UNIVERSIDADE ESTADUAL DE MARINGÁ - UEM
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS - CCE
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA - DMA
PROGRAMA DE PÓS GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA - PMA

ROBLEDO MAK'S MIRANDA SETTE

Interpolação de Espaços Métricos

Tese apresentada ao Programa de Pós Graduação em Matemática do Departamento de Matemática do Centro de Ciências Exatas da Universidade Estadual de Maringá, como parte das exigências para a obtenção do título de Doutor em Matemática. Área: Análise.

Maringá - PR
2022

ROBLEDO MAK'S MIRANDA SETTE

Interpolação de Espaços Métricos

Tese apresentada ao Programa de Pós Graduação em Matemática do Departamento de Matemática do Centro de Ciências Exatas da Universidade Estadual de Maringá, como parte das exigências para a obtenção do título de Doutor em Matemática.

Área de Concentração:
Análise.

Orientador:
Eduardo Brandani da Silva.

Versão original
Disponível na biblioteca da UEM

Maringá - PR
2022

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
(Biblioteca Setorial BSE-DMA-UEM, Maringá, PR, Brasil)

Sette, Robledo Mak's Miranda
S495m Interpolação de espaços métricos / Robledo Mak's Miranda Sette. – Maringá, 2022.
xii, 92 f. : il.

Orientador: Prof. Dr. Eduardo Brandani da Silva.
Tese (doutorado) - Universidade Estadual de Maringá, Centro de Ciências Exatas, Programa de Pós-Graduação em Matemática - Área de Concentração: Análise, 2022.

1. Espaços métricos. 2. Espaços de interpolação. 3. Operadores Lipschitz. I. Silva, Eduardo Brandani da, orient. II. Universidade Estadual de Maringá. Centro de Ciências Exatas. Programa de Pós-Graduação em Matemática - Área de Concentração: Matemática Análise. III. Título.

CDD 22.ed. 514.3

Edilson Damasio CRB9-1.123

ROBLÊDO MAK'S MIRANDA SETTE

INTERPOLAÇÃO DE ESPAÇOS MÉTRICOS

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática do Departamento de Matemática, Centro de Ciências Exatas da Universidade Estadual de Maringá, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do título de Doutor em Matemática tendo a Comissão Julgadora composta pelos membros:

COMISSÃO JULGADORA:

Prof. Dr. Eduardo Brandani da Silva - UEM (Presidente)
Prof. Dr. Dicesar Lass Fernandez - IMECC / Unicamp
Prof. Dr. Joedson Silva dos Santos - UFPB
Prof. Dr. Ryuichi Fukuoka - UEM
Prof. Dr. Cesar Adolfo Hernandez Melo - UEM

Aprovado em: 13 de maio de 2022.
Local de defesa: Videoconferência – Google Meet (https://meet.google.com/wxr-njzd-rxq)

Este trabalho é dedicado às crianças adultas que,
quando pequenas, sonharam em se tornar cientistas.

AGRADECIMENTOS

Agradeço aos amigos e ex-professores que sempre estiveram na torcida para que eu concluísse o doutorado que é um sonho para mim desde a infância. Através das suas palavras de apoio eu encontrei forças e coragem pra continuar e acreditar que eu era capaz de trilhar esse caminho.

Agradeço ao meu namorado Hudson que esteve comigo esse tempo me apoiando e me dando o suporte emocional e afetivo e o encorajamento sem os quais eu não conseguiria avançar nos meus projetos. Um sonho quando sonhado a dois está na metade do caminho de virar realidade. Você acreditou na minha capacidade quando eu não tinha tanta certeza dela. Isso fez toda a diferença. Essa conquista é nossa!

Aos meus irmãos, em especial Katiuska e Chico e também à minha cunhada Dani e minhas sobrinhas Ana e Helena: a melhor família que eu poderia ter. Esse trabalho também é de vocês.

Por último e nunca menos importante, ao meu orientador, Brandani. Pela calma e paciência comigo em vários momentos turbulentos que passei, antes e durante essa pandemia. Por compreender minhas dificuldades e "sofrer" junto comigo em vários resultados que quebramos a cabeça para conseguir.

“ - Para onde eu devo ir?
- Para onde você quer ir?
- Para qualquer lugar!
- Então tome qualquer caminho.”
Lewis Carroll *(Alice no País das Maravilhas).*

RESUMO

SETTE, R. S. **Interpolação de Espaços Métricos**. 2022. 89 f. Tese (Doutorado - Programa de Programa de Pós Graduação em Matemática em Análise) - Centro de Ciências Exatas, Universidade Estadual de Maringá, Maringá - PR, 2022.

