)$ corresponde à $\mathcal{K}$-equivalência dos germes de aplicações f e g no sentido clássico da Teoria de Singularidades, onde $\mathcal{K}$ é o grupo de contato de Mather.

Por outro lado, uma parametrização $H = (t_1^n, \cdots, t_r^n, S(t_1, \cdots, t_r))$ da hipersuperfície quase ordinária $(\mathcal{X}, 0)$ dada por $f \in \mathbb{C}\{\underline{X}\}[X_{r+1}]$ de grau n pode ser considerada como germe de uma aplicação

$$\begin{array}{rccl} H: & (\mathbb{C}^r, 0) & \longrightarrow & (\mathbb{C}^{r+1}, 0) \\ & (t_1, \cdots, t_r) & \longmapsto & (t_1^n, \cdots, t_r^n, S(t_1, \cdots, t_r)). \end{array}$$

Dadas $H_1,\ H_2 : (\mathbb{C}^r, 0) \longrightarrow (\mathbb{C}^{r+1}, 0)$, dizemos que H_1 e H_2 são $(\mathcal{R} \times \mathcal{L})$-equivalentes, se

$$H_1 = \sigma \circ H_2 \circ \rho^{-1}.$$

com σ, ρ difeomorfismos tais que $\rho \in \mathcal{R} = Diff(\mathbb{C}^r, 0)$ e $\sigma \in \mathcal{L} = Diff(\mathbb{C}^{r+1}, 0)$. Neste caso, denotamos $\mathcal{A} = \mathcal{L} \times \mathcal{R}$ o produto direto de $\mathcal{L}, \mathcal{R}$ e diremos que H_1 é $\mathcal{A}$-equivalente a H_2, indicando $H_1 \underset{\mathcal{A}}{\sim} H_2$.

Como vimos no início da Seção 1.2, temos que $\mathcal{O}_f \approx \mathbb{C}\{t_1^n, \cdots, t_r^n, S(t_1, \cdots, t_r)\}$. Deste modo, a equivalência analítica de h.q.o. pode ser traduzida por meio de isomorfismos de suas álgebras analíticas ou, equivalentemente, na $\mathcal{A}$-equivalência de suas parametrizações.

Vamos destacar algumas propriedades e resultados relacionados à $\mathcal{A}$-equivalência de h.q.o.. Lembramos que as justificativas dos fatos apresentados encontram-se em [12] ou [20].

No que segue, $\mathcal{M}_r = (t)$ e $\mathcal{M}_{r+1} = (\underline{X}, X_{r+1})$ denotam os ideais maximais de $\mathbb{C}\{\underline{t}\}$ e $\mathbb{C}\{\underline{X}, X_{r+1}\}$, respectivamente.

Definição 1.34. *Sejam $H = (t_1^n, \cdots, t_r^n, S(t_1, \cdots, t_r))$ a parametrização de uma hipersuperfície quase ordinária em $\mathbb{C}^{r+1}$ e $\{\lambda_1, \cdots, \lambda_g\}$ seus expoentes característicos. Denotamos por $\tilde{\mathcal{A}}$ o subgrupo de $\mathcal{A}$ formado pelos elementos (σ, ρ) com $\rho = (t_1(c_1+\zeta_1), \cdots, t_r(c_r+\zeta_r))$ e $\sigma(\underline{X}, X_{r+1}) = (\sigma_1(\underline{X}, X_{r+1}), \cdots, \sigma_{r+1}(\underline{X}, X_{r+1}))$ tais que*

$$\begin{array}{rcl} \sigma_i(\underline{X}, X_{r+1}) & = & X_i(a_i + \epsilon_i) + X_{r+1}(b_i + \eta_i) \\ \sigma_{r+1}(\underline{X}, X_{r+1}) & = & X_{r+1}(a_{r+1} + \epsilon_{r+1}) + \underline{X}^{\alpha}\eta_{r+1}, \end{array}$$

$b_i \in \mathbb{C}$, $c_i, a_i, a_{r+1} \in \mathbb{C}^*$, $\zeta_i \in \mathcal{M}_r$, $\eta_i, \epsilon_i, \epsilon_{r+1} \in \mathcal{M}_{r+1}$, $b_i + \eta_i = 0$ se $n > \lambda_{1i}$, para todo $i = 1, \cdots, r$, $\eta_{r+1} \in \mathbb{C}\{\underline{X}, X_{r+1}\}$ e $\underline{\alpha} = (\lceil \frac{\lambda_{11}}{n} \rceil, \cdots, \lceil \frac{\lambda_{1r}}{n} \rceil)$.

O subgrupo $\tilde{\mathcal{A}} \subset \mathcal{A}$ é o grupo cuja a ação sobre uma parametrização normalizada nos fornece outra parametrização ainda com os mesmos expoentes característicos e mesma multiplicidade.

Em [20], Panek caracterizou o subgrupo $\mathcal{G}$ de $\tilde{\mathcal{A}}$, cuja a ação sobre uma parametrização normalizada nos fornece ainda outra parametrização normalizada. Tal subgrupo será muito usado no Capítulo 3, onde apresentamos um método para se estudar uma h.q.o. a partir de outra h.q.o..

Teorema 1.35. *Seja $H = (t_1^n, \cdots, t_r^n, S(t_1, \cdots, t_r))$ uma parametrização normalizada de uma h.q.o.. O subgrupo $\mathcal{G} \subset \tilde{\mathcal{A}}$, cuja ação sobre H ainda nos dá uma parametrização normalizada, é caracterizado pelos elementos $(\sigma, \rho) \in \tilde{\mathcal{A}}$ tais que*

$$\begin{array}{rll} \rho : & \mathbb{C}^r & \longrightarrow \mathbb{C}^r \\ & \underline{t} & \longrightarrow (\rho_1(\underline{t}), \cdots, \rho_r(\underline{t})) \end{array}$$

com $\rho_j = t_j \left(1 + \frac{P_j(H)}{t_j^n}\right)^{\frac{1}{n}}$, $P_j = X_j\epsilon_j + X_{r+1}(b_j + \eta_j)$, $\epsilon_j, \eta_j \in \mathcal{M}_{r+1}$, $b_j \in \mathbb{C}$ e

$$\begin{array}{rll} \sigma : & \mathbb{C}^{r+1} & \longrightarrow \mathbb{C}^{r+1} \\ & (\underline{X}, X_{r+1}) & \longrightarrow (\sigma_1(\underline{X}, X_{r+1}), \cdots, \sigma_{r+1}(\underline{X}, X_{r+1})) \end{array}$$

com $\sigma_i = X_i + P_i$, para todo $i = 1, \cdots, r$, $\sigma_{r+1} = X_{r+1} + P_{r+1}$, $P_{r+1} = X_{r+1}\epsilon_{r+1} + \underline{X}^{\alpha}\eta_{r+1}$, $\epsilon_{r+1} \in \mathcal{M}_{r+1}$, $\eta_{r+1} \in \mathbb{C}\{\underline{X}, X_{r+1}\}$ e $\underline{\alpha} = (\lceil \frac{\lambda_{11}}{n} \rceil, \cdots, \lceil \frac{\lambda_{1r}}{n} \rceil)$.

Demonstração. A demonstração é apresentada no Teorema 2.1 de [20]. □

Utilizando tais mudanças de coordenadas, Panek em [20], apresenta algumas formas normais para h.q.o. levando em conta uma condição sobre o vetor de Frobenius e λ_1 e que reapresentamos abaixo.

Exemplo 1.36. *Seja $H = (t_1^n, \cdots, t_r^n, S(t_1, \cdots, t_r))$ uma parametrização quase ordinária com vetor de Frobenius $\mathcal{F}_H$. Se $\mathcal{F}_H \prec \lambda_1$, então*

- *para $n = 2$, temos $H \underset{\mathcal{G}}{\sim} (t_1^2, \cdots, t_r^2, t_1^{\lambda_{11}} \cdots t_r^{\lambda_{1r}})$;*
- *para $n = 3$, temos $H \underset{\mathcal{G}}{\sim} (t_1^3, \cdots, t_r^3, t_1^{\lambda_{11}} \cdots t_r^{\lambda_{1r}})$ com $\lambda_{1i} \in \{0, 1, 2\}$;*
- *para $n \geq 4$, $H \underset{\mathcal{G}}{\sim} (t_1^4, \cdots, t_r^4, t_1^{\lambda_{11}} \cdots t_r^{\lambda_{1r}})$ com $\lambda_{1i} \in \{0, 1\}$.*

Com o intuito de poder simplificar parametrizações de h.q.o. vamos apresentar um resultado de Hernandes e Panek, (ver [12]). Para tanto, consideramos o subgrupo $\mathcal{H} \subset \tilde{\mathcal{A}}$ das homotetias com o objetivo de normalizar alguns coeficientes de termos presentes na parametrização, ou seja, torná-los mônicos. Mais especificamente, temos:

$$\mathcal{H} = \left\{ \begin{array}{l} (\sigma, \rho) \in \tilde{\mathcal{A}}; \sigma(X_1, \cdots, X_{r+1}) = (a_1X_1, \cdots, a_{r+1}X_{r+1}), \\ \rho(t_1, \cdots, t_r) = (c_1t_1, \cdots, c_rt_r), a_i \neq 0 \neq c_i \end{array} \right\}.$$

Proposição 1.37. *Seja* $H = \left(t_1^n, \cdots, t_r^n, at^{\lambda_1} + \sum_{\underline{\zeta} \succ \lambda_1} a_{\underline{\zeta}} t^{\underline{\zeta}}\right)$ *uma parametrização normalizada de uma hipersuperfície quase ordinária. Se* $P \subseteq \{\underline{\zeta} - \lambda_1; a_{\underline{\zeta}} \neq 0\}$ *é um conjunto linearmente independente de* $\mathbb{R}^r$*, então existe uma homotetia* $(\sigma, \rho) \in \mathcal{H}$ *que normaliza simultaneamente todos os termos com expoente* $\underline{\zeta}$ *de* P *e o coeficiente associado a* λ_1.

Demonstração. Ver Proposição 2.5 em [12]. □

Ainda em [12] e [20] é abordado o módulo das r-formas de Kähler associado à parametrização de uma h.q.o. e conjuntos numéricos vinculados a tal módulo.

Para encerrar esta seção, apresentaremos de maneira breve tais conjuntos.

Considere $\mathcal{O} = \mathcal{O}_f$ e $\Omega^1_{\mathcal{O}}$ o $\mathcal{O}$-módulo de diferenciais de Kähler, ou seja, o $\mathcal{O}$-módulo gerado por $dX_1, \cdots, dX_{r+1}$ sujeito à relação $\sum_{i=1}^{r+1} f_{X_i} dX_i = 0$. No que segue vamos considerar o $\mathcal{O}$-módulo $\Omega^r_{\mathcal{O}}$ das r-formas de Kähler, isto é,

$$\Omega^r_{\mathcal{O}} = \bigwedge_{i=1}^{r} \Omega^1_{\mathcal{O}}.$$

Note que, se $\omega \in \Omega^r_{\mathcal{O}}$, então

$$\omega = \sum_{i=1}^{r+1} h_i dX_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dX_i} \wedge \cdots \wedge dX_{r+1}.$$

Consideremos $\Omega^r_{\mathbb{C}\{\underline{t}\}}$ o $\mathbb{C}\{\underline{t}\}$-módulo das r-formas diferenciais

$$\Omega^r_{\mathbb{C}\{\underline{t}\}} = \{g dt_1 \wedge \cdots \wedge dt_r,\ g \in \mathbb{C}\{\underline{t}\}\} (\approx \mathbb{C}\{\underline{t}\})$$

que é, em particular, um $\mathbb{C}\{t_1^n, \cdots, t_r^n, S(t_1, \cdots, t_r)\}$-módulo. Deste modo, considerando o monomorfismo

$$\begin{array}{rcl} H^* : \mathcal{O} & \to & \mathbb{C}\{\underline{t}\} \\ h & \mapsto & h(H) \end{array}$$

temos

$$H^*(\mathcal{O}) = \mathbb{C}\{t_1^n, \cdots, t_r^n, S(t_1, \cdots, t_r)\}$$

e portanto $\Omega^r_{\mathbb{C}\{\underline{t}\}}$ tem estrutura de $\mathcal{O}$-módulo via H^*.

O monomorfismo de $\mathbb{C}$-álgebras $H^* : \mathcal{O} \to \mathbb{C}\{\underline{t}\}$, apresentado acima, nos dá assim o homomorfismo de $\mathcal{O}$-módulos

$$\begin{array}{rcl} \psi_H : \Omega^r_{\mathcal{O}} & \to & \Omega^r_{\mathbb{C}\{\underline{t}\}} \\ \omega & \mapsto & \displaystyle\sum_{i=1}^{r+1} H^*(h_i) \bigwedge_{j=1; j\neq i}^{r+1} dH^*(X_j) \end{array} \tag{1.4}$$

em que $\omega = \sum_{i=1}^{r+1} h_i dX_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dX_i} \wedge \cdots \wedge dX_{r+1}$. Algumas vezes, também denotaremos $\psi_H(\omega)$ por $H^*(\omega)$.

Considerando o homomorfismo de $\mathcal{O}$-módulos dado em (1.4) e dado $\omega \in \Omega^r_{\mathcal{O}}$, denotamos

$$V_{\mathcal{N}}(\omega) := \left\{ \underline{\delta};\ \underline{\delta} \text{ é vértice do poliedro de Newton de } \frac{\psi_H(\omega)}{dt_1 \wedge \cdots \wedge dt_r} \right\}.$$

Claramente, se $\frac{\psi_H(\omega)}{dt_1 \wedge \cdots \wedge dt_r}$ admite expoente dominante $\underline{\delta} = (\delta_1, \cdots, \delta_r)$, então o poliedro de Newton correspondente tem um único vértice que é justamente $\underline{\delta}$. Este fato será usado ao longo do texto evidenciado pela notação $\sharp V_{\mathcal{N}}(\omega) = 1$. Além disto, indicaremos $\mathcal{V}_H \left(\frac{\psi_H(\omega)}{dt_1 \wedge \cdots \wedge dt_r} \right) = \underline{\delta} + (\underline{1})$.

Similarmente ao caso do semigrupo de uma hipersuperfície quase ordinária, definimos os conjuntos $\Lambda_{\mathcal{N}}$ e $\Lambda_{\mathcal{D}}$, respectivamente, por

$$\Lambda_{\mathcal{N}}(H) = \Lambda_{\mathcal{N}} = \{ \underline{\delta} + (\underline{1}); \underline{\delta} \in V_{\mathcal{N}}(\omega) \text{ para todo } \omega \in \Omega^r_{\mathcal{O}} \setminus ker(\psi_H) \}$$

e

$$\Lambda_{\mathcal{D}}(H) = \Lambda_{\mathcal{D}} = \left\{ \underline{\gamma};\ \underline{\gamma} = \mathcal{V}_H \left(\frac{\psi_H(\omega)}{dt_1 \wedge \cdots \wedge dt_r} \right) \text{ e } \sharp V_{\mathcal{N}}(\omega) = 1 \text{ para } \omega \in \Omega^r_{\mathcal{O}} \setminus ker(\psi_H) \right\}.$$

No caso do semigrupo de uma hipersuperfície quase ordinária H, González-Pérez (em [8]) e Popescu-Pampu (em [21]) introduzem os conjuntos $\Gamma_{\mathcal{N}}$ e $\Gamma_{\mathcal{D}}$ e mostram que $\Gamma_{\mathcal{N}} = \Gamma_{\mathcal{D}}$ (veja Proposição 1.28). No caso dos conjuntos $\Lambda_{\mathcal{N}}$ e $\Lambda_{\mathcal{D}}$ é óbvio que $\Lambda_{\mathcal{D}} \subseteq \Lambda_{\mathcal{N}}$. No entanto, em [12], Hernandes e Panek ilustram através de um exemplo que esta inclusão pode ser estrita.

Uma importante propriedade do conjunto $\Lambda_{\mathcal{D}}(H)$, que tem estrutura de Γ_H-monomódulo, isto é, $\Gamma_H + \Lambda_{\mathcal{D}}(H) \subset \Lambda_{\mathcal{D}}(H)$, é que tal conjunto permite identificarmos termos em uma parametrização quase ordinária que são passíveis de eliminação por meio de mudanças de coordenadas como dadas na Definição 1.34. Mais especificamente destacamos:

Proposição 1.38. *Seja $\omega = \sum_{i=1}^{r+1} (-1)^{r+1-i} P_i dX_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dX_i} \wedge \cdots \wedge dX_{r+1} \in \Omega^r_{\mathcal{O}}$ com P_i como descrito no Teorema 1.35, $\underline{\gamma} = \mathcal{V}_H \left(\frac{\psi_H(\omega)}{dt_1 \wedge \cdots \wedge dt_r} \right) \in \Lambda_{\mathcal{D}}(H)$ e $\gamma_i \geq n$ para todo $i = 1, \cdots, r$. Podemos eliminar o termo $t^{\underline{\gamma}-(\underline{n})}$ em $S(\underline{t})$ por meio de mudanças de coordenadas como dadas no Teorema 1.35, sem alterar os termos de $S(\underline{t})$ da forma $t^{\underline{\delta}}$ com $|\delta| < |\gamma| - nr$.*

Demonstração. Veja o Colorário 3.6 de [12]. □

No caso de curvas planas temos sempre que $\Gamma \setminus \{0\} \subset \Lambda$. No entanto, o mesmo não ocorre com uma h.q.o. em geral. O teorema a seguir, apresentado por Panek em [20], identifica o subconjunto Υ_H de Γ_H que sempre está contido em $\Lambda_{\mathcal{D}}(H)$, bem como caracteriza sob que condições temos $\Upsilon_H = \Lambda_{\mathcal{D}}(H)$.

Teorema 1.39. *Dada $H = (t_1^n, \cdots, t_r^n, t_1^{\lambda_{11}} \cdots t_r^{\lambda_{1r}} u)$ uma parametrização normalizada de uma h.q.o., então $\Upsilon_H \subseteq \Lambda_{\mathcal{D}}(H)$, onde*

$$\Upsilon_H := \{\delta = (\delta_1, \cdots, \delta_r) \in \Gamma_H \setminus \{\underline{0}\};\ \textit{existe}\, \delta_i \neq 0,\ \textit{com}\, \underline{\delta} - (\underline{n}) + \nu_i \in \Gamma_H\} \subset \Gamma_H.$$

Mais ainda, $\Upsilon_H = \Lambda_{\mathcal{D}}(H)$ se, e somente se, H é $\tilde{\mathcal{A}}$-equivalente à uma h.q.o. quase homogênea, isto é, $H \underset{\tilde{\mathcal{A}}}{\sim} (t_1^n, \cdots, t_r^n, t_1^{\lambda_{11}} \cdots t_r^{\lambda_{1r}})$.

Demonstração. Ver Teorema 3.19 em [20]. □

Capítulo 2

Base Standard e o semigrupo de uma hipersuperfície quase ordinária

Seja $H = (t_1^n, \cdots, t_r^n, S(t_1, \cdots, t_r))$ uma parametrização de uma hipersuperfície quase ordinária dada por um polinômio $f \in \mathbb{C}\{\underline{X}\}[X_{r+1}]$ e denotemos por $\mathbb{C}\{B\}$ a subálgebra gerada por $B = \{t_1^n, \cdots, t_r^n, S(t_1, \cdots, t_r)\} \subset \mathcal{M}_r$, isto é, $\mathbb{C}\{B\} = \mathbb{C}\{t_1^n, \cdots, t_r^n, S(t_1, \cdots, t_r)\}$.

Neste capítulo, apresentaremos um método que permite obter um conjunto $F_g = \{f_1, \cdots, f_{r+g}\}$ de geradores para $\mathbb{C}\{B\}$ tal que $\{\mathcal{V}(f_i); 1 \leq i \leq r+g\}$ coincide com o conjunto de geradores do semigrupo de Γ_H de H. Em particular, vamos apresentar um modo alternativo para obter um sistema completo de semirraízes para f.

2.1 Base Standard para subálgebras

Em [10] é apresentado o conceito de Base Standard para subálgebras de $K[[\underline{t}]]$, em que K é um corpo, com respeito a uma ordem monomial que permite, no contexto de curvas, obter os geradores para seu semigrupo. Tal método está baseado na noção de redução de um elemento de $K[[\underline{t}]]$ por um conjunto finito $F \subset K[[\underline{t}]]$ com respeito à ordem monomial fixada. Embora no capítulo anterior tenhamos apresentado conceitos e resultados no contexto analítico, neste capítulo vamos no concentrar no aspecto formal, ou seja, trataremos de subálgebras de $K[[\underline{t}]]$.

Vamos estender as noções de [10] para as ordens não necessariamente monomiais (totais), o que permite abordar a situação de h.q.o. e, eventualmente, outras situações na Teoria de Singularidades e Álgebra Comutativa.

Como antes, um monômio $t_1^{\alpha_1} \cdots t_r^{\alpha_r}$ será denotado por $t^{\underline{\alpha}}$ onde $\underline{\alpha} = (\alpha_1, \cdots, \alpha_r) \in \mathbb{N}^r$.

O conjunto de todos os monômios de $K[[\underline{t}]]$ será denotado por Π. Note que $(\Pi, \cdot\,)$ é um semigrupo com elemento neutro $1 = t_1^0 \cdots t_r^0$ e isomorfo ao semigrupo $(\mathbb{N}^r, +)$ via a aplicação

$$\begin{array}{rcl} \Pi & \longrightarrow & \mathbb{N}^r \\ t^{\underline{\alpha}} & \longmapsto & \underline{\alpha}. \end{array}$$

Uma relação de ordem $\preceq$ sobre Π é *compatível com o produto* se:

- $1 \preceq m$ para todo $m \in \Pi$;
- $m_1 \preceq m_2$, implica que $mm_1 \preceq mm_2$ para todos $m, m_1, m_2 \in \Pi$.

Note que, se $m_1 \mid m_2$, então $m_1 \preceq m_2$.

Uma ordem sobre Π compatível com o produto é chamada *monomial* se ela é total.

No que segue vamos considerar a ordem sobre Π induzida pela *ordem produto* em $\mathbb{N}^r$, ou seja,

$$t_1^{\alpha_1} \cdots t_r^{\alpha_r} \preceq t_1^{\beta_1} \cdots t_r^{\beta_r} \iff \alpha_i \leq \beta_i \text{ para todo } 1 \leq i \leq r.$$

Temos que $\preceq$ é uma ordem compatível com o produto, mas não é uma ordem monomial para $r > 1$.

A ordem $\preceq$ também será denominada de *ordem produto sobre* Π.

Dado $f = \sum_{\underline{\alpha} \in \mathbb{N}^r} a_{\underline{\alpha}} t^{\underline{\alpha}} \in K[[\underline{t}]] \setminus \{0\}$, denotaremos $\Pi(f) = \{t^{\underline{\alpha}}; \underline{\alpha} \in Supp(f)\}$ o conjunto dos monômios que efetivamente ocorrem em f, onde $Supp(f)$ é o suporte de f como da Definição 1.25.

Note que, os vértices do poliedro de Newton de f correspondem a monômios que pertencem ao conjunto $Min_{\preceq}\Pi(f)$ dos elementos minimais de $\Pi(f)$ com respeito à ordem produto, ou seja,

$$\{t^{\underline{\alpha}}; \underline{\alpha} \in V_{\mathcal{N}}(f)\} \subseteq Min_{\preceq}\Pi(f).$$

Seja $F = \{f_1, \cdots, f_m\} \subseteq \mathcal{M}_r$ e considere o homomorfismo substituição

$$\begin{array}{rll} \mathcal{S}_F: & K[[y_1, \cdots, y_m]] & \longrightarrow K[[\underline{t}]] \\ & g & \longmapsto g(f_1, \cdots, f_m). \end{array}$$

Um F-*produto de potências* é um elemento da forma

$$F^{\alpha} = \mathcal{S}_F\left(\prod_{i=1}^{m} y_i^{\alpha_i}\right) = \prod_{i=1}^{m} f_i^{\alpha_i},$$

onde $\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_m) \in \mathbb{N}^m$.

Indicamos por $K[[F]]$ a K-subálgebra de $K[[\underline{t}]]$ dada pela imagem de $\mathcal{S}_F$, ou seja,

$$K[[F]] = S_F\left(K[[y_1, \cdots, y_m]]\right)$$

em que $a = aF^0 = a\prod_{i=1}^{m} f_i^0 \in K$.

No que segue vamos nos ater a conjuntos finitos $F \subseteq \mathcal{M}_r$ em que todos seus elementos tenham expoentes dominantes.

Dado $f \in K[[\underline{t}]]$, dizemos que f se *reduz a g módulo F*, escrevendo

$$f \underset{F}{\longrightarrow} g$$

se existem um F-produto de potências F^α e $a \in K$, tais que

$$g = f - aF^\alpha,$$

com $g = 0$ ou $\mathcal{N}(g) \subsetneq \mathcal{N}(f)$.

Como elementos de F admitem expoente dominante, então o mesmo ocorre com qualquer F-produto. Deste modo, a inclusão estrita $\mathcal{N}(g) \subsetneq \mathcal{N}(f)$ indica que existe ao menos um vértice do poliedro de Newton de f que não pertence ao poliedro de Newton de g, ou seja, $\{\mathcal{V}(F^\alpha)\} = V_{\mathcal{N}}(F^\alpha) \subseteq V_{\mathcal{N}}(f)$. Portanto, um elemento $f \in K[[\underline{t}]]$ pode ser reduzido por $F = \{f_1, \cdots, f_m\}$ se, e somente se, existe $v \in V_{\mathcal{N}}(f)$ tal que $v \in \langle \mathcal{V}(f_1), \cdots, \mathcal{V}(f_m)\rangle$.

Note que, tais conceitos e propriedades generalizam os respectivos objetos quando a ordem é monomial, conforme podemos constatar em [10].

Escreveremos

$$f \underset{F_+}{\longrightarrow} g$$

quando existir uma cadeia, eventualmente infinita, de reduções módulo F, iniciando em f e finalizando em g, isto é, g não se reduz módulo F. Diremos, neste caso, que g é uma *redução final de f módulo F*. Note que se $f \underset{F_+}{\longrightarrow} g$, então $f - g \in K[[F]]$.

Uma *redução final* g de f, por um conjunto finito F, como acima, será chamada de *redução completa*, se para todo $m \in \Pi(g)$, m não se reduz módulo F.

Exemplo 2.1. *A redução de um elemento por um conjunto F pode não ser única.*

Por exemplo, considere $f = t_1^4t_2^{12} + t_1^8t_2$ e $F = \{f_1 = t_1t_2^3, f_2 = t_1^2t_2^6 + t_1^4t_2^6\}$. Temos que,

$$\begin{aligned} g_1 &= f - f_1^4 = t_1^8t_2 \\ g_2 &= f - f_2^2 = t_1^8t_2 + t_1^8t_2^{12} + 2t_1^6t_2^{12} \\ g_3 &= f - f_1^2f_2 = t_1^8t_2 + t_1^6t_2^{12} \end{aligned}$$

são reduções de f por F.

Por este motivo, algumas vezes indicaremos o F-produto pelo qual realizamos a redução escrevendo

$$f \underset{f_1^4}{\longrightarrow} g_1 \qquad f \underset{f_2^2}{\longrightarrow} g_2 \qquad f \underset{f_1^2 f_2}{\longrightarrow} g_3\ .$$

O conceito de Base Standard, que tem suas origens na teoria de Bases de Gröebner para ideais polinomiais, foi estendido para outras estruturas algébricas. Neste capítulo, abordaremos na situação descrita a seguir:

Definição 2.2. *Dizemos que $B = \{f_1, \cdots, f_m\} \subset \mathcal{M}_r$ é uma Base Standard de subálgebras, com respeito à ordem produto $\preceq$, se todo elemento $f_i \in B$ admite expoente dominante e, para todo $f \in K[[B]] \setminus \{0\}$, temos*

$$\mathcal{V}(B^\alpha) \in V_{\mathcal{N}}(f)$$

para algum $\alpha \in \mathbb{N}^m$. Uma Base Standard para uma subálgebra $A \subset K[[\underline{t}]]$ é uma Base Standard de álgebras B, tal que $A = K[[B]]$.

Exemplo 2.3. *1. Sejam $\underline{d_1}, \cdots, \underline{d_s} \in \mathbb{N}^r$ e $B = \{t^{\underline{d_1}}, \cdots, t^{\underline{d_s}}\}$. Temos que B é Base Standard para $K[[B]]$. De fato, se $f \in K[[B]] \setminus \{0\}$, então $\underline{\delta} \in V_{\mathcal{N}}(f) \subset Supp(f) \subset \langle \underline{d_1}, \cdots, \underline{d_s} \rangle$ e, deste modo, podemos expressar*

$$\underline{\delta} = \sum_{i=1}^{s} \underline{d_i}\alpha_i = \mathcal{V}(B^\alpha)$$

com $\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_s) \in \mathbb{N}^s$.

2. O conjunto $B = \{f_1 = t_1^2, f_2 = t_2^2, f_3 = t_1^3 + t_1^4 t_2\}$ não é Base Standard para $K[[B]]$. De fato,

$$f = f_3^2 - f_1^3 = 2t_1^7 t_2 + t_1^8 t_2^2 \in K[[B]]$$

mas não existe um B-produto tal que $\mathcal{V}(B^\alpha) \in V_{\mathcal{N}}(f)$. Basta observar que $V_{\mathcal{N}}(f) = \{(7,1)\}$ e, como

$$\mathcal{V}(B^\alpha) = \alpha_1(2,0) + \alpha_2(0,2) + \alpha_3(3,0),$$

não podemos ter $2\alpha_1 + 3\alpha_3 = 7$ e $2\alpha_2 = 1$.

O conceito de Base Standard, acima introduzido, pode ser caracterizado por meio da noção de redução.

Proposição 2.4. *Seja $B = \{f_1, \cdots, f_m\} \subset \mathcal{M}_r$ com f_i admitindo expoente dominante e $A = K[[B]]$. São equivalentes:*

1. B é Base Standard para A.

2. Todo $f \in A \setminus \{0\}$ admite uma redução final nula módulo B.

Demonstração. (1) $\Rightarrow$ (2). Seja g uma redução final de f módulo B, então $g \in A$. Se $g \neq 0$, como B é Base Standard para A existe um B-produto tal que $\mathcal{V}(B^\alpha) \in V_\mathcal{N}(g)$, ou seja, existe um vértice v do poliedro de Newton de g tal que $v \in \langle \mathcal{V}(f_1), \cdots, \mathcal{V}(f_m)\rangle$. Mas, deste modo, g pode ser reduzido por B, contrariando o fato de que g é redução final. Portanto, devemos ter $g = 0$.

Para a implicação (2) $\Rightarrow$ (1) tome $f \in A \setminus \{0\}$. Como f admite uma redução final nula módulo B, temos que $V_\mathcal{N}(f) \cap \langle \mathcal{V}(f_1), \cdots, \mathcal{V}(f_m)\rangle \neq \varnothing$, ou seja, existe $\mathcal{V}(B^\alpha) \in V_\mathcal{N}(f)$ e, por definição, B é uma Base Standard para A. $\square$

Note que, se $B = \{f_1, \cdots, f_m\}$ é uma Base Standard e

$$\mathcal{V}(f_i) \in \langle \mathcal{V}(f_1), \cdots, \widehat{\mathcal{V}(f_i)}, \cdots, \mathcal{V}(f_m)\rangle, \tag{2.1}$$

então $B_1 = B \setminus \{f_i\}$ é ainda uma Base Standard.

De fato, um elemento f pode ser reduzido por B se, e somente se, existe $\alpha \in \mathbb{N}^m$ tal que

$$\{\mathcal{V}(B^\alpha)\} = V_\mathcal{N}(B^\alpha) \subset V_\mathcal{N}(f).$$

Mas, por (2.1), temos que existe $\alpha' = (\alpha'_1, \cdots, \widehat{\alpha'_i}, \cdots, \alpha'_m) \in \mathbb{N}^{m-1}$ tal que $\mathcal{V}(f_i) = \mathcal{V}(B_1^{\alpha'}) = \mathcal{V}(f_1^{\alpha'_1} \cdots \widehat{f_i^{\alpha'_i}} \cdots f_m^{\alpha'_m})$, ou seja,

$$\begin{aligned} \mathcal{V}(B^\alpha) &= \mathcal{V}(f_1^{\alpha_1} \cdots f_m^{\alpha_m}) \\ &= \mathcal{V}(f_1^{\alpha_1 + \alpha'_1\alpha_i} \cdots \widehat{f_i^{\alpha_i + \alpha'_i\alpha_i}} \cdots f_m^{\alpha_m + \alpha'_m\alpha_i}) \\ &= \mathcal{V}(B_1^{\alpha + \alpha'\alpha_i}). \end{aligned}$$

Assim, f pode ser reduzido por B_1. Além disto, (2.1) indica que podemos reduzir f_i por B_1, isto é, existe B_1-produto e $a \in K$ tal que

$$g = f_i - aB_1^{\alpha'} \in K[[B]]$$

com $g = 0$ ou $\mathcal{N}(g) \subsetneq \mathcal{N}(f_i)$. Como B é Base Standard podemos continuar o processo e obter uma redução final nula de f_i, ou seja,

$$f_i \underset{B_+}{\longrightarrow} 0.$$

Como toda redução por B possibilita uma redução por B_1, temos que

$$f_i \underset{(B_1)_+}{\longrightarrow} 0$$

e portanto $f_i \in K[[B]]$. Logo, $K[[B] = K[[B_1]]$ e B_1 é Base Standard para a mesma subálgebra gerada por B.

Isto motiva a seguinte definição similar ao caso em que se considera ordens monomiais.

Definição 2.5. *Uma Base Standard $B = \{f_1, \cdots, f_m\}$ é mínima se para todo $f_i \in B$ temos que*

$$\mathcal{V}(f_i) \notin \langle \mathcal{V}(f_1), \cdots, \widehat{\mathcal{V}(f_i)}, \cdots, \mathcal{V}(f_m) \rangle.$$

Segue do exposto anteriormente que, de uma Base Standard, sempre podemos obter uma Base Standard mínima.

O conceito a seguir é uma adaptação para o contexto de ordem produto que estamos adotando. Tal conceito, no caso em que se tem uma ordem monomial, possibilita a obtenção de um processo para obter uma Base Standard.

Definição 2.6. *Seja $B \subseteq \mathcal{M}_r$ um subconjunto finito de elementos com expoente dominante. Um S-processo de B é uma expressão*

$$aB^\alpha - bB^\beta$$

com $a, b \in K$, $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^{\sharp B}$ tais que

$$\mathcal{N}(aB^\alpha - bB^\beta) \subsetneq \mathcal{N}(B^\alpha) = \mathcal{N}(B^\beta)$$

sempre que $aB^\alpha - bB^\beta \neq 0$.

Na Proposição 2.4 vimos que podemos caracterizar uma Base Standard B por meio da redução final nula de todos os elementos de $K[[B]]$. O teorema a seguir refina tal resultado.

Teorema 2.7. *Seja $B \subseteq \mathcal{M}_r$ finito, em que todos os seus elementos tenham expoente dominante. Temos que B é uma Base Standard para $K[[B]]$ se, e somente se, todo S-processo de B admite redução nula módulo B.*

Demonstração. ($\Rightarrow$) Seja S um S-processo de B. Uma vez que $S \in K[[B]]$ e como B é Base Standard para $K[[B]]$, segue que S admite redução nula módulo B.

($\Leftarrow$) Seja $f \in K[[B]] \setminus \{0\}$, ou seja, podemos escrever

$$f = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^{\sharp B}} a_\alpha B^\alpha. \tag{2.2}$$

Denote por $\mathcal{P}(\sum a_\alpha B^\alpha)$ o fecho convexo em $\mathbb{R}^r_+$ de $\bigcup_{\alpha \in \mathbb{N}^{\sharp B}; a_\alpha \neq 0} \left(\mathcal{V}(B^\alpha) + \mathbb{R}^r_+\right)$ e por $V(\sum a_\alpha B^\alpha)$ os vértices das faces compactas de $\mathcal{P}(\sum a_\alpha B^\alpha)$. Note que,

$$V_{\mathcal{N}}(f) \subseteq \mathcal{N}(f) \subseteq \mathcal{P}\left(\sum a_\alpha B^\alpha\right)$$

para qualquer representação como em (2.2). Além disto, veja que podemos ter $V_{\mathcal{N}}(B^\alpha) = V_{\mathcal{N}}(B^\beta)$ para parcelas $a_\alpha B^\alpha$ e $a_\beta B^\beta$, com $a_\alpha \neq 0 \neq a_\beta$, em representações como em (2.2).