Nesse trabalho foi desenvolvido um método de interpolação em espaços métricos. Esses espaços de interpolação possuem a propriedade de que preservam a condição de Lipschitz para operadores sob certas circunstâncias. Ainda foi mostrado que esse método, válido em espaços métricos, ainda é válido nos espaços normados sem usar nenhuma estrutura algébrica do espaço. Mais ainda, esse método de interpolação para espaços métricos quando aplicado em espaços normados coincide com o método K de interpolação já conhecido na literatura.

Palavras-chave: 1. Espaços Métricos. 2. Espaços de Interpolação. 3. Operadores Lipschitz.

ABSTRACT

SETTE, R. S. **Interpolation of Metric Spaces**. 2022. 89 f. Thesis (Ph.D. - Postgraduate program in Analysis) - Exact Sciences Center, State University of Maringá, Maringá - PR, 2022.

In this work we developed an interpolation method for metric spaces. These interpolation spaces preserve the Lipschitz condition for operators under certain conditions. We also have shown that this method, valid in metrics spaces, still holds in normed spaces without any algebraic structure required. Furthermore, this interpolation method for metric spaces when applied to normed spaces is equivalent to the fashioned K-method very studied in the literature.

Key-words: 1. Metric Spaces. 2. Interpolation Spaces. 3. Lipschitz Operators.

Lista de Símbolos

A_B:	completamento relativo do espaço métrico (A, d_A) no espaço métrico (B, d_B)
$\Phi_{\theta,q}$:	funcional dado por $\Phi_{\theta,q}(f(t)) = \left(\int_0^\infty (t^{-\theta}\, \lvert f(t)\rvert)^q \frac{dt}{t} \right)^{1/q}$, onde $\theta \in (0,1)$ e $q \geq 1$
$\Gamma_{\theta,q}$:	funcional dado por $\Gamma_{\theta,q}((c_k)_{k\in\mathbb{Z}}) = \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}} (2^{-k\theta}\, \lvert c_k\rvert)^q \right)^{1/q}$, onde $\theta \in (0,1)$ e $q \geq 1$
$\lambda_{\theta,q}$:	Espaço das Sequências $(c_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ tais que $\Gamma_{\theta,q}((c_k)) < \infty$ munido da norma $\| \, (c_k) \, \|_{\lambda_{\theta,q}} = \Gamma_{\theta,q}((c_k))$
$\overline{A} = (A_0, A_1)$:	par de espaços normados compatíveis
$(X_0, X_1)_X$:	par de espaços métricos compatíveis com relação ao espaço (X, d_X)
$\overline{A}^K_{\theta,q}$:	espaço interpolado normado obtido através do método K com norma denotada por $\| \cdot \|_{\theta,q,K}$
$\overline{A}^J_{\theta,q}$:	espaço interpolado normado obtido através do método J com norma denotada por $\| \cdot \|_{\theta,q,J}$
$\overrightarrow{X}^K_{\theta,q}$:	espaço interpolado métrico obtido através do método K_M com métrica denotada por $\mathcal{D}_{\theta,q}$
$\overrightarrow{X}^J_{\theta,q}$:	espaço interpolado métrico obtido através do método J_M com métrica dada por $d_{\theta,q}$
$M_{\theta,q}$:	constante dada por $M_{\theta,q} = \Phi_{\theta,q}(\min\{1, t\})$

$\gamma_{\theta,q,t}$: constante dada por

$$\gamma_{\theta,q,t} = \left(\sum_{i \in \mathbb{Z}} (2^{i\theta} \min\{1, t/2^i\})^p \right)^{1/p} = \left(\frac{t^p \, 2^{N_t(\theta-1)p}}{1 - 2^{(\theta-1)p}} + \frac{2^{(N_t-1)\theta p}}{2^{\theta p} - 1} \right)^{1/p},$$

onde p é o expoente conjugado de q e N_t é o menor número inteiro tal que $t \leq 2^{N_t}$.

$(x_n^{x,y})_{adm}$: sequência ligante admissível de x a y no conjunto $X_0 \cup X_1$

$\overline{d_X}$: função distância definida por $\overline{d_X}(x,y) := \inf \lim_{n\to\infty} d_X(x_n, y_n)$, onde o ínfimo é tomado sobre todas (x_n) e (y_n) sequências aproximantes de x e de y no espaço (X, d_X)

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

A Teoria da Interpolação de Espaços Normados foi inspirada em dois teoremas específicos para espaços de funções, que são o Teorema de Riesz-Thorin e o Teorema de Marcinkiewicz.

O problema que permeia a essência da teoria de interpolação de espaços normados é estabelecer condições e garantias para que:

Dados os espaços normados $(X_0, \|\cdot\|_{X_0})$, $(X_1, \|\cdot\|_{X_1})$, $(Y_0, \|\cdot\|_{Y_0})$ *e* $(Y_1, \|\cdot\|_{Y_1})$, *com* $X_0 \cap X_1 \neq \emptyset$ *e* $Y_0 \cap Y_1 \neq \emptyset$, *existam duas famílias de subespaços*

$$\{(X_\alpha, \|\cdot\|_\alpha)\}_{\alpha \in L}$$

e

$$\{(Y_\alpha, \|\cdot\|_\alpha)\}_{\alpha \in L},$$

onde L *é um conjunto de índices, tais que*

- $X_0 \cap X_1 \subseteq X_\alpha \subseteq X_0 + X_1$ *e* $Y_0 \cap Y_1 \subseteq Y_\alpha \subseteq Y_0 + Y_1$, *com inclusões contínuas para todo* $\alpha \in L$*;*

- *Se* $T : X_0 + X_1 \to Y_0 + Y_1$ *é um operador linear e contínuo e* $T|_{X_0} : X_0 \to Y_0$ *e* $T|_{X_1} : X_1 \to Y_1$ *são lineares e contínuos, então* $T|_{X_\alpha} : X_\alpha \to Y_\alpha$ *é linear e contínuo para todo* $\alpha \in L$ *com relação às normas desses espaços.*

Vamos enunciar os teoremas de Riesz-Thorin e Marcinkiewicz como feito em [2] para que o leitor possa compreender suas similaridades e peculiaridades.

Teorema de Riesz-Thorin: (Ver [18] e [2]) Sejam (X, μ) e (Y, ν) são espaços de medida, $p_0, p_1 \in [1, \infty]$, com $p_0 \neq p_1$, e $q_0, q_1 \in [1, \infty]$, com $q_0 \neq q_1$. Se $T : L_{p_0}(X, \mu) + L_{p_1}(X, \mu) \to L_{q_0}(Y, \nu) + L_{q_1}(Y, \nu)$ é linear e contínuo e $T_k = T|_{L_{p_k}} : L_{p_k}(X, \mu) \to L_{q_k}(Y, \nu)$ é linear e contínuo com norma M_k, para $k = 0, 1$, então $T_{p,q} = T|_{L_p} : L_p(X, \mu) \to L_q(Y, \nu)$ é contínuo e tem norma M satisfazendo

$$M \leq M_0^{1-\theta} M_1^{\theta},$$

onde $\theta \in (0, 1)$ e

$$\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}$$

e

$$\frac{1}{q} = \frac{1-\theta}{q_0} + \frac{\theta}{q_1}.$$

Agora, definamos elementos básicos para o teorema de Marcinkiewicz:

Sejam (X, μ) e (Y, ν) são espaços de medida, $p \in [1, \infty]$, $q \in [1, \infty)$ e $T : L_p(X, \mu) \to Y$ um operador. Dizemos que T é do **tipo fraco** (p, q) se existir uma constante $C > 0$ de tal modo que

$$\nu(\{y \in Y;\ \ |T(f(y))| > \lambda\}) \leq \left[\frac{C \ \parallel f \parallel_{L_p}}{\lambda}\right]^q,$$

qualquer que seja $\lambda > 0$. Se $T : L_p(X, \mu) \to L_q(Y, \nu)$ é contínuo, dizemos que T é do **tipo forte** (p, q).

Teorema de Marcinkiewicz: (Ver [19] e [2]) Sejam $p_0 \neq p_1$, $q_0 \neq q_1$ e $T : L_{p_0}(X, \mu) + L_{p_1}(X, \mu) \to L_{q_0}(Y, \nu) + L_{q_1}(Y, \nu)$, um operador sublinear do tipo fraco (p_k, q_k), com $k = 0, 1$. Se $\theta \in (0, 1)$,

$$\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1},$$

$$\frac{1}{q} = \frac{1-\theta}{q_0} + \frac{\theta}{q_1}$$

e $p \leq q$, então

$$T : L_p(X, \mu) \to L_q(Y, \nu)$$

é contínuo do tipo forte (p, q).