Dado um vértice $v \in V(\sum a_\alpha B^\alpha)$, chamamos amplitude de v em $\sum a_\alpha B^\alpha$ o número de B-produtos em $\sum a_\alpha B^\alpha$ com $a_\alpha \neq 0$ tais que $\mathcal{V}(B^\alpha) = v$ e denotamos

$$amp_v\left(\sum a_\alpha B^\alpha\right) = \sharp\{B^\alpha; a_\alpha \neq 0 \text{ e } \mathcal{V}(B^\alpha) = v\} \in \mathbb{N} \setminus \{0\}.$$

Dentre todas as representações de f como em (2.2), tomemos aquelas minimais com respeito à inclusão

$$\mathcal{N}(f) \subseteq \mathcal{P}\left(\sum a_\alpha B^\alpha\right) \tag{2.3}$$

e, dentre estas, escolha uma tal que $k = \sum_{v \in V(\sum a_\alpha B^\alpha)} amp_v(\sum a_\alpha B^\alpha)$ seja o menor possível.

Se existe $\alpha \in \mathbb{N}^{\sharp B}$ e $\mathcal{V}(B^\alpha) \in \mathcal{V}_{\mathcal{N}}(f)$ então, por definição B é uma Base Standard.

Suponha por absurdo que, na representação escolhida com as propriedades acima, temos $\mathcal{V}(B^\alpha) \notin \mathcal{V}_{\mathcal{N}}(f)$ para todo $\alpha \in \mathbb{N}^{\sharp B}$ com $a_\alpha \neq 0$. Em particular, devemos ter que $amp_v(\sum a_\alpha B^\alpha) > 1$ para todo $v \in V(\sum a_\alpha B^\alpha)$.

Tome $v' \in V(\sum a_\alpha B^\alpha)$, então existem $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{N}^{\sharp B}$ com $a_{\alpha_1} \neq 0 \neq a_{\alpha_2}$ e $v' = \mathcal{V}(B^{\alpha_1}) = \mathcal{V}(B^{\alpha_2})$. Deste modo, existe (um único) $b \in K \setminus \{0\}$ tal que

$$S = a_{\alpha_1} B^{\alpha_1} - b a_{\alpha_2} B^{\alpha_2}$$

é um S-processo.

Por hipótese, S admite redução final nula módulo B, ou seja, podemos escrever

$$S = a_{\alpha_1} B^{\alpha_1} - b a_{\alpha_2} B^{\alpha_2} = \sum_{\beta \in \mathbb{N}^{\sharp B}} b_\beta B^\beta$$

com

$$\mathcal{N}(\sum_{\beta \in \mathbb{N}^{\sharp B}} b_\beta B^\beta) \subsetneq \mathcal{N}(B^{\alpha_1}) = \mathcal{V}(B^{\alpha_1}) + \mathbb{R}^r_+ = v' + \mathbb{R}^r_+, \tag{2.4}$$

ou seja, $v' \notin V(\sum_{\beta\in\mathbb{N}^{\sharp B}} b_\beta B^\beta)$.

Como

$$a_{\alpha_1}B^{\alpha_1} + a_{\alpha_2}B^{\alpha_2} = S + (b+1)a_{\alpha_2}B^{\alpha_2} = (b+1)a_{\alpha_2}B^{\alpha_2} + \sum_{\beta\in\mathbb{N}^{\sharp B}} b_\beta B^\beta,$$

podemos reescrever a representação de f, isto é, obter uma outra expressão de f da forma

$$f = \sum_{\alpha\in\mathbb{N}^{\sharp B}} a_\alpha B^\alpha = (b+1)a_{\alpha_2}B^{\alpha_2} + \sum_{\beta\in\mathbb{N}^{\sharp B}} b_\beta B^\beta + \sum_{\alpha\in\mathbb{N}^{\sharp B},\ \alpha_2\neq\alpha\neq\alpha_1} a_\alpha B^\alpha.$$

Se $b \neq -1$ ou $amp_{v'}(\sum a_\alpha B^\alpha) > 2$, então a nova representação satisfaz

$$\mathcal{P}\left((b+1)a_{\alpha_2}B^{\alpha_2} + \sum_{\beta\in\mathbb{N}^{\sharp B}} b_\beta B^\beta + \sum_{\alpha\in\mathbb{N}^{\sharp B},\ \alpha_2\neq\alpha\neq\alpha_1} a_\alpha B^\alpha\right) = \mathcal{P}\left(\sum_{\alpha\in\mathbb{N}^{\sharp B}} a_\alpha B^\alpha\right)$$

ou seja, é minimal com respeito à inclusão (2.3). Mas, nesta representação, a amplitude de v' é menor que sua amplitude na representação original e a amplitude dos demais vértices se mantém. Isto contraria a minimalidade do inteiro k.

Por outro lado, se $b = -1$ e $amp_{v'}(\sum a_\alpha B^\alpha) = 2$, então

$$\mathcal{N}(f) \subseteq \mathcal{P}\left(\sum_{\beta\in\mathbb{N}^{\sharp B}} b_\beta B^\beta + \sum_{\alpha\in\mathbb{N}^{\sharp B},\ \alpha_2\neq\alpha\neq\alpha_1} a_\alpha B^\alpha\right) \subsetneq \mathcal{N}\left(\sum a_\alpha B^\alpha\right)$$

o que contraria a minimalidade de $\sum a_\alpha B^\alpha$ em (2.3).

Portanto, B é Base Standard para $K[[B]]$. $\square$

Vejamos mais de perto como são determinados os S-processos de um conjunto finito $B = \{f_1, \cdots, f_m\}$ em que cada f_i tenha expoente dominante $\mathcal{V}(f_i) = (a_{i1}, \cdots, a_{ir}) \in \mathbb{N}^r$.

Um S-processo $S = aB^\alpha - bB^\beta$, a menos de constantes, é determinado pelos vetores $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^m$ e as soluções do sistema homogêneo de equações lineares diofantinas:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^m \alpha_j a_{j1} &= \sum_{j=1}^m \beta_j a_{j1} \\ \sum_{j=1}^m \alpha_j a_{j2} &= \sum_{j=1}^m \beta_j a_{j2} \\ &\ \vdots \\ \sum_{j=1}^m \alpha_j a_{jn} &= \sum_{j=1}^m \beta_j a_{jn}. \end{aligned} \tag{2.5}$$

O conjunto de todas as soluções de (2.5) é um semigrupo aditivo de $\mathbb{N}^{2m}$, gerado pelo conjunto M_S de todas as soluções não nulas de (2.5) que são mínimas com respeito à ordem parcial

$$(\alpha, \beta) \preceq (\gamma, \delta) \iff \alpha_j \leq \gamma_j,\ \beta_j \leq \delta_j \text{ para } j = 1, \cdots, m.$$

Temos que toda solução de (2.5) é obtida como soma de elementos de M_S, isto segue do Lema de Dickson (veja Corolário 1.3.6 de [15]) e, consequentemente, todo S-processo de B é determinado se conhecermos o conjunto M_S. Há vários métodos para determinar tal conjunto, veja por exemplo [4].

Um S-processo de B obtido por meio de um elemento de M_S será chamado *S-processo mínimo.*

O Teorema 2.7 apresenta uma caracterização de Base Standard por meio de uma propriedade de todos os S-processos de um conjunto B, que são em quantidade infinita.

O lema a seguir possibilita reescrever tal caracterização considerando os S-processos mínimos de B, que são em número finito.

Lema 2.8. *Seja $B \subset \mathcal{M}_r$ um conjunto finito de elementos com expoente dominante. Se todo S-processo mínimo de B admite redução nula módulo B, então todo S-processo $S = aB^\delta - bB^\epsilon$ admite uma representação da forma $\sum_{\gamma \in \mathbb{N}^{\sharp B}} a_\gamma B^\gamma$ tal que*

$$\mathcal{N}\left(\sum_{\gamma \in \mathbb{N}^{\sharp B}} a_\gamma B^\gamma\right) \subsetneq \mathcal{N}(B^\delta) = \mathcal{N}(B^\epsilon).$$

Demonstração. Seja S_i um S-processo mínimo de B, que, sem perda de generalidade, podemos supor $S_i = B^{\alpha_i} - a_i B^{\beta_i}$ com $a_i \in K$ univocamente determinado. Por hipótese, $S_i \underset{B_+}{\longrightarrow} 0$, então podemos expressar $B^{\alpha_i} - a_i B^{\beta_i} = \sum_{\gamma_i \in \mathbb{N}^{\sharp B}} a_{\gamma_i} B^{\gamma_i}$, equivalentemente, $B^{\alpha_i} = a_i B^{\beta_i} + \sum_{\gamma_i \in \mathbb{N}^{\sharp B}} a_{\gamma_i} B^{\gamma_i}$ com

$$\mathcal{N}\left(\sum_{\gamma_i \in \mathbb{N}^{\sharp B}} a_{\gamma_i} B^{\gamma_i}\right) \subsetneq \mathcal{N}(B^{\alpha_i}) = \mathcal{N}(B^{\beta_i}).$$

Dado um S-processo que se expressa, a menos de constante, da forma $S = B^\delta - aB^\epsilon$. Temos que,

$$B^\delta = \prod_{i \in I} (B^{\alpha_i})^{n_i} \ \text{ e } \ B^\epsilon = \prod_{i \in I} (B^{\beta_i})^{n_i}$$

onde $I \subset \mathbb{N}$ é um conjunto finito e $n_i \in \mathbb{N}$.

Deste modo,

$$\begin{aligned}
B^\delta &= \prod_{i\in I}(B^{\alpha_i})^{n_i} = \prod_{i\in I}(a_iB^{\beta_i} + \sum_{\gamma_i\in\mathbb{N}^{\sharp B}} a_{\gamma_i}B^{\gamma_i})^{n_i} \\
&= \prod_{i\in I}(a_iB^{\beta_i})^{n_i} + \sum_{\theta\in\mathbb{N}^{\sharp B}} b_\theta B^\theta \\
&= a'B^\epsilon + \sum_{\theta\in\mathbb{N}^{\sharp B}} b_\theta B^\theta
\end{aligned}$$

com $\mathcal{N}\left(\sum_{\theta\in\mathbb{N}^{\sharp B}} b_\theta B^\theta\right) \subsetneq \mathcal{N}(B^\epsilon)$ e $a' = \prod_{i\in I} a_i^{n_i}$.

Como S é um S-processo, devemos ter $\mathcal{N}(B^\delta) = \mathcal{N}(B^\epsilon)$. Assim,

$$\mathcal{N}(B^\delta - a'B^\epsilon) = \mathcal{N}\left(\sum_{\theta\in\mathbb{N}^{\sharp B}} b_\theta B^\theta\right) \subsetneq \mathcal{N}(B^\delta) = \mathcal{N}(B^\epsilon).$$

Como a constante $a \in K$ é univocamente determinada, temos que $a = a'$ e obtemos uma representação $S = \sum_{\theta\in\mathbb{N}^{\sharp B}} b_\theta B^\theta$ como desejado. $\square$

Como consequência do lema anterior temos um teorema análogo ao Teorema 2.3 de [10] para o caso da ordem produto que estamos considerando e com os conceitos que apresentamos anteriormente.

Teorema 2.9. *Seja $B \subset \mathcal{M}_r$ finito e cujos elementos tenham expoente dominante. Temos que B é uma Base Standard para $K[[B]]$ se, e somente se, todo S-processo mínimo de B admite redução nula.*

Demonstração. A demonstração é análoga à do Teorema 2.7, usando o lema anterior para garantir a condição (2.4). $\square$

2.2 Base Standard para o anel local de uma h.q.o.

Seja $H = (t_1^n, \cdots, t_r^n, S(t_1, \cdots, t_r))$ uma parametrização de uma hipersuperfície quase ordinária definida por $f \in \mathbb{C}\{X_1, \cdots, X_{r+1}\}$ irredutível. Como vimos, a sequência de $\mathbb{C}$-álgebras

$$0 \longrightarrow (f) \longrightarrow \mathbb{C}\{X_1, \cdots, X_{r+1}\} \underset{H^*}{\longrightarrow} \mathbb{C}\{B\} \longrightarrow \{0\}$$

em que $H^*(h) = h(t_1^n, \cdots, t_r^n, S(t_1, \cdots, t_r))$ e $\mathbb{C}\{B\} := \mathbb{C}\{t_1^n, \cdots, t_r^n, S(t_1, \cdots, t_r)\}$ é exata, ou seja, temos o isomorfismo de $\mathbb{C}$-álgebras

$$\mathcal{O}_f = \frac{\mathbb{C}\{X_1, \cdots, X_{r+1}\}}{(f)} \approx \mathbb{C}\{B\}.$$

Como $B = \{t_1^n, \cdots, t_r^n, S(t_1, \cdots, t_r)\} \subseteq \mathcal{M}_r$ é um conjunto finito de elementos com expoente dominante, podemos aplicar o método descrito na seção anterior a fim de obter uma Base Standard para $\mathbb{C}\{B\}$ com respeito à ordem parcial considerada.

O Teorema 2.9, embora permita verificar se um conjunto finito é uma Base Standard para $\mathbb{C}\{B\}$, nos faz verificar que reduções finais de todos os S-processos mínimos de B são nulas. Podemos combinar os conceitos de semirraízes e Base Standard de modo que possamos determinar um conjunto de semirraízes que, unido com B, nos dá uma Base Standard mínima por meio de reduções de S-processos privilegiados.

Para descrever mais precisamente nossa estratégia, usaremos o seguinte lema:

Lema 2.10. *Com as notações anteriores, temos que se $(f_0, \cdots, f_g)$ é um sistema completo de semirraízes para f, então $B_1 = \{h_1 = t_1^n, \cdots, h_r = t_r^n, h_{r+1}, \cdots, h_{r+g}\}$ é uma Base Standard mínima para $\mathbb{C}\{B\}$, onde $h_{r+i} = H^*(f_{i-1})$ para $i = 1, \cdots, g$.*

Demonstração. Inicialmente note que todos os elementos de B_1 têm expoente dominante.

Dado $h \in \mathbb{C}\{B\} \setminus \{0\}$, temos que $V_{\mathcal{N}}(h) \subset \Gamma_H = \langle \nu_1, \cdots, \nu_{r+g} \rangle$. Deste modo, cada vértice $v \in V_{\mathcal{N}}(h)$ é da forma

$$v = \sum_{i=1}^{r+g} \alpha_i \nu_i = \mathcal{V}(B_1^{\alpha})$$

para algum $\alpha \in \mathbb{N}^{r+g}$ e por definição B_1 é Base Standard para $\mathbb{C}\{B\}$.

Além disto, como $\nu_i \notin \langle \nu_1, \cdots, \widehat{\nu_i}, \cdots \nu_{r+g} \rangle$ segue que B_1 é Base Standard mínima para $\mathbb{C}\{B\}$. $\square$

Lembremos que se $\lambda_1 \prec \lambda_2 \prec \cdots \prec \lambda_g$ são os expoentes característicos generalizados de H,então podemos escrever (veja Lema 1.13)

$$S(\underline{t}) = S(t_1, \cdots, t_r) = t^{\lambda_1} u_1 + t^{\lambda_2} u_2 + \cdots + t^{\lambda_g} u_g$$

com $u_i \in \mathbb{C}\{\underline{t}\}$ é uma unidade para todo $i = 1, \cdots, g$.

No método descrito na seção anterior fizemos uso de potências de elementos de $\mathbb{C}\{B\}$, S-processos e reduções, então vamos apresentar alguns lemas técnicos envolvendo tais conceitos no contexto de h.q.o..

Comecemos por um lema técnico que nos auxiliará nas próximas análises.

No que segue, se α, $\beta \in \mathbb{N}^r$ são tais que $\alpha \preceq \beta$, então diremos que β *supera ou é igual a* α.

Lema 2.11. *Sejam* $h_i = \sum_{j=0}^{g-j} t^{\mathcal{V}(h_i)+\lambda_{i+j}-\lambda_i} u_{ij} \in \mathbb{C}\{\underline{t}\}$*, onde* $1 \leq i \leq g$ *e* $u_{ij} \in \mathbb{C}\{\underline{t}\}$ *são unidades. Os expoentes em que* λ_k *contribui no produto* $h_1^{\alpha_1} \cdots h_j^{\alpha_j}$*, com* $j+1 \leq k \leq g$ *e* $\alpha_j \neq 0$*, superam ou são ou iguais a*

$$\mathcal{V}(h_1^{\alpha_1} \cdots h_j^{\alpha_j}) + \lambda_k - \lambda_j = \sum_{i=1}^{j} \alpha_i \mathcal{V}(h_i) + \lambda_k - \lambda_j.$$

Demonstração. Para todo $i = 1, \cdots, g$ temos h_i com expoente dominante $\mathcal{V}(h_i)$ e pela expressão de h_i, um termo em que λ_k contribui como expoente em $h_1^{\alpha_1} \cdots h_j^{\alpha_j}$ tem expoente que supera ou é igual ao expoente que obtemos ao considerar o produto do termo com expoente dominante de $h_1^{\alpha_1} \cdots h_l^{\alpha_l - 1} \cdots h_j^{\alpha_j}$ e o termo em h_l com expoente $\mathcal{V}(h_l) + \lambda_k - \lambda_l$, para algum $1 \leq l \leq j$ tal que $\alpha_l \neq 0$.

Tal produto nos dá o expoente $\mathcal{V}(h_1^{\alpha_1} \cdots h_j^{\alpha_j}) + \lambda_k - \lambda_l$. Como $l \leq j$, $\lambda_1 \prec \lambda_2 \prec \cdots \prec \lambda_g$ e $\alpha_j \neq 0$, o expoente acima será mínimo ao considerar $l = j$. Portanto, expoentes de $h_1^{\alpha_1} \cdots h_j^{\alpha_j}$ que envolvem λ_k com $j+1 \leq k \leq g$ superam ou são ou iguais à

$$\sum_{i=1}^{j} \alpha_i \mathcal{V}(h_i) + \lambda_k - \lambda_j.$$

Em particular, temos que

$$h_1^{\alpha_1} \cdots h_j^{\alpha_j} = t^{\mathcal{V}(h_1^{\alpha_1} \cdots h_j^{\alpha_j})} v_j + t^{\mathcal{V}(h_1^{\alpha_1} \cdots h_j^{\alpha_j}) + \lambda_{j+1} - \lambda_j} v_{j+1} + \cdots + t^{\mathcal{V}(h_1^{\alpha_1} \cdots h_j^{\alpha_j}) + \lambda_g - \lambda_j} v_g$$

com $v_1, \cdots, v_g$ unidades em $\mathbb{C}\{\underline{t}\}$. □

Observação 2.12. *Note que, se* $h_0^{\alpha_0} = t^{(a_1, \cdots, a_r)n}$*, então o Lema 2.11 continua válido ao considerarmos*

$$h_0^{\alpha_0} h_1^{\alpha_1} \cdots h_j^{\alpha_j}$$

com $\alpha_j \neq 0$*, ou seja, os expoentes para os quais* λ_k *contribuem para* $j+1 \leq k \leq g$ *no produto anterior, superam ou são iguais a* $\mathcal{V}(h_0^{\alpha_0} \cdots h_j^{\alpha_j}) + \lambda_k - \lambda_j$.

Nossa estratégia para obter uma Base Standard para $\mathbb{C}\{B\}$ será exibir um conjunto $F_g \supset B$ de elementos com expoente dominante que contém semirraízes e satisfaz o Lema 2.10. Para tanto, construiremos uma cadeia

$$B = F_1 \subset F_2 \subset \cdots \subset F_g$$

agregando reduções de S-processos privilegiados e obtidos por meio das propriedades dos expoentes característicos dadas no Lema 1.13.

Denote $h_1 = t_1^n, \cdots, h_r = t_r^n, h_{r+1} = S(\underline{t})$ e $F_1 = B$. Note que $h_i = H^*(X_i)$ para $i = 1, \cdots, r+1$.

Temos que $\nu_{r+1} := \mathcal{V}(h_{r+1}) = \lambda_1$ e como $\lambda_1 \notin Q_0$ e $n_1\lambda_1 \in Q_0$ segue que $h_{r+1}^{n_1}$ pode ser reduzido mod F_1, isto é, reduzido por F_1. Usando o Lema 2.11 para expressar a potência $h_{r+1}^{n_1}$, temos o S-processo

$$\begin{aligned} S_1 = h_{r+1}^{n_1} - h_1^{\alpha_1^1} \cdots h_r^{\alpha_r^1} &= t^{n_1\lambda_1}u_1' + t^{(n_1-1)\lambda_1+\lambda_2}u_2' + \cdots + t^{(n_1-1)\lambda_1+\lambda_g}u_g' - t^{n\underline{\alpha}^1} \\ &= t^{n_1\lambda_1}(u_1'-1) + t^{(n_1-1)\lambda_1+\lambda_2}u_2' + \cdots + t^{(n_1-1)\lambda_1+\lambda_g}u_g' \end{aligned}$$

com $n\underline{\alpha}^1 = n_1\lambda_1 = \mathcal{V}(h_{r+1}^{n_1})$ e $u_1' - 1$ não unidade.

Vamos mostrar que todos os termos de $t^{n_1\lambda_1}(u_1'-1)$ podem ser reduzidos mod F_1. De fato, segue do Lema 1.13 que todos os expoentes de $t^{n_1\lambda_1}(u_1'-1)$ pertencem a Q_1. Por [2], temos que o vetor de Frobenuis $\mathcal{F}_1$ do semigrupo $\Gamma_1 = \langle \nu_1, \cdots, \nu_r, \nu_{r+1}\rangle$ é

$$\mathcal{F}_1 = (n_1-1)\nu_{r+1} - (\underline{n}) = n_1\lambda_1 - \lambda_1 - (\underline{n}) \prec n_1\lambda_1.$$

Como todos os expoentes de $t^{n_1\lambda_1}(u_1'-1)$ superam $n_1\lambda_1$ e portanto, superam $\mathcal{F}_1$, segue (Teorema 1.32) que tais expoentes pertencem a Γ_1. Logo, os termos respectivos podem ser reduzidos mod F_1. Os F_1-produtos utilizados em tal redução são da forma

$$h_1^{\beta_1^1} \cdots h_r^{\beta_r^1} h_{r+1}^{\beta_{r+1}^1} = t^{n\underline{\beta}^1}(t^{\beta_{r+1}^1\lambda_1}u_1'' + t^{(\beta_{r+1}^1-1)\lambda_1+\lambda_2}u_2'' + \cdots + t^{(\beta_{r+1}^1-1)\lambda_1+\lambda_g}u_g'').$$

onde β_{r+1}^1 pode ser considerado $0 \leq \beta_{r+1}^1 < n_1$ usando a representação padrão de um elemento de Γ_1.

Defina,

$$h_{r+2} = h_{r+1}^{n_1} - h_1^{\alpha_1^1} \cdots h_r^{\alpha_r^1} - \sum c_{(\beta_1^1,\cdots,\beta_{r+1}^1)} h_1^{\beta_1^1} \cdots h_r^{\beta_r^1} h_{r+1}^{\beta_{r+1}^1}$$

a redução final de $h_{r+1}^{n_1} - h_1^{\alpha_1^1} \cdots h_r^{\alpha_r^1}$ mod F_1 com $c_{(\beta_1^1,\cdots,\beta_{r+1}^1)} \in \mathbb{C}$.

Note que os expoentes em $h_1^{\beta_1^1} \cdots h_r^{\beta_r^1} h_{r+1}^{\beta_{r+1}^1}$ nos quais λ_i contribui, em virtude do Lema 2.11, superam ou são iguais a

$$(\beta_{r+1}^1 - 1)\lambda_1 + \lambda_i + n\underline{\beta^1} = \beta_{r+1}^1\lambda_1 + n\underline{\beta^1} + \lambda_i - \lambda_1 \succ n_1\lambda_1 + \lambda_i - \lambda_1 = (n_1-1)\lambda_1 + \lambda_i$$

pois $\beta_{r+1}^1\lambda_1 + n\underline{\beta^1} = \mathcal{V}(h_1^{\beta_1^1} \cdots h_r^{\beta_r^1} h_{r+1}^{\beta_{r+1}^1}) \succ n_1\lambda_1$ e no S-processo S_1, os fatores da forma $h_1^{\beta_1} \cdots h_r^{\beta_r} h_{r+1}^{\beta_{r+1}}$ eliminam termos de $t^{n_1\lambda_1}(u_1'-1)$.

Segue assim, que

$$h_{r+2} = t^{(n_1-1)\lambda_1+\lambda_2}v_2 + \cdots + t^{(n_1-1)\lambda_1+\lambda_g}v_g = t^{\nu_{r+2}}v_2 + t^{\nu_{r+2}-\lambda_2+\lambda_3}v_3 + \cdots + t^{\nu_{r+2}-\lambda_2+\lambda_g}v_g$$

com $\nu_{r+2} = \mathcal{V}(h_{r+2}) = (n_1-1)\lambda_1 + \lambda_2$.

Como $\nu_{r+2} \notin \Gamma_1$ e $\nu_{r+2} \succ n_1\lambda_1 = n_1\nu_{r+1}$, temos que h_{r+2} será acrescentado a F_1. Obtemos então,

$$F_2 := \{h_1, \cdots, h_r, h_{r+1}, h_{r+2}\}.$$

e por construção temos que $h_{r+2} = H^*(f_1)$ com $f_1 \in \mathbb{C}\{\underline{X}\}[X_{r+1}]$ mônico e $deg_{X_{r+1}}(f_1) = n_1$.

Pelo Lema 1.13 e Proposição 1.30, temos $n_2\nu_{r+2} \in \Gamma_1$ e, portanto, podemos considerar o S-processo $S_2 = h_{r+2}^{n_2} - a_\alpha h_1^{\alpha_1^2} \cdots h_{r+1}^{\alpha_{r+1}^2}$, que, pelo Lema 2.11, se expressa como

$$\begin{aligned} S_2 &= t^{n_2\nu_{r+2}}v_2' + t^{(n_2-1)\nu_{r+2}+\nu_{r+2}-\lambda_2+\lambda_3}v_3' + \cdots + t^{(n_2-1)\nu_{r+2}+\nu_{r+2}-\lambda_2+\lambda_g}v_g' \\ &\quad -t^{n\underline{\alpha}^2}(t^{\alpha_{r+1}^2\lambda_1}u_1''' + t^{(\alpha_{r+1}^2-1)\lambda_1+\lambda_2}u_2''' + \cdots + t^{(\alpha_{r+1}^2-1)\lambda_1+\lambda_g}u_g''') \end{aligned}$$

com $n\underline{\alpha}^2 + \alpha_{r+1}^2\lambda_1 = n_2\nu_{r+2} = \mathcal{V}(h_{r+2}^{n_2})$.

Note que, para todo $i = 2, \cdots, g$, temos

$$n\underline{\alpha}^2 + (\alpha_{r+1}^2 - 1)\lambda_1 + \lambda_i = n\underline{\alpha}^2 + \alpha_{r+1}^2\lambda_1 + \lambda_i - \lambda_1 = n_2\nu_{r+2} + \lambda_i - \lambda_1 \succ n_2\nu_{r+2} + \lambda_i - \lambda_2$$

pois $\lambda_2 \succ \lambda_1$. Portanto,

$$h_{r+2}^{n_2} - a_\alpha h_1^{\alpha_1^2} \cdots h_{r+1}^{\alpha_{r+1}^2} = t^{n_2\nu_{r+2}}(v_2' - u_1''' - t^{\lambda_2-\lambda_1}u_2''') + t^{n_2\nu_{r+2}-\lambda_2+\lambda_3}v_3'' + \cdots + t^{n_2\nu_{r+2}-\lambda_2+\lambda_g}v_g''$$

com $v_2' - u_1''' - t^{\lambda_2-\lambda_1}u_2'''$ não unidade e com todos os expoentes de $t^{n_2\nu_{r+2}}(v_2' - u_1''' - t^{\lambda_2-\lambda_1}u_2''')$ em Q_2.

Calculando o vetor de Frobenius $\mathcal{F}_2$ de $\Gamma_2 = \langle \nu_1, \cdots, \nu_r, \nu_{r+1}, \nu_{r+2} \rangle$, obtemos

$$\mathcal{F}_2 = (n_1 - 1)\nu_{r+1} + (n_2 - 1)\nu_{r+2} - \underline{n} = n_2\nu_{r+2} - \lambda_2 - \underline{n} \prec n_2\nu_{r+2}.$$

Assim, todos os expoentes de $t^{n_2\nu_{r+2}}(v_2' - u_1''' - t^{\lambda_2-\lambda_1}u_2''')$ superam $\mathcal{F}_2$. Portanto, tais expoentes pertencem a Γ_2 e os termos com tais expoentes podem ser reduzidos mod F_2. Tais reduções são feitas através de F_2-produtos do tipo

$$\begin{aligned} h_1^{\beta_1^2} \cdots h_{r+1}^{\beta_{r+1}^2} h_{r+2}^{\beta_{r+2}^2} &= t^{n\underline{\beta}^2}(t^{\beta_{r+1}^2\lambda_1}u_1'''' + t^{(\beta_{r+1}^2-1)\lambda_1+\lambda_2}u_2'''' + \cdots + t^{(\beta_{r+1}^2-1)\lambda_1+\lambda_g}u_g'''') \\ &\quad \cdot (t^{\beta_{r+2}^2\nu_{r+2}}v_2''' + t^{(\beta_{r+2}^2-1)\nu_{r+2}+\nu_{r+2}-\lambda_2+\lambda_3}v_3''' + \cdots \\ &\quad + t^{(\beta_{r+2}^2-1)\nu_{r+2}+\nu_{r+2}-\lambda_2+\lambda_g}v_g''') \end{aligned}$$

com expoente dominante $n\underline{\beta}^2 + \beta_{r+1}^2\lambda_1 + \beta_{r+2}^2\nu_{r+2} \succ n_2\nu_{r+2}$, pois cancela com termos de $t^{n_2\nu_{r+2}}(v_2' - u_1''' - t^{\lambda_2-\lambda_1}u_2''')$.

Novamente, pela representação padrão de um elemento de Γ_2, podemos assumir que $0 \leq \beta_{r+1}^2 < n_2$. Além disto, pelo Lema 2.11, para qualquer $3 \leq i \leq g$, os termos de $h_1^{\beta_1} \cdots h_{r+1}^{\beta_{r+1}} h_{r+2}^{\beta_{r+2}}$ nos quais λ_i contribui, tem expoentes que superam ou são iguais a

$$n\underline{\beta}^2 + \beta_{r+1}^2\lambda_1 + \beta_{r+2}^2\nu_{r+2} - \lambda_2 + \lambda_i.$$

Logo, definindo a redução final de $h_{r+2}^{n_2} - a_\alpha h_1^{\alpha_1^2} \cdots h_{r+1}^{\alpha_{r+1}^2}$ mod F_2 por

$$h_{r+3} = h_{r+2}^{n_2} - a_\alpha h_1^{\alpha_1^2} \cdots h_{r+1}^{\alpha_{r+1}^2} - \sum c_{(\beta_1^2, \cdots, \beta_{r+1}^2)} h_1^{\beta_1^2} \cdots h_{r+2}^{\beta_{r+2}^2},$$

com $c_{(\beta_1^2, \cdots, \beta_{r+1}^2)} \in \mathbb{C}$, segue que

$$h_{r+3} = t^{n_2\nu_{r+2} - \lambda_2 + \lambda_3} w_3 + t^{n_2\nu_{r+2} - \lambda_2 + \lambda_4} w_4 + \cdots + t^{n_2\nu_{r+2} - \lambda_2 + \lambda_g} w_g$$

onde $\nu_{r+3} = \mathcal{V}(h_{r+3}) = n_2\nu_{r+2} - \lambda_2 + \lambda_3$. Note que, $\nu_{r+3} \succ n_2\nu_{r+2}$. Como $\nu_{r+3} \notin \Gamma_2$, h_{r+3} será acrescentado a F_2 no próximo passo e consideramos

$$F_3 := \{h_1, \cdots, h_r, h_{r+1}, h_{r+2}, h_{r+3}\}.$$

Novamente, a construção realizada nos dá que $h_{r+3} = H^*(f_2)$ com $f_2 \in \mathbb{C}\{\underline{X}\}[X_{r+1}]$ mônico e com $deg_{X_{r+1}}(f_2) = n_2 \cdot deg_{X_{r+1}}(f_1) = n_1 n_2$.

De modo análogo, como $n_3\nu_{r+3} \in \Gamma_2$ podemos considerar um S-processo da forma $h_{r+3}^{n_3} - a_\alpha h_1^{\alpha_1^3} \cdots h_{r+2}^{\alpha_{r+2}^3}$, com $a_\alpha \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. A redução final do S-processo obtido mod F_3, fornece h_{r+4} tal que $\mathcal{V}(h_{r+4}) \notin \Gamma_3$ e, portanto, será acrescentada a F_3 obtendo

$$F_4 := \{h_1, \cdots, h_{r+3}, h_{r+4}\}.$$

em que $h_{r+3} = H^*(f_3)$ e f_3 cumpre as condições de uma semirraiz.

Prosseguindo desta forma até h_{r+g-1}, encontramos no $(g-1)$-ésimo passo

$$F_g := \{h_1, \cdots, h_r, h_{r+1}, \cdots, h_{r+g}\}$$

tal que para todo $j = 1, \cdots, g$ tem-se

$$\nu_{r+j} = \mathcal{V}(h_{r+j}) = n_{j-1}\nu_{r+j-1} - \lambda_{j-1} + \lambda_j$$

com $\nu_{r+j} \notin Q_{j-1}$, $\nu_{r+j} \in Q_j$, $\nu_{r+j} \succ n_{j-1}\nu_{r+j-1}$, $n_j\nu_{r+j} \in \Gamma_{j-1}$ e

$$h_{r+j} = t^{\nu_{r+j}} u_{j,j} + t^{\nu_{r+j} - \lambda_j + \lambda_{j+1}} u_{j+1,j} + \cdots + t^{\nu_{r+j} - \lambda_j + \lambda_g} u_{g,j}.$$

com $h_{r+j} = H^*(f_j)$ e f_j uma semirraiz para f.

Sejamos mais rigorosos, vamos mostrar que ao reduzimos o S-processo $h_{r+j}^{n_j} - a_\alpha h_1^{\alpha_1} \cdots h_{r+1}^{\alpha_{r+1}} \cdots h_{r+j-1}^{\alpha_{r+j-1}}$ mod F_j, obtemos h_{r+j+1}, como descrito acima. De fato, como $n_j\nu_{r+j} \in \Gamma_{j-1} = \langle \nu_1, \cdots, \nu_r, \nu_{r+1}, \cdots, \nu_{r+j-1} \rangle$, temos, pelo Lema 2.11, que

$$\begin{aligned} h_{r+j}^{n_j} - a_\alpha h_1^{\alpha_1} \cdots h_{r+j-1}^{\alpha_{r+j-1}} = \; & t^{n_j\nu_{r+j}} u_{j,j} + t^{n_j\nu_{r+j} - \lambda_j + \lambda_{j+1}} u_{j+1,j} + \cdots + t^{n_j\nu_{r+j} - \lambda_j + \lambda_g} u_{g,j} - t^{n\underline{\alpha}} \\ & \cdot (t^{\alpha_{r+1}\nu_{r+1}} u_{1,1} + t^{(\alpha_{r+1}-1)\nu_{r+1} + \lambda_2} u_{2,1} + \cdots + t^{(\alpha_{r+1}-1)\nu_{r+1} + \lambda_g} u_{g,1}) \\ & (t^{\alpha_{r+2}\nu_{r+2}} u_{2,2} + t^{\alpha_{r+2}\nu_{r+2} - \lambda_2 + \lambda_3} u_{3,2} + \cdots + t^{\alpha_{r+2}\nu_{r+2} - \lambda_2 + \lambda_g} u_{g,2}) \\ & \cdots (t^{\alpha_{r+j-1}\nu_{r+j-1}} u_{j-1,j-1} + t^{\alpha_{r+j-1}\nu_{r+j-1} - \lambda_{j-1} + \lambda_j} u_{j,j-1} + \cdots \\ & + t^{\alpha_{r+j-1}\nu_{r+j-1} - \lambda_{j-1} + \lambda_g} u_{g,j-1}) \end{aligned}$$

com expoente dominante $n\underline{\alpha} + \sum_{i=1}^{j-1} \alpha_{r+i}\nu_{r+i} = n_j\nu_{r+j}$ e com $0 \leq \alpha_{r+i} < n_i$ para $i = 1, \cdots, j-1$.

Novamente, pelo Lema 2.11, temos que para $k = j, \cdots, g$, todo expoente de uma parcela na qual λ_k contribui, supera

$$\begin{aligned}
\alpha_{r+1}\nu_{r+1} + \cdots + \alpha_{r+j-1}\nu_{r+j-1} + n\underline{\alpha} - \lambda_{j-1} + \lambda_k &= \sum_{i=1}^{j-1} \alpha_{r+i}\nu_{r+i} + n\underline{\alpha} + \lambda_k - \lambda_{j-1} \\
&= n_j\nu_{r+j} + \lambda_k - \lambda_{j-1} \\
&\succ n_j\nu_{r+j} + \lambda_k - \lambda_j
\end{aligned}$$

pois $\lambda_j \succ \lambda_{j-1}$. Então, podemos escrever

$$\begin{aligned}
h_{r+j}^{n_j} - a_\alpha h_1^{\alpha_1} \cdots h_{r+j-1}^{\alpha_{r+j-1}} &= t^{n_j\nu_{r+j}}(u_{j,j} - u_{j-1,j-1} - t^{\lambda_j - \lambda_{j-1}} u_{j,j-1}) \\
&\quad + t^{n_j\nu_{r+j} - \lambda_j + \lambda_{j+1}} u'_{j+1,j} + \cdots + t^{n_j\nu_{r+j} - \lambda_j + \lambda_g} u'_{g,j}
\end{aligned}$$

com $u_{j,j} - u_{j-1,j-1} - t^{\lambda_j - \lambda_{j-1}} u_{j,j-1}$ não unidade e os expoentes de $t^{n_j\nu_{r+j}}(u_{j,j} - u_{j-1,j-1} - t^{\lambda_j - \lambda_{j-1}} u_{j,j-1})$ pertencentes a Q_j. Por [2], o vetor Frobenius $\mathcal{F}_j$ do semigrupo $\Gamma_j = \langle \nu_1, \cdots, \nu_r, \nu_{r+1}, \cdots, \nu_{r+j} \rangle$ é dado por

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_j &= (n_1 - 1)\nu_{r+1} + \cdots + (n_j - 1)\nu_{r+j} - \underline{n} \\
&= n_j\nu_{r+j} + (n_1\nu_{r+1} - \nu_{r+2}) + \cdots + (n_{j-1}\nu_{r+j-1} - \nu_{r+j}) - \nu_{r+1} - \underline{n} \prec n_j\nu_{r+j}
\end{aligned}$$

pois, pelo que vimos, $n_{l-1}\nu_{r+l-1} \prec \nu_{r+l}$, para $l = 2, \cdots, j-1$. Assim, todos os expoentes de $t^{n_j\nu_{r+j}}(u_{j,j} - u_{j-1,j-1} - t^{\lambda_j - \lambda_{j-1}} u_{j,j-1})$ superam $\mathcal{F}_j$ e, portanto, seus termos podem ser reduzidos mod F_j.

Os F_j-produtos utilizados em tais reduções podem ser tomados da forma

$$\begin{aligned}
h_1^{\beta_1} \cdots h_{r+j}^{\beta_{r+j}} &= t^{n\underline{\beta}}(t^{\beta_{r+1}\nu_{r+1}} u''_{1,1} + t^{(\beta_{r+1}-1)\nu_{r+1} + \lambda_2} u''_{2,1} + \cdots + t^{(\beta_{r+1}-1)\nu_{r+1} + \lambda_g} u''_{g,1}) \\
&\quad (t^{\beta_{r+2}\nu_{r+2}} u''_{2,2} + t^{\beta_{r+2}\nu_{r+2} - \lambda_2 + \lambda_3} u''_{3,2} + \cdots + t^{\alpha_{r+2}\nu_{r+2} - \lambda_2 + \lambda_g} u''_{g,2}) \cdots \\
&\quad (t^{\beta_{r+j}\nu_{r+j}} u''_{j,j} + t^{\beta_{r+j}\nu_{r+j} - \lambda_j + \lambda_{j+1}} u''_{j+1,j} + \cdots + t^{\beta_{r+j}\nu_{r+j} - \lambda_j + \lambda_g} u''_{g,j})
\end{aligned}$$

com $0 \leq \beta_{r+i} < n_i$, para $i = 1, \cdots, j$, e com expoente $n\underline{\beta} + \sum_{i=1}^{j-1} \beta_{r+i}\nu_{r+i} \succ n_j\nu_{r+j}$, pois cancelam expoentes presentes nos termos de $t^{n_j\nu_{r+j}}(u_{j,j} - u_{j-1,j-1} - t^{\lambda_j - \lambda_{j-1}} u_{j,j-1})$. Outra vez, pelo Lema 2.11, temos que para $k = j+1, \cdots, g$, todo expoente de uma parcela do F_j-produto em que λ_k contribui, supera

$$\begin{aligned}
\beta_{r+j}\nu_{r+j} - \lambda_j + \lambda_k + \beta_{r+1}\nu_{r+1} + \cdots + \beta_{r+j-1}\nu_{r+j-1} + n\underline{\beta} &= \sum_{i=1}^{j} \beta_{r+i}\nu_{r+i} + n\underline{\beta} + \lambda_k - \lambda_j \\
&\succ n_j\nu_{r+j} + \lambda_k - \lambda_j.
\end{aligned}$$

Considerando a redução final de $h_{r+j}^{n_j} - a_\alpha h_1^{\alpha_1} \cdots h_{r+j-1}^{\alpha_{r+j-1}}$ mod F_j

$$h_{r+j+1} = h_{r+j}^{n_j} - a_\alpha h_1^{\alpha_1} \cdots h_{r+1}^{\alpha_{r+j-1}} - \sum c_{(\beta_1,\cdots,\beta_{r+j})} h_1^{\beta_1} \cdots h_{r+j}^{\beta_{r+j}},$$

segue que

$$h_{r+j+1} = t^{n_j \nu_{r+j} - \lambda_j + \lambda_{j+1}} u_{j+1,j+1} + \cdots + t^{n_j \nu_{r+j} - \lambda_j + \lambda_g} u_{g,j+1}$$

onde $\nu_{r+j+1} = \mathcal{V}(h_{r+j+1}) = n_j \nu_{r+j} - \lambda_j + \lambda_{j+1} \in Q_{j+1} \setminus Q_j$ e $n_{j+1\nu_{r+j+1}} \in \Gamma_{j+1}$.

Deste modo, obtemos

$$F_g := \{h_1, \cdots, h_r, h_{r+1}, \cdots, h_{r+g}\}$$

de modo que, para todo $j = 1, \cdots, g$, tem-se

$$\mathcal{V}(h_{r+j}) = n_{j-1} \nu_{r+j-1} - \lambda_{j-1} + \lambda_j = \nu_{r+j}$$

com $\nu_{r+j} \in Q_j \setminus Q_{j-1}$, $n_j \nu_{r+j} \in \Gamma_{j-1}$ e

$$h_{r+j} = t^{\nu_{r+j}} u_{j,j} + t^{\nu_{r+j} - \lambda_j + \lambda_{j+1}} u_{j+1,j} + \cdots + t^{\nu_{r+j} - \lambda_j + \lambda_g} u_{g,j}$$

tal que $h_{r+j} = H^*(f_{j-1})$ e f_{j-1} uma semirraiz para f com $j = 1, \cdots, g$.

Note que no processo acima, fomos direcionados por S-processos privilegiados a fim de obter semirraízes para f, que, por sua vez, em virtude do Lema 2.10, nos dá uma Base Standard mínima para $\mathbb{C}\{B\}$.

O enfoque que abordamos aqui para relacionar Base Standard e semirraízes pode possibilitar aplicações em outros ramos da Álgebra Comutativa e Teoria de Singularidades que fazem parte de projetos futuros.

Ilustremos o processo acima com um exemplo:

Exemplo 2.13. *Considere* $\xi = X_1^{\frac{3}{2}} X_2^{\frac{3}{2}} + X_1^{\frac{7}{4}} X_2^{\frac{7}{4}} + X_1^{\frac{15}{8}} X_2^{\frac{15}{8}} \in \mathbb{C}\{X_1^{\frac{1}{8}}, X_2^{\frac{1}{8}}\}$, *que em virtude do Lema 1.13 é um ramo quase ordinário de* f *com* $n = 8$, $\lambda_1 = (12,12)$, $\lambda_2 = (14,14)$ *e* $\lambda_3 = (15,15)$. *Então* $g = 3$ *e para* n_1, n_2, n_3 *temos:*

$$n_1 = \sharp\,(Q_1/Q_0) = min\{k;\ k(12,12) \in Q_0 = 8\mathbb{Z}^2\}, \text{ o que implica } n_1 = 2,$$
$$n_2 = \sharp\,(Q_2/Q_1) = min\{k;\ k(14,14) \in Q_1 = 8\mathbb{Z}^2 + \mathbb{Z}(12,12)\}, \text{ o que implica } n_2 = 2$$

e, como $8 = n_1 n_2 n_3 = 2 \cdot 2 \cdot n_3$, *segue que* $n_3 = 2$.

A parametrização quase ordinária associada é dada por

$$H = \left(t_1^8, t_2^8, t_1^{12} t_2^{12} + t_1^{14} t_2^{14} + t_1^{15} t_2^{15}\right).$$

De (1.2) temos que os geradores do semigrupo de H são $\gamma_1 = (12,12)$, $\gamma_2 = (26,26)$ e $\gamma_3 = (53,53)$.

Vamos determinar uma Base Standard para $B = \{t_1^8, t_2^8, t_1^{12}t_2^{12} + t_1^{14}t_2^{14} + t_1^{15}t_2^{15}\} \subseteq \mathcal{M}_2$.

Seguindo as notações desta seção, temos $h_1 = t_1^8$, $h_2 = t_2^8$, $h_3 = t_1^{12}t_2^{12} + t_1^{14}t_2^{14} + t_1^{15}t_2^{15}$ e $F_1 = B$. Note que $h_i = H^*(X_i)$ para $i = 1,2,3$, $\nu_3 := \mathcal{V}(h_3) = \gamma_1 = (12,12)$.

Como $n_1\lambda_1 = 2(12,12) = 3(8,8) \in Q_0$ temos o S-processo

$$\begin{aligned} S_1 &= h_3^2 - h_1^3h_2^3 \\ &= 2t_1^{26}t_2^{26} + 2t_1^{27}t_2^{27} + t_1^{28}t_2^{28} + 2t_1^{29}t_2^{29} + t_1^{30}t_2^{30} \end{aligned}$$

com $V_{\mathcal{N}}(S_1) = (26,26) \notin \Gamma_1 = \langle (8,0),(0,8),(12,12)\rangle$ e, portanto, S_1 coincide com sua redução final mod F_1.

Assim, segue que $h_4 = S_1$ e $\nu_4 = \mathcal{V}(h_4) = \gamma_2 = (26,26)$. Como $\nu_4 \notin \Gamma_1$ e $(26,26) = \nu_4 \succ n_1\nu_3 = (24,24)$, temos que h_4 será acrescentado a F_1. Obtemos então,

$$F_2 := \{h_1, h_2, h_3, h_4\}$$

e por construção temos que $h_4 = H^*(f_1)$ com $f_1 = X_3^2 - X_1^3X_2^3 \in \mathbb{C}\{\underline{X}\}[X_3]$ mônico e $deg_{X_3}(f_1) = n_1 = 2$.

Como $n_2\nu_4 = 2\cdot(26,26) = (52,52) = 5(8,8) + (12,12) \in \Gamma_1$, podemos considerar agora um S-processo S_2 dado por

$$\begin{aligned} S_2 &= h_4^2 - 4h_1^5h_2^5h_3 \\ &= 8t_1^{53}t_2^{53} + 4t_1^{54}t_2^{54} + 8t_1^{55}t_2^{55} + 13t_1^{56}t_2^{56} + 8t_1^{57}t_2^{57} + 6t_1^{58}t_2^{58} + 4t_1^{59}t_2^{59} + t_1^{60}t_2^{60}. \end{aligned}$$

com $V_{\mathcal{N}}(S_2) = (53,53) \notin \Gamma_2 = \langle (8,0),(0,8),(12,12),(26,26)\rangle$ e, portanto, S_2 coincide com sua redução final mod F_2.

Assim, $h_5 = S_2$ e $\nu_5 = \mathcal{V}(h_5) = \gamma_3 = (53,53)$. Como $\nu_5 \notin \Gamma_2$ e $(53,53) = \nu_5 \succ n_2\nu_4 = (52,52)$, temos que h_5 será acrescentado a F_2. Obtemos então,

$$F_3 := \{h_1, h_2, h_3, h_4, h_5\}$$

e, por construção, temos que $h_5 = H^*(f_2)$ com

$$f_2 = (X_3^2 - X_1^3X_2^3)^2 - 4X_1^5X_2^5X_3 = X_3^4 - 2X_1^3X_2^3X_3^2 - 4X_1^5X_2^5X_3 + X_1^6X_2^6 \in \mathbb{C}\{\underline{X}\}[X_3]$$

mônico e $deg_{X_3}(f_2) = n_2\cdot deg_{X_3}(f_1) = 4$.

Portanto, em virtude do Lema 2.10, segue que F_3 é uma Base Standard para $\mathbb{C}\{B\}$, $f_0 = X_3$, f_1, f_2 são semirraízes da série que define a h.q.o. e o semigrupo associado é $\Gamma = \langle (8,0),(0,8),(12,12),(26,26),(53,53)\rangle$.

Capítulo 3

H.q.o. associadas a outras h.q.o.

No Exemplo 2.13, abordamos um ramo quase ordinário que possui uma propriedade particular, todos os expoentes de $\xi = X_1^{\frac{3}{2}}X_2^{\frac{3}{2}} + X_1^{\frac{7}{4}}X_2^{\frac{7}{4}} + X_1^{\frac{15}{8}}X_2^{\frac{15}{8}}$ pertencem à diagonal de $\mathbb{Q}^2$. Tal fato sugere a investigação de quais propriedades de ξ são obtidas dos ramos da curva plana originada ao trocarmos X_1X_2 por X, isto é, $\xi' = X^{\frac{3}{2}} + X^{\frac{7}{4}} + X^{\frac{15}{8}}$, cuja parametrização associada é $(T^8, T^{12} + T^{14} + T^{15})$. Mais precisamente, o exemplo mencionado sugere um modo de obtermos uma h.q.o. de uma dimensão por meio de uma h.q.o. de dimensão menor.

Neste capítulo abordamos um modo de obter h.q.o. em $\mathbb{C}^r$ a partir de uma h.q.o. em $\mathbb{C}^s$ com $s < r$. O objetivo de tal construção é obter uma h.q.o. de modo que seus invariantes possam ser obtidos por meio dos invariantes de uma hipersuperfície de dimensão menor. Ainda neste capítulo, exploramos mudanças de coordenadas que preservam tal propriedade, ou seja, o fato de uma h.q.o. estar associada a uma outra h.q.o..

Seja H_s uma hipersuperfície quase ordinária em $\mathbb{C}^s$ dada por uma parametrização

$$H_s = (u_1^n, \cdots, u_s^n, S(u_1, \cdots, u_s)).$$

Tome $r \in \mathbb{N}$ com $r > s$ e

$$P = \{\{\alpha_0 + 1, \alpha_0 + 2, \cdots, \alpha_1\}, \{\alpha_1 + 1, \alpha_1 + 2, \cdots, \alpha_2\}, \cdots, \{\alpha_{s-1} + 1, \alpha_{s-1} + 2, \cdots, \alpha_s\}\},$$

com $0 = \alpha_0 < \alpha_1 < \cdots < \alpha_s = r$ uma partição de $\{1, 2, \cdots, r\}$.

Dada uma partição P de $\{1, \cdots, r\}$ como acima, definimos o homomorfismo injetor de $\mathbb{C}$-álgebras

$$\begin{array}{rcl} T_P : \mathbb{C}\{u_1, \cdots, u_s\} & \longrightarrow & \mathbb{C}\{t_1, \cdots, t_r\} \\ u_1 & \mapsto & t_1 \cdots t_{\alpha_1} =: \underline{t}_{\alpha_1} \\ u_2 & \mapsto & t_{\alpha_1+1} \cdots t_{\alpha_2} =: \underline{t}_{\alpha_2} \\ \vdots & & \\ u_s & \mapsto & t_{\alpha_{s-1}+1} \cdots t_{\alpha_s} =: \underline{t}_{\alpha_s} \end{array}$$

e consideremos a hipersuperfície $H_r = (t_1^n, \cdots, t_s^n, T_P(S) = S(\underline{t}_{\alpha_1}, \cdots, \underline{t}_{\alpha_s}))$.

Definição 3.1. *Dada uma hipersuperfície quase ordinária H_s em $\mathbb{C}^s$, a hipersuperfície H_r em $\mathbb{C}^r$ obtida como acima, a partir de H_s e da partição P de $\{1, \cdots, r\}$, será dita associada a H_s e, neste caso, denotaremos $H_s \underset{P}{\rightsquigarrow} H_r$.*

Pelo modo como obtemos H_r, segue que, se $\underline{\delta}$ é expoente de um termo de $S(u_1, \cdots, u_s)$, então $\underline{\delta}_P = (\delta_1, \cdots, \delta_1, \delta_2, \cdots, \delta_2, \cdots, \delta_r, \cdots, \delta_r)$ é expoente de $T_P(S)$, onde cada δ_i se repete $\alpha_i - \alpha_{i-1}$ vezes com $i = 1, \cdots, r$.

Dada uma partição P de $\{1, \cdots, r\}$ como dada anteriormente, associamos a ela a matriz $s \times r$ dada por

$$M_P = (m_{ij})_{1 \leq i \leq s, 1 \leq j \leq r} = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & \cdots & 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

onde

$$m_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{se } \alpha_{i-1} + 1 \leq j \leq \alpha_i \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Note que, $\underline{\delta}_P = \underline{\delta} \cdot M_P$.

Vamos mostrar que H_r com $H_s \underset{P}{\rightsquigarrow} H_r$ é de fato uma parametrização de uma h.q.o..

Proposição 3.2. *Se H_s é uma parametrização de uma hipersuperfície quase ordinária, P é uma partição de $\{1, \cdots, r\}$ dada como anteriormente e H_r é tal que $H_s \underset{P}{\rightsquigarrow} H_r$, então H_r é também quase ordinária.*

Demonstração. Basta verificar que H_r satisfaz as condições do Lema 1.13 adaptado para parametrizações. Sejam λ_i, $i = 1, \cdots, g$, os expoentes característicos de H_s.

(i) Como $\lambda_i \prec \lambda_j$ para $i < j$, segue imediatamente que $\lambda_{i_P} \prec \lambda_{j_P}$ para $i < j$.

(ii) Por construção, se $S(\underline{u}) = \sum a_{\underline{\beta}} u_1^{\beta_1} \cdots u_s^{\beta_s}$, então

$$S(\underline{t}) = T_P(S(\underline{u})) = \sum a_{\underline{\beta}} \underline{t}_{\alpha_1}^{\beta_1} \cdots \underline{t}_{\alpha_s}^{\beta_s}.$$

Se $a_{\underline{\beta}} \neq 0$, como H_s é h.q.o., então $\underline{\beta} \in n\mathbb{Z}^s + \sum_{\lambda_i \preceq \underline{\beta}} \mathbb{Z}\lambda_i$.

Note que, $\underline{\beta} \cdot M_P := \underline{\beta}_P$ e $n\mathbb{Z}^s \cdot M_P + \sum_{\lambda_i \preceq \underline{\beta}} \mathbb{Z}\lambda_i \cdot M_P \subset n\mathbb{Z}^r + \sum_{\lambda_{i_P} \preceq \underline{\beta}_P} \mathbb{Z}\lambda_{i_P}$. Temos assim que,

$$\begin{aligned} \underline{\beta} \in n\mathbb{Z}^s + \sum_{\lambda_i \preceq \underline{\beta}} \mathbb{Z}\lambda_i \quad &\Rightarrow \quad \underline{\beta} \cdot M_P \in (n\mathbb{Z}^s + \sum_{\lambda_i \preceq \underline{\beta}} \mathbb{Z}\lambda_i) \cdot M_P \\ &\Rightarrow \quad \underline{\beta}_P \in n\mathbb{Z}^s \cdot M_P + \sum_{\lambda_i \preceq \underline{\beta}} \mathbb{Z}\lambda_i \cdot M_P \\ &\Rightarrow \quad \underline{\beta}_P \in n\mathbb{Z}^r + \sum_{\lambda_{i_P} \preceq \underline{\beta}_P} \mathbb{Z}\lambda_{i_P}. \end{aligned}$$

(iii) É imediato, pelo modo como foram obtidos os expoentes λ_{i_P}, que

$$\lambda_i \notin \mathbb{Z}^s + \sum_{\lambda_j \prec \lambda_i} \mathbb{Z}\lambda_j \Rightarrow \lambda_{i_P} \notin \mathbb{Z}^r + \sum_{\lambda_{j_P} \prec \lambda_{i_P}} \mathbb{Z}\lambda_{j_P}.$$

Deste modo, todas as condições do Lema 1.13 são satisfeitas e H_r é parametrização de uma h.q.o.. $\square$

Observação 3.3. *Segue imediatamente da Proposição 3.2 que, se λ_i é expoente característico de H_s, então $\lambda_{i_P} = \lambda_i \cdot M_p$ é expoente característico de H_r.*

Denotemos Q_i^r e Q_i^s os subgrupos definidos na página 12 do Capítulo 1, $n_i^r = \sharp\frac{Q_i^r}{Q_{i-1}^r}$, $n_i^s = \sharp\frac{Q_i^s}{Q_{i-1}^s}$, λ_i^s e $\lambda_i^r = \lambda_i^s \cdot M_P$, os expoentes característicos associados à H_r e H_s, respectivamente. Note que,

$$\begin{aligned} Q_0^s = n\mathbb{Z}^s \quad &\Rightarrow \quad Q_0^s \cdot M_P = n\mathbb{Z}^s \cdot M_P \subset n\mathbb{Z}^r = Q_0^r; \\ Q_1^s = Q_0^s + \mathbb{Z}\lambda_1^s \quad &\Rightarrow \quad Q_1^s \cdot M_P = Q_0^s \cdot M_P + \mathbb{Z}\lambda_1^r \subset Q_0^r + \mathbb{Z}\lambda_1^r = Q_1^r; \\ &\vdots \\ Q_g^s = Q_{g-1}^s + \mathbb{Z}\lambda_g^s \quad &\Rightarrow \quad Q_g^s \cdot M_P = Q_{g-1}^s \cdot M_P + \mathbb{Z}\lambda_g^r \subset Q_{g-1}^r + \mathbb{Z}\lambda_g^r = Q_g^r. \end{aligned}$$

Como $n_i^s \lambda_i^s \in Q_{i-1}^s$, temos que $n_i^s \lambda_i^r = n_i^s \lambda_i^s \cdot M_P \in Q_{i-1}^s \cdot M_P \subset Q_{i-1}^r$. Assim, $n_i^r \leq n_i^s$. Por outro lado, como $\lambda_i^s \cdot M_P = \lambda_i^r$, segue que $n_i^r \lambda_i^s \cdot M_P = n_i^r \lambda_i^r \in Q_{i-1}^r$. Então, podemos escrever $n_i^r\lambda_i^s \cdot M_P = m_{i-1}\lambda_{i-1}^r + m_{i-2}\lambda_{i-2}^r + \cdots + m_1\lambda_1^r + nm^r$, com $m_j \in \mathbb{Z}$ para todo $j = 1, \cdots, i-1$ e $m^r \in \mathbb{Z}^r$. Deste modo, temos

$$n_i^r\lambda_i^s \cdot M_P = (m_{i-1}\lambda_{i-1}^s + m_{i-2}\lambda_{i-2}^s + \cdots + m_1\lambda_1^s) \cdot M_P + nm^r$$

e assim $m^r = m^s \cdot M_P$ para algum $m^s \in \mathbb{Z}^s$. Portanto,

$$n_i^r\lambda_i^s = m_{i-1}\lambda_{i-1}^s + m_{i-2}\lambda_{i-2}^s + \cdots + m_1\lambda_1^s + nm^s \in Q_{i-1}^s$$

e $n_i^s \leq n_i^r$. Logo, devemos ter $n_i^r = n_i^s =: n_i$ para todo $i = 1, \cdots, g$.

Segue das relações demonstradas acima e da definição dos geradores do semigrupo (veja (1.2)) de uma h.q.o. que, se γ_i^s e γ_i^r denotam tais geradores, então $\gamma_i^r = \gamma_i^s \cdot M_P$, para todo $i = 1, \cdots, g$. De fato,

$$\gamma_1^r = \lambda_1^r = \lambda_1^s \cdot M_P = \gamma_1^s \cdot M_P.$$

Agora, para $1 < i \leq g$, segue por indução que:

$$\begin{aligned}
\gamma_i^r &= n_{i-1}\gamma_{i-1}^r + \lambda_i^r - \lambda_{i-1}^r \\
&= n_{i-1}\gamma_{i-1}^s \cdot M_P + \lambda_i^s \cdot M_P - \lambda_{i-1}^s \cdot M_P \\
&= (n_{i-1}\gamma_{i-1}^s + \lambda_i^s - \lambda_{i-1}^s) \cdot M_P \\
&= \gamma_i^s \cdot M_P.
\end{aligned}$$

Lembremos que o vetor de Frobenius do semigrupo de H_s é dado por

$$\mathcal{F}_{H_s} = \sum_{k=1}^{g}(n_k - 1)\gamma_k^s - (\underline{n}).$$

Note que,

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_{H_s} \cdot M_P &= \sum_{k=1}^{g}(n_k - 1)\gamma_k^s \cdot M_P - (\underline{n}) \cdot M_P \\
&= \sum_{k=1}^{g}(n_k - 1)\gamma_k^r - (\underline{n})_P = \mathcal{F}_{H_r}.
\end{aligned}$$

Dessa forma, temos a relação

$$\mathcal{F}_{H_r} = \mathcal{F}_{H_s} \cdot M_P,$$

na qual $\mathcal{F}_{H_r}$ denota o vetor de Frobenius do semigrupo associado à H_r.

Continuemos analisando como estão relacionados os invariantes das hipersuperfícies determinadas por H_s e H_r.

Sejam H_s e H_r como acima, isto é, $H_s \underset{P}{\rightsquigarrow} H_r$. Como vimos na Proposição 3.2, temos que tais hipersuperfícies têm o mesmo gênero g.

Se $mult(H)$ denota a multiplicidade de uma h.q.o. definida por um ramo quase ordinário normalizado, então temos que $mult(H_s) = min\{n, |\lambda_1^s|\}$ e $mult(H_r) = min\{n, |\lambda_1^r|\}$. Como $\lambda_1^r = \lambda_1^s \cdot M_P$, então $|\lambda_1^r| > |\lambda_1^s|$ e assim, $mult(H_s) \leq mult(H_r)$, com igualdade sempre que $mult(H_s) = n$.

Denote Γ_s e Γ_r os semigrupos de H_s e H_r, respectivamente. Uma vez que $\Gamma_s = \langle n\theta_i^s, \gamma_j^s; 1 \leq i \leq s \text{ e } 1 \leq j \leq g\rangle$, então segue que $\Gamma_r = \langle n\theta_i^r, \gamma_j^r; 1 \leq i \leq r \text{ e } 1 \leq j \leq g\rangle$ onde, $\gamma_j^r = \gamma_j^s \cdot M_P$, θ_i^s e θ_i^r denotam os elementos da base canônica de $\mathbb{Q}^s$ e $\mathbb{Q}^r$, respectivamente. Deste modo, denotando por $\langle \gamma_1^s, \cdots, \gamma_g^s\rangle \cdot M_P$ o conjunto de todos os vetores do semigrupo $\langle \gamma_1^s, \cdots, \gamma_g^s\rangle$ multiplicado pela matriz M_P, temos

$$\begin{aligned}
\Gamma_r &= n\mathbb{N}^r + \langle \gamma_1^s, \cdots, \gamma_g^s\rangle \cdot M_P \\
&= n\mathbb{N}^r + n\mathbb{N}^s \cdot M_P + \langle \gamma_1^s, \cdots, \gamma_g^s\rangle \cdot M_P \\
&= n\mathbb{N}^r + (n\mathbb{N}^s + \langle \gamma_1^s, \cdots, \gamma_g^s\rangle) \cdot M_P \\
&= n\mathbb{N}^r + \Gamma_s \cdot M_P.
\end{aligned}$$

Note que, da relação acima segue que, se $\underline{\delta} \in \Gamma_s$, então $\underline{\delta} \cdot M_P \in \Gamma_r$. Por outro lado, se $\underline{\delta} \in \Gamma_r$, não necessariamente temos $\underline{\delta} \in \Gamma_s \cdot M_P$, ou seja, nem sempre existe $\underline{\delta'} \in \Gamma_s$ tal que $\underline{\delta} = \underline{\delta'} \cdot M_P$. Por exemplo, $\nu_1 = n\theta_1^r = (n, 0, \cdots, 0) \in \Gamma_r$ é tal que $n\theta_1^r \notin \Gamma_s \cdot M_P$ para qualquer que seja a matriz M_P associada a uma partição de $\{1, \cdots, r\}$ como estamos considerando, com $\alpha_1 > 1$. Neste sentido, o que podemos afirmar é resultado da seguinte proposição.

Proposição 3.4. *Se $\underline{\delta} \in \mathbb{N}^s$ é tal que $\underline{\delta} \cdot M_P \in \Gamma_r$, então $\underline{\delta} \in \Gamma_s$.*

Demonstração. Temos,

$$\Gamma_s = n\mathbb{N}^s + \sum_{j=1}^{g} \mathbb{N}\gamma_j^s \;\text{ e }\; \Gamma_r = n\mathbb{N}^r + \sum_{j=1}^{g} \mathbb{N}\gamma_j^s \cdot M_P.$$

Como $\underline{\delta} \cdot M_P \in \Gamma_r$ podemos tomar sua representação padrão (veja página 20 do Capítulo 1) dada por

$$\underline{\delta} \cdot M_P = n\underline{a} + \sum_{j=1}^{g} b_j \gamma_j^s \cdot M_P$$

com $\underline{a} = (a_1, \cdots, a_r) \in \mathbb{N}^r$ e $0 \leq b_j < n_j = n_j^s = n_j^r$ para todo $j = 1, \cdots, g$. Considerando as coordenadas do vetor acima obtemos o seguinte sistema

$$\begin{aligned}
\delta_1 &= na_i + \sum_{j=1}^{g} b_j \gamma_{j1}^s, \qquad && 1 = \alpha_0 + 1 \leq i \leq \alpha_1 \\
\delta_2 &= na_i + \sum_{j=1}^{g} b_j \gamma_{j2}^s, \qquad && \alpha_1 + 1 \leq i \leq \alpha_2 \\
&\vdots \\
\delta_s &= na_i + \sum_{j=1}^{g} b_j \gamma_{js}^s, \qquad && \alpha_{s-1} + 1 \leq i \leq \alpha_s = r
\end{aligned}$$

o que implica $a_1 = \cdots = a_{\alpha_1}$, $a_{\alpha_1+1} = \cdots = a_{\alpha_2}$, $\cdots$, $a_{\alpha_{s-1}+1} = \cdots = a_{\alpha_s}$. Portanto, existe $\underline{a_s} \in \mathbb{N}^s$ tal que $\underline{a} = \underline{a_s} \cdot M_P$ e podemos escrever

$$\underline{\delta} \cdot M_P = n\underline{a_s} \cdot M_P + \sum_{j=1}^{g} b_j \gamma_j^s \cdot M_P = \left(n\underline{a_s} + \sum_{j=1}^{g} b_j \gamma_j^s \right) \cdot M_P.$$

Consequentemente, $\underline{\delta} = n\underline{a_s} + \sum_{j=1}^{g} b_j \gamma_j^s$, com $\underline{a_s} \in \mathbb{N}^s$ e $0 \leq b_j < n_j$ para $j = 1, \cdots, g$. Logo, $\underline{\delta} \in \Gamma_s$. □

No Teorema 1.39, o subconjunto $\Upsilon \subset \Gamma$ foi introduzido e se destaca por possibilitar que identifiquemos termos em uma parametrização de uma h.q.o. que podem ser eliminados por meio de mudanças de coordenadas.

Sejam Υ_s, Υ_r os conjuntos como acima mencionados e associados a H_s e H_r, respectivamente, com $H_s \underset{P}{\rightsquigarrow} H_r$. Vamos explorar algumas relações entre tais conjuntos.

Proposição 3.5. *Se $\underline{\delta} \in \mathbb{N}^s$ é tal que $\underline{\delta} \cdot M_P \in \Upsilon_r$, então $\underline{\delta} \in \Upsilon_s$.*

Demonstração. Como $\underline{\delta} \cdot M_P \in \Upsilon_r$, então temos $\underline{\delta} \cdot M_P \in \Gamma_r$ e, se existe $1 \leq i \leq r$ tal que $(\underline{\delta} \cdot M_P)_i \neq 0$ então $\underline{\delta} \cdot M_P - (\underline{n})_r + n\theta_i^r \in \Gamma_r$.

Podemos supor sem perda de generalidade que $i = 1$, isto é, $(\underline{\delta} \cdot M_P)_1 \neq 0$ com $\underline{\delta} \cdot M_P - (\underline{n})_r + n\theta_1^r \in \Gamma_r$. Segue da Proposição 3.4 que $\underline{\delta} \in \Gamma_s$. Além disto, usando a notação da referida proposição, consideremos a representação padrão

$$\underline{\delta} \cdot M_P - (\underline{n})_r + n\theta_1^r = n\underline{a} + \sum_{j=1}^{g} b_j \gamma_j^s \cdot M_P$$

com $\underline{a} = (a_1, \cdots, a_r) \in \mathbb{N}^r$ e $0 \leq b_j < n_j$ para todo $j = 1, \cdots, g$. Novamente, considerando as coordenadas do vetor anterior, obtemos o sistema

$$\begin{aligned}
\delta_1 &= na_1 + \sum_{j=1}^{g} b_j \gamma_{j1}^s \\
\delta_1 - n &= na_i + \sum_{j=1}^{g} b_j \gamma_{j1}^s, \qquad 1 < i \leq \alpha_1 \\
\delta_2 - n &= na_i + \sum_{j=1}^{g} b_j \gamma_{j2}^s, \qquad \alpha_1 + 1 \leq i \leq \alpha_2 \\
&\vdots \\
\delta_s - n &= na_i + \sum_{j=1}^{g} b_j \gamma_{js}^s, \qquad \alpha_{s-1} + 1 \leq i \leq \alpha_s
\end{aligned}$$

o que implica $a_1 - 1 = a_2 = \cdots = a_{\alpha_1}$, $a_{\alpha_1+1} = \cdots = a_{\alpha_2}$, $\cdots$, $a_{\alpha_{s-1}+1} = \cdots = a_{\alpha_s}$. Tomando $\underline{a_s} = (a_1, a_{\alpha_2}, \cdots, a_{\alpha_s}) \in \mathbb{N}^s$, segue que $\underline{\delta} - (\underline{n}) + n\theta_1^s \in \mathbb{N}^s$ é tal que

$$\underline{\delta} - (\underline{n}) + n\theta_1^s = n\underline{a_s} + \sum_{j=1}^{g} b_j \gamma_j^s.$$

Portanto, temos $\underline{\delta} - (\underline{n}) + n\theta_1^s \in \Gamma_s$ e consequentemente $\underline{\delta} \in \Upsilon_s$. $\square$

Enquanto, $\Gamma_s \cdot M_P \subset \Gamma_r$ o mesmo não pode se dizer de Υ_s, ou seja, não podemos garantir que $\Upsilon_s \cdot M_P \subset \Upsilon_r$. De fato, tomando uma partição de $\{1, \cdots, r\}$ com $\alpha_1 > 1$ e $\underline{\delta} = \lambda_1^s + (\underline{n}) - n\theta_1^s \in \Gamma_s$, temos que $\underline{\delta} \in \Upsilon_s$ pois $\underline{\delta}_1 \neq 0$ e $\underline{\delta} - (\underline{n}) + n\theta_1^s = \lambda_1^s \in \Gamma_s$. Mas, $\underline{\delta} \cdot M_P \notin \Upsilon_r$, uma vez que $(\underline{\delta} \cdot M_P)_j = \lambda_{11} \neq 0$ para $1 \leq j \leq \alpha_1$ e $(\underline{\delta} \cdot M_P)_j = \lambda_{1i} + n \neq 0$ para $\alpha_i \leq j \leq \alpha_{i+1}$ e $2 \leq i \leq r$. Segue que $\underline{\delta} \cdot M_P - (\underline{n})_r + n\theta_k^r \notin \Gamma^r$ para todo $1 \leq k \leq r$.