Há muitas diferenças entre os dois teoremas acima. O teorema de Riesz-Thorin é aplicado em espaços vetoriais de funções sobre o corpo dos complexos. Para o caso de escalares reais são necessárias algumas adaptações. Já o teorema de Marcinkiewicz não faz distinção entre o corpo de escalares. Outra diferença entre eles é que o teorema de Riesz-Thorin age sobre operadores lineares, enquanto que o teorema de Marcinkiewicz age sobre operadores sublineares que é uma classe mais abrangente de operadores. O teorema de Marcinkiewicz exige apenas continuidade de operadores do tipo fracos, porém exige que os números p e q satisfaçam $p \leq q$ que é muito mais restritiva que no teorema de Riesz-Thorin.

Como aplicação imediata dos dois teoremas anteriores, seja $\mathcal{F}$ a transformada de *Fourier*, com $\mathbb{R}^n = X = Y$ e medida dada por $\mu = \nu = dx$ (medida de Lebesgue usual), definida por

$$\mathcal{F}(f)(y) := \mathcal{F}_f(y) = \widehat{f}(y) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-i\langle x,y\rangle} dx, \tag{1}$$

onde $\langle \cdot, \cdot \rangle$ é o produto interno euclidiano de $\mathbb{R}^n$.
Assim, temos

$$|\mathcal{F}_f(y)| = \left| \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-i\langle x,y\rangle} dx \right| \leq \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)| dx \tag{2}$$

e

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\mathcal{F}_f(y)|^2 dy = (2\pi)^n \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^2 dx, \tag{3}$$

pela *Fórmula de Parseval*.
A desigualdade (2) nos diz que o operador $\mathcal{F}$ é contínuo de L_1 para L_∞, com norma igual

a 1 e a igualdade (3) diz que $\mathcal{F}$ é contínuo de L_2 para L_2, com norma $(2\pi)^{\frac{n}{2}}$.
Usando o teorema de *Riesz-Thorin*, concluímos que $\mathcal{F}$ é contínuo de L_p em L_q, com

$$\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{1} + \frac{\theta}{2}, \quad \frac{1}{q} = \frac{1-\theta}{\infty} + \frac{\theta}{2},$$

onde $\theta \in (0,1)$.
Eliminando θ, vemos que $1 = \dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q}$, ou seja, q é o expoente conjugado de p, com $1 < p < 2$ (porque $\theta \in (0,1)$). Ainda pelas estimativas para a norma do operador, temos

$$\| \mathcal{F} \| \leq (2\pi)^{\frac{n\theta}{2}} = (2\pi)^{\frac{n}{q}}.$$

Essa desigualdade é conhecida como *Desigualdade de Young-Hausdorff*.

Se $1 < p < 2$, usando o teorema de Marcinkiewicz obtemos a desigualdade

$$\| \mathcal{F}(f) \|_{L_{p(w)}} \leq C \ \| f \|_{L_p},$$

onde $L_{p(w)}$ são os espaços L_p com função peso $w(y) = \| y \|^{-n(2-p)}$.

Outros exemplos de desigualdades e estimativas obtidas através da teoria da interpolação são vistos em [13].

No início dos anos sessenta do século XX, Lions, Peetre, Calderón, Gagliardo, Krein e outros autores estavam investigando a validade desses teoremas para pares de espaços de Banach mais gerais que os espaços de funções. Dois métodos principais de interpolação foram desenvolvidos, o método complexo devido à Calderón [4], e o método real devido aos trabalhos de Lions e de Peetre, como por exemplo [12].

Em meados dos anos sessenta e início dos setenta, apareceram trabalhos generalizando o método real em diversas direções.

O método real de interpolação para espaços normados é caracterizado por dois métodos de interpolação, o método J e o método K, obtidos através dos funcionais J e K, e devidos a Peetre [14]. Na mesma época, outros foram criados, como por exemplo o métodos das médias, o método do traço e a interpolação complexa devida a Calderón, como já mencionado.

Os métodos K e J são equivalentes no caso de espaços de normados, no sentido de que geram a mesma família de espaços interpolados e esses espaços mantêm entre si normas equivalentes. Ainda nessa direção, os métodos do traço e da média também são equivalentes ao método K e, consequentemente, equivalentes entre si.