No entanto, podemos afirmar:

Proposição 3.6. *Se $\underline{\delta} \in \Upsilon_s$ é tal que $\underline{\delta}_i \neq 0$ e $\underline{\delta} - (\underline{n})_s + n\theta_i^s \in \Gamma_s$, então*

$$(\underline{\delta} + n\theta_i^s) \cdot M_P - n\theta_j^r \in \Upsilon_r$$

para todo $\alpha_{i-1} \leq j \leq \alpha_i$ e $i = 1, \cdots, s$.

Demonstração. Note que, se $\underline{\delta} \in \Gamma_s$, então $\underline{\delta} \cdot M_P \in \Gamma_r$. Além disto, se $\underline{\delta}_i \neq 0$, temos $(\underline{\delta} \cdot M_P)_j = \underline{\delta}_i \neq 0$ para todo $\alpha_{i-1} \leq j \leq \alpha_i$. Segue que

$$(\underline{\delta} + n\theta_i^s) \cdot M_P - n\theta_j^r = \underline{\delta} \cdot M_P + n\theta_i^s \cdot M_P - n\theta_j^r \in \Gamma_r.$$

Note também que $\left((\underline{\delta} + n\theta_i^s) \cdot M_P - n\theta_j^r\right)_j = (\underline{\delta} \cdot M_P)_j = \underline{\delta}_i \neq 0$ e

$$\begin{aligned}
\left((\underline{\delta} + n\theta_i^s) \cdot M_P - n\theta_j^r\right) - (\underline{n})_r + n\theta_j^r &= ((\underline{\delta} + n\theta_i^s) \cdot M_P) - (\underline{n})_r \\
&= ((\underline{\delta} + n\theta_i^s) \cdot M_P) - (\underline{n})_s \cdot M_P \\
&= (\underline{\delta} - (\underline{n})_s + n\theta_i^s) \cdot M_P \in \Gamma_r
\end{aligned}$$

uma vez que $\underline{\delta} - (\underline{n})_s + n\theta_i^s \in \Gamma_s$.

Portanto, $(\underline{\delta} + n\theta_i^s) \cdot M_P - n\theta_j^r \in \Gamma_r$ é tal que $\big((\underline{\delta} + n\theta_i^s) \cdot M_P - n\theta_j^r\big)_j = \underline{\delta}_i \neq 0$, com $\big((\underline{\delta} + n\theta_i^s) \cdot M_P - n\theta_j^r\big) - (\underline{n})_r + n\theta_j^r \in \Gamma_r$. Logo, $(\underline{\delta} + n\theta_i^r) \cdot M_P - n\theta_j^s \in \Upsilon_r$ para todo $\alpha_{i-1} \leq j \leq \alpha_i$. $\square$

É fácil concluir, a partir da definição de Υ, que $\Gamma + \Upsilon \subset \Upsilon$. Assim, em particular, temos que se $(\underline{\delta} + n\theta_i^s) \cdot M_P - n\theta_j^r \in \Upsilon_r$, então $(\underline{\delta} + (\underline{n})_s) \cdot M_P \in \Upsilon_r$. Destaquemos tal resultado:

Corolário 3.7. *Temos que* $\Upsilon_s \cdot M_P + (\underline{n})_r \subset \Upsilon_r$.

Demonstração. Dado $\underline{\delta} \in \Upsilon_s$, existe i tal que $\underline{\delta}_i \neq 0$ e $\underline{\delta} - (\underline{n})_s + n\theta_i^s \in \Gamma_s$. Pela Proposição 3.6, temos que

$$(\underline{\delta} + n\theta_i^s) \cdot M_P - n\theta_j^r \in \Upsilon_r,$$

para todo $\alpha_{i-1} \leq j \leq \alpha_i$.

Como $n\theta_j^r, \sum_{k=1,k\neq i}^{s} n\theta_k^s \cdot M_P \in \Gamma_r$, segue que

$$\begin{aligned} ((\underline{\delta} + n\theta_i^s) \cdot M_P - n\theta_j^r) + n\theta_j^r + \sum_{k=1,k\neq i}^{s} n\theta_k^s \cdot M_P &= \underline{\delta} \cdot M_P + \sum_{k=1}^{s} n\theta_k^s \cdot M_P \\ &= \underline{\delta} \cdot M_P + (\underline{n}) \cdot M_P \\ &= \underline{\delta} \cdot M_P + (\underline{n})_r \in \Upsilon_r. \end{aligned}$$

$\square$

Como vimos na Proposição 1.38, o conjunto $\Lambda_{\mathcal{D}} = \Lambda_{\mathcal{D}}(H)$ desempenha papel importante para a eliminação de termos de uma h.q.o.. Assim, é relevante, em nosso contexto, relacionar os conjuntos $\Lambda_{\mathcal{D}}^s$ e $\Lambda_{\mathcal{D}}^r$ associados a H_s e H_r, respectivamente.

Proposição 3.8. *Sejam* $\Lambda_{\mathcal{D}}^s$ *e* $\Lambda_{\mathcal{D}}^r$ *como acima. Temos*

$$\Lambda_{\mathcal{D}}^s \cdot M_P + (\underline{n})_r - \sum_{i=1}^{s} \nu_{\beta_i} \subset \Lambda_{\mathcal{D}}^r$$

onde $\alpha_{i-1} < \beta_i \leq \alpha_i$ *para* $i = 1, \cdots, s$.

Demonstração. Se $\underline{\delta} \in \Lambda_{\mathcal{D}}^s$, então existe $\omega_s \in \Omega^s$, em que Ω^s denota o módulo das s-formas de Kähler associadas a H_s, tal que

$$H_s^*(\omega_s) = \omega_s(u_1^n, \cdots, u_s^n, S(\underline{u})) = u^{\underline{\delta} - (\underline{1})} \cdot v(\underline{u}) du_1 \wedge \cdots \wedge du_s, \text{ com } v(\underline{0}) \neq 0.$$

Temos,

$$\begin{aligned}
\omega_s(\underline{t}_{\alpha_1}^n, \cdots, \underline{t}_{\alpha_s}^n, T_P(S)) &= \underline{t}_{\alpha_1}^{\delta_1 - 1} \underline{t}_{\alpha_2}^{\delta_2 - 1} \cdots \underline{t}_{\alpha_s}^{\delta_s - 1} \cdot v(T_P(\underline{u})) d(\underline{t}_{\alpha_1}) \wedge \cdots \wedge d(\underline{t}_{\alpha_s}) \\
&= \underline{t}^{\underline{\delta}_P - (\underline{1})_r} v(T_P(\underline{u})) \bigwedge_{i=1}^{s} \left(\sum_{j=\alpha_{i-1}+1}^{\alpha_i} \prod_{\substack{k=\alpha_{i-1}+1 \\ k \neq j}}^{\alpha_i} t_k dt_j \right) \\
&= \underline{t}^{\underline{\delta}_P - (\underline{1})_r} v(T_P(\underline{u})) \left[\sum_{\substack{(\beta_1, \cdots, \beta_i) \\ \alpha_{i-1} < \beta_j \leq \alpha_i}} \prod_{i=1}^{s} \frac{t_1 \cdots t_r}{t_{\beta_1} \cdots t_{\beta_s}} \cdot dt_{\beta_1} \wedge \cdots \wedge dt_{\beta_s} \right].
\end{aligned}$$

Como, $\omega_{r-s} = \bigwedge_{i=1}^{s} dX_{\alpha_{i-1}+1} \wedge \cdots \wedge \widehat{dX_{\beta_i}} \wedge \cdots \wedge dX_{\alpha_i} \in \Omega^{r-s}$ é uma $(r-s)$-forma e

$$H^*(\omega_{r-s}) = n^{r-s} \prod_{i=1}^{s} t_{\alpha_{i-1}+1}^{n-1} \cdots \widehat{t_{\beta_i}^{n-1}} \cdots t_{\alpha_i}^{n-1} \cdot \bigwedge_{i=1}^{s} dt_{\alpha_{i-1}+1} \wedge \cdots \wedge \widehat{dt_{\beta_i}} \wedge \cdots \wedge dt_{\alpha_i},$$

podemos considerar a r-forma $\omega_{(\beta_1, \cdots, \beta_s)}$ dada por $\omega_{(\beta_1, \cdots, \beta_s)} = \omega_{r-s} \wedge \omega_s$, de modo que

$$\begin{aligned}
H_r^*(\omega_{(\beta_1, \cdots, \beta_s)}) &= n^{r-s} \prod_{i=1}^{s} t_{\alpha_{i-1}+1}^{n-1} \cdots \widehat{t_{\beta_i}^{n-1}} \cdots t_{\alpha_i}^{n-1} \cdot \bigwedge_{i=1}^{s} dt_{\alpha_{i-1}+1} \wedge \cdots \wedge \widehat{dt_{\beta_i}} \wedge \cdots \wedge dt_{\alpha_i} \\
&\quad \bigwedge \left(t^{\underline{\delta}_P - (\underline{1})_r} \cdot v(T_P(\underline{u})) \cdot \prod_{i=1}^{s} t_{\alpha_{i-1}+1} \cdots \widehat{t_{\beta_i}} \cdots t_{\alpha_i} \cdot dt_{\beta_1} \wedge \cdots \wedge dt_{\beta_s} \right) \\
&= \pm n^{r-s} t^{\underline{\delta}_P - (\underline{1})_r + (\underline{n})_r - \sum_{i=1}^{s} \nu_{\beta_i}} v(T_P(\underline{u})) dt_1 \wedge \cdots \wedge dt_r.
\end{aligned}$$

Logo,

$$\underline{\delta}_P + (\underline{n})_r - \sum_{i=1}^{s} \nu_{\beta_i} \in \Lambda_{\mathcal{D}}^r.$$

□

Observe que, na demonstração do resultado anterior, se escolhermos dois β_i e β_j em um mesmo intervalo da partição, a r-forma produzida seria nula e não encontraríamos nenhuma informação relevante.

Vale destacar aqui que a inclusão garantida na proposição acima é própria. De fato, a r-forma $dX_1 \wedge \cdots \wedge dX_r$ nos fornece o elemento $(\underline{n})_r \in \Lambda_{\mathcal{D}}^r$, que claramente não pertence ao conjunto $\Lambda_{\mathcal{D}}^s \cdot M_P + \underline{n}_r - \sum_{i=1}^{s} \nu_{\beta_i}$ qualquer que seja a partição considerada.

Além disto, como $\Gamma + \Lambda_{\mathcal{D}} \subset \Lambda_{\mathcal{D}}$, segue que:

Corolário 3.9. *Temos que* $\Lambda_{\mathcal{D}}^s \cdot M_P + \underline{n}_r \subset \Lambda_{\mathcal{D}}^r$.

Demonstração. Dado $\underline{\delta} \in \Lambda^s_{\mathcal{D}}$, pela Proposição 3.8, temos que $\underline{\delta}_P + (\underline{n})_r - \sum_{i=1}^{s} \nu_{\beta_i} \in \Lambda^r_{\mathcal{D}}$ para $\alpha_{i-1} < \beta_i \leq \alpha_i$. Assim, como $\sum_{i=1}^{s} \nu_{\beta_i} \in \Gamma_r$ temos que

$$\underline{\delta}_P + (\underline{n})_r - \sum_{i=1}^{s} \nu_{\beta_i} + \sum_{i=1}^{s} \nu_{\beta_i} = \underline{\delta}_P + (\underline{n})_r \in \Lambda^r_{\mathcal{D}}.$$

$\square$

3.1 Mudanças que mantém a propriedade $H_1 \rightsquigarrow H_r$

A propriedade de uma h.q.o. estar associada a outra h.q.o. é sensível por mudanças de coordenadas, ou seja, pode não ser mantida por mudanças de coordenadas.

Por exemplo, consideremos $H_1 = (u^2, u^3)$ que é uma curva plana e, portanto, uma h.q.o. em $\mathbb{C}^2$. Considerando $r = 2$ a única partição de $\{1, 2\}$ formada por um conjunto é $P = \{\{1, 2\}\}$, temos que o homomorfismo

$$\begin{array}{rcl} T_P : \mathbb{C}\{u\} & \to & \mathbb{C}\{t_1, t_2\} \\ u & \mapsto & t_1 t_2 \end{array}$$

nos dá a h.q.o. $H_2 = (t_1^2, t_2^2, t_1^3 t_2^3)$.

Se considerarmos a mudança de coordenadas $\sigma(X_1, X_2, X_3) = (X_1, X_2, X_3 + X_1^2)$ obtemos uma h.q.o. dada por $H_2' = \sigma H_2 = (t_1^2, t_2^2, t_1^3 t_2^3 + t_1^4)$ e é imediato que $t_1^3 t_2^3 + t_1^4 \neq T_P(\sum a_i u_i) = \sum a_i t_1^i t_2^i$, qualquer que seja $\sum a_i u^i \in \mathbb{C}\{u\}$, ou seja, H_2' não está associada a uma curva.

Claramente tal situação também se verifica em dimensões maiores.

Surge, de maneira natural, a questão de caracterizar as mudanças de coordenadas e parâmetros $(\sigma, \rho) \in \mathcal{G}$ tais que, se $H_s \underset{P}{\rightsquigarrow} H_r$, então existe H_s' de modo que $H_s' \underset{P}{\rightsquigarrow} (\sigma, \rho) \circ H_r$.

Antes de abordar o caso geral, que envolve muitos parâmetros, procedemos ao estudo do caso em que $s = 1$, ou seja, em que usamos uma curva plana para obter uma h.q.o. em $\mathbb{C}^r$ com $r > 1$. Neste caso, note que a única partição a ser considerada é $P = \{\{1, \cdots, r\}\}$ e, por este motivo, omitiremos sua menção em nossas análises.

Dada uma curva $\varphi = (u^n, S(u))$, associamos a ela uma parametrização quase ordinária dada por $H = (t_1^n, \cdots, t_r^n, S_H = S(t_1 \cdots t_r))$. Sem perda de generalidade, podemos assumir que φ está normalizada, ou seja, satisfaz as condições da Definição 1.16. Deste modo, temos que H também é normalizada.

No que segue, o grupo de todas as permutações do conjunto $\{1, \cdots, r\}$ será denotado por $Sim(r)$. O próximo lema é natural e intuitivo, mesmo assim vamos destacá-lo.

Lema 3.10. *Sejam* $H = (t_1^n, \cdots, t_r^n, \sum_{\underline{\delta}} a_{\underline{\delta}} \underline{t}^{\underline{\delta}})$ *uma hipersuperfície quase ordinária normalizada e* $\varphi = (u^n, S(u))$ *uma curva. Temos que,*

$$\varphi \rightsquigarrow H \iff \forall \pi \in Sim(r), \ \textit{temos}\ \pi(t_1^{\delta_1} \cdots t_r^{\delta_r}) := t_{\pi(1)}^{\delta_1} \cdots t_{\pi(r)}^{\delta_r} = t_1^{\delta_1} \cdots t_r^{\delta_r}.$$

Demonstração. Se H é obtida de $\varphi = (u^n, \sum_\alpha a_\alpha u^\alpha)$, então $H = (t_1^n, \cdots, t_r^n, \sum_\alpha a_\alpha t_1^\alpha \cdots t_r^\alpha)$. Temos,

$$\pi(t_1^\alpha \cdots t_r^\alpha) = t_{\pi(1)}^\alpha \cdots t_{\pi(r)}^\alpha = t_1^\alpha \cdots t_r^\alpha$$

qualquer que seja $\pi \in Sim(r)$.

Por outro lado, seja $H = (t_1^n, \cdots, t_r^n, \sum_{\underline{\delta}} a_{\underline{\delta}} \underline{t}^{\underline{\delta}})$ tal que, para todo $\pi \in Sim(r)$, temos $\pi(\underline{t}^{\underline{\delta}}) = \underline{t}^{\underline{\delta}}$. Tomando π com $\pi(i) = i + 1$, para todo $i = 1, \cdots, r-1$ e $\pi(r) = 1$, temos as equivalências

$$\pi(\underline{t}^{\underline{\delta}}) = \underline{t}^{\underline{\delta}} \Leftrightarrow t_{\pi(1)}^{\delta_1} \cdots t_{\pi(r)}^{\delta_r} = t_1^{\delta_1} \cdots t_r^{\delta_r} \Leftrightarrow t_2^{\delta_1} \cdots t_r^{\delta_{r-1}} t_1^{\delta_r} = t_1^{\delta_1} \cdots t_r^{\delta_r}.$$

Portanto, $\delta_1 = \delta_2 = \cdots = \delta_r$. Logo, H é obtida da curva $\varphi = (u^n, \sum_\delta a_\delta u^\delta)$, ou seja, $\varphi \rightsquigarrow H$. $\square$

Queremos caracterizar as mudanças que preservam a propriedade descrita no Lema 3.10. Seja $(\sigma, \rho) \in \mathcal{G}$ uma mudança que mantém uma parametrização normalizada como no Teorema 1.35, isto é, dada por

$$\begin{array}{rll} \rho : & \mathbb{C}^r & \longrightarrow \mathbb{C}^r \\ & \underline{t} & \longrightarrow (\rho_1(\underline{t}), \cdots, \rho_r(\underline{t})) \end{array}$$

com $\rho_j = t_j \left(1 + \frac{P_j(H)}{t_j^n}\right)^{\frac{1}{n}}$, $P_j = X_j \epsilon_j + X_{r+1}(b_j + \eta_j)$, $\epsilon_j, \eta_j \in \mathcal{M}_{r+1}$, $b_j \in \mathbb{C}$ e

$$\begin{array}{rll} \sigma : & \mathbb{C}^{r+1} & \longrightarrow \mathbb{C}^{r+1} \\ & (\underline{X}, X_{r+1}) & \longrightarrow (\sigma_1(\underline{X}, X_{r+1}), \cdots, \sigma_{r+1}(\underline{X}, X_{r+1})) \end{array}$$

com $\sigma_i = X_i + P_i$, para todo $i = 1, \cdots, r$, $\sigma_{r+1} = X_{r+1} + P_{r+1}$, $P_{r+1} = X_{r+1}\epsilon_{r+1} + \underline{X}^\alpha \eta_{r+1}$, $\epsilon_{r+1} \in \mathcal{M}_{r+1}$, $\eta_{r+1} \in \mathbb{C}\{\underline{X}, X_{r+1}\}$ e $\underline{\alpha} = (\lceil \frac{\lambda_{11}}{n} \rceil, \cdots, \lceil \frac{\lambda_{1r}}{n} \rceil)$.

Vamos supor que $\varphi(u^n, S(u))$ seja uma curva plana e $H = (t_1^n, \cdots, t_r^n, S(t_1 \cdots t_r))$ seja uma h.q.o. tal que $\varphi \rightsquigarrow H$.

Aplicando uma mudança como acima em H, obtemos

$$\sigma H \rho^{-1}(\underline{t}) = \sigma((\rho^{-1})_1^n(\underline{t}), \cdots, (\rho^{-1})_r^n(\underline{t}), S((\rho^{-1})_1 \cdots (\rho^{-1})_r)).$$

Uma vez que

$$(t_1, \cdots, t_n) \;=\; \rho \circ \rho^{-1}(t_1, \cdots, t_r) = (\rho_1 \circ \rho^{-1}(\underline{t}), \cdots, \rho_r \circ \rho^{-1}(\underline{t})),$$

temos

$$t_i \;=\; \rho_i((\rho^{-1})_1, \cdots, (\rho^{-1})_r) = (\rho^{-1})_i \cdot \left(1 + \frac{P_i(H\rho^{-1})}{(\rho^{-1})_i^n}\right)^{\frac{1}{n}},$$

ou seja,

$$(\rho^{-1})_i^n(\underline{t}) + P_i(H\rho^{-1})(\underline{t}) = t_i^n.$$

Portanto, para todo $i = 1, \cdots, r$ temos

$$\sigma_i(H\rho^{-1})(\underline{t}) = (\rho^{-1})_i^n(\underline{t}) + P_i(H\rho^{-1})(\underline{t}) = t_i^n.$$

Para a coordenada $r + 1$ temos,

$$\sigma_{r+1}(H\rho^{-1})(\underline{t}) = S_H(\rho^{-1}(\underline{t})) + P_{r+1}(H\rho^{-1}(\underline{t})).$$

Pelo lema anterior, para que $\sigma H \rho^{-1}$ também esteja associada a uma curva, devemos garantir que todos os monômios de $\sigma H \rho^{-1}$ sejam invariantes por permutações de $Sim(r)$.

Seja $(t_1 \cdots t_r)^\delta$ um monômio de $S(t_1 \cdots t_r)$. Se todos os monômios de $(\rho^{-1})_1 \cdots (\rho^{-1})_r$ forem invariantes por $\pi \in Sim(r)$, então todos os monômios $S_H(\rho^{-1})$ também o serão.

Vejamos condições para que isso ocorra.

Note que,

$$\rho_1 \cdots \rho_r = t_1 \cdots t_r \prod_{i=1}^{r} \left(1 + \frac{P_i(H)}{t_i^n}\right)^{\frac{1}{n}}$$

e temos

$$\frac{P_i(H)}{t_i^n} \;=\; \frac{t_i^n \epsilon_i(H) + S_H \cdot (b_i + \eta_i(H))}{t_i^n} = \epsilon_i(H) + \frac{S_H \cdot (b_i + \eta_i(H))}{t_i^n}.$$

Consideremos o monomorfismo de $\mathbb{C}$-álgebras

$$\begin{aligned} T:\; \mathbb{C}\{X, Y\} &\longrightarrow \mathbb{C}\{X_1, \cdots, X_{r+1}\} \\ X &\longrightarrow X_1 \cdots X_r \\ Y &\longrightarrow X_{r+1} \end{aligned}$$

Como S_H tem todos os monômios invariantes por π, se tomarmos $\epsilon_i, \theta_i \in Im(T)$, $b_i = 0$ e $\eta_i = X_i\theta_i$, para todo $i = 1, \cdots, r$, segue que

$$\frac{P_i(H)}{t_i^n} = \epsilon_i(H) + S_H \cdot \theta_i(H) \tag{3.1}$$

tem apenas monômios invariantes por π. Portanto, nessas condições,

$$\rho_1 \cdots \rho_r = t_1 \cdots t_r \prod_{i=1}^{r} (1 + \epsilon_i(H) + S_H \cdot \theta_i(H))^{\frac{1}{n}}$$

possui todos os monômios invariantes por π.

Em resumo, se $\epsilon_i, \theta_i \in Im(T)$, $b_i = 0$ e $\eta_i = X_i\theta_i$, para todo $i = 1, \cdots, r$, então

$$\rho_1 \cdots \rho_r = \sum a_\gamma (t_1 \cdots t_r)^\gamma.$$

Denote $\rho_1 \cdots \rho_r = \sum a_\gamma (t_1 \cdots t_r)^\gamma = q(t_1 \cdots t_r)$ com $q(u) = \sum a_\gamma u^\gamma \in \mathbb{C}\{u\}$, ou seja,

$$q(t_1 \cdots t_r) = t_1 \cdots t_r \left(\prod_{i=1}^{r} 1 + \epsilon_i(H) + S_H \cdot \theta_i(H) \right)^{\frac{1}{n}}$$

onde

$$\begin{aligned} \epsilon_i(H) = T(h_{\epsilon_i})(H) = h_{\epsilon_i}((t_1 \cdots t_r)^n, S(t_1 \cdots t_r)) = h_{\epsilon_i} \circ \varphi(t_1 \cdots t_r), \\ \theta_i(H) = T(h_{\theta_i})(H) = h_{\theta_i}((t_1 \cdots t_r)^n, S(t_1 \cdots t_r)) = h_{\theta_i} \circ \varphi(t_1 \cdots t_r) \end{aligned}$$

com $h_{\epsilon_i} \in (X, Y)$ e $h_{\theta_i} \in \mathbb{C}\{X, Y\}$.

Denotando, $g_i = h_{\epsilon_i} + Y h_{\theta_i} \in (X, Y)$, obtemos

$$\begin{aligned} q(t_1 \cdots t_r) &= t_1 \cdots t_r \left(\prod_{i=1}^{r} (1 + g_i \circ \varphi(t_1 \cdots t_r)) \right)^{\frac{1}{n}} \\ &= t_1 \cdots t_r \left(1 + g \circ \varphi(t_1 \cdots t_r)\right)^{\frac{1}{n}}, \text{ com } g \in (X, Y). \end{aligned}$$

Portanto,

$$q(u) = u(1 + g \circ \varphi(u))^{\frac{1}{n}}, \text{ com } g \in (X, Y). \tag{3.2}$$

Agora procedemos uma a análise similar para $\prod_{i=1}^{r} (\rho^{-1})_i$.

Denotando

$$q'(t_1, \cdots, t_r) = \prod_{i=1}^{r} (\rho^{-1})_i = \sum_{\underline{\beta} \in \mathbb{N}^r} a_{\underline{\beta}} t^{\underline{\beta}},$$

segue que $q'(\rho_1, \cdots, \rho_r) = \prod_{i=1}^{r} (\rho^{-1})_i(\rho_1, \cdots, \rho_r) = t_1 \cdots t_r$. Por outro lado, como $\rho_j = t_j \left(1 + \frac{P_j(H)}{t_j^n}\right)^{\frac{1}{n}}$, temos pelos cálculos acima, que

$$t_1 \cdots t_r = q'(\rho_1, \cdots, \rho_r) = \sum_{\underline{\beta} \in \mathbb{N}^r} a_{\underline{\beta}} t_1^{\beta_1} \cdots t_r^{\beta_r} \prod_{i=1}^{r} (1 + g_i \circ \varphi(t_1 \cdots t_r))^{\frac{\beta_i}{n}}.$$

Comparando as duas igualdades acima, constatamos que deve existir $\underline{\beta} = (\underline{1})$ com $a_{(\underline{1})} = 1$ e assim

$$\begin{aligned}
t_1 \cdots t_r &= t_1 \cdots t_r \prod_{i=1}^{r} (1 + g_i \circ \varphi(t_1 \cdots t_r))^{\frac{1}{n}} + \sum_{\underline{\beta} \neq (\underline{1})} a_{\underline{\beta}} t^{\underline{\beta}} \prod_{i=1}^{r} (1 + g_i \circ \varphi(t_1 \cdots t_r))^{\frac{\beta_i}{n}} \\
&= t_1 \cdots t_r \left(\sum_{i \geq 0} \binom{\frac{1}{n}}{i} (g_1 \circ \varphi(t_1 \cdots t_r))^i \right) \cdots \left(\sum_{i \geq 0} \binom{\frac{1}{n}}{i} (g_r \circ \varphi(t_1 \cdots t_r))^i \right) + \\
&\quad + \sum_{\underline{\beta} \neq (\underline{1})} a_{\underline{\beta}} t^{\underline{\beta}} \left(\sum_{i \geq 0} \binom{\frac{\beta_1}{n}}{i} (g_1 \circ \varphi(t_1 \cdots t_r))^i \right) \cdots \left(\sum_{i \geq 0} \binom{\frac{\beta_r}{n}}{i} (g_r \circ \varphi(t_1 \cdots t_r))^i \right) \\
&= t_1 \cdots t_r (1 + \Delta_{(\underline{1})}) + \sum_{\underline{\beta} \neq (\underline{1})} a_{\underline{\beta}} t^{\underline{\beta}} (1 + \Delta_{\underline{\beta}}), \qquad (3.3)
\end{aligned}$$

onde $\Delta_{\underline{\beta}}$ representa os termos com expoente na diagonal Δ de $\mathbb{N}^r$ oriundos da parcela associada ao $\underline{\beta}$ do somatório.

Segue de (3.3) que

$$-t_1 \cdots t_r \Delta_{(\underline{1})} = \sum_{\underline{\beta} \neq (\underline{1})} a_{\underline{\beta}} t^{\underline{\beta}} (1 + \Delta_{\underline{\beta}}). \qquad (3.4)$$

Note que o lado esquerdo de (3.4) possui somente expoentes na diagonal Δ de $\mathbb{N}^r$. Deste modo, todos os $\underline{\beta}$ devem pertencer também a Δ, pois, caso contrário, não teríamos a igualdade acima. Logo, como todo $\underline{\beta} \in \Delta$, temos que

$$(\rho^{-1})_1 \cdots (\rho^{-1})_r = \sum_{\beta \in \mathbb{N}} a_\beta (t_1 \cdots t_r)^\beta = q'(t_1, \cdots, t_r).$$

Consequentemente, $S_H(\rho^{-1})$ tem apenas monômios com expoentes em $\Delta \subset \mathbb{N}^r$, isto é, $S_H(\rho^{-1}) = \sum_{\xi \in \mathbb{N}} a_\xi (t_1 \cdots t_r)^\xi$.

Como

$$\begin{aligned}
\sigma_{r+1}(H\rho^{-1})(\underline{t}) &= S_H(\rho^{-1}) + P_{r+1}(H\rho^{-1}) \\
&= S_H(\rho^{-1}) + S_H(\rho^{-1})\epsilon_{r+1}(H\rho^{-1}(\underline{t})) + ((\rho^{-1})_1 \cdots (\rho^{-1})_r)^\alpha \eta_{r+1}(H\rho^{-1}(\underline{t}))
\end{aligned}$$

segue que, para termos todos os expoentes dos monômios de $\sigma_{r+1}(H\rho^{-1})(\underline{t})$ pertencentes à diagonal Δ ou, equivalentemente, serem invariantes por permutações de $Sim(r)$, é suficiente que $\epsilon_{r+1}, \eta_{r+1} \in Im(T)$.

Temos assim a seguinte proposição:

Proposição 3.11. *Com as notações anteriores, considere* $\varphi \rightsquigarrow H$ *e* $(\sigma,\rho) \in \mathcal{G}$ *mudanças de parâmetros e coordenadas que mantêm as h.q.o. normalizadas como no Teorema 1.35. Se*

$$\eta_{r+1}, \epsilon_{r+1}, \epsilon_j, \theta_j \in Im(T), \eta_j = X_j\theta_j, b_j = 0, \text{ para todo } j = 1, \cdots, r,$$

então existe uma curva φ_1 *tal que* $\varphi_1 \rightsquigarrow \sigma H \rho^{-1}$.

Denotamos por $\mathcal{A}'$ o subconjunto de $\mathcal{G}$ formado pelas mudanças que satisfazem as condições da Proposição 3.11. Note que tal conjunto não é subgrupo de $\mathcal{G}$, uma vez que as mudanças de parâmetros ρ_j, $j = 1, \cdots, r$, dependem fortemente da h.q.o. em questão. Dito de outro modo, não podemos compor quaisquer $(\sigma_1,\rho_1), (\sigma_2,\rho_2) \in \mathcal{A}'$ e garantir que o elemento resultante ainda pertença a $\mathcal{A}'$.

A proposição anterior nos levanta questões naturais: curvas (analiticamente) equivalentes originam h.q.o. (analiticamente) equivalentes? Se $\varphi \rightsquigarrow H$, então podemos determinar φ_1 tal que $\varphi_1 \rightsquigarrow \sigma H \rho^{-1}$, com $(\sigma,\rho) \in \mathcal{A}'$? Neste caso, qual a relação entre φ e φ_1? Tais perguntas irão direcionar nossos estudos no que segue.

A resposta para a primeira pergunta acima é não! Vamos ilustrar através de um exemplo que curvas equivalentes não necessariamente produzirão hipersuperfícies quase ordinárias equivalentes.

Dadas as curvas planas $\varphi_0 = (u^3, u^4)$ e $\varphi_1 = (u^3, u^4 + u^5)$, temos que $\varphi_1 \underset{\mathcal{A}}{\sim} \varphi_0$ (veja [11]) e sejam H_0, H_1 hipersuperfícies quase ordinárias tais que $\varphi_0 \rightsquigarrow H_0$ e $\varphi_1 \rightsquigarrow H_1$, isto é,

$$H_0 = (t_1^3, t_2^3, t_1^4 t_2^4) \text{ e } H_1 = (t_1^3, t_2^3, t_1^4 t_2^4 + t_1^5 t_2^5).$$

Se $H_1 \underset{\mathcal{G}}{\sim} H_0$, uma vez que H_0 e H_1 são h.q.o. normalizadas, existem mudanças (σ,ρ), como no Teorema 1.35, tais que $\sigma H_1 \rho^{-1}(t_1,t_2) = H_0$. Lembremos que

$$\begin{aligned} &\sigma(X_1,X_2,X_3) = (\sigma_1(X_1,X_2,X_3), \sigma_2(X_1,X_2,X_3), \sigma_3(X_1,X_2,X_3)) \\ &\rho(t_1,t_2) = (\rho_1(t_1,t_2), \rho_2(t_1,t_2)) \end{aligned}$$

com $\sigma_i = X_i + P_i$, $i = 1,2,3$, $\rho_j = t_j\left(1 + \frac{P_j(H_1)}{t_j^3}\right)^{\frac{1}{3}}$, $P_j = X_j\epsilon_j + X_3(b_j + \eta_j)$, $\epsilon_j, \eta_j \in \mathcal{M}_3$, $b_j \in \mathbb{C}$, $j = 1,2$ e $P_3 = X_3\epsilon_3 + X_1^2X_2^2\eta_3$, $\epsilon_3 \in \mathcal{M}_3$ e $\eta_3 \in \mathbb{C}\{X_1,X_2,X_3\}$.

Agindo tal mudança em H_1 obtemos

$$\begin{aligned}
\sigma_3 H_1\rho^{-1}(t_1,t_2) &= t_1^4t_2^4+t_1^5t_2^5-\sum_{i=1}^{2}\frac{P_i(H_1)}{3t_i^2}S_{t_i}+P_3(H_1)+\odot \\
&= t_1^4t_2^4+t_1^5t_2^5-\frac{4}{3}t_1^4t_2^4\epsilon_1(H_1)-\frac{5}{3}t_1^5t_2^5\epsilon_1(H_1)-\frac{4}{3}(t_1^5t_2^8+t_1^6t_2^9)(b_1+\eta_1(H_1)) \\
&\quad -\frac{5}{3}(t_1^6t_2^9+t_1^7t_2^{10})(b_1+\eta_1(H_1))-\frac{4}{3}t_1^4t_2^4\epsilon_2(H_1)-\frac{5}{3}t_1^5t_2^5\epsilon_2(H_1) \\
&\quad -\frac{4}{3}(t_1^8t_2^5+t_1^9t_2^6)(b_2+\eta_2(H_1))-\frac{5}{3}(t_1^9t_2^6+t_1^{10}t_2^7)(b_2+\eta_2(H_1)) \\
&\quad (t_1^4t_2^4+t_1^5t_2^5)\epsilon_3(H_1)+t_1^6t_2^6\eta_3(H_1)+\odot
\end{aligned}$$

onde $\odot$ indica termos com expoentes em $\cup_{i=1}^{2}(\lambda_1-\nu_i+\mathcal{V}(P_i)+\mathbb{N}^2)\cup(\mathcal{V}(P_3)+\mathbb{N}^2)$. Note que, ϵ_1, ϵ_2, $\epsilon_3\in\mathcal{M}_3$ e, assim, não conseguimos eliminar o termo $t_1^5t_2^5$ da parametrização. Portanto, H_1 não pode ser $\mathcal{G}$-equivalente a H_0.

Analisaremos agora a segunda questão levantada: Se $\varphi_1 \rightsquigarrow H_1$ e (σ,ρ) é como descrito na Proposição 3.11, então existe uma curva φ_2 tal que $\varphi_2 \rightsquigarrow \sigma H_1\rho^{-1}$. Conseguimos descobrir a curva φ_2 que originou a nova parametrização quase ordinária?

Para tanto, seja $H_1=(t_1^n,\cdots,t_r^n,S_{H_1}=\sum_\delta a_\delta(t_1\cdots t_r)^\delta)$ a h.q.o. que foi obtida de $\varphi_1=(u^n,S_1(u))$ com $S_1(u)=\sum_\delta a_\delta u^\delta$. Consideremos $H_2=\sigma H_1\rho^{-1}=(t_1^n,\cdots,t_r^n,S_{H_2})$, com $S_{H_2}=S_{H_1}\rho^{-1}+P_{r+1}(H_1\rho^{-1})$ e $(\sigma,\rho)\in\mathcal{A}'$. Pela Proposição 3.11, temos que H_2 é associada a uma curva, digamos φ_2, ou seja:

$$\begin{array}{ccc}
\varphi_1 & \rightsquigarrow & H_1 \\
 & & \downarrow(\sigma,\rho) \\
\varphi_2 & \rightsquigarrow & H_2
\end{array}$$

Como $(\sigma,\rho)\in\mathcal{A}'$ temos $\rho_j=t_j\left(1+\frac{P_j(H_1)}{t_j^n}\right)^{\frac{1}{n}}$ com $P_j=X_j(\epsilon_j+X_{r+1}\theta_j)$, $\epsilon_j\in\mathcal{M}_{r+1}\cap Im(T)$, $\theta_j\in Im(T)$, para todo $j=1,\cdots,r$, e $\sigma_i=X_i+P_i$, para todo $i=1,\cdots,r+1$, $P_{r+1}=X_{r+1}\epsilon_{r+1}+\underline{X}^\alpha\theta_{r+1}$, $\epsilon_{r+1}\in\mathcal{M}_{r+1}\cap Im(T)$, $\theta_{r+1}\in Im(T)$. Aqui estamos denotando $\eta_{r+1}=\theta_{r+1}$ para unificar a notação.

Note que $\epsilon_{r+1}\in Im(T)$ implica que existe $h_{\epsilon_{r+1}}=\sum_{a,b\in\mathbb{N}}c_{ab}X^aY^b\in\mathbb{C}\{X,Y\}$ tal que $\epsilon_{r+1}=T(h_{\epsilon_{r+1}})=\sum_{a,b\in\mathbb{N}}c_{ab}(X_1\cdots X_r)^aX_{r+1}^b$ e temos

$$\epsilon_{r+1}(H_1\rho^{-1})=\epsilon_{r+1}\left((\rho^{-1})_1^n,\cdots,(\rho^{-1})_r^n,\sum_\delta a_\delta((\rho^{-1})_1\cdots(\rho^{-1})_r)^\delta\right).$$

Usando que $(\rho^{-1})_1 \cdots (\rho^{-1})_r = q'(t_1 \cdots t_r)$, com $q'(u) = \sum_{\beta \in \mathbb{N}} a_\beta u^\beta \in \mathbb{C}\{u\}$, obtemos

$$\begin{aligned}
\epsilon_{r+1}(H_1\rho^{-1}) &= \sum_{a,b \in \mathbb{N}} c_{ab}(q'(t_1 \cdots t_r))^{na} S_1(q'(t_1 \cdots t_r))^b \\
&= h_{\epsilon_{r+1}}(q'(t_1 \cdots t_r)^n, S_1(q'(t_1 \cdots t_r))) \\
&= h_{\epsilon_{r+1}} \circ \varphi_1 \circ q'(t_1 \cdots t_r).
\end{aligned}$$

De modo análogo, para $\theta_{r+1} \in Im(T)$, temos que existe $h_{\theta_{r+1}} \in \mathbb{C}\{X, Y\}$ tal que $\theta_{r+1}(H_1\rho^{-1}) = h_{\theta_{r+1}} \circ \varphi_1 \circ q'(t_1 \cdots t_r)$.

Deste modo, tomando $\varphi_2 = (u^n, S_2(u))$ com

$$S_2(u) = S_1(q'(u)) + S_1(q'(u))h_{\epsilon_{r+1}}(\varphi_1 \circ q'(u)) + q'(u)^{n\alpha}h_{\theta_{r+1}}(\varphi_1 \circ q'(u))$$

temos que φ_2 é a curva que origina H_2, ou seja, $\varphi_2 \rightsquigarrow H_2$.

Resta verificar se as curvas φ_1 e φ_2 possuem alguma relação. Denote $\rho_c^{-1} = q'(u)$, então podemos escrever

$$\varphi_2 = \left(u^n, S_1(\rho_c^{-1}) + S_1(\rho_c^{-1})h_{\epsilon_{r+1}}(\varphi_1 \circ \rho_c^{-1}) + (\rho_c^{-1})^{n\alpha}h_{\theta_{r+1}}(\varphi_1 \circ \rho_c^{-1})\right).$$

Definindo $\sigma_c(X, Y) = (X + P_{c1}, Y + P_{c2})$ onde $P_{c1} = Xg \in (X, Y)^2$, $P_{c2} = Yh_{\epsilon_{r+1}} + X^\alpha h_{\theta_{r+1}} \in (X, Y)^2$ com g como em (3.2) e aplicando a mudança (σ_c, ρ_c) em φ_1, obtemos

$$\begin{aligned}
\sigma_c\varphi_1\rho_c^{-1} &= \sigma_c((\rho_c^{-1}), S_1(\rho_c^{-1})) \\
&= \big((\rho_c^{-1})^n + P_{c1}(\varphi_1\rho_c^{-1}), S_1(\rho_c^{-1}) + S_1(\rho_c^{-1})h_{\epsilon_{r+1}}(\varphi_1 \circ \rho_c^{-1}) \\
&\quad + (\rho_c^{-1})^{n\alpha}h_{\theta_{r+1}}(\varphi_1 \circ \rho_c^{-1})\big) \\
&= (u^n, S_2(u)).
\end{aligned}$$

De fato, que $S_2(u) = S_1(\rho_c^{-1}) + S_1(\rho_c^{-1})h_{\epsilon_{r+1}}(\varphi_1 \circ \rho_c^{-1}) + (\rho_c^{-1})^{n\alpha}h_{\theta_{r+1}}(\varphi_1 \circ \rho_c^{-1})$ segue direto da definição de φ_2. Para a primeira coordenada, lembrando que $\rho_1 \cdots \rho_r = q(t_1 \cdots t_r)$, temos

$$\begin{aligned}
\rho_i((\rho^{-1})_1, \cdots, (\rho^{-1})_r) = t_i &\Rightarrow (\rho_1 \cdots \rho_r)((\rho^{-1})_1, \cdots, (\rho^{-1})_r) = t_1 \cdots t_r \\
&\Rightarrow q((\rho^{-1})_1 \cdots (\rho^{-1})_r) = t_1 \cdots t_r \\
&\Rightarrow q(q'(t_1 \cdots t_r)) = t_1 \cdots t_r \\
&\Rightarrow q(q'(u)) = u
\end{aligned}$$

e portanto, $q' = q^{-1}$. Assim, de (3.2) obtemos

$$\begin{aligned}
u &= q(q'(u)) \\
&= q(\rho_c^{-1}) \\
&= \rho_c^{-1} \cdot \left(1 + g(\varphi_1(\rho_c^{-1}))\right)^{\frac{1}{n}} \\
&= \rho_c^{-1} \cdot \left(1 + \frac{Xg(\varphi_1(\rho_c^{-1}))}{(\rho_c^{-1})^n}\right)^{\frac{1}{n}} \\
&= \rho_c^{-1} \cdot \left(1 + \frac{P_{c1}(\varphi_1(\rho_c^{-1}))}{(\rho_c^{-1})^n}\right)^{\frac{1}{n}}.
\end{aligned}$$

Agora, elevando ambos os lados da equação a n-ésima potência obtemos a igualdade $u^n = (\rho_c^{-1})^n + P_{c1}(\varphi_1(\rho_c^{-1}))$. Deste modo, temos que as curvas dadas por φ_1 e φ_2 são analiticamente equivalentes, ou seja, $\varphi_1 \underset{\mathcal{A}}{\sim} \varphi_2$ e temos o diagrama

$$\begin{array}{ccc}
\varphi_1 & \rightsquigarrow & H_1 \\
(\sigma_c, \rho_c) \downarrow & & \downarrow (\sigma, \rho) \\
\varphi_2 & \rightsquigarrow & H_2 .
\end{array}$$

Temos assim, o seguinte resultado:

Proposição 3.12. *Seja $\varphi_1 \rightsquigarrow H_1$. Se $(\sigma, \rho) \in \mathcal{A}'$ como na Proposição 3.11, então existe uma curva φ_2 tal que $\varphi_2 \rightsquigarrow \sigma H_1 \rho^{-1}$. Além disto, temos que $\varphi_1 \underset{\mathcal{G}}{\sim} \varphi_2$.*

Como já observamos anteriormente, a composta de duas mudanças quaisquer de $\mathcal{A}'$ nem sempre é possível. Nesse sentido, se $\varphi_1 \rightsquigarrow H_1$ e $(\sigma, \rho) \in \mathcal{A}'$ é uma mudança associada a H_1 que produz H_2, então apenas podemos compor com mudanças $(\tilde{\sigma}, \tilde{\rho}) \in \mathcal{A}'$ que mantêm H_2 com a propriedade de que existe φ_2 tal que $\varphi_2 \rightsquigarrow H_2$.

Definição 3.13. *Dada uma h.q.o. H tal que existe φ com $\varphi \rightsquigarrow H$, definimos*

$$\mathcal{A}'_H = \{(\sigma, \rho) \in \mathcal{A}';\ \textit{existe uma curva}\ \psi\ \textit{com}\ \psi \rightsquigarrow (\sigma, \rho) \circ H\}.$$

Sejam H_1, H_2 parametrizações quase ordinárias tais que $\varphi_1 \rightsquigarrow H_1$, $\varphi_2 \rightsquigarrow H_2$, $(\sigma, \rho) \in \mathcal{A}'_{H_2}$ e $(\tilde{\sigma}, \tilde{\rho}) \in \mathcal{A}'_{H_1}$, com $H_2 = \tilde{\sigma} H_1 \tilde{\rho}^{-1}$ e $H_3 = \sigma H_2 \rho^{-1}$, conforme representado no diagrama

$$\begin{array}{ccccc}
\mathbb{C}^r & \underset{\tilde{\rho}}{\longrightarrow} & \mathbb{C}^r & \underset{\rho}{\longrightarrow} & \mathbb{C}^r \\
H_1 \downarrow & & H_2 \downarrow & & H_3 \downarrow \\
\mathbb{C}^{r+1} & \underset{\tilde{\sigma}}{\longrightarrow} & \mathbb{C}^{r+1} & \underset{\sigma}{\longrightarrow} & \mathbb{C}^{r+1}.
\end{array}$$

Vamos considerar a composta $(\sigma,\rho)\circ(\tilde{\sigma},\tilde{\rho}) = (\sigma\circ\tilde{\sigma},\rho\circ\tilde{\rho})$ e mostrar que $(\sigma,\rho)\circ(\tilde{\sigma},\tilde{\rho}) \in \mathcal{A}'_{H_1}$.

Temos, para todo $i = 1,\cdots,r+1$ e $j = 1,\cdots,r$, que

$$\begin{array}{l} \tilde{\sigma}_i = X_i + \tilde{P}_i,\ \sigma_i = X_i + P_i, \\ \tilde{\rho}_j = t_j\left(1+\dfrac{\tilde{P}_j(H_1)}{t_j^n}\right)^{\frac{1}{n}} \text{ e } \rho_j = t_j\left(1+\dfrac{P_j(H_2)}{t_j^n}\right)^{\frac{1}{n}}. \end{array}$$

Assim,

$$\begin{aligned} (\sigma\circ\tilde{\sigma})_i(\underline{X},X_{r+1}) &= \sigma_i(X_1+\tilde{P}_1,\cdots,X_{r+1}+\tilde{P}_{r+1}) \\ &= X_i+\tilde{P}_i+P_i(X_1+\tilde{P}_1,\cdots,X_{r+1}+\tilde{P}_{r+1}) \\ &= X_i+\tilde{P}_i+P_i(\tilde{\sigma}) \end{aligned} \tag{3.5}$$

e

$$\begin{aligned} (\rho\circ\tilde{\rho})_j(\underline{t}) &= \rho_j(\tilde{\rho}_1,\cdots,\tilde{\rho}_r) \\ &= \tilde{\rho}_j\cdot\left(1+\frac{P_j(H_2\tilde{\rho})}{(\tilde{\rho}_j)^n}\right)^{\frac{1}{n}} \\ &= t_j\left(1+\frac{\tilde{P}_j(H_1)}{t_j^n}\right)^{\frac{1}{n}}\cdot\left(1+\frac{P_j(H_2\tilde{\rho})}{(\tilde{\rho}_j)^n}\right)^{\frac{1}{n}} \\ &= t_j\left(1+\frac{\frac{t_j^nP_j(H_2\tilde{\rho})+(\tilde{\rho}_j)^n\tilde{P}_j(H_1)+\tilde{P}_j(H_1)P_j(H_2\tilde{\rho})}{(\tilde{\rho}_j)^n}}{t_j^n}\right)^{\frac{1}{n}}. \end{aligned} \tag{3.6}$$

Note que,

$$\begin{aligned} \frac{t_j^nP_j(H_2\tilde{\rho})+(\tilde{\rho}_j)^n\tilde{P}_j(H_1)+\tilde{P}_j(H_1)P_j(H_2\tilde{\rho})}{(\tilde{\rho}_j)^n} &= \tilde{P}_j(H_1)+\frac{(t_j^n+\tilde{P}_j(H_1))P_j(H_2\tilde{\rho})}{(\tilde{\rho}_j)^n} \\ &= \tilde{P}_j(H_1)+P_j(H_2\tilde{\rho}) \end{aligned}$$

pois $(t_j^n+\tilde{P}_j(H_1)) = (\tilde{\rho}_j)^n$. Como $H_2 = \tilde{\sigma}H_1\tilde{\rho}^{-1}$, então $H_2\tilde{\rho} = \tilde{\sigma}H_1$ e segue que

$$(\tilde{P}_i+P_i(\tilde{\sigma}))(H_1) = \tilde{P}_i(H_1)+P_i(\tilde{\sigma}H_1) = \tilde{P}_i(H_1)+P_i(H_2\tilde{\rho}).$$

Portanto, de (3.5) e (3.6), concluímos da Proposição 3.11 que $(\sigma,\rho)\circ(\tilde{\sigma},\tilde{\rho}) \in \mathcal{A}'_{H_1}$.

3.2 Mudanças que mantêm a propriedade $H_s \rightsquigarrow H_r$

Na seção anterior, analisamos propriedades que mudanças de coordenadas devem possuir para que uma h.q.o. obtida a partir de uma curva mantenha tal propriedade após tais mudanças.

Nesta seção, a exemplo do fizemos para o caso de curvas, vamos estudar algumas condições que as mudanças de coordenadas devem satisfazer para que mantenham quase ordinárias obtidas de outras quase ordinárias com essa propriedade.

Os métodos e ideias são similares aos da seção anterior. Poderíamos ter nos restringido apenas a esta seção, mas, para acostumar o leitor às notações, decidimos abordar o caso $H_1 \rightsquigarrow H_r$ antes.

No que segue, manteremos as notações do início deste capítulo.

Consideremos uma partição P de $\{1, \cdots, r\}$ da forma

$$\{\{\alpha_0 + 1 = 1, 2, \cdots, \alpha_1\}, \{\alpha_1 + 1, \alpha_1 + 2, \cdots, \alpha_2\}, \cdots, \{\alpha_{s-1} + 1, \alpha_{s-1} + 2, \cdots, \alpha_s = r\}\} \tag{3.7}$$

e denotemos por $\sum^P$ o subgrupo de $Sim(r)$ que permuta apenas os elementos de cada subconjunto da partição.

Iniciemos com uma caracterização da propriedade $H_s \underset{P}{\rightsquigarrow} H_r$.

Proposição 3.14. *Sejam P uma partição de $\{1, \cdots, r\}$ como acima, H_s e $H_r = (t_1^n, \cdots, t_r^n, \sum_{\underline{\delta}} a_{\underline{\delta}} t^{\underline{\delta}})$ parametrizações quase ordinárias normalizadas com $s < r$. Então,*

$$H_s \underset{P}{\rightsquigarrow} H_r \iff \pi(t^{\underline{\delta}}) = t^{\underline{\delta}};\ \textit{para todo } \pi \in \sum\nolimits^P.$$

Demonstração. Se temos $H_s \underset{P}{\rightsquigarrow} H_r$ com $H_s = (u_1^n, \cdots, u_s^n, \sum_{\underline{\beta}} a_{\underline{\beta}} u^{\underline{\beta}})$, então segue que $H_r = (t_1^n, \cdots, t_r^n, \sum_{\underline{\beta}} a_{\underline{\beta}} t^{\underline{\beta}_P})$. Temos, $\underline{\delta} = \underline{\beta}_P$ e

$$\begin{aligned}
\pi(t^{\underline{\beta}_P}) &= \pi(t_1^{\beta_1} \cdots t_{\alpha_1}^{\beta_1} t_{\alpha_1+1}^{\beta_2} \cdots t_{\alpha_2}^{\beta_2} \cdots t_{\alpha_{s-1}+1}^{\beta_s} \cdots t_{\alpha_s}^{\beta_s}) \\
&= t_{\pi(1)}^{\beta_1} \cdots t_{\pi(\alpha_1)}^{\beta_1} t_{\pi(\alpha_1+1)}^{\beta_2} \cdots t_{\pi(\alpha_2)}^{\beta_2} \cdots t_{\pi(\alpha_{s-1}+1)}^{\beta_s} \cdots t_{\pi(\alpha_s)}^{\beta_s} \\
&= t_1^{\beta_1} \cdots t_{\alpha_1}^{\beta_1} t_{\alpha_1+1}^{\beta_2} \cdots t_{\alpha_2}^{\beta_2} \cdots t_{\alpha_{s-1}+1}^{\beta_s} \cdots t_{\alpha_s}^{\beta_s} \\
&= t^{\underline{\beta}_P}
\end{aligned}$$

qualquer que seja $\pi \in \sum^P$, uma vez que π só difere, eventualmente, da identidade quando aplicado a valores de um subconjunto da partição. Como os expoentes são iguais para as variáveis indexadas por um mesmo subconjunto da partição, reordenando as variáveis, obtemos a igualdade.

Por outro lado, seja $H_r = (t_1^n, \cdots, t_r^n, \sum_{\underline{\delta}} a_{\underline{\delta}} t^{\underline{\delta}})$ tal que, para todo elemento $\pi \in \sum^P$, temos $\pi(t^{\underline{\delta}}) = t^{\underline{\delta}}$. Tomando $\pi \in \sum^P$ com

$$\pi(j) = j + 1,\ \text{para } \alpha_{i-1} + 1 \leq j < \alpha_i,$$

$$\pi(\alpha_i) = \alpha_{i-1} + 1,\ \text{para todo } i = 1, \cdots, s,$$

temos

$$t_1^{\delta_1} \cdots t_r^{\delta_r} = t^{\underline{\delta}} = \pi(t^{\underline{\delta}}) = t_{\pi(1)}^{\delta_1} \cdots t_{\pi(r)}^{\delta_r} = t_2^{\delta_1} \cdots t_1^{\delta_{\alpha_1}} t_{\alpha_1+2}^{\delta_{\alpha_1+1}} \cdots t_{\alpha_1+1}^{\delta_{\alpha_2}} \cdots t_{\alpha_{s-1}+1}^{\delta_r}.$$

Portanto, $\delta_1 = \cdots = \delta_{\alpha_1}$, $\delta_{\alpha_1+1} = \cdots = \delta_{\alpha_2}$, $\cdots$, $\delta_{\alpha_{s-1}+1} = \cdots = \delta_{\alpha_s}$. Assim, todo $\underline{\delta}$ é da forma $\underline{\delta} = \underline{\beta} \cdot M_P$, para algum $\underline{\beta} \in \mathbb{N}^s$ e $H_s \underset{P}{\rightsquigarrow} H_r$ com $H_s = (u_1^s, \cdots, u_s^n, \sum_{\underline{\beta}} a_{\underline{\beta}} u^{\underline{\beta}})$. $\square$

Vamos agora generalizarar análises feitas para o caso $H_1 \underset{P}{\rightsquigarrow} H_r$.

Apresentaremos condições que mudanças de coordenadas devem satisfazer para que mantenham hipersuperfícies quase ordinárias originadas de outras hipersuperfícies com esta propriedade.

Dada uma hipersuperfície quase ordinária $H_s = (u_1^n, \cdots, u_s^n, S(\underline{u}) = \sum a_{\underline{\beta}} u^{\underline{\beta}})$ em $\mathbb{C}^{s+1}$ e uma partição de $\{1, \cdots, r\}$ com $s < r$, como em (3.7), associamos a ela uma outra hipersuperfície $H_r = (t_1^n, \cdots, t_r^n, S_r = S(\underline{t}_{\alpha_1}, \cdots, \underline{t}_{\alpha_r}))$ em $\mathbb{C}^{r+1}$, $r \geq s$ como descrito no início do capítulo, ou seja,

$$H_s \underset{P}{\rightsquigarrow} H_r.$$

Queremos identificar as mudanças que satisfazem a Proposição 3.14.

Seja $(\sigma, \rho) \in \mathcal{G}$ uma mudança de coordenadas que mantém que normalizada a parametrização de uma h.q.o., tal como considerada no Teorema 1.35, dada por

$$\begin{array}{rll} \rho: & \mathbb{C}^r & \to \mathbb{C}^r \\ & \underline{t} & \mapsto (\rho_1(\underline{t}), \cdots, \rho_r(\underline{t})) \end{array}$$

com $\rho_j = t_j \left(1 + \frac{P_j(H_r)}{t_j^n}\right)^{\frac{1}{n}}$, $P_j = X_j \epsilon_j + X_{r+1}(b_j + \eta_j)$, $\epsilon_j, \eta_j \in \mathcal{M}_{r+1}$, $b_j \in \mathbb{C}$ e

$$\begin{array}{rll} \sigma: & \mathbb{C}^{r+1} & \to \mathbb{C}^{r+1} \\ & (\underline{X}, X_{r+1}) & \mapsto (\sigma_1(\underline{X}, X_{r+1}), \cdots, \sigma_{r+1}(\underline{X}, X_{r+1})) \end{array}$$

com $\sigma_i = X_i + P_i$, para todo $i = 1, \cdots, r$, $\sigma_{r+1} = X_{r+1} + P_{r+1}$, $P_{r+1} = X_{r+1}\epsilon_{r+1} + \underline{X}^\alpha \eta_{r+1}$, $\epsilon_{r+1} \in \mathcal{M}_{r+1}$, $\eta_{r+1} \in \mathbb{C}\{\underline{X}, X_{r+1}\}$ e $\underline{\alpha} = (\lceil \frac{\lambda_{11}}{n} \rceil, \cdots, \lceil \frac{\lambda_{1r}}{n} \rceil)$.

Aplicando tal mudança de coordenadas em H_r obtemos

$$\sigma H_r \rho^{-1}(\underline{t}) = \sigma((\rho^{-1})_1^n(\underline{t}), \cdots, (\rho^{-1})_r^n(\underline{t}), S_r((\rho^{-1})_1, \cdots, (\rho^{-1})_r)).$$

Os cálculos realizados na seção anterior e o fato de as mudanças de coordenadas manterem h.q.o. normalizadas nos dão que, para todo $i = 1, \cdots, r$,

$$\sigma_i(H_r(\rho^{-1}))(\underline{t}) = (\rho^{-1})_i^n(\underline{t}) + P_i(H_r(\rho^{-1}))(\underline{t}) = t_i^n.$$

Analisemos a coordenada de índice $r+1$, ou seja,

$$\sigma_{r+1}(H_r(\rho^{-1}))(\underline{t}) = S_r(\rho^{-1}(\underline{t})) + P_{r+1}(H_r(\rho^{-1})(\underline{t})).$$

Gostaríamos que tal expressão tivesse todos os monômios invariantes por permutações de $\sum^P$.

Seja $\underline{t}_{\alpha_1}^{\beta_1} \cdots \underline{t}_{\alpha_s}^{\beta_s}$ um monômio de $S(\underline{t}_P) = S_r(\underline{t})$, onde, $\underline{t}_{\alpha_i}^{\beta_i} = \prod_{j=\alpha_{i-1}+1}^{\alpha_i} t_j^{\beta_i}$ para todo $j = 1, \cdots, s$ e $0 = \alpha_0 < \alpha_1 \cdots < \alpha_s = r$ determina a partição P como em (3.7).

Se $\underline{(\rho^{-1})}_{\alpha_1}^{\beta_1} \cdots \underline{(\rho^{-1})}_{\alpha_s}^{\beta_s}$ tiver todos os monômios invariantes por $\pi \in \sum^P$, então $S_r(\rho^{-1})$ também terá.

Tomando

$$\underline{(\rho)}_{\alpha_1}^{\beta_1} \cdots \underline{(\rho)}_{\alpha_s}^{\beta_s} = \underline{t}_{\alpha_1}^{\beta_1} \cdots \underline{t}_{\alpha_s}^{\beta_s} \prod_{i=1}^{\alpha_1} \left(1 + \frac{P_i(H_r)}{t_i^n}\right)^{\frac{\beta_1}{n}} \cdots \prod_{i=\alpha_{s-1}+1}^{\alpha_s} \left(1 + \frac{P_i(H_r)}{t_i^n}\right)^{\frac{\beta_s}{n}}$$

temos

$$\frac{P_i(H_r)}{t_i^n} = \frac{t_i^n \epsilon_i(H_r) + S_r \cdot (b_i + \eta_i(H_r))}{t_i^n} = \epsilon_i(H_r) + \frac{S_r \cdot (b_i + \eta_i(H_r))}{t_i^n}.$$

Considere o monomorfismo de $\mathbb{C}-$álgebras

$$\begin{aligned} T: \ \mathbb{C}\{X_1, \cdots, X_{s+1}\} &\to \mathbb{C}\{Y_1, \cdots, Y_{r+1}\} \\ X_i &\mapsto \underline{Y}_{\alpha_i} = Y_{\alpha_{i-1}+1} \cdots Y_{\alpha_i}, \ i = 1, \cdots, s \\ X_{s+1} &\mapsto Y_{r+1}. \end{aligned}$$

Como S_r tem todos os monômios invariantes por π, se tomarmos $\epsilon_i, \theta_i \in Im(T)$, $b_i = 0$ e $\eta_i = Y_i\theta_i$, para todo $i = 1, \cdots, r$, segue que

$$\frac{P_i(H_r)}{t_i^n} = \epsilon_i(H_r) + S_r \cdot \theta_i(H_r)$$

tem apenas monômios invariantes por $\pi \in \sum^P$. Portanto, nessas condições, $\underline{(\rho)}_{\alpha_1}^{\beta_1} \cdots \underline{(\rho)}_{\alpha_s}^{\beta_s}$ possui todos os monômios invariantes por elementos de $\sum^P$, ou seja, se $\epsilon_i, \theta_i \in Im(T)$, $b_i = 0$ e $\eta_i = Y_i\theta_i$, para todo $i = 1, \cdots, r$, então

$$\rho_1 \cdots \rho_r = \sum_{\underline{\gamma}} a_{\underline{\gamma}} \underline{t}^{\underline{\gamma}_P}$$

onde $\underline{\gamma} \in \mathbb{N}^s$ e $\underline{\gamma}_P = \underline{\gamma} \cdot M_P$.

Chamando $\rho_1 \cdots \rho_r = q(\underline{t}_{\alpha_1}, \cdots, \underline{t}_{\alpha_r})$ com $q(u_1, \cdots, u_s) = \sum_{\underline{\gamma} \in \mathbb{N}^s} a_{\underline{\gamma}} \underline{u}^{\underline{\gamma}} \in \mathbb{C}\{u_1 \cdots, u_s\}$, temos,

$$q(T_P(\underline{u})) = \underline{t}_{\alpha_1} \cdots \underline{t}_{\alpha_s} \prod_{i=1}^{\alpha_1} (1 + \epsilon_i(H_r) + S_r \cdot \theta_i(H_r))^{\frac{1}{n}} \cdots \prod_{i=\alpha_{s-1}+1}^{\alpha_s} (1 + \epsilon_i(H_r) + S_r \cdot \theta_i(H_r))^{\frac{1}{n}}$$

onde

$$\epsilon_i(H_r) = T(h_{\epsilon_i})(H_r) = h_{\epsilon_i}(\underline{t}_{\alpha_1}^n, \cdots, \underline{t}_{\alpha_s}^n, S_r) = h_{\epsilon_i} \circ H_s(\underline{t}_{\alpha_1}, \cdots, \underline{t}_{\alpha_s})$$
$$\theta_i(H_r) = T(h_{\theta_i})(H_r) = h_{\theta_i}(\underline{t}_{\alpha_1}^n, \cdots, \underline{t}_{\alpha_s}^n, S_r) = h_{\theta_i} \circ H_s(\underline{t}_{\alpha_1}, \cdots, \underline{t}_{\alpha_s})$$

com $h_{\epsilon_i} \in \mathcal{M}_{s+1}$ e $h_{\theta_i} \in \mathbb{C}\{X_1, \cdots, X_{s+1}\}$. Tomando, $g_i = h_{\epsilon_i} + X_{s+1}h_{\theta_i} \in \mathcal{M}_{s+1}$ obtemos

$$\begin{aligned} q(T(u)) &= \underline{t}_{\alpha_1} \cdots \underline{t}_{\alpha_s} \left(\prod_{i=1}^{\alpha_1}(1 + g_i \circ H_s(T(u)))\right)^{\frac{1}{n}} \cdots \left(\prod_{i=\alpha_{s-1}+1}^{\alpha_s}(1 + g_i \circ H_s(T(u)))\right)^{\frac{1}{n}} \\ &= t_1 \cdots t_r \left(\prod_{i=1}^{r}(1 + g_i \circ H_s(T(u)))\right)^{\frac{1}{n}} = t_1 \cdots t_r \left(1 + g \circ H_s(T(u))\right)^{\frac{1}{n}}, \end{aligned}$$

com $g \in \mathcal{M}_{s+1}$.

Portanto,

$$q(u_1, \cdots, u_s) = u_1 \cdots u_s(1 + g \circ H_s(u_1, \cdots, u_s))^{\frac{1}{n}}, \ g \in \mathcal{M}_{s+1}. \tag{3.8}$$

Denotando

$$q'(t_1, \cdots, t_r) = \prod_{i=1}^{r}(\rho^{-1})_i = \sum_{\underline{\beta} \in \mathbb{N}^r} a_{\underline{\beta}} t^{\underline{\beta}}$$

segue que $q'(\rho_1, \cdots, \rho_r) = \prod_{i=1}^{r}(\rho_i^{-1})(\rho_1, \cdots, \rho_r) = t_1 \cdots t_r$. Por outro lado

$$q'(\rho_1, \cdots, \rho_r) = \sum_{\underline{\beta} \in \mathbb{N}^r} a_{\underline{\beta}} t_1^{\beta_1} \cdots t_r^{\beta_r} \prod_{i=1}^{r}(1 + g_i \circ H_s(\underline{t}_{\alpha_1}, \cdots, \underline{t}_{\alpha_r}))^{\frac{\beta_i}{n}}.$$

Comparando as duas igualdades acima, concluímos que deve existir $\underline{\beta} = (\underline{1})$ com $a_{(\underline{1})} = 1$ e assim,

$$\begin{aligned} t_1 \cdots t_r &= t_1 \cdots t_r \prod_{i=1}^{r}(1 + g_i \circ H_s(\underline{t}_{\alpha_1}, \cdots, \underline{t}_{\alpha_r}))^{\frac{1}{n}} + \sum_{\underline{\beta} \neq (\underline{1})} t^{\underline{\beta}} \prod_{i=1}^{r}(1 + g_i \circ H_s(\underline{t}_{\alpha_1}, \cdots, \underline{t}_{\alpha_r}))^{\frac{\beta_i}{n}} \\ &= t_1 \cdots t_r(1 + \Delta_{\underline{1}}^P) + \sum_{\underline{\beta} \neq (\underline{1})} a_{\underline{\beta}} t^{\underline{\beta}}(1 + \Delta_{\underline{\beta}}^P) \end{aligned}$$

onde $\Delta_{\underline{\beta}}^P$ representa os termos com expoente em $\mathbb{N}^s \cdot M_P$ oriundos da parcela de $\underline{\beta}$ do somatório.

Com argumento inteiramente análogo ao que foi usado para o caso de curvas obtemos que $\underline{\beta} \in \mathbb{N}^s \cdot M_P$, ou seja,

$$(\rho^{-1})_1 \cdots (\rho^{-1})_r = \sum_{\beta \in \mathbb{N}^s} a_\beta t^{\underline{\beta}_P}.$$

Consequentemente, S_r tem apenas monômios com expoentes em $\mathbb{N}^s \cdot M_P$ e, portanto, invariantes por elementos de $\sum^P$.

Como

$$\begin{aligned}
\sigma_{r+1}(H_r\rho^{-1})(\underline{t}) &= S_r(\rho^{-1}) + P_{r+1}(H_r\rho^{-1}) \\
&= S_r(\rho^{-1}) + S_r(\rho^{-1})\epsilon_{r+1}(H_r\rho^{-1}(\underline{t})) + ((\rho^{-1})_1 \cdots (\rho^{-1})_r)^\alpha \eta_{r+1}(H_r\rho^{-1}(\underline{t})),
\end{aligned}$$

segue que para todos os expoentes dos monômios de $\sigma_{r+1}(H_r\rho^{-1})(\underline{t})$ serem invariantes por elementos de $\sum^P$ é suficiente que $\epsilon_{r+1}, \eta_{r+1} \in Im(T)$. Logo, se

$$\eta_{r+1}, \epsilon_{r+1}, \epsilon_j, \theta_j \in Im(T), \eta_j = Y_j\theta_j, b_j = 0, \text{ para todo } j = 1, \cdots, r, \tag{3.9}$$

então existe H'_s tal que $H'_s \underset{P}{\rightsquigarrow} \sigma H_r \rho^{-1}$.

Como no caso da seção anterior, também denotaremos por $\mathcal{A}'$ o subconjunto de $\mathcal{G}$ das mudanças que satisfazem as condições (3.9).

Os argumentos acima justificam o seguinte resultado, que generaliza a Proposição 3.11.

Proposição 3.15. *Considere $H_s \underset{P}{\rightsquigarrow} H_r$ e $(\sigma, \rho) \in \mathcal{A}'$ como em (3.9), então existe H'_s h.q.o. tal que $H'_s \underset{P}{\rightsquigarrow} \sigma H_r \rho^{-1}$.*

Dadas parametrizações quase ordinárias $H^1_s \underset{P}{\rightsquigarrow} H^1_r$, tome $(\sigma, \rho) \in \mathcal{A}'$ e seja $H^2_r = \sigma H^1_r \rho^{-1}$. Como vimos acima, H^2_r está associada a uma outra parametrização quase ordinária, digamos H^2_s, de dimensão s.

Vamos estudar H^2_s e verificar se, como no caso abordado na seção anterior, temos $H^1_s \underset{\mathcal{G}}{\sim} H^2_s$, ou seja, se podemos completar o diagrama

$$\begin{array}{ccc}
H^1_s & \rightsquigarrow & H^1_r \\
?\downarrow & & \downarrow(\sigma,\rho) \\
H^2_s & \rightsquigarrow & H^2_r.
\end{array}$$

Seja $H^1_r = (t_1^n, \cdots, t_r^n, S^1_r = \sum_{\underline{\beta} \in \mathbb{N}^s} a_{\underline{\beta}} \underline{t}^{\underline{\beta}_P})$ a h.q.o. associada à hipersuperfície $H^1_s = (u_1^n, \cdots, u_s^n, S^1_s = \sum_{\underline{\beta} \in \mathbb{N}^s} a_{\underline{\beta}} \underline{u}^{\underline{\beta}})$, ou seja, $H^s_1 \underset{P}{\rightsquigarrow} H^r_1$. Considere $H^2_r = \sigma H^1_r \rho^{-1} = (t_1^n, \cdots, t_r^n, S^2_r = S^1_r \rho^{-1} + P_{r+1}(H^1_r \rho^{-1}))$, com $(\sigma, \rho) \in \mathcal{A}'$, e H^2_s tal que $H^2_s \underset{P}{\rightsquigarrow} H^2_r$.

Como $(\sigma, \rho) \in \mathcal{A}'$ temos $\rho_j = t_j \left(1 + \frac{P_j(H^1_r)}{t_j^n}\right)^{\frac{1}{n}}$ com $P_j = Y_j(\epsilon_j + Y_{r+1}\theta_j)$, $\epsilon_j \in \mathcal{M}_{r+1} \cap Im(T)$, $\theta_j \in Im(T)$, para todo $j = 1, \cdots, r$, e $\sigma_i = Y_i + P_i$, para todo $i = 1, \cdots, r+1$, temos $P_{r+1} = Y_{r+1}\epsilon_{r+1} + \underline{Y}^\alpha \theta_{r+1}$, $\epsilon_{r+1} \in \mathcal{M}_{r+1} \cap Im(T)$, $\theta_{r+1} \in Im(T)$. Aqui novamente estamos denotando $\eta_{r+1} = \theta_{r+1}$ para simplificar a redação.