Uma construção bastante geral foi obtida por Aronszajn e Gagliardo em [1], onde introduziram uma construção abstrata de espaços de interpolação englobando os métodos real e complexo.

Em uma outra direção, Peetre e Sparr em [16] desenvolveram uma teoria de interpolação para grupos abelianos normados. Espaços quase-Banach também são frequentemente considerados nos métodos de interpolação. Peetre em [14] desenvolveu o método real para espaços normados.

Por outro lado, uma teoria de espaços de interpolação para espaços métricos nunca foi devidamente desenvolvida. Em [15], Peetre faz alguns comentários, mas com poucos detalhes.

Uma tentativa mais séria foi feita por Jan Gustavsson em [10], em um material não publicado na forma de artigo. Esse texto possui excelentes idéias, mas também pontos pouco claros. Porém, é o único material que encontramos sobre o assunto, e é nossa principal referência.

No nosso trabalho conseguimos criar novos métodos de interpolação nos espaços normados, como também através deles conseguimos estender a essência da interpolação a uma classe maior de objetos: os espaços métricos. O método desenvolvido neste texto fornece uma maneira de interpolar operadores Lipschitz entre espaços métricos que é um caso mais geral que um operador linear entre espaços normados. Para construir espaços de interpolação usamos a técnica de completar espaços métricos relativamente a outros, usando as ideias de Frink [5] para criar métricas através de funções distância.

Os principais resultados desse texto são a Proposição 3.2.1 de compacidade de operadores Lipschitz que consta no capítulo três e todos os resultados do capítulo quatro, que constituem uma análise comparativa entre a interpolação usual real para espaços normados e a interpolação para espaços métricos desenvolvida aqui. Nesse contexto de comparação fica evidente que o método de interpolação de espaços métricos estende o método real de interpolação de espaços normados. Além disso, mostramos que é possível aumentar, no sentido da inclusão, o espaço interpolado normado real, contanto que exista um espaço normado maior que o espaço soma de modo que os espaços componentes estejam continuamente inclusos neste espaço.

Este trabalho segue basicamente as linhas sugestivas do trabalho de [10]. Esse método de interpolação tem a vantagem de depender apenas da estrutura métrica do espaço ambiente e não requer nenhuma estrutura algébrica.

O primeiro capítulo é uma coletânea de resultados básicos da teoria da interpolação em espaços normados e visa familiarizar o leitor com a linguagem desse assunto. Nos atemos apenas aos métodos J e K reais. Para o leitor interessado em conhecer de forma mais aprofundada a teoria de interpolação, uma excelente referência é o livro *Interpolation Spaces: An Introduction* dos autores *Bergh* e *Löfström* [2]. Em particular, para a teoria de interpolação em espaços normados a principal referência é [15].

No segundo capítulo introduzimos a interpolação em espaços métricos, que é o assunto principal deste trabalho, definindo e explorando propriedades básicas dessa técnica. Ao longo desse capítulo e do seguinte, buscamos demonstrar as propriedades comuns à interpolação de espaços normados, ou seja, as propriedades que puderam ser generalizadas para os espaços métricos.

O terceiro capítulo é dedicado a estudar os problemas que surgem na teoria de interpolação em espaços normados, especialmente a interpolação de operadores lineares compactos. Mostramos que é possível generalizar resultados importantes de compacidade de operadores lineares entre espaços normados aos operadores Lipschitz compactos entre espaços métricos. Alguns desses resultados são demonstrados para os K_M e J_M espaços.

O quarto capítulo faz a conexão efetiva de generalização dessa nova abordagem da interpolação. Nele, mostramos que o K-funcional do caso métrico gera, fixados $\theta \in (0, 1)$ e $q \in [1, \infty)$, um espaço de interpolação quando a métrica é dada pela norma, que contém continuamente o espaço de interpolação usual fornecido pelos funcionais K e J do caso normado. Portanto, a interpolação métrica além de generalizar a interpolação em espaços normados, também cria um método novo de interpolação para espaços normados que não depende de nenhuma estrutura algébrica.

O quinto capítulo tem o intuito de mostrar que a interpolação métrica além de generalizar a interpolação em espaços normados, ainda serve para casos de interpolação de espaços normados que não podem ser abordados pela teoria usual, já que o corpo de escalares não é $\mathbb{R}$ nem $\mathbb{C}$. Mostramos ainda uma aplicação rápida desse tipo de interpolação na teoria da informação, fornecendo estimativas para objetos, em específico, para a ε-Capacidade.