Mostraremos agora que cada $(\rho^{-1})_i$ tem expressão similar à de ρ_i.

Dado $(\sigma, \rho) \in \tilde{\mathcal{A}}$, temos $(\sigma, \rho)^{-1} \in \tilde{\mathcal{A}}$ e para σ^{-1} podemos escrever

$$(\sigma)_i^{-1}(\underline{Y}, Y_{r+1}) = Y_i(1+\epsilon_i') + Y_{r+1}(b_i' + \eta_i'),\ b_i' \in \mathbb{C},\ \eta_i', \epsilon_i' \in \mathcal{M}_{r+1}, \forall i = 1, \cdots, r.$$

Indicando $H_r^2 = (\sigma, \rho) \circ H_r^1$, com $H_r^2 = (t_1^n, \cdots, t_r^n, S_r^2(\underline{t}))$, segue que

$$\begin{aligned} H_r^1 &= (\sigma, \rho)^{-1} \circ H_r^2 \\ &= \sigma^{-1} H_r^2 \rho \\ &= \sigma^{-1}(\rho_1^n, \cdots, \rho_r^n, S_r^2(\underline{\rho})). \end{aligned}$$

Deste modo, para todo $i = 1, \cdots, r$, obtemos

$$t_i^n = (\sigma^{-1})_i(\rho_1^n, \cdots, \rho_r^n, S_r^2(\underline{\rho})) = \rho_i^n \cdot (1 + \epsilon_i'(H_r^2\rho)) + S_r^2(\underline{\rho})(b_i' + \eta_i'(H_r^2\rho))$$

e, consequentemente,

$$t_i = \rho_i \cdot \left(1 + \frac{\rho_i^n \epsilon_i'(H_r^2\rho) + S_r^2(\underline{\rho})(b_i' + \eta_i'(H_r^2\rho))}{\rho_i^n}\right)^{\frac{1}{n}}.$$

Uma vez que $(\rho^{-1})_i(\rho(\underline{t})) = t_i$ e ρ é difeomorfismo, temos

$$(\rho^{-1})_i(\underline{t}) = t_i \cdot \left(1 + \frac{t_i^n \epsilon_i'(H_r^2) + S_r^2(\underline{t})(b_i' + \eta_i'(H_r^2))}{t_i^n}\right)^{\frac{1}{n}}.$$

Assim, temos que $(\rho^{-1})_i = t_i\left(1 + \frac{P_i'(H_r^2)}{t_i^n}\right)^{\frac{1}{n}}$, com $P_i = X_i\epsilon_i' + X_{r+1}(b_i' + \eta_i')$ satisfazendo as condições apresentada no Teorema 1.35.

Considerando $\epsilon_i', \theta_i' \in Im(T)$, $b_i' = 0$ e $\eta_i' = Y_i\theta_i'$, para todo $i = 1, \cdots, r$, de modo análogo ao feito anteriormente, temos

$$\begin{aligned} \epsilon_i'(H_r^2) = T(h_{\epsilon_i'})(H_r^2) = h_{\epsilon_i'}(\underline{t}_{\alpha_1}^n, \cdots, \underline{t}_{\alpha_s}^n, S_r^2(\underline{t}_P)) = h_{\epsilon_i'} \circ H_s^2(\underline{t}_{\alpha_1}, \cdots, \underline{t}_{\alpha_s}) \\ \theta_i'(H_r^2) = T(h_{\theta_i'})(H_r^2) = h_{\theta_i'}(\underline{t}_{\alpha_1}^n, \cdots, \underline{t}_{\alpha_s}^n, S_r^2(\underline{t}_P)) = h_{\theta_i'} \circ H_s^2(\underline{t}_{\alpha_1}, \cdots, \underline{t}_{\alpha_s}) \end{aligned}$$

com $h_{\epsilon_i'} \in \mathcal{M}_{s+1}$ e $h_{\theta_i'} \in \mathbb{C}\{X_1, \cdots, X_{s+1}\}$. Tomando $g_i = h_{\epsilon_i'} + Y_{s+1}h_{\theta_i'} \in \mathcal{M}_{s+1}$, existe $G_i = \epsilon_i' + X_{r+1}\theta_i' \in Im(T)$ tal que $G_i = T(g_i)$. Temos

$$\begin{aligned} \prod_{i=1}^{\alpha_1}(\rho^{-1})_i &= t_1 \cdots t_{\alpha_1}\left(\prod_{i=1}^{\alpha_1}(1 + G_i(H_r^2))\right)^{\frac{1}{n}} \\ &= t_1 \cdots t_{\alpha_1}\left(1 + G_{\alpha_1}(H_r^2)\right)^{\frac{1}{n}} \end{aligned}$$

com $G_{\alpha_1} \in Im(T)$, isto é, $G_{\alpha_1} = T(g_{\alpha_1})$ para algum $g_{\alpha_1} \in \mathbb{C}\{\underline{X}, X_{s+1}\}$. Segue que $G_{\alpha_1}(H_r^2) = T(g_{\alpha_1})(H_r^2)$ e assim,

$$\begin{aligned} G_{\alpha_1}(t_1^n, \cdots, t_r^n, S_r^2(\underline{t})) &= g_{\alpha_1}(\underline{t}_{\alpha_1}^n, \cdots, \underline{t}_{\alpha_s}^n, S_r^2(\underline{t})) \\ &= g_{\alpha_1}(\underline{t}_{\alpha_1}^n, \cdots, \underline{t}_{\alpha_s}^n, S_s^2(\underline{t}_{\alpha_1}, \cdots, \underline{t}_{\alpha_s})) \\ &= g_{\alpha_1} \circ H_s^2(\underline{t}_{\alpha_1}, \cdots, \underline{t}_{\alpha_s}). \end{aligned}$$

Deste modo,

$$\prod_{i=1}^{\alpha_1} (\rho^{-1})_i = \underline{t}_{\alpha_1} \left(1 + g_{\alpha_1} \circ H_s^2(\underline{t}_{\alpha_1}, \cdots, \underline{t}_{\alpha_s})\right)^{\frac{1}{n}}.$$

Portanto, podemos considerar a série $\mathbf{q}_1 \in \mathbb{C}\{u_1, \cdots, u_s\}$ dada por

$$\mathbf{q}_1 = u_1 \left(1 + g_{\alpha_1} \circ H_s^2(u_1, \cdots, u_s)\right)^{\frac{1}{n}}$$

tal que $\prod_{i=1}^{\alpha_1} (\rho^{-1})_i = \mathbf{q}_1(\underline{t}_{\alpha_1}, \cdots, \underline{t}_{\alpha_s})$.

Tal construção pode ser facilmente estendida para todos os subconjuntos da partição P e assim, obtemos que, para todo $i = 1, \cdots, s$, existe $\mathbf{q}_i \in \mathbb{C}\{u_1, \cdots, u_s\}$ dada por

$$\mathbf{q}_i = u_i \left(1 + g_{\alpha_i} \circ H_s^2(u_1 \cdots, u_s)\right)^{\frac{1}{n}}$$

com

$$\prod_{i=\alpha_{i-1}+1}^{\alpha_i} (\rho^{-1})_i = \underline{t}_{\alpha_i} \left(1 + g_{\alpha_i} \circ H_s^2(\underline{t}_{\alpha_1}, \cdots, \underline{t}_{\alpha_s})\right)^{\frac{1}{n}} = \mathbf{q}_i(\underline{t}_{\alpha_1}, \cdots, \underline{t}_{\alpha_s}). \tag{3.10}$$

Pelo fato de ρ_i e $(\rho^{-1})_i$ serem dadas de maneira similar e possuírem as mesma propriedades, de modo inteiramente análogo ao que foi feito acima, temos que, para todo $i = 1, \cdots, s$, existem $\mathbf{q}'_i \in \mathbb{C}\{u_1, \cdots, u_s\}$ e $g'_{\alpha_i} \in \mathbb{C}\{\underline{X}, X_{s+1}\}$ tais que

$$\mathbf{q}'_i = u_i \left(1 + g'_{\alpha_i} \circ H_s^1(u_1 \cdots, u_s)\right)^{\frac{1}{n}}$$

com

$$\prod_{i=\alpha_{i-1}+1}^{\alpha_i} \rho_i = \underline{t}_{\alpha_i} \left(1 + g'_{\alpha_i} \circ H_s^1(\underline{t}_{\alpha_1}, \cdots, \underline{t}_{\alpha_s})\right)^{\frac{1}{n}} = \mathbf{q}'_i(\underline{t}_{\alpha_1}, \cdots, \underline{t}_{\alpha_s}). \tag{3.11}$$

Como $\epsilon_{r+1} \in Im(T)$, existe $h_{\epsilon_{r+1}} = \sum_{\underline{a} \in \mathbb{N}^s, b \in \mathbb{N}} c_{\underline{a}b} X^{\underline{a}} X_{s+1}^b$ tal que $\epsilon_{r+1} = T(h_{\epsilon_{r+1}}) = \sum_{\underline{a} \in \mathbb{N}^s, b \in \mathbb{N}} c_{\underline{a}b} \underline{Y}^{\underline{a}_P} Y_{r+1}^b$, e assim

$$\epsilon_{r+1}(H_r^1 \rho^{-1}) = \epsilon_{r+1} \left((\rho^{-1})_1^n, \cdots, (\rho^{-1})_r^n, \sum_{\underline{\beta} \in \mathbb{N}^s} a_{\underline{\beta}} (\rho^{-1})^{\underline{\beta}_P} \right).$$

De (3.10), temos $(\rho^{-1})_{\alpha_{i-1}+1}\cdots(\rho^{-1})_{\alpha_i} = \mathbf{q}_i(\underline{t}_{\alpha_1},\cdots,\underline{t}_{\alpha_s})$ e segue que

$$\begin{aligned}
\epsilon_{r+1}(H_r^1\rho^{-1}) &= \sum_{\underline{a},b} c_{\underline{a},b}((\rho^{-1})_1^n\cdots(\rho^{-1})_{\alpha_1}^n)^{a_1}\cdots((\rho^{-1})_{\alpha_{s-1}+1}^n\cdots(\rho^{-1})_r^n)^{a_s}(S_s^1(\underline{(\rho^{-1})}_P))^b \\
&= \sum_{\underline{a},b} c_{\underline{a},b}\mathbf{q}_1(\underline{t}_P)^{na_1}\cdots\mathbf{q}_s(\underline{t}_P)^{na_s}(S_s^1(\mathbf{q}_1(\underline{t}_P),\cdots,\mathbf{q}_s(\underline{t}_P)))^b \\
&= h_{\epsilon_{r+1}}(\mathbf{q}_1(\underline{t}_P)^n,\cdots,\mathbf{q}_s(\underline{t}_P)^n,S_s^1(\mathbf{q}_1(\underline{t}_P),\cdots,\mathbf{q}_s(\underline{t}_P))) \\
&= h_{\epsilon_{r+1}}\circ H_s^1\circ(\mathbf{q}_1,\cdots,\mathbf{q}_s)(\underline{t}_P).
\end{aligned}$$

De modo análogo, para $\theta_{r+1}\in Im(T)$, temos que existe $h_{\theta_{r+1}}\in\mathbb{C}\{X_1,\cdots,X_{s+1}\}$ tal que $\theta_{r+1}(H_1\rho^{-1}) = h_{\theta_{r+1}}\circ H_s^1\circ(\mathbf{q}_1,\cdots,\mathbf{q}_s)(\underline{t}_P)$.

Tomando $H_2 = (u_1^n,\cdots,u_s^n,S_s^2(\underline{u}))$ com

$$\begin{aligned}
S_s^2(\underline{u}) &= S_s^1((\mathbf{q}_1,\cdots,\mathbf{q}_s)(\underline{u})) + \\
&\quad +S_s^1((\mathbf{q}_1,\cdots,\mathbf{q}_s)(\underline{u}))h_{\epsilon_{r+1}}(H_s^1((\mathbf{q}_1,\cdots,\mathbf{q}_s)(\underline{u}))) + \\
&\quad +((\underline{\mathbf{q}}(\underline{u}))^{n\alpha}h_{\theta_{r+1}}(H_s^1((\mathbf{q}_1,\cdots,\mathbf{q}_s)(\underline{u})))),
\end{aligned}$$

temos que

$$S_s^2(T_P(\underline{u})) = \sigma_{r+1}H_r^1\rho^{-1} = S_r^2(\underline{t}) = S_s^2(T_P(u)),$$

ou seja, temos que H_s^2 é a hipersuperfície quase ordinária tal que $H_s^2 \underset{P}{\rightsquigarrow} H_r^2$ através do homomorfismo de $\mathbb{C}$-álgebras $T_P:\mathbb{C}\{u_1,\cdots,u_s\}\to\mathbb{C}\{t_1,\cdots,t_r\}$ dado por $T_P(u_i) = t_{\alpha_{i-1}+1}\cdots t_{\alpha_i} = \underline{t}_{\alpha_i}$, para todo $i=1,\cdots,s$.

Resta verificar a relação entre H_s^1 e H_s^2.

Denotando

$$\rho_s^{-1} := \mathbf{q} = (\mathbf{q}_1,\cdots,\mathbf{q}_s)(\underline{u}):\mathbb{C}^s\longrightarrow\mathbb{C}^s \ \text{ e } \ \mathbf{q}' = (\mathbf{q}_1',\cdots,\mathbf{q}_s')(\underline{u}):\mathbb{C}^s\longrightarrow\mathbb{C}^s,$$

podemos escrever

$$H_s^2 = \left(u_1^n,\cdots,u_s^n,S_s^1(\rho_s^{-1}) + S_s^1(\rho_s^{-1})h_{\epsilon_{r+1}}(H_s^1(\rho_s^{-1})) + (\rho_s^{-1})^{n\alpha}h_{\theta_{r+1}}(H_s^1(\rho_s^{-1}))\right).$$

Defina $\sigma_s(\underline{X},X_{s+1}) = (X_1+P_s^1,\cdots,X_s+P_s^s,X_{s+1}+P_s^{s+1})$ onde $P_s^{s+1} = X_{s+1}h_{\epsilon_{r+1}} + \underline{X}^\alpha h_{\theta_{r+1}}\in\mathcal{M}_{s+1}^2$ e $P_s^i = X_i g_{\alpha_i}'\in\mathcal{M}_{s+1}^2$, g_{α_i}' como em (3.11).

Finalmente, com tal mudança (σ_s,ρ_s), temos

$$\begin{aligned}
\sigma_s H_s^1\rho_s^{-1} &= \sigma_s((\rho_s^{-1})_1^n,\cdots,(\rho_s^{-1})_s^n,S_s^1(\rho_s^{-1})) \\
&= ((\rho_s^{-1})_1^n + P_s^1(H_s^1\rho_s^{-1}),\cdots,(\rho_s^{-1})_s^n + P_s^s(H_s^1\rho_s^{-1}), \\
&\quad S_s^1(\rho_s^{-1}) + S_s^1(\rho_s^{-1})h_{\epsilon_{r+1}}(H_s^1(\rho_s^{-1})) + \underline{X}^{n\alpha}(\rho_s^{-1})h_{\theta_{r+1}}(H_s^1(\rho_s^{-1}))) \\
&= (u_1^n,\cdots,u_s^n,S_s^2(\underline{u})) \\
&= H_s^2.
\end{aligned}$$

De fato, a conclusão sobre a última coordenada segue direto da definição de H_s^2. Para as s primeiras coordenadas temos

$$\begin{aligned}
\rho_i((\rho^{-1})_1, \cdots, (\rho^{-1})_r) = t_i \;\; &\Rightarrow \;\; (\rho_{\alpha_{i-1}+1} \cdots \rho_{\alpha_i})((\rho^{-1})_1, \cdots, (\rho^{-1})_r) = t_{\alpha_{i-1}+1} \cdots t_{\alpha_i} \\
&\Rightarrow \;\; \mathbf{q}'_i(\underline{(\rho^{-1})}_P) = \underline{t}_{\alpha_i} \\
&\Rightarrow \;\; \mathbf{q}'_i(\mathbf{q}_1(\underline{t}_P), \cdots, \mathbf{q}_s(\underline{t}_P)) = \underline{t}_{\alpha_i} \\
&\Rightarrow \;\; \mathbf{q}'_i(\mathbf{q}(\underline{u})) = u_i.
\end{aligned}$$

Deste modo,

$$\begin{aligned}
\mathbf{q}' \circ \mathbf{q}(u_1, \cdots, u_s) &= (\mathbf{q}'_1 \circ \mathbf{q}(\underline{u}), \cdots, \mathbf{q}'_s \circ \mathbf{q}(\underline{u})) \\
&= (u_1, \cdots, u_s)
\end{aligned}$$

e portanto $\mathbf{q}' = \mathbf{q}^{-1}$. Assim,

$$\begin{aligned}
(u_1, \cdots, u_s) &= \mathbf{q}'(\mathbf{q}(u_1, \cdots, u_s)) \\
&= \mathbf{q}'(\rho_s^{-1}) \\
&= (\mathbf{q}_1(\rho_s^{-1}), \cdots, \mathbf{q}_s(\rho_s^{-1})) \\
&= (\cdots, (\rho_s^{-1})_i \left(1 + g'_{\alpha_i}(H_s^1(\rho_s^{-1}))\right)^{\frac{1}{n}}, \cdots) \\
&= (\cdots, (\rho_s^{-1})_i \left(1 + \frac{(\rho_s^{-1})_i^n \cdot g'_{\alpha_i}(H_s^1(\rho_s^{-1}))}{(\rho_s^{-1})_i^n}\right)^{\frac{1}{n}}, \cdots) \\
&= (\cdots, \left((\rho_s^{-1})_i^n + P_s^i(H_s^1(\rho_s^{-1}))\right)^{\frac{1}{n}}, \cdots).
\end{aligned}$$

Comparando as coordenadas e elevando ambos os lados de cada equação à n-ésima potência, obtemos $u_i^n = (\rho_s^{-1})_i^n + P_s^i(H_s^1 \rho_s^{-1})$ para todo $i = 1, \cdots, s$. Logo, $H_s^1 \underset{\mathcal{G}}{\sim} H_s^2$ e temos o diagrama

$$\begin{array}{ccc}
H_s^1 & \underset{P}{\rightsquigarrow} & H_r^1 \\
(\sigma_s, \rho_s) \downarrow & & \downarrow (\sigma, \rho) \\
H_s^2 & \underset{P}{\rightsquigarrow} & H_r^2.
\end{array}$$

Temos assim, o seguinte resultado:

Teorema 3.16. *Seja $H_s \underset{P}{\rightsquigarrow} H_r$ como na Definição 3.1. Se $(\sigma, \rho) \in \mathcal{A}'$ como em (3.9), então existe H'_s h.q.o. tal que $H'_s \rightsquigarrow \sigma H_r \rho^{-1}$. Além disto, temos que $H_s \underset{\mathcal{G}}{\sim} H'_s$.*

A construção abordada neste capítulo nos dá um modo de descrever uma h.q.o. H_r em $\mathbb{C}^{r+1}$ por meio de uma h.q.o. H_s em $\mathbb{C}^{s+1}$ com $s \leq r$. Vimos que os invariantes topológicos de H_r são totalmente determinados pelos invariantes topológicos de H_s. Esperamos, em projetos futuros, explorar ainda mais tal construção na direção de compreender aspectos geométricos e analíticos de H_r por meio das informações de H_s.

Capítulo 4

Sobre a classificação analítica de uma h.q.o.

A classificação analítica de singularidades, mesmo no caso isolado, não é um problema fácil. O caso mais natural a ser considerado, curvas planas, foi resolvido recentemente (veja [13]). Os passos seguintes: curvas espaciais, superfícies, etc; ainda apresentam obstáculos a serem superados.

O caso de singularidades não isoladas revela desafios ainda maiores pois os invariantes são pouco conhecidos e, aqueles que o são, em geral não fornecem muita informação relevante.

No caso de uma h.q.o. dada por $f \in \mathbb{C}\{X_1, \cdots, X_{r+1}\}$, exceto para o caso em que $r = 1$, isto é, curva plana, ou $r = 2$ e a superfície é normal[1], os invariantes clássicos como o número de Milnor $\mu_f = dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathbb{C}\{X_1, \cdots, X_r\}}{(f_{X_1}, \cdots, f_{X_{r+1}})}$ e o número de Tjurina $\tau_f = dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathbb{C}\{X_1, \cdots, X_r\}}{(f, f_{X_1}, \cdots, f_{X_{r+1}})}$ são $\mu_f = \tau_f = \infty$, não permitindo que possamos utilizá-los para estratificar o problema da classificação analítica.

Este capítulo tem como objetivo dar um primeiro passo na questão da equivalência analítica de superfícies quase ordinárias. Assim como Lipman procedeu ao estudo topológico inicialmente para superfícies (ver [17]) e generalizou o método, juntamente com Gau (ver [5] e [18]), esperamos que, em projetos futuros, possamos estender nosso estudo para hipersuperfícies em $\mathbb{C}^{r+1}$.

Para tanto, retomamos o conceito de expoentes generalizados de Zariski, introduzido em [20], e mostramos que tais expoentes são invariantes analíticos. Utilizando tal invariante, procedemos à classificação analítica de superfícies quase ordinárias com gênero 1

[1] Se uma superfície quase ordinária é normal, então ela é analiticamente equivalente a uma h.q.o. dada por uma parametrização da forma $(t_1^n, t_2^n, t_1 t_2)$, veja [18].

que são *quase simples*. O termo *quase simples* aqui não é sinônimo de fácil, mas sim no sentido de que, para uma classe topológica fixa, há uma quantidade enumerável de classes analíticas distintas. Uma abordagem desta natureza foi realizada por Bruce e Gaffney em [3] para o caso de curvas planas, em que curvas simples foram caracterizadas, isto é, casos em que para uma classe topológica fixa há apenas um número finito de classes analíticas distintas.

4.1 Expoentes generalizados de Zariski

Como mencionamos na introdução deste capítulo, descrever invariantes analíticos numéricos para h.q.o. não é uma tarefa fácil. O principal objetivo desta seção é apresentar um tal invariante.

Iniciemos identificando alguns termos de uma parametrização de h.q.o. que podem ser eliminados por mudanças de coordenadas.

Seja $H = (t_1^n, \cdots, t_r^n, S(\underline{t}))$ uma h.q.o. normalizada com $S(\underline{t}) = t^{\lambda_1} + \sum_{\underline{\delta} \succ \lambda_1} b_{\underline{\delta}} t^{\underline{\delta}}$. Temos que a derivada de S com respeito à t_j é dada por

$$S_{t_j} = \lambda_{1j} t^{\lambda_1 - \theta_j} + \sum_{\underline{\delta} \succ \lambda_1} \delta_j b_{\underline{\delta}} t^{\underline{\delta} - \theta_j} \ \text{ e } \ S_j := t_j S_{t_j} = \lambda_{1j} t^{\lambda_1} + \sum_{\underline{\delta} \succ \lambda_1} \delta_j b_{\underline{\delta}} t^{\underline{\delta}}$$

com $\theta_j = (0, \cdots, 0, 1, 0, \cdots, 0)$. Assim, se $\lambda_{1j} \neq 0$, então S_j e S_{t_j} admitem expoente dominante. Por comodidade denotemos também $S_{r+1} = S$.

Proposição 4.1. *Dada H como acima e $\underline{\delta} \in \mathbb{N}^r$ tal que $\underline{\delta} \succ \lambda_1$. Se*

$$\underline{\delta} \in \Gamma \bigcup_{i=1}^{r} (\Gamma^* + \mathcal{V}(S_i)) \bigcup_{i=1, \lambda_{1i} \geq n}^{r} (\Gamma + 2\lambda_1 - \nu_i), \tag{4.1}$$

onde $\Gamma^* = \Gamma \setminus \{\underline{0}\}$, então podemos eliminar de H o termo com expoente $\underline{\delta}$ alterando e, eventualmente, ter $t_1^{\beta_1} \cdots t_r^{\beta_r}$ de H com $\underline{\beta} \succ \underline{\delta}$.

Demonstração. Considere uma mudança de coordenadas $(\sigma, \rho) \in \mathcal{G}$ que mantém H normalizada, ou seja,

$$\begin{aligned} \rho : \ \mathbb{C}^r &\longrightarrow \mathbb{C}^r \\ \underline{t} &\longrightarrow (\rho_1(\underline{t}), \cdots, \rho_r(\underline{t})) \end{aligned}$$

com $\rho_j = t_j \left(1 + \frac{P_j(H)}{t_j^n}\right)^{\frac{1}{n}}$, $P_j = X_j \epsilon_j + X_{r+1}(b_j + \eta_j)$, $\epsilon_j, \eta_j \in \mathcal{M}_{r+1}$, $b_j \in \mathbb{C}$ e

$$\begin{aligned} \sigma : \quad \mathbb{C}^{r+1} &\longrightarrow \mathbb{C}^{r+1} \\ (\underline{X}, X_{r+1}) &\longrightarrow (\sigma_1(\underline{X}, X_{r+1}), \cdots, \sigma_{r+1}(\underline{X}, X_{r+1})) \end{aligned}$$

com $\sigma_i = X_i + P_i$, para todo $i = 1, \cdots, r+1$, $P_{r+1} = X_{r+1}\epsilon_{r+1} + \underline{X}^{\alpha}\eta_{r+1}$, $\epsilon_{r+1} \in \mathcal{M}_{r+1}$, $\eta_{r+1} \in \mathbb{C}\{\underline{X}, X_{r+1}\}$, $b_i + \eta_i = 0$ se $\lambda_{1i} < n$ e $\underline{\alpha} = (\lceil \frac{\lambda_{11}}{n} \rceil, \cdots, \lceil \frac{\lambda_{1r}}{n} \rceil)$(veja Teorema 1.35). Note que temos $|\underline{\alpha}| \geq 2$, o que implica $P_{r+1} \in \mathcal{M}_{r+1}^2$. Mais ainda, todo elemento de $\mathcal{M}_{r+1}^2$ cujo expoente dominante supere λ_1 pode ser considerado como parte de P_{r+1}.

Expandindo ρ_j^{-1}, obtemos $\rho_j^{-1}(\underline{t}) = t_j \left(1 - \frac{1}{n} \cdot \frac{P_j(H)}{t_j^n} + \cdots \right)$ e, deste modo, agindo a mudança (σ, ρ) em H temos

$$\begin{aligned} &\sigma_i(H\rho^{-1})(\underline{t}) = t_i^n, \ 1 \leq i \leq r \\ &\sigma_{r+1}(H\rho^{-1})(\underline{t}) = S(\underline{t}) - \sum_{i=1}^{r} \frac{P_i(H)}{n t_i^{n-1}} S_{t_i} + P_{r+1}(H) + \cdots \end{aligned} \tag{4.2}$$

Note que

$$\frac{P_j(H)}{n t_j^{n-1}} S_{t_j} = \frac{P_j(H)}{n t_j^n} \left(\lambda_{1j} \underline{t}^{\lambda_1} + \sum_{\underline{\delta} \succ \lambda_1} \delta_j b_{\underline{\delta}} \underline{t}^{\underline{\delta}} \right) = \frac{P_j(H)}{n t_j^n} S_j.$$

Lembrando que $S_j = \lambda_{1j} \underline{t}^{\lambda_1} + \sum_{\underline{\delta} \succ \lambda_1} \delta_j b_{\underline{\delta}} \underline{t}^{\underline{\delta}}$ e $S_{r+1} = S$, temos de (4.2) que, se S_j tem expoente dominante $\mathcal{V}(S_j)$, então podemos, escolhendo $P_i = 0$ para todo $i \neq j$ e P_j conveniente, eliminar o termo de expoente

$$\mathcal{V}(P_j) + \mathcal{V}(S_j) - \nu_j, \ \ j = 1, \cdots, r.$$

Se $P_i = 0$ para todo $i = 1, \cdots, r$, como $P_{r+1} \in \mathcal{M}_{r+1}^2$, teremos $\mathcal{V}(P_{r+1}) \in \mathcal{V}(\mathcal{M}_{r+1}^2)$.

Agora, para $1 \leq i \leq r$, temos

1. Se $\lambda_{1i} < n$, então $b_i + \eta_i = 0$ e $\mathcal{V}(P_i) \in \nu_i + \mathcal{V}(\mathcal{M}_{r+1})$.

2. Se $\lambda_{1i} \geq n$, então, além de $\mathcal{V}(P_i) \in \nu_i + \mathcal{V}(\mathcal{M}_{r+1})$, podemos ter $\mathcal{V}(P_i) = \lambda_1$, escolhendo $\epsilon_i = 0, b_i \neq 0$, e $\mathcal{V}(P_i) \in \lambda_1 + \mathcal{V}(\mathcal{M}_{r+1})$, escolhendo $\epsilon_i = b_i = 0$.

Uma vez que $\mathcal{V}(\mathcal{M}_{r+1}) = \Gamma^* = \Gamma \setminus \{\underline{0}\}$, temos que, para $1 \leq i \leq r$, podemos eliminar termos com expoente em

$$\mathcal{V}(P_i) + \mathcal{V}(S_i) - \nu_i = \nu_i + \mathcal{V}(\mathcal{M}_{r+1}) + \mathcal{V}(S_i) - \nu_i = \mathcal{V}(\mathcal{M}_{r+1}) + \mathcal{V}(S_i) = \Gamma^* + \mathcal{V}(S_i)$$

e, se $\lambda_{1i} \geq n$, também podemos eliminar termos com expoentes em

$$(\lambda_1 + \mathcal{V}(S_i) - \nu_i) \cup (\lambda_1 + \mathcal{V}(\mathcal{M}_{r+1}) + \mathcal{V}(S_i) - \nu_i) = \lambda_1 + \Gamma + \mathcal{V}(S_i) - \nu_i = \Gamma + 2\lambda_1 - \nu_i$$

uma vez que se $\lambda_{1i} \geq n > 0$, então temos $\mathcal{V}(S_i) = \lambda_1$.

Como $P_{r+1} \in \mathcal{M}_{r+1}^2$, isto é, $\mathcal{V}(P_{r+1}) \in \mathcal{V}(\mathcal{M}_{r+1}^2)$, podemos eliminar elementos em

$$\mathcal{V}(\mathcal{M}_{r+1}^2) \bigcup_{i=1}^{r} (\Gamma^* + \mathcal{V}(S_i))$$

e, se $\lambda_{1i} \geq n$, podemos, além da união acima, também eliminar elementos em

$$\Gamma + 2\lambda_1 - \nu_i.$$

Uma vez que estamos considerando termos em H com expoentes que superam λ_1, e tais expoentes correspondem a elementos de Γ que pertencem a $\mathcal{V}(\mathcal{M}_{r+1}^2)$, podemos trocar $\mathcal{V}(\mathcal{M}_{r+1}^2)$ por Γ, já que $\Gamma \setminus \mathcal{V}(\mathcal{M}_{r+1}^2) = \{0, \nu_1, \cdots, \nu_r, \nu_{r+1} = \lambda_1\}$. $\square$

Observação 4.2. *Se $\mathcal{V}(S_i)$ não existir, isto é, S_i não tiver expoente dominante, não consideraremos tal contribuição na união apresentada na proposição acima.*

Seja $H = (t_1^n, \cdots, t_r^n, S(\underline{t}))$ uma parametrização normalizada com semigrupo $\Gamma_H = \langle \nu_1, \cdots, \nu_r, \nu_{r+1}, \cdots, \nu_{r+g} \rangle$. Em virtude da proposição anterior, podemos supor (e sempre o faremos) que H é (analiticamente) equivalente a uma h.q.o. sem que figurem termos com expoentes em (4.1).

Recordemos algo sobre o conjunto sobre $\Lambda_{\mathcal{N}}(H)$.

Considere as r-formas $\omega_i = dX_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dX_i} \wedge \cdots \wedge dX_{r+1}$ com $i = 1, \cdots, r+1$. Temos

$$H^*(\omega_{r+1}) = n^r t^{\underline{(n-1)}} dt_1 \wedge \cdots \wedge dt_r$$
$$H^*(\omega_i) = (-1)^{r-i} n^{r-1} t_1^{n-1} \cdots \widehat{t_i^{n-1}} \cdots t_r^{n-1} S_{t_i} dt_1 \wedge \cdots \wedge dt_r, \text{ para todo } i = 1, \cdots, r.$$

Note que $\frac{H^*(\omega_{r+1})}{dt_1 \wedge \cdots \wedge dt_r} = n^r t^{\underline{(n-1)}}$ tem expoente dominante $(\underline{n})$, mas $\frac{H^*(\omega_i)}{dt_1 \wedge \cdots \wedge dt_r}$ não necessariamente possui expoente dominante. No entanto, se tivermos

$$\mathcal{V}(\omega_i) := \mathcal{V}_H \left(\frac{H^*(\omega_i)}{dt_1 \wedge \cdots \wedge dt_r} \right) = \mathcal{V}(S_i) + (\underline{n}) - \nu_i \in \Lambda_{\mathcal{D}}(H), \ 1 \leq i \leq r,$$

como $S_{r+1} = S$ e $\mathcal{V}(S) = \lambda_1 = \nu_{r+1}$, podemos unificar a expressão acima escrevendo:

$$\mathcal{V}(\omega_i) := \mathcal{V}_H \left(\frac{H^*(\omega_i)}{dt_1 \wedge \cdots \wedge dt_r} \right) = \mathcal{V}(S_i) + (\underline{n}) - \nu_i \in \Lambda_{\mathcal{D}}(H), \ 1 \leq i \leq r+1.$$

Além disto, como $\Gamma_H + \Lambda_{\mathcal{D}}(H) \subset \Lambda_{\mathcal{D}}(H)$, temos

$$\Gamma_H + (\underline{n}) - \nu_i + \mathcal{V}(S_i) \subset \Lambda_{\mathcal{D}}(H) \subset \Lambda_{\mathcal{N}}(H), \ 1 \leq i \leq r+1.$$

Em particular, como $\lambda_{11} \neq 0$, isto é, S_1 tem sempre expoente dominante λ_1, temos

$$\mathcal{V}(\omega_{r+1}) = (\underline{n}) \text{ e } \mathcal{V}(\omega_1) = \lambda_1 + (\underline{n}) - \nu_1.$$

No entanto, para os demais índices não sabemos se temos expoente dominante e, caso tenhamos, qual seria tal expoente sem levar em conta seus coeficientes e expoentes.

Observe que os vértices do polígono de Newton de $\frac{H^*(\omega_i)}{dt_1\wedge\cdots\wedge dt_r}$ são precisamente os vértices do polígono de Newton de S_i somados com $(\underline{n})-\nu_i$, isto é,

$$\mathcal{V}_{\mathcal{N}}\left(\frac{H^*(\omega_i)}{dt_1\wedge\cdots\wedge dt_r}\right)=\mathcal{V}_{\mathcal{N}}(S_i)+(\underline{n})-\nu_i.$$

Analisemos a r-forma $\tilde{\omega}=\sum_{i=1}^{r+1}a_iX_idX_1\wedge\cdots\wedge\widehat{dX_i}\wedge\cdots\wedge dX_{r+1}$ com $a_i\in\mathbb{C}$.

Dada $H=(t_1^n,\cdots,t_r^n,S(\underline{t}))$ com $S(\underline{t})=t^{\lambda_1}+\sum_{\underline{\beta}\succ\lambda_1}b_{\underline{\beta}}t^{\underline{\beta}}$ temos que

$$H^*(\tilde{\omega})=n^{r-1}t^{(\underline{n-1})}\left[\left(na_{r+1}+\sum_{i=1}^{r}(-1)^{r-i}a_i\lambda_{1i}\right)t^{\lambda_1}+\sum_{\underline{\beta}\succ\lambda_1}\left(na_{r+1}+\sum_{i=1}^{r}(-1)^{r-i}a_i\beta_i\right)b_{\underline{\beta}}t^{\underline{\beta}}\right].$$

Se $na_{r+1}+\sum_{i=1}^{r}(-1)^{r-i}a_i\lambda_{1i}\neq 0$, então $\tilde{\omega}$ não fornece novas contribuições para $\Lambda_{\mathcal{D}}$ e $\Lambda_{\mathcal{N}}$, pois teríamos $\mathcal{V}_H(\tilde{\omega})=\lambda_1$. Deste modo, vamos escolher a_{r+1} de modo a termos $\mathcal{V}_H(\tilde{\omega})\neq\lambda_1$. Para isto, basta considerar $na_{r+1}=-\sum_{i=1}^{r}(-1)^{r-i}a_i\lambda_{1i}$ e assim

$$H^*(\tilde{\omega})=n^{r-1}t^{(\underline{n})}\sum_{\underline{\beta}\succ\lambda_1}\left(\sum_{i=1}^{r}(-1)^{r-i}(\beta_i-\lambda_{1i})a_i\right)b_{\underline{\beta}}t^{\underline{\beta}}$$

com $\beta_i-\lambda_{1i}$ não todos nulos.

Note que os expoentes de $H^*(\tilde{\omega})$ têm ligação com os expoentes $S(\underline{t})-t^{\lambda_1}$. De fato, denotando $R=S(\underline{t})-t^{\lambda_1}$ e escrevendo

$$R=\sum_{i=1}^{j}t^{\underline{\delta}_i}u_i(\underline{t})$$

tal que $\underline{\delta}_1,\cdots,\underline{\delta}_j$ são elementos minimais dos expoentes em $S(\underline{t})-t^{\lambda_1}$ com respeito à ordem parcial $\prec$ e $u_i(\underline{0})\neq 0$, temos que

$$\mathcal{V}_{\mathcal{N}}(R)\subseteq\{\underline{\delta}_1,\cdots,\underline{\delta}_j\}:=min_{\prec}(R).$$

Em particular, para uma escolha genérica de $a_1,\cdots,a_r$, neste caso, genérico significa evitar a solução do sistema $\sum_{i=1}^{r}(-1)^{r-i}(\delta_{li}-\lambda_{1i})a_i=0$, $l=1,\cdots,j$, temos que

$$\mathcal{V}_{\mathcal{N}}(\tilde{\omega})=\mathcal{V}_{\mathcal{N}}(R)+(\underline{n})\subseteq\{\underline{\delta}_1,\cdots,\underline{\delta}_j\}+(\underline{n}).$$

Tais considerações foram feitas por Zariski em [22] para curvas planas. Motivados por tais aspectos definimos os expoentes generalizados de Zariski.

Definição 4.3. *Seja* $H = (t_1^n, \cdots, t_r^n, S(\underline{t}))$ *e* $R = S(\underline{t}) - t^{\lambda_1}$ *como acima, com termos de expoentes não pertencentes a* $\Gamma \bigcup_{i=1}^{r} (\Gamma^* + \mathcal{V}(S_i)) \bigcup_{i=1, \lambda_{1i} \geq n}^{r} (\Gamma + 2\lambda_1 - \nu_i)$. *Os expoentes generalizados de Zariski são os elementos*

$$E_{\mathcal{Z}}(H) = min_{\prec}(R).$$

Antes de explorarmos propriedades dos expoentes generalizados de Zarisk, vejamos algumas propriedades relacionadas a r-formas dadas de modo particular.

Observação 4.4. *Lembremos que, da Proposição 1.38, se* $\omega \in \Omega_{\mathcal{O}}^r$ *é tal que* $\omega = \sum_{i=1}^{r+1} (-1)^{r+1-i} P_i dX_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dX_i} \wedge \cdots \wedge dX_{r+1}$ *com* P_i *satisfazendo as condições descritas no Teorema 1.35, então, caso* ω *tenha expoente dominante* $\mathcal{V}_H(\omega) = \underline{\delta}$, *podemos eliminar o termo com expoente* $\underline{\delta} - (\underline{n})$, *alterando, eventualmente, termos que superem* $\underline{\delta} - (\underline{n})$.

Proposição 4.5. *Sejam* $H = (t_1^n, \cdots, t_r^n, t^{\lambda_1} + \sum_{j=1}^{k} b_j t^{\underline{\delta}^j} u_j)$ *uma parametrização de uma h.q.o. com* $u_j(\underline{0}) = 1$, $\omega = \sum_{i=1}^{r} a_i X_i dX_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dX_i} \wedge \cdots \wedge dX_{r+1}$ *e* $a_{r+1} = -\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{r} \lambda_{1i} a_i$. *Existem* $a_1, \cdots, a_r \in \mathbb{C}$ *tais que* ω *tem expoente dominante* $\underline{\delta}^j + (\underline{n})$ *para todo* $j = 1, \cdots, k$ *se, e somente, se* $\{\underline{\delta}^j - \lambda_1, j = 1, \cdots, k\}$ *for L.I.. Em particular, se* $\{\underline{\delta}^j - \lambda_1, j = 1, \cdots, k\}$ *for L.I., então podemos eliminar da parametrização expoentes em* $\Gamma^* + \underline{\delta}^j$.

Demonstração. Para $i = 1, \cdots, r$, temos

$$H^*(X_i dX_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dX_i} \wedge \cdots \wedge dX_{r+1}) = (-1)^{r-i} n^{r-1} t^{\underline{(n-1)}} \left(\lambda_{1i} t^{\lambda_1} + \sum_{j=1}^{k} b_j \delta_i^j t^{\underline{\delta}^j} (u_j + \frac{1}{\delta_i^j} t_i (u_j)_i) \right)$$

e, para $i = r + 1$,

$$H^*(X_{r+1} dX_1 \wedge \cdots \wedge \cdots \wedge dX_r) = n^r t^{\underline{(n-1)}} \left(t^{\lambda_1} + \sum_{j=1}^{k} b_j t^{\underline{\delta}^j} u_j \right).$$

Assim,

$$H^*(\omega) = n^{r-1} t^{\underline{(n-1)}} \left[\left(\sum_{i=1}^{r} (-1)^{r-i} \lambda_{1i} a_i + n a_{r+1} \right) t^{\lambda_1} + \sum_{j=1}^{k} b_j \left(\sum_{i=1}^{r} (-1)^{r-i} \delta_i^j a_i + n a_{r+1} \right) t^{\underline{\delta}^j} v_j \right]$$

com $v_j = u_j \cdot \left(1 + \sum_{i=1}^{r} \frac{t_i (u_j)_i}{\delta_i^j u_j} \right)$ uma unidade mônica.

Uma vez que estamos supondo $a_{r+1} = -\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{r} (-1)^{r-i} \lambda_{1i} a_i$, temos

$$H^*(\omega) = n^{r-1} t^{\underline{(n-1)}} \sum_{j=1}^{k} b_j \left(\sum_{i=1}^{r} (-1)^{r-i} (\delta_i^j - \lambda_{1i}) a_i \right) t^{\underline{\delta}^j} v_j.$$

Deste modo, existem $a_1, \cdots, a_r \in \mathbb{C}$ tais que ω tem expoente dominante $\underline{\delta}^j + (\underline{n})$, para todo $j = 1, \cdots, k$, se, e somente se, para todo $j = 1, \cdots, k$, o sistema a seguir tem solução:

$$\begin{aligned}
\textstyle\sum_{i=1}^{r}(-1)^{r-i}(\delta_i^1 - \lambda_{1i})a_i &= 0\\
\textstyle\sum_{i=1}^{r}(-1)^{r-i}(\delta_i^2 - \lambda_{1i})a_i &= 0\\
&\vdots\\
\textstyle\sum_{i=1}^{r}(-1)^{r-i}(\delta_i^j - \lambda_{1i})a_i &= 1\\
&\vdots\\
\textstyle\sum_{i=1}^{r}(-1)^{r-i}(\delta_i^k - \lambda_{1i})a_i &= 0.
\end{aligned}$$

Note que na j-ésima equação do sistema bastaria que o termo independente fosse não nulo.

Agora veja que, para tal sistema ter solução, devemos ter $k \leq r$ e o posto da matriz

$$M = \begin{bmatrix}
(-1)^{r-1}(\delta_1^1 - \lambda_{11}) & (-1)^{r-2}(\delta_2^1 - \lambda_{12}) & \cdots & (-1)^{r-r}(\delta_r^1 - \lambda_{1r})\\
(-1)^{r-1}(\delta_1^2 - \lambda_{11}) & (-1)^{r-2}(\delta_2^2 - \lambda_{12}) & \cdots & (-1)^{r-r}(\delta_r^2 - \lambda_{1r})\\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\
(-1)^{r-1}(\delta_1^j - \lambda_{11}) & (-1)^{r-2}(\delta_2^j - \lambda_{12}) & \cdots & (-1)^{r-r}(\delta_r^j - \lambda_{1r})\\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\
(-1)^{r-1}(\delta_1^k - \lambda_{11}) & (-1)^{r-2}(\delta_2^k - \lambda_{12}) & \cdots & (-1)^{r-r}(\delta_r^k - \lambda_{1r})
\end{bmatrix}$$

seja k. Para isso, deve existir uma matriz N, quadrada de ordem k, cujas colunas sejam dadas por k colunas da matriz anterior e que seja inversível. Em particular, devemos ter $det(N) \neq 0$.

Sem perda de generalidade, podemos supor que N seja obtida pelas k primeiras colunas de M. Como

$$det(N) \neq 0 \iff det \begin{bmatrix}
\delta_1^1 - \lambda_{11} & \delta_2^1 - \lambda_{12} & \cdots & \delta_k^1 - \lambda_{1k}\\
\delta_1^2 - \lambda_{11} & \delta_2^2 - \lambda_{12} & \cdots & \delta_k^2 - \lambda_{1k}\\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\
\delta_1^j - \lambda_{11} & \delta_2^j - \lambda_{12} & \cdots & \delta_k^j - \lambda_{1k}\\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\
\delta_1^k - \lambda_{11} & \delta_2^k - \lambda_{12} & \cdots & \delta_k^k - \lambda_{1k}
\end{bmatrix} \neq 0,$$

temos que tal condição é equivalente a afirmar que as linhas da matriz N são L.I., ou seja, $\{\underline{\delta}^j - \lambda_1, j = 1, \cdots, k\}$ é L.I.

Finalmente, assuma que $\{\underline{\delta}^j - \lambda_1, j = 1, \cdots, k\}$ seja L.I. e considere $\underline{\gamma} + \underline{\delta}^j \in \Gamma^* + \underline{\delta}^j$, para algum $j = 1, \cdots, k$. Como vimos acima, podemos supor $\mathcal{V}_H(\omega) = \underline{\delta}^j + (\underline{n})$ e, além disto, sabemos que existe $h \in \mathcal{M}_{r+1}$ tal que $\mathcal{V}(h) = \underline{\gamma}$. Portanto, $\underline{\gamma} + \underline{\delta}^j + (\underline{n})$ é expoente dominante de $h \cdot \omega$. Pelo comentado na Observação 4.4, podemos eliminar $\underline{\gamma}+\underline{\delta}^j$ da parametrização, sem alterar termos que precedem $\underline{\gamma} + \underline{\delta}^j$ com respeito à nossa ordem parcial considerada. □

Como consequência do resultado acima, podemos destacar:

Corolário 4.6. *Se H é parametrização de uma h.q.o. dada por*

$$H = \left(t_1^n, \cdots, t_r^n, t^{\lambda_1} + \sum_{j=1}^{k} a_j t^{\underline{\delta}^j} (1 + \sum_{\underline{\gamma} \in \Gamma^*} a_{j\underline{\gamma}} t^{\underline{\gamma}}) \right),$$

com $a_j \neq 0$ e $\{\underline{\delta}^j - \lambda_1, j = 1, \cdots, k\}$ e um conjunto L.I., então

$$H \underset{\mathcal{G}}{\sim} (t_1^n, \cdots, t_r^n, t^{\lambda_1} + \sum_{j=1}^{k} t^{\underline{\delta}^j}).$$

Demonstração. Segue da Proposição 4.5 que podemos eliminar da parametrização todos os expoentes da forma $\underline{\delta}^j + \Gamma^*$. Além disto, pela Proposição 1.37, podemos obter uma parametrização equivalente com os coeficientes de $\underline{\delta}^j$ normalizados, isto é,

$$H \underset{\mathcal{G}}{\sim} (t_1^n, \cdots, t_r^n, t^{\lambda_1} + \sum_{j=1}^{k} t^{\underline{\delta}^j}).$$

□

O próximo resultado nos dá novos invariantes analíticos numéricos para h.q.o. dadas por parametrizações normalizadas e evidenciam a relevância dos expoentes generalizados de Zariski.

Teorema 4.7. *Os expoentes generalizados Zariski são invariantes analíticos.*

Demonstração. Sejam H_1 e H_2 duas h.q.o. normalizadas em $\mathbb{C}^{r+1}$ com mesmo semigrupo Γ e mesmos expoentes generalizados de Zariski $\underline{\delta}^j \in \mathbb{N}^r$ dadas por

$$H_1 = (t_1^n, \cdots, t_r^n, t^{\lambda_1} + \sum_j a_j t^{\underline{\delta}^j} u_j) \text{ e } H_2 = (t_1^n, \cdots, t_r^n, t^{\lambda_1} + \sum_j b_j t^{\underline{\delta}^j} v_j),$$

onde $u_j(\underline{0}) = v_j(\underline{0}) = 1$.

Denotemos $S_1 = t^{\lambda_1} + \sum_j a_j t^{\underline{\delta}^j} u_j$ e $S_2 = t^{\lambda_1} + \sum_j b_j t^{\underline{\delta}^j} v_j$.

Suponha que $H_1 \underset{\mathcal{G}}{\sim} H_2$, isto é, existe $(\sigma, \rho) \in \mathcal{G}$ tal que $\sigma H_1 \rho^{-1} = H_2$ de modo que

$$\begin{aligned} \rho: \ \mathbb{C}^r &\longrightarrow \mathbb{C}^r \\ \underline{t} &\longrightarrow (\rho_1(\underline{t}), \cdots, \rho_r(\underline{t})) \end{aligned}$$

com $\rho_j = t_j \left(1 + \frac{P_j(H_1)}{t_j^n}\right)^{\frac{1}{n}}$, $P_j = X_j \epsilon_j + X_{r+1}(b_j + \eta_j)$, $\epsilon_j, \eta_j \in \mathcal{M}_{r+1}$, $b_j \in \mathbb{C}$ e

$$\begin{aligned} \sigma: \quad \mathbb{C}^{r+1} &\longrightarrow \mathbb{C}^{r+1} \\ (\underline{X}, X_{r+1}) &\longrightarrow (\sigma_1(\underline{X}, X_{r+1}), \cdots, \sigma_{r+1}(\underline{X}, X_{r+1})) \end{aligned}$$

com $\sigma_i = X_i + P_i$, para todo $i = 1, \cdots, r$, $\sigma_{r+1} = X_{r+1} + P_{r+1}$, $P_{r+1} = X_{r+1}\epsilon_{r+1} + \underline{X}^{\alpha}\eta_{r+1}$, $\epsilon_{r+1} \in \mathcal{M}_{r+1}$, $\eta_{r+1} \in \mathbb{C}\{\underline{X}, X_{r+1}\}$, $b_i + \eta_i = 0$ se $\lambda_{1i} < n$ e $\underline{\alpha} = (\lceil \frac{\lambda_{11}}{n} \rceil, \cdots, \lceil \frac{\lambda_{1r}}{n} \rceil)$.

Como já observamos no Capítulo 3, σ^{-1} e ρ^{-1} se expressam como σ e ρ. Em particular, temos que $(\rho^{-1})_j = t_j \left(1 + \frac{P_j'(H_2)}{t_j^n}\right)^{\frac{1}{n}}$.

Vamos analisar a relação entre os coeficientes dos expoentes generalizados de Zariski e mostrar que $a_j = b_j$ para todo j. Isto nos dará que não há como obter uma parametrização de uma h.q.o. analiticamente equivalente eliminando um expoente generalizados de Zariski, nem sequer com coeficientes distintos.

Como $H_1 \underset{\mathcal{G}}{\sim} H_2$, devemos ter

$$S_2(\underline{t}) = t^{\lambda_1} + \sum_j b_j t^{\underline{\delta}^j} v_j = S_1(\rho^{-1}) + P_{r+1}(H_1 \rho^{-1}). \tag{4.3}$$

Note que

$$(\rho^{-1})_1^{k_1} \cdots (\rho^{-1})_r^{k_r} = t_1^{k_1} \cdots t_r^{k_r} \prod_{i=1}^{r} \left(1 + \frac{P_i'(H_2)}{t_i^n}\right)^{\frac{k_i}{n}} \tag{4.4}$$

e assim,

$$S_1(\rho^{-1}) = t^{\lambda_1} \prod_{i=1}^{r} \left(1 + \frac{P_i'(H_2)}{t_i^n}\right)^{\frac{\lambda_{1i}}{n}} + \sum a_j t^{\underline{\delta}^j} + [\delta] \tag{4.5}$$

em que $[\delta]$ denota termos cujos expoentes pertencem a $\bigcup_j \underline{\delta}^j + \mathbb{N}^r$ e são diferentes de $\underline{\delta}^j$. Tais termos não são necessários para nossa análise.

Veja que se $k \geq 2$ então

$$(S_1(\rho^{-1}))^k = t^{k\lambda_1} \prod_{i=1}^{r} \left(1 + \frac{P_i'(H_2)}{t_i^n}\right)^{\frac{k\lambda_{1i}}{n}} + [\delta]$$

onde

$$\prod_{i=1}^{r}\left(1+\frac{P_i'(H_2)}{t_i^n}\right)^{\frac{k\lambda_{1i}}{n}} = 1+\sum_{i=1}^{r}\frac{k\lambda_{1i}}{n}\frac{P_i'(H_2)}{t_i^n}\left(1+Z_{i,k}(\underline{t})\right) \tag{4.6}$$

com $Z_{i,k}(\underline{0})=0$ e $Z_{i,k}(\underline{t})$ é obtido através de produto de fatores da forma $\frac{P_i'(H_2)}{t_i^n}$.

Por $[\Gamma]$, $[\mathcal{V}(\mathcal{M}_{r+1})]$ e $[\mathcal{V}(\mathcal{M}_{r+1}^2)]$ indicaremos termos com expoentes em Γ, $\mathcal{V}(\mathcal{M})=\Gamma^*$ e $\mathcal{V}(\mathcal{M}_{r+1}^2)$, respectivamente.

Como $P_{r+1}\in\mathcal{M}_{r+1}^2$ temos que

$$P_{r+1}=G_0(\underline{X})+G_1(\underline{X})X_{r+1}+\sum_{i=2}^{\infty}G_i(\underline{X})X_{r+1}^i$$

onde

$$\begin{aligned}
&G_0(H_1\rho^{-1}) \text{ tem expoentes em } [\mathcal{V}(\mathcal{M}_{r+1}^2)] \text{ e } [\delta];\\
&G_1(H_1\rho^{-1}) \text{ tem expoentes em } [\mathcal{V}(\mathcal{M}_{r+1})],\ [\delta] \text{ ou iguais a } \underline{\delta}^j;\\
&G_i(H_1\rho^{-1}), i\geq 2, \text{ tem expoentes em } [\Gamma],\ [\delta] \text{ ou iguais a } \underline{\delta}^j.
\end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}
P_{r+1}(H_1\rho^{-1}) &= [\mathcal{V}(\mathcal{M}_{r+1}^2)]+[\mathcal{V}(\mathcal{M}_{r+1})]\cdot\left(t^{\lambda_1}\prod_{i=1}^{r}\left(1+\frac{P_i'(H_2)}{t_i^n}\right)^{\frac{\lambda_{1i}}{n}}\right)\\
&\quad+\sum_{k=2}^{\infty}[\Gamma]\cdot\left(t^{k\lambda_1}\prod_{i=1}^{r}\left(1+\frac{P_i'(H_2)}{t_i^n}\right)^{\frac{k\lambda_{1i}}{n}}\right)+[\delta],
\end{aligned}$$

e temos de, (4.5) e (4.6), que

$$\begin{aligned}
S_1(\rho^{-1})+P_{r+1}(H_1\rho^{-1}) &= t^{\lambda_1}+\sum_j a_j t^{\underline{\delta}^j}+t^{\lambda_1}\left(\sum_{i=1}^{r}\frac{\lambda_{1i}}{n}\frac{P_i'(H_2)}{t_i^n}\left(1+Z_{i,1}(\underline{t})\right)\right)+[\delta]\\
&\quad+[\mathcal{V}(\mathcal{M}_{r+1}^2)]+t^{\lambda_1}\prod_{i=1}^{r}\frac{\lambda_{1i}}{n}\cdot\frac{P_i'(H_2)}{t_i^n}\cdot\left(1+Z_{i,1}(\underline{t})\right)\cdot[\mathcal{V}(\mathcal{M}_{r+1})]\\
&\quad+\sum_{k=2}^{\infty}t^{\lambda_1}\left(\sum_{i=1}^{r}k\frac{\lambda_{1i}}{n}\cdot\frac{P_i'(H_2)}{t_i^n}\cdot\left(1+Z_{i,k}(\underline{t})\right)\cdot[\mathcal{V}(\mathcal{M}_{r+1})]\right).
\end{aligned}$$

Deste modo, podemos reescrever

$$\begin{aligned}
S_1(\rho^{-1})+P_{r+1}(H_1\rho^{-1}) &= t^{\lambda_1}+\sum_j a_j t^{\underline{\delta}^j}+t^{\lambda_1}\left(\sum_{i=1}^{r}\frac{\lambda_{1i}}{n}\frac{P_i'(H_2)}{t_i^n}\left(1+Y_i(\underline{t})\right)\right)\\
&\quad+[\mathcal{V}(\mathcal{M}_{r+1}^2)]+[\delta]
\end{aligned}$$

com $Y_i(\underline{0}) = 0$.

Segue, de (4.3), que expressão acima deve ser igual a $S_2(\underline{t})$. Assim,

$$\sum_j (b_j - a_j)\underline{t}^{\delta^j} = \underline{t}^{\lambda_1}\left(\sum_{i=1}^{r} \frac{\lambda_{1i}}{n}\frac{P_i'(H_2)}{t_i^n}(1 + Y_i(\underline{t}))\right) + [\mathcal{V}(\mathcal{M}_{r+1}^2)] + [\delta]. \tag{4.7}$$

Se $b_j \neq a_j$ para algum j, então o lado direito de (4.7) deve ter termos com expoentes iguais a δ^j e isto deve ocorrer dentre os termos de

$$t^{\lambda_1}\left(\sum_{i=1}^{r} \frac{\lambda_{1i}}{n}\frac{P_i'(H_2)}{t_i^n}(1 + Y_i(\underline{t}))\right),$$

uma vez que $\delta_j \notin [\mathcal{V}(\mathcal{M}_{r+1}^2)] \subset \Gamma$.

Agora consideremos uma parcela da forma

$$t^{\lambda_1} \cdot \frac{\lambda_{1i}}{n} \cdot \frac{P_i'(H_2)}{t_i^n} \cdot (1 + Y_i(\underline{t})) \tag{4.8}$$

em que podemos assumir $\lambda_{1i} \neq 0$.

Se $\lambda_{1i} < n$, então $P_i' = X_i\epsilon_i$ com $\epsilon_i \in \mathcal{M}_{r+1}$. Sendo assim, $\frac{P_i'(H_2)}{t_i^n} = \epsilon_i(H_2)$ e os expoentes que podem ocorrer são $\nu_1, \cdots, \nu_{r+1} = \lambda_1, \underline{\delta_j}$, pertencem a $[\delta]$ ou a $[\mathcal{V}(\mathcal{M}_{r+1}^2)] \subset \Gamma$. Portanto, caso $\lambda_{1i} < n$, em

$$t^{\lambda_1} \cdot \frac{P_i'(H_2)}{t_i^n}$$

ocorrem expoentes apenas em $[\delta]$ e $[\mathcal{V}(\mathcal{M}_{r+1}^2)]$, o mesmo ocorrendo com os expoentes de

$$t^{\lambda_1} \cdot \frac{\lambda_{1i}}{n} \cdot \frac{P_i'(H_2)}{t_i^n} \cdot (1 + Y_i(\underline{t})).$$

Assim, as parcelas em (4.8) que possuem $\lambda_{1i} < n$ não terão termos com expoentes iguais a $\underline{\delta_j}$.

Por outro lado, se $\lambda_{1i} \geq n$, então $P_i' = X_i\epsilon_i + X_{r+1}(b_i + \eta_i)$ e segue que

$$t^{\lambda_1} \cdot \frac{P_i'(H_2)}{t_i^n} = t^{\lambda_1}\left(\epsilon_i(H_2) + \frac{S_2(\underline{t})}{t_i^n}(b_i + \eta_i(H_2))\right)$$

com $\epsilon_i, \eta_i \in \mathcal{M}_{r+1}$. Assim, os expoentes que podem estar presentes nos termos da expressão acima devem ser iguais a $2\lambda_1 - \nu_i$ (se $b_i \neq 0$), pertencer a $[\mathcal{V}(\mathcal{M}^2)] \subset \Gamma$, $2\lambda_1 - \nu_i + \mathcal{V}(\mathcal{M}_{r+1}) \subset \Gamma + 2\lambda_1 - \nu_i$ ou a $[\delta]$. O mesmo ocorrendo com expoentes de

$$t^{\lambda_1} \cdot \frac{\lambda_{1i}}{n} \cdot \frac{P_i'(H_2)}{t_i^n} \cdot (1 + Y_i(\underline{t})).$$

Como $\underline{\delta_j} \notin \Gamma \bigcup_{i=1,\lambda_{1i}\geq n}^{r}(\Gamma + 2\lambda_1 - \nu_i)$, segue que em tais parcelas também não podemos ter termos com expoentes $\underline{\delta_j}$.

Resta, como única possibilidade, que $a_j = b_j$ para todo j. Logo, os expoentes generalizados de Zariski são invariantes analíticos. $\square$

Observação 4.8. *Enfatizamos que a demonstração do teorema anterior revela que termos com expoentes generalizados de Zariski não podem ser eliminados por mudanças de coordenadas pertencentes ao grupo $\mathcal{G}$ e tais mudanças, a menos de homotetias, mantêm os coeficientes de tais termos inalterados.*

4.2 Superfícies q.o. quase simples de gênero 1

Nesta seção, vamos utilizar os expoentes generalizados de Zariski para apresentar a classificação de superfícies quase ordinárias quase simples com gênero 1.

Como comentamos no início do capítulo, a noção de quase simples que adotaremos é dada na definição abaixo.

Definição 4.9. *Seja $H = (t_1^n, \cdots, t_r^n, t^{\lambda_1} + \sum_{\underline{\delta}} a_{\underline{\delta}} t^{\underline{\delta}})$ uma parametrização quase ordinária normalizada. Dizemos que H é quase simples se há uma quantidade enumerável de classes analíticas distintas para h.q.o. com mesmo semigrupo Γ_H, isto é, na mesma classe topológica da h.q.o. determinada por H.*

No que segue, vamos considerar superfícies quase ordinárias com semigrupo dado por $\Gamma = \langle \nu_1 = (n, 0), \nu_2 = (0, n), \nu_3 = \lambda_1 = (\lambda_{11}, \lambda_{12}) \rangle$.

A Proposição 4.1, indica que, a menos de mudanças de coordenadas, podemos considerar que uma superfície quase ordinária com semigrupo Γ seja dada por uma parametrização normalizada

$$H_a = \left(t_1^n, t_2^n, S(\underline{t}) = t^{\lambda_1} + \sum_j a_j t^{\underline{\delta}_j} u_j(\underline{t}) \right) \tag{4.9}$$

com $\underline{\delta}_j \in E_Z(H)$ expoente generalizado de Zariski, $u_j(\underline{0}) = 1$ e todo expoente de $R = S(\underline{t}) - t^{\lambda_1}$ não pertence a

$$\Gamma \bigcup_{i=1}^{r} (\Gamma^* + \mathcal{V}(S_i)) \bigcup_{i=1, \lambda_{1i} \geq n}^{r} (\Gamma + 2\lambda_1 - \nu_i) \, .$$

Doravante, sempre estaremos considerando parametrizações como acima.

A Proposição 1.37 indica que podemos normalizar no máximo dois coeficientes de expoentes de Zariski, ou seja, se temos $\underline{\delta}_1, \underline{\delta}_2 \in E_Z(H)$ tais que $\{\underline{\delta}_1 - \lambda_1, \underline{\delta}_2 - \lambda_1\}$ seja L.I., então podemos considerar

$$H_a = \left(t_1^n, t_2^n, t^{\lambda_1} + t^{\underline{\delta}_1} + t^{\underline{\delta}_2} + \sum_{1 \neq j \neq 2} a_j t^{\underline{\delta}_j} u_j(\underline{t}) \right).$$

Se ainda temos um terceiro expoente generalizado de Zariski $\underline{\delta}_3$, então o Teorema 4.7 nos dá que H_a não pode ser equivalente a

$$H_b = \left(t_1^n, t_2^n, t^{\lambda_1} + t^{\underline{\delta}_1} + t^{\underline{\delta}_2} + \sum_{1 \neq j \neq 2} b_j t^{\underline{\delta}_j} u_j(\underline{t}) \right)$$

se $a_3 \neq b_3$ e, neste caso, para cada escolha de $b_3 \in \mathbb{C}$, teríamos uma classe analítica distinta, ou seja, H_a não seria quase simples.

Deste modo, as superfícies que desejamos caracterizar estão entre aquelas com até dois expoentes generalizados de Zariski.

Se $n = 2$, então o vetor de Fröbenius é dado por $\mathcal{F} = \lambda_1 - (2,2) \prec \lambda_1$. Deste modo, segue do Exemplo 1.36 que a superfície quase ordinária não admite expoente generalizado de Zariski e ela é equivalente a uma h.q.o. com parametrização $(t_1^2, t_2^2, t^{\lambda_1})$, ou seja, temos apenas uma classe analítica e, portanto, é quase simples.

Assim, no que segue, vamos assumir $n > 2$.

O próximo lema nos dá condições para que uma parametrização como em (4.9) possa ter mais que dois expoentes generalizados de Zariski.

Lema 4.10. *Seja $H = (t_1^n, t_2^n, S(t_1, t_2))$ uma h.q.o. normalizada em $\mathbb{C}^3$ com gênero $g = 1$ como em (4.9). Se*

$$a)\ \lambda_{12} > 0 \ \ e\ \lambda_{11} \geq \frac{3n}{n-2}, \quad ou \ \ b)\ \lambda_{12} = 0\ e\ \lambda_{11} \geq \frac{4n}{n-2}, \quad ou \ \ c)\ \lambda_{12} \geq \frac{2n}{n-2},$$

então podemos ter 3 expoentes generalizados de Zariski.

Demonstração. Suponha que $\lambda_{12} > 0$ e $\lambda_{11} \geq \frac{3n}{n-2}$. Temos que $(n-1)\lambda_1 + n(-3,0) \succ \lambda_1$. De fato,

$$(n-1)\lambda_{11} - 3n = (n-2)\lambda_{11} + \lambda_{11} - 3n \geq \lambda_{11}.$$

Se $(n-1)\lambda_{11} - 3n > \lambda_{11}$, então temos o desejado. Se $(n-1)\lambda_{11} - 3n = \lambda_{11}$, como $n > 2$ e $\lambda_{12} > 0$, segue que $(n-1)\lambda_{12} > \lambda_{12}$.

Note que $Z = \{(n-1)\lambda_1 + n(-3,1), (n-1)\lambda_1 + n(-2,0), (n-1)\lambda_1 + n(-1,-1)\}$ não está contido em $\Gamma \bigcup_{i=1}^{r} (\Gamma^* + \mathcal{V}(S_i)) \bigcup_{i=1, \lambda_{1i} \geq n}^{r} (\Gamma + 2\lambda_1 - \nu_i)$ e seus elementos superam λ_1, com respeito à nossa ordem parcial considerada, e $min_{\prec}(Z) = Z$. Portanto, todos os elementos de Z podem ocorrer como expoentes generalizados de Zariski.

Suponha que $\lambda_{12} = 0$ e $\lambda_{11} \geq \frac{4n}{n-2}$. Como no caso anterior, temos $(n-1)\lambda_1 + n(-4,1) \succ \lambda_1$. De fato,

$$(n-1)\lambda_1 + n(-4,1) = (n-2)\lambda_1 + n(-4,1) + \lambda_1 \succ (n-2)\left(\frac{4n}{n-2}, 0\right) + n(-4,1) + \lambda_1 \succ \lambda_1.$$

Deste modo, temos que $(n-1)\lambda_1 + n(-4,2)$, $(n-1)\lambda_1 + n(-3,1)$, $(n-1)\lambda_1 + n(-2,0)$ satisfazem todas as condições para serem expoentes generalizados de Zariski.

Suponha agora $\lambda_{12} \geq \frac{2n}{n-2}$. Em particular, $\lambda_{11} \geq \lambda_{12} \geq \frac{2n}{n-2}$. De maneira análoga à analise anterior concluímos que $(n-1)\lambda_1 + n(-2,0) \succ \lambda_1$ e $(n-1)\lambda_1 + n(0,-2) \succ \lambda_1$. Nesse caso, temos que $(n-1)\lambda_1 + n(-1,-1)$, $(n-1)\lambda_1 + n(-2,0)$ e $(n-1)\lambda_1 + n(0,-2)$ podem ser expoentes de Zariski. □

Observação 4.11. *Em virtude do lema anterior, para que tenhamos no máximo dois expoentes generalizados de Zariski, podemos assumir*

$$0 = \lambda_{12} \leq \lambda_{11} < \frac{4n}{n-2} \;\; ou \;\; 0 < \lambda_{12} \leq \lambda_{11} < \frac{2n}{n-2} \;\; ou \;\; 0 < \lambda_{12} < \frac{2n}{n-2} \leq \lambda_{11} < \frac{3n}{n-2}. \tag{4.10}$$

Observe que se $\underline{\delta} \succ \lambda_1$ é um expoente de $S(t_1, t_2)$, dado como em (4.9), expresso na representação padrão $\underline{\delta} = \gamma\lambda_1 + n(\alpha, \beta)$, com $0 \leq \gamma \leq n-1$, devemos ter $\gamma \geq 2$. De fato, se $\gamma < 2$, então deveríamos ter $(\alpha, \beta) \in \mathbb{N}^2$ e, neste caso, $\underline{\delta} \in \Gamma$, que não figura em $S(t_1, t_2)$.

No primeiro caso, isto é, $0 = \lambda_{12}$ e $\lambda_{11} < \frac{4n}{n-2}$, como a parametrização é normalizada, devemos ter $n < \lambda_{11} < \frac{4n}{n-2}$, ou seja, $1 < \frac{4}{n-2}$ que nos dá a restrição $n < 6$.

Proposição 4.12. *Seja $H = (t_1^n, t_2^n, S(t_1, t_2))$ uma h.q.o. normalizada em $\mathbb{C}^3$ de gênero 1 como em (4.9). Se $\lambda_{12} = 0$ e $\lambda_{11} < \frac{4n}{n-2}$, então H será quase simples se $3 \leq n \leq 4$ e, neste caso,*

$$H \underset{\mathcal{G}}{\sim} \left(t_1^n, t_2^n, t_1^{\lambda_{11}} + at^{(n-1)\lambda_1 + n(-2,\gamma_1)} + bt^{(n-1)\lambda_1 + n(-3,\gamma_2)}\right)$$

com $a, b \in \{0, 1\}$, algum $\gamma_1, \gamma_2 \in \mathbb{N}$ e $a = 0$ se $\gamma_1 \geq \gamma_2$.

Demonstração. Como estamos considerando $n > 2$, vamos analisar este caso para cada uma das possibilidades $n \in \{3, 4, 5\}$.

Para $n = 3$, um elemento $\underline{\delta} \notin \Gamma$ tal que $\underline{\delta} \succ \lambda_1$ pode ser expresso como $\underline{\delta} = 2\lambda_1 + 3(\alpha, \beta)$ com $\alpha < 0$ ou $\beta < 0$. Deste modo, devemos ter

$$\lambda_{11} \leq 2\lambda_{11} + 3\alpha \quad \text{e} \quad 0 = \lambda_{12} \leq 2\lambda_{12} + 3\beta.$$

Assim, $\beta \geq 0$ e $\alpha \geq \frac{-\lambda_{11}}{3} > -4$, ou seja, $\alpha \geq -3$.

Se $\alpha \geq 0$ e $\beta \geq 0$, então $\underline{\delta} \in \Gamma$ e, se $\alpha = -1$ e $\beta \geq 0$, então $\underline{\delta} \in \Gamma + 2\lambda_1 - \nu_1$. Em ambos os casos, a Proposição 4.1 permite desconsiderarmos tal expoente $\underline{\delta}$ da parametrização.

Portanto, podemos considerar

$$H \underset{\mathcal{G}}{\sim} \left(t_1^3, t_2^3, t^{\lambda_1} + \sum_{\beta_1 \geq 0} a_{\beta_1} t^{2\lambda_1 + 3(-2,\beta_1)} + \sum_{\beta_2 \geq 0} a_{\beta_2} t^{2\lambda_1 + 3(-3,\beta_2)}\right).$$

Aplicando o Corolário 4.6, obtemos que

$$H \underset{\mathcal{G}}{\sim} \left(t_1^3, t_2^3, t^{\lambda_1} + at^{2\lambda_1+3(-2,\gamma_1)} + bt^{2\lambda_1+3(-3,\gamma_2)}\right)$$

com $a, b \in \{0, 1\}$, algum $\gamma_1, \gamma_2 \in \mathbb{N}$ e $a = 0$ se $\gamma_1 \geq \gamma_2$.

Para $n = 4$, um elemento $\underline{\delta} \succ \lambda_1$ é expresso como

$$3\lambda_1 + 4(\alpha_1, \beta_1) \quad \text{ou} \quad 2\lambda_1 + 4(\alpha_2, \beta_2).$$

Se $2\lambda_1 + 4(\alpha_2, \beta_2) \succ \lambda_1$, então devemos ter $\beta_2 \geq 0$ e $\alpha_2 \geq -\frac{\lambda_{11}}{4} > -\frac{1}{4} \cdot \frac{4n}{n-2} = -2$, ou seja, $\alpha_2 \geq -1$. Note que, para tais valores, $\underline{\delta} \in \Gamma \cup (\Gamma + 2\lambda_1 - \nu_1)$ e a Proposição 4.1 permite que eliminemos tais expoentes da parametrização.

Se $3\lambda_1 + 4(\alpha_1, \beta_1) \succ \lambda_1$, então, como acima, $\beta_1 \geq 0$ e $\alpha_1 \geq -3$. Se $\alpha_1 \geq -1$, então podemos desconsiderar tais expoentes $\underline{\delta}$, graças à Proposição 4.1.

Desta forma, podemos considerar

$$H \underset{\mathcal{G}}{\sim} \left(t_1^4, t_2^4, t^{\lambda_1} + \sum_{\beta_1 \geq 0} a_{\beta_1} t^{3\lambda_1+4(-2,\beta_1)} + \sum_{\beta_2 \geq 0} a_{\beta_2} t^{3\lambda_1+4(-3,\beta_2)}\right).$$

Novamente, o Corolário 4.6, nos dá

$$H \underset{\mathcal{G}}{\sim} \left(t_1^4, t_2^4, t^{\lambda_1} + at^{3\lambda_1+4(-2,\gamma_1)} + bt^{3\lambda_1+4(-3,\gamma_2)}\right)$$

com $a, b \in \{0, 1\}$, algum $\gamma_1, \gamma_2 \in \mathbb{N}$ e $a = 0$ se $\gamma_1 \geq \gamma_2$.

Agora, para $n = 5$, como devemos ter $\lambda_{12} = 0$ e $5 = n < \lambda_{11} < \frac{4n}{n-2} = \frac{20}{3}$, a única possibilidade é que $\lambda_1 = (6, 0)$. No entanto, neste caso, constatamos que

$$\begin{aligned} 3\lambda_1 + n(-2, 2) &= (8, 10) \succ \lambda_1 \\ 4\lambda_1 + n(-3, 1) &= (9, 5) \succ \lambda_1 \\ 4\lambda_1 + n(-2, 0) &= (14, 0) \succ \lambda_1 \end{aligned}$$

e os expoentes $3\lambda_1 + n(-2, 2)$, $4\lambda_1 + n(-3, -1)$ e $4\lambda_1 + n(-2, 0)$ satisfazem as condições para serem considerados expoentes generalizados de Zakiski. Assim, esta situação pode ser desconsiderada de nossa análise, pois não fornecerá h.q.o. quase simples. $\square$

Retornando às condições (4.10), a proposição abaixo, nos garante que a desigualdade $0 < \lambda_{12} \leq \lambda_{11} < \frac{2n}{n-2}$ sempre origina superfícies quase simples.

Proposição 4.13. *Seja $H = (t_1^n, t_2^n, S(t_1, t_2))$ uma h.q.o. normalizada em $\mathbb{C}^3$ de gênero 1 como em (4.9). Se $0 < \lambda_{12} \leq \lambda_{11} < \frac{2n}{n-2}$, então*

$$H \underset{\mathcal{G}}{\sim} \left(t_1^n, t_2^n, t^{\lambda_1}\right) \quad \text{ou} \quad H \underset{\mathcal{G}}{\sim} \left(t_1^n, t_2^n, t^{\lambda_1} + t^{\gamma\lambda_1+n(-1,-1)}\right)$$

para algum γ tal que $\gamma\lambda_1 + n(-1, -1) \succ \lambda_1$.

Demonstração. Se $0 < \lambda_{12} \leq \lambda_{11} < \frac{2n}{n-2}$, então, dado um expoente $\underline{\delta} \succ \lambda_1$ de $S(t_1, t_2)$ escrito na representação padrão como $\underline{\delta} = \gamma\lambda_1 + n(\alpha, \beta)$ com $2 \leq \gamma \leq n-1$, devemos ter

$$\gamma\lambda_1 + n(\alpha, \beta) \succ \lambda_1 \iff (-\alpha, -\beta) \prec \frac{\gamma - 1}{n} \cdot \lambda_1.$$

Em particular,

$$(-\alpha, -\beta) \prec \frac{n-2}{n} \cdot \lambda_1.$$

Assim, $-\alpha < \frac{n-2}{n} \cdot \frac{2n}{n-2} = 2$ e $-\beta < \frac{n-2}{n} \cdot \frac{2n}{n-2} = 2$. Logo, $\alpha \geq -1$ e $\beta \geq -1$.

Caso, $\alpha, \beta \geq 0$, então $\underline{\delta} \in \Gamma$. Se $\alpha = -1$ e $\beta \geq 0$, então $\underline{\delta} = \gamma\lambda_1 + n(-1, \beta) \in \Gamma + 2\lambda_1 - \nu_1$. Se $\alpha \geq 0$ e $\beta = -1$, então $\underline{\delta} = \gamma\lambda_1 + n(\alpha, -1) \in \Gamma + 2\lambda_1 - \nu_2$. Em todos esses casos, o termo com expoente $\underline{\delta}$ pode ser eliminado pela Proposição 4.1.

Deste modo, em $S(t_1, t_2)$, pode ocorrer no máximo um termo com expoente $\underline{\delta}$ e referente ao caso $\alpha = \beta = -1$.

Note que, $\underline{\delta} = \gamma\lambda_1 + n(-1, -1) \succ \lambda_1$ implica $(n, n) \prec (\gamma - 1)\lambda_1$.

Portanto, neste caso, a h.q.o. é equivalente a

$$\left(t_1^n, t_2^n, t^{\lambda_1} + \sum_{\gamma\lambda_1 + n(-1,-1) \succ \lambda_1} a_\gamma t^{\gamma\lambda_1 + n(-1,-1)} \right).$$

Se $a_\gamma = 0$ para todo γ, então

$$H \underset{\mathcal{G}}{\sim} \left(t_1^n, t_2^n, t^{\lambda_1}\right).$$

Caso contrário, tomemos γ_0 o menor valor para o qual $a_{\gamma_0} \neq 0$. Assim, $\gamma_0\lambda_1 + n(-1, -1) = min_{\prec}\{\gamma\lambda_1 + n(-1, -1); \frac{n}{2} < \gamma \leq n-1\}$ é o único expoente generalizado de Zariski e

$$\gamma\lambda_1 + n(-1, -1) = (\gamma - \gamma_0)\lambda_1 + \gamma_0\lambda_1 + n(-1, -1) \in \Gamma + \gamma_0\lambda_1 + n(-1, -1).$$

Segue do Corolário 4.6 que

$$H \underset{\mathcal{G}}{\sim} \left(t_1^n, t_2^n, t^{\lambda_1} + a_{\gamma_0} t^{\gamma_0\lambda_1 + n(-1,-1)}\right).$$

A Proposição 1.37 permite normalizar o coeficiente a_{γ_0} e assim temos o desejado. $\square$

Vamos agora tratar o caso $0 < \lambda_{12} < \frac{2n}{n-2} \leq \lambda_{11} < \frac{3n}{n-2}$.

Suponha $0 < \lambda_{12} < \frac{2n}{n-2} \leq \lambda_{11} < \frac{3n}{n-2}$ e considere em $S(t_1, t_2)$ um termo com expoente $\underline{\delta} \succ \lambda_1$ expresso na representação padrão, $\underline{\delta} = \gamma\lambda_1 + n(\alpha, \beta)$ com $2 \leq \gamma \leq n-1$. Temos,

$$\gamma\lambda_1 + n(\alpha, \beta) \succ \lambda_1 \iff (-\alpha, -\beta) \prec \frac{\gamma - 1}{n} \cdot \lambda_1.$$

Em particular,
$$(-\alpha,-\beta) \prec \frac{n-2}{n} \cdot \lambda_1$$
e assim, $-\alpha < \frac{n-2}{n} \cdot \frac{3n}{n-2} = 3$ e $-\beta < \frac{n-2}{n} \cdot \frac{2n}{n-2} = 2$. Logo, $\alpha \geq -2$ e $\beta \geq -1$.

Analogamente ao caso tratado na proposição anterior, os expoentes com $\alpha, \beta \geq 0$, $\alpha = -1$ e $\beta \geq 0$, $\alpha \geq 0$ e $\beta = -1$ podem todos ser eliminados de $S(t_1, t_2)$ pela Proposição 4.1. Assim, podemos nos restringir aos seguintes expoentes:
$$\gamma_1\lambda_1 + n(-1,-1) \ \text{ e } \ \gamma_2\lambda_1 + n(-2,\beta) \ \text{ com } \ \beta \geq -1.$$

Deste modo, as parametrizações em que estamos interessados estão entre as que são da forma:
$$H \underset{\mathcal{G}}{\sim} \left(t_1^n, t_2^n, t_1^{\lambda_1} + \sum_{\gamma_1\lambda_1+n(-1,-1)\succ\lambda_1} a_{\gamma_1} t^{\gamma_1\lambda_1+n(-1,-1)} + \sum_{\gamma_2\lambda_1+n(-2,\beta)\succ\lambda_1} \sum_{\beta\geq -1} b_{\gamma_2,\beta} t^{\gamma_2\lambda_1+n(-2,\beta)} \right). \tag{4.11}$$

Para $n = 3$ ou $n = 4$, a exigência de que os expoentes que ocorrem na parametrização superem λ_1, com relação à nossa ordem parcial considerada, implica que a única possibilidade para γ_1 e γ_2 seria $\gamma_1 = \gamma_2 = n-1$ e assim
$$H \underset{\mathcal{G}}{\sim} \left(t_1^n, t_2^n, t^{\lambda_1} + at^{(n-1)\lambda_1+n(-1,-1)} + \sum_{\beta} b_\beta t^{(n-1)\lambda_1+n(-2,\beta)} \right)$$
com $\beta \geq -1$.

Aplicando o Corolário 4.6 e a Proposição 1.38 obtemos
$$H \underset{\mathcal{G}}{\sim} \left(t_1^n, t_2^n, t^{\lambda_1} + at^{(n-1)\lambda_1+n(-1,-1)} + bt^{(n-1)\lambda_1+n(-2,\beta)} \right)$$
com $a, b \in \{0,1\}$, $\beta \geq -1$, mas com $a = 0$, se $\beta = -1$ e $b \neq 0$, uma vez que, neste caso, $(n-1)\lambda_1 + n(-2,-1)$ seria o único expoente de Zariski generalizado e, como $(n-1)\lambda_1 + n(-1,-1) = (n-1)\lambda_1 + n(-2,-1) + n(1,0)$, o termo com expoente $(n-1)\lambda_1 + n(-1,-1)$ poderia ser eliminado pelo Corolário 4.6.

Para $n = 5$, podemos ter em (4.11) que $3 \leq \gamma_1 \leq 4$ e podemos considerar que a parametrização seja
$$H \underset{\mathcal{G}}{\sim} \left(t_1^5, t_2^5, t^{\lambda_1} + at^{3\lambda_1+5(-1,-1)} + bt^{4\lambda_1+5(-1,-1)} + \sum_{\beta\geq -1} c_\beta t^{4\lambda_1+5(-2,\beta)} \right).$$
Note que se $a \neq 0$ ou $c_{-1} \neq 0$, então $4\lambda_1 + 5(-1,-1)$ não seria expoente generalizado de Zariski e, além disto, o Corolário 4.6 garante que podemos eliminar o termo com tal expoente.

Mais ainda, como os vetores $2\lambda_1 + 5(-1,-1)$, $3\lambda_1 + 5(-1,-1)$ e $3\lambda_1 + 5(-2,\beta)$ são dois a dois L.I., o Corolário 4.6 e a Proposição 1.37 nos dão que

$$H \underset{\mathcal{G}}{\sim} \left(t_1^5, t_2^5, t^{\lambda_1} + at^{3\lambda_1+5(-1,-1)} + bt^{4\lambda_1+5(-1,-1)} + ct^{4\lambda_1+5(-2,\beta)}\right)$$

onde $a,b,c \in \{0,1\}$, $\beta \geq -1$ com $ab = 0$ e $b = 0$ se $\beta = -1$ e $c \neq 0$.

Vamos dividir a análise do caso $n > 5$ e $0 < \lambda_{12} < \frac{2n}{n-2} \leq \lambda_{11} < \frac{3n}{n-2}$ em duas situações:

$$0 < \lambda_{12} \leq \frac{n}{n-2} \quad \text{ou} \quad \frac{n}{n-2} < \lambda_{12}.$$

Inicialmente consideremos $0 < \lambda_{12} \leq \frac{n}{n-2}$. Note que a hipótese $n > 5$ nos dá que $\lambda_{12} = 1$. Além disto, para que $\lambda_1 \prec \underline{\delta} = \gamma\lambda_1 + n(\alpha,\beta)$, $2 \leq \gamma \leq n-1$, devemos ter $\beta \geq 0$ e

$$-n\alpha \leq (\gamma-1)\lambda_{11} < (\gamma-1)\frac{3n}{n-2} \leq (n-2)\frac{3n}{n-2} = 3n$$

ou seja, $\alpha > -3$.

Uma vez que $\gamma\lambda_1 + n(\alpha,\beta) \in \Gamma \cup (\Gamma + 2\lambda_1 - \nu_1)$ para $\beta \geq 0$ e $\alpha \geq -1$ a única eventual possibilidade é $\alpha = -2$.

Proposição 4.14. *Considere $n > 5$, $0 < \lambda_{12} \leq \frac{n}{n-2}$. Teremos que $H = (t_1^n, t_2^n, S(t_1,t_2))$ será quase simples se, e somente se, $\frac{2n}{n-2} \leq \lambda_{11} < \frac{2n}{n-4}$. Além disto, temos que:*

Se $\frac{2n}{n-3} \leq \lambda_{11} < \frac{2n}{n-4}$, então

$$H \underset{\mathcal{G}}{\sim} \left(t_1^n, t_2^n, t^{\lambda_1} + at^{(n-1)\lambda_1+n(-2,\gamma_1)} + bt^{(n-2)\lambda_1+n(-2,\gamma_2)}\right)$$

com $a,b \in \{0,1\}$, $\gamma_1,\gamma_2 \in \mathbb{N}$ e $a = 0$ $\gamma_1 \geq \gamma_2$.

Se $\frac{2n}{n-2} \leq \lambda_{11} < \frac{2n}{n-3}$, então

$$H \underset{\mathcal{G}}{\sim} \left(t_1^n, t_2^n, t^{\lambda_1} + at^{(n-1)\lambda_1+n(-2,\gamma)}\right)$$

com $a \in \{0,1\}$, $\gamma \in \mathbb{N}$.

Demonstração. Pela discussão anterior à proposição temos que $\lambda_{12} = 1$ e, se $\underline{\delta} = \gamma\lambda_1 + n(\alpha,\beta) \succ \lambda_1$ é um expoente de $S(t_1^n, t_2^n)$, podemos considerar $2 \leq \gamma \leq n-1$, $\beta \geq 0$ e $\alpha = -2$.

Caso $\lambda_{11} \geq \frac{2n}{n-4}$, então

$$(n-1)\lambda_{11} > (n-2)\lambda_{11} > (n-3)\lambda_{11} = (n-4)\lambda_{11} + \lambda_{11} \geq \lambda_{11} + 2n,$$

ou seja,

$$(n-1)\lambda_1 + n(-2,\beta),\ (n-2)\lambda_1 + n(-2,\beta) \text{ e } (n-3)\lambda_1 + n(-2,\beta)$$

superam λ_1 para todo $\beta \geq 0$. Em particular, temos que

$$(n-1)\lambda_1 + n(-2,0),\ (n-2)\lambda_1 + n(-2,1) \text{ e } (n-3)\lambda_1 + n(-2,2)$$

satisfazem as condições para serem expoentes generalizados de Zariski e, neste caso, como temos ao menos três expoentes generalizados de Zariski, não podemos ter superfície quase simples.

Caso $\frac{2n}{n-3} \leq \lambda_{11} < \frac{2n}{n-4}$, então

$$\begin{aligned} &(n-1)\lambda_{11} > (n-2)\lambda_{11} = (n-3)\lambda_{11} + \lambda_{11} \geq \lambda_{11} + 2n \ \text{ e} \\ &(n-3)\lambda_{11} - 2n = (n-4)\lambda_{11} - 2n + \lambda_{11} < \lambda_{11}. \end{aligned}$$

Assim, não há possibilidade para expoentes da forma $\gamma\lambda_1 + n(-2,\beta) \succ \lambda_1$ com $\gamma \leq n-3$ e podemos considerar que

$$H \underset{\mathcal{G}}{\sim} \left(t_1^n, t_2^n, t^{\lambda_1} + \sum_{\gamma_1 \geq 0} a_{\gamma_1} t^{(n-1)\lambda_1 + n(-2,\gamma_1)} + \sum_{\gamma_2 \geq 0} b_{\gamma_2} t^{(n-2)\lambda_1 + n(-2,\gamma_2)} \right).$$

Pelo Corolário 4.6, temos que a superfície dada pela parametrização acima é tal que

$$H \underset{\mathcal{G}}{\sim} \left(t_1^n, t_2^n, t^{\lambda_1} + a t^{(n-1)\lambda_1 + n(-2,\gamma_1)} + b t^{(n-2)\lambda_1 + n(-2,\gamma_2)} \right)$$

com $a, b \in \{0,1\}$, $\gamma_1, \gamma_2 \in \mathbb{N}$ e $a = 0$ $\gamma_1 \geq \gamma_2$.

Se $\frac{2n}{n-2} \leq \lambda_{11} < \frac{2n}{n-3}$, então

$$\begin{aligned} &(n-1)\lambda_{11} = (n-2)\lambda_{11} + \lambda_{11} \geq \lambda_{11} + 2n \ \text{ e} \\ &(n-2)\lambda_{11} - 2n = (n-3)\lambda_{11} - 2n + \lambda_{11} < \lambda_{11}. \end{aligned}$$

Deste modo, não há possibilidade para expoentes da forma $\gamma\lambda_1 + n(-2,\beta) \succ \lambda_1$ com $\gamma \leq n-2$ e podemos considerar

$$H \underset{\mathcal{G}}{\sim} \left(t_1^n, t_2^n, t^{\lambda_1} + \sum_{\beta \geq 0} a_\beta t^{(n-1)\lambda_1 + n(-2,\beta)} \right).$$

Novamente, o Corolário 4.6 nos dá que

$$H \underset{\mathcal{G}}{\sim} \left(t_1^n, t_2^n, t^{\lambda_1} + a t^{(n-1)\lambda_1 + n(-2,\beta)} \right)$$

com $a \in \{0,1\}$ e $\beta \geq 0$. □

Ainda resta analisar o caso em que $n > 5$ e $\frac{n}{n-2} < \lambda_{12} < \frac{2n}{n-2} \leq \lambda_{11} < \frac{3n}{n-2}$. Note que, em particular, devemos ter $\lambda_{12} > 1$. Além disto, temos

$$(n-1)\lambda_{11} = (n-2)\lambda_{11} + \lambda_{11} \geq \lambda_{11} + 2n \text{ e}$$
$$(n-1)\lambda_{12} = (n-2)\lambda_{12} + \lambda_{12} > n + \lambda_{12}.$$

Deste modo, temos que

$$(n-1)\lambda_1 + n(-1,-1) \text{ e } (n-1)\lambda_1 + n(-2,\beta),\ \beta \geq -1$$

podem ser expoentes generalizados de Zariski.

Caso $\frac{2n}{n-3} \leq \lambda_{11} < \frac{3n}{n-2}$, então $(n-2)\lambda_{11} - 2n = (n-3)\lambda_{11} - 2n + \lambda_{11} \geq \lambda_{11}$ e podemos escolher $\beta > 0$ tal que

$$(n-1)\lambda_1 + n(-1,-1),\ (n-1)\lambda_1 + n(-2,0) \text{ e } (n-2)\lambda_1 + n(-2,\beta)$$

sejam expoentes generalizados de Zariski e, deste modo, não obteremos uma superfície quase simples.

Sendo assim, de modo a podermos obter superfícies quase simples, podemos nos ater ao caso $n > 5$ e $\frac{n}{n-2} < \lambda_{12} < \frac{2n}{n-2} \leq \lambda_{11} < \frac{2n}{n-3}$.

Veja que, se $n \geq 9$, então

$$2 < 2 + \frac{4}{n-2} = \frac{2n}{n-2} \leq \lambda_{11} < \frac{2n}{n-3} = 2 + \frac{6}{n-3} \leq 3,$$

ou seja, não há possibilidade para valores de λ_{11}. Consequentemente, basta considerarmos $n \in \{6,7,8\}$ e reexaminando as desigualdades $\frac{2n}{n-2} \leq \lambda_{11} < \frac{2n}{n-3}$, obtemos que, para tais valores de n, devemos ter $\lambda_{11} = 3$.

Além disto, a condição $\frac{n}{n-2} < \lambda_{12} < \frac{2n}{n-2}$ implica que $\lambda_{12} = 2$.

Note que um expoente $\underline{\delta} \notin \Gamma_H$ que pode figurar na parametrização deve ser da forma $\underline{\delta} = \gamma\lambda_1 + n(\alpha,\beta) \succ \lambda_1$ tal que $2 \leq \gamma \leq n-1$, com $\alpha < 0$ ou $\beta < 0$.

Uma vez que $\lambda_1 = (3,2)$ para os casos que restam analisar, temos que a condição $\gamma\lambda_1 + n(\alpha,\beta) \succ \lambda_1$ é traduzida por

$$(\alpha,\beta) \succ -\frac{(\gamma-1)}{n}\cdot(3,2). \tag{4.12}$$

Se $\gamma = 2$, como $6 \leq n \leq 8$, então $\alpha \geq 0$ e $\beta \geq 0$ e podemos eliminar $\underline{\delta}$ da parametrização.

Se $\gamma = 3$, então $\alpha \geq -1$ e $\beta \geq 0$, que, em virtude da Proposição 4.1 também pode ser eliminado.

Deste modo, podemos considerar $4 \leq \gamma \leq n-1$.

1. Para $n = 6$, temos $\gamma \in \{4, 5\}$.

   Se $\gamma = 4$, então (4.12) nos dá que $\alpha \geq -1$ e $\beta \geq -1$.

   Se $\gamma = 5$, então (4.12) permite concluir que $\alpha \geq -2$ e $\beta \geq -1$.

   Lembrando que, se $\alpha = -1$ e $\beta \geq 0$, ou, se $\alpha \geq 0$ e $\beta \geq -1$, a Proposição 4.1 permite eliminar o termo com tal expoente e, portanto, podemos considerar

   $$H \underset{\mathcal{G}}{\sim} \left(t_1^6, t_2^6, t^{\lambda_1} + at^{4\lambda_1+6(-1,-1)} + bt^{5\lambda_1+6(-1,-1)} + ct^{5\lambda_1+6(-2,\beta)}\right)$$

   com $\beta \geq -1$. Além disto, como os elementos do conjunto $\{4\lambda_1 + 6(-1,-1) - \lambda_1, 5\lambda_1 + 6(-1,-1) - \lambda_1, 5\lambda_1 + 6(-2,\beta) - \lambda_1\}$ são dois a dois L.I., a Proposição 1.37 permite normalizar até dois coeficientes com tais expoentes. Assim, seguindo o Corolário 4.6, podemos assumir que $a, b, c \in \{0, 1\}$ com $b = 0$ se $a \neq 0$ ou $c \neq 0$ e $\beta = -1$.

2. Para $n = 7$, temos $\gamma \in \{4, 5, 6\}$.

   Se $\gamma = 4$, então (4.12) nos dá que $\alpha \geq -1$ e $\beta \geq 0$ e, consequentemente, pela Proposição 4.1, podemos eliminar os termos correspondentes .

   Se $\gamma = 5$, novamente por (4.12), temos que $\alpha \geq -1$ e $\beta \geq -1$.

   Se $\gamma = 6$, então obtemos que $\alpha \geq -2$ e $\beta \geq -1$.

   Procedendo como no caso anterior, temos que

   $$H \underset{\mathcal{G}}{\sim} \left(t_1^7, t_2^7, t^{\lambda_1} + at^{5\lambda_1+7(-1,-1)} + bt^{6\lambda_1+7(-1,-1)} + ct^{6\lambda_1+7(-2,\beta)}\right)$$

   com $a, b, c \in \{0, 1\}$, $b = 0$ se $a \neq 0$ ou $c \neq 0$ e $\beta = -1$.

3. Para $n = 8$, temos $\gamma \in \{4, 5, 6, 7\}$.

   Se $\gamma = 4$, então (4.12) implica que $\alpha \geq -1$ e $\beta \geq 0$ e, como antes, pela Proposição 4.1, podemos eliminar os termos com expoentes para tais valores.

   Se $\gamma = 5$, a condição (4.12) nos dá que $\alpha \geq -1$ e $\beta \geq -1$. Neste caso, $5\lambda_1+8(-1,-1)$ seria o único expoente a ser considerado.

   Se $\gamma = 6$, obtemos $\alpha \geq -1$ e $\beta \geq -1$, ou seja, $6\lambda_1 + (-1,-1)$ é o único expoente eventualmente a ser considerado para $\gamma = 6$.

   Se $\gamma = 7$, então $\alpha \geq -2$ e $\beta \geq -1$.

Analisando os possíveis expoentes, levando em conta que os vetores $4\lambda_1+8(-1,-1)$, $5\lambda_1+8(-1,-1)$, $6\lambda_1+8(-1,-1)$, $6\lambda_1+8(-2,\beta)$ com $\beta \geq -1$ são dois a dois L.I. e, aplicando as Proposições 4.1 e 1.37, bem como o Corolário 4.6, obtemos que

$$H \underset{\mathcal{G}}{\sim} \left(t_1^8, t_2^8, t^{\lambda_1} + at^{5\lambda_1+8(-1,-1)} + bt^{6\lambda_1+8(-1,-1)} + ct^{7\lambda_1+8(-1,-1)} + dt^{7\lambda_1+8(-2,\beta)}\right)$$

com $\beta \geq -1$, $a, b, c, d \in \{0, 1\}$, satisfazendo: Se $a \neq 0$, então $b = c = 0$. Se $a = 0$ e $b \neq 0$, então $c = 0$. Se $a = b = 0$, $d \neq 0$ e $\beta = -1$, então $c = 0$.

Podemos reunir as análises realizadas nesta seção no seguinte resultado.

Teorema 4.15. *Seja $H = (t_1^n, t_2^n, S(t_1, t_2))$ uma h.q.o. normalizada de gênero 1. Então H é quase simples se, e somente se, ela se enquadra em um dos seguintes casos:*

a) Temos $n = 2$. Neste caso, $H \underset{\mathcal{G}}{\sim} \left(t_1^2, t_2^2, t^{\lambda_1}\right)$.

b) Temos $n > 2$ e $0 < \lambda_{12} \leq \lambda_{11} < \frac{2n}{n-2}$. Neste caso, $H \underset{\mathcal{G}}{\sim} \left(t_1^n, t_2^n, t^{\lambda_1} + at^{\gamma\lambda_1+n(-1,-1)}\right)$ com $a \in \{0, 1\}$ e algum $2 \leq \gamma \leq n-1$ tal que $\gamma\lambda_1 + n(-1,-1) \succ \lambda_1$.

c) Temos $n \in \{3, 4\}$.

c.1) Para $0 = \lambda_{12} < n < \lambda_{11} < \frac{4n}{n-2}$ temos

$$H \underset{\mathcal{G}}{\sim} \left(t_1^n, t_2^n, t^{\lambda_1} + at^{(n-1)\lambda_1+n(-2,\gamma_1)} + bt^{(n-1)\lambda_1+n(-3,\gamma_2)}\right)$$

com $a, b \in \{0, 1\}$, $\gamma_1, \gamma_2 \in \mathbb{N}$ e $a = 0$ no caso em que $\gamma_1 \geq \gamma_2$ e $b \neq 0$.

c.2) Para $0 < \lambda_{12} < \frac{2n}{n-2} \leq \lambda_{11} < \frac{3n}{n-2}$ temos

$$H \underset{\mathcal{G}}{\sim} \left(t_1^n, t_2^n, t^{\lambda_1} + at^{(n-1)\lambda_1+n(-1,-1)} + bt^{(n-1)\lambda_1+n(-2,\beta)}\right)$$

com $a, b \in \{0, 1\}$, $\beta \geq -1$ e $a = 0$ caso em que $\beta = -1$ e $b \neq 0$.

d) Temos $n = 5$, $1 \leq \lambda_{12} \leq 3$ e $\lambda_{11} = 4$.

$$H \underset{\mathcal{G}}{\sim} \left(t_1^5, t_2^5, t^{\lambda_1} + at^{3\lambda_1+5(-1,-1)} + bt^{4\lambda_1+5(-1,-1)} + ct^{4\lambda_1+5(-2,\beta)}\right)$$

onde $a, b, c \in \{0, 1\}$, $\beta \geq -1$, $ab = 0$ e $b = 0$ caso $\beta = -1$ e $c \neq 0$.

e) Temos $n > 5$ e $\lambda_{12} = 1$.

e.1) Para $\frac{2n}{n-3} \leq \lambda_{11} < \frac{2n}{n-4}$ temos

$$H \underset{\mathcal{G}}{\sim} \left(t_1^n, t_2^n, t^{\lambda_1} + at^{(n-1)\lambda_1+n(-2,\gamma_1)} + bt^{(n-2)\lambda_1+n(-2,\gamma_2)}\right)$$

com $a, b \in \{0, 1\}$, $\gamma_1, \gamma_2 \in \mathbb{N}$ e $a = 0$, sempre que $\gamma_1 \geq \gamma_2$ e $b \neq 0$.

e.2) Para $\frac{2n}{n-2} \leq \lambda_{11} < \frac{2n}{n-3}$ *temos*

$$H \underset{\mathcal{G}}{\sim} \left(t_1^n, t_2^n, t^{\lambda_1} + at^{(n-1)\lambda_1 + n(-2,\gamma)}\right)$$

com $a \in \{0,1\}$ *e* $\gamma \in \mathbb{N}$.

f) Temos $n \in \{6,7,8\}$ *e* $\lambda_1 = (3,2)$.

f.1) Para $n \in \{6,7\}$ *temos*

$$H \underset{\mathcal{G}}{\sim} \left(t_1^n, t_2^n, t^{\lambda_1} + at^{(n-2)\lambda_1 + n(-1,-1)} + bt^{(n-1)\lambda_1 + n(-1,-1)} + ct^{(n-1)\lambda_1 + n(-2,\beta)}\right)$$

com $a, b, c \in \{0,1\}$, $\beta \geq -1$ *e* $b \neq 0$ *sempre que* $a \neq 0$ *ou caso* $c \neq 0$ *e* $\beta = -1$.

f.2) Para $n = 8$, *temos*

$$H \underset{\mathcal{G}}{\sim} \left(t_1^8, t_2^8, t^{\lambda_1} + at^{5\lambda_1 + 8(-1,-1)} + bt^{6\lambda_1 + 8(-1,-1)} + ct^{7\lambda_1 + 8(-1,-1)} + dt^{7\lambda_1 + 8(-2,\beta)}\right)$$

com $\beta \geq -1$, $a, b, c, d \in \{0,1\}$, *satisfazendo: se* $a \neq 0$, *então* $b = c = 0$, *se* $a = 0$ *e* $b \neq 0$, *então* $c = 0$, *se* $a = b = 0$, $d \neq 0$ *e* $\beta = -1$, *então* $c = 0$.

Demonstração. Segue das Proposições 4.12, 4.13 e 4.14, bem como das análises dos casos apresentados no decorrer desta seção. $\square$

Referências Bibliográficas

[1] Abhyankar, S. S.; *On the ramification of algebraic functions.* Amer. J. Math., 77, 575-592, (1955).

[2] Assi, A.; *The Frobenius vector of a free affine semigroup.* Journal of Algebra and its Applications, vol 11, no 4, (2012).

[3] Bruce, J. W. and Gaffney, T. J., *Simple Singularities of Mappings* $(\mathbb{C}, 0) \to (\mathbb{C}^2, 0)$. Journal of the London Mathematical Society, Volume 26, Issue 3, (1982).

[4] Clausen, M. and Fortenbacher, A.; *Efficient Solution of Linear Diophantine equations.* J. Symbolic Computation 8, 201-216 (1989).

[5] Gau, Y.; *Embedded topological classification of quasi-ordinary singularities.* Mem. American Mathematical Society, vol 74, no 388, (1988).

[6] González Pérez, and P. D., González-Springberg, G.; *Analytical invariants of quasi-ordinary hypersurface singularities associated to divisorial valuations*; Kodai Math. J., 27, no 2, 164-173, (2004).

[7] González Pérez, P. D.; *Quasi-ordinary singularities via toric geometry*; Tesis Doctoral, Universidad de La Laguna, (2000).

[8] González Pérez, P. D.; *The semigroup of a quasi-ordinary hypersurface*; J. Inst. Math. Jussieu, 2 no. 3, 383-399, (2003).

[9] Hefez, A., *Irreducible Plane Curve Singularities, Real and Complex Singularities.* Lectures Notes in Pure and Appl. Math. 232 Dekker, 1-120. New York, (2003).

[10] Hefez, A., Hernandes, M. E.; *Standard Bases for local rings of branches and their modules of differentials.* J. Symbolic Comput. 42, 178-191, (2007).

[11] Hefez, A. and Hernandes, M. E.; *Analytic classification of plane branches up to multiplicity 4*. Journal of Symbolic Computation, 44, 626-634, (2009).

[12] Hernandes, M. E. and Panek N. M. P., *On the $\mathcal{A}$-equivalence of quasi-ordinary parameterizations*. Rev. Mat. Complut. 32, 255-272 (2019).

[13] Hernandes, M. E. and Rodrigues Hernandes, M. E.; *The Analytic Classification of Plane Curves*, Arxiv 2010.04874.

[14] Kiyek, K. and Vicente, J. L.; *On the Jung-Abhyankar theorem*. Archiv der Mathematik 83, 123-134, (2004).

[15] Kreuzer, M. and Robbiano, L.; *Computational Commutative Algebra 1*. Springer-Verlag, (2000).

[16] Lipman, J.; *Quasi-ordinary singularities of embedded surfaces*. Ph.D. dissertation, Harvard Univ., Cambridge, (1965).

[17] Lipman, J.; *Quasi-ordinary singularities of surfaces in* $\mathbb{C}^3$. Proceedings of Symposia in Pure Mathematics, Vol. 40, Part 2, 161-172, (1983).

[18] Lipman, J.; *Topological invariants of quasi-ordinary singularities*. Mem. American Mathematical Society, vol 74, no 388, (1988).

[19] Oh, K.; *Topological types of quasi-ordinary singularities*. Proceedings of the American Mathematical Society, vol 117, no 1, 53-59, (1993).

[20] Panek N. M. P., *Sobre a $\mathcal{A}$-equivalência de Hipersuperfícies Quase Ordinárias*. Tese de doutorado - UEM - PR, (2015).

[21] Popescu-Pampu P.; *On the analytical invariance of the semigroups of a quasi-ordinary hypersurface singularity*. Duke Math. J. 124, no. 1, 67-104, (2004).

[22] Zariski, O.; *Characterization of plane algebroid curves whose module of differentials has maximum torsion*, Proceedings Nat. Acad. of Science U.S.A. 56, 781-786, (1966).

[23] Zariski, O.; *Studies in equisingularity III. Saturation of local rings and equisingularity*, Amer. J. of Mathematics, Vol. 90, 961-1023 (1968).