CAPÍTULO 1

INTERPOLAÇÃO REAL DE ESPAÇOS NORMADOS

Neste capítulo introduzimos notações e fatos básicos da teoria de interpolação para espaços normados e espaços de Banach.

Atualmente existe um tratamento mais formal e generalista para a teoria de interpolação usando a linguagem de categorias e funtores. Uma boa referência para isso está no livro dos autores *Brudnyî* e *Krugljak* [3].

Nosso foco neste trabalho é interpolar com uma linguagem mais familiar com a análise funcional.

1.1 Preliminares

Lema 1.1.1. *Um espaço normado A é um espaço de Banach se, e somente se, toda série absolutamente convergente é ainda convergente.*

Demonstração:

Seja (x_n) uma sequência em A tal que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \| x_n \| < \infty.$$

Fixado $k \in \mathbb{N}$, seja $S_k = \displaystyle\sum_{n=1}^{k} x_n$.

Como $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \| x_n \| < \infty$, segue, usando a desigualdade triangular, que (S_k) é uma sequência de Cauchy. Como A é Banach, existe $S \in A$ tal que $\displaystyle\lim_{k\to\infty} S_k = S$.

Mas $S = \displaystyle\lim_{k\to\infty} S_k = \sum_{n=1}^{\infty} x_n$.

Reciprocamente, seja (x_n) uma sequência de Cauchy em A. Escolhamos agora uma subsequência (x_{n_j}) tal que

$$\| x_{n_{j+1}} - x_{n_j} \| < 2^{-j}.$$

Assim,

$$\sum_{j=1}^{\infty} \| x_{n_{j+1}} - x_{n_j} \| \leq \sum_{j=1}^{\infty} 2^{-j} = 1 < \infty.$$

Com isso, por hipótese, existe $y \in A$ tal que

$$\sum_{j=1}^{\infty} x_{n_{j+1}} - x_{n_j} = y.$$

Como a série é telescópica, segue $\lim_{j \to \infty} x_{n_j} = x_{n_1} + y \in A$. Como (x_n) é uma sequência de Cauchy que possui uma subsequência convergente, segue que (x_n) também converge para $y + x_{n_1}$. Logo, A é um espaço de Banach.

■

Definição 1.1.1. Sejam A_0 e A_1 espaços vetoriais normados. Diremos que A_0 **e** A_1 **são pares de espaços normados compatíveis** se existir um espaço vetorial topológico U com uma topologia Hausdorff, de modo que A_0 e A_1 sejam subespaços vetoriais de U, com cada inclusão sendo contínua.

Observação 1.1.1.

- Se A_0 e A_1 são compatíveis, então podemos definir $A_0 + A_1$ e $A_0 \cap A_1$ de modo usual;
- A condição de que U seja um espaço topológico de Hausdorff é usada para garantir unicidade de limites e a positividade de normas como visto no lema seguinte.

Lema 1.1.2. *Se A_0 e A_1 são espaços normados compatíveis, então*

a) $A_0 \cap A_1$ *é um espaço normado com norma dada por*

$$\| a \|_{A_0 \cap A_1} := \max(\| a \|_{A_0}, \| a \|_{A_1});$$

b) $A_0 + A_1$ *é um espaço normado com norma dada por*

$$\| a \|_{A_0 + A_1} := \inf_{a_0 + a_1 = a} \{\| a_0 \|_{A_0} + \| a_1 \|_{A_1};\ \ a_0 \in A_0,\ a_1 \in A_1\};$$

c) Se A_0 *e* A_1 *são completos, então* $A_0 \cap A_1$ *é completo;*

d) Se A_0 *e* A_1 *são completos, então* $A_0 + A_1$ *é completo.*

Demonstração:

a) $\| \cdot \|_{A_0 \cap A_1}$ *é uma norma em* $A_0 \cap A_1$.
Só mostraremos a desigualdade triangular.
Sejam $a,\, b \in A_0 \cap A_1$. Então,

$$\begin{aligned} \| a+b \|_{A_0\cap A_1} &= \max(\| a+b \|_{A_0}, \| a+b \|_{A_1}) \leq \\ &\leq \max(\| a \|_{A_0} + \| b \|_{A_0}, \| a \|_{A_1} + \| b \|_{A_1}) \leq \\ &\leq \max(\| a \|_{A_0}, \| a \|_{A_1}) + \max(\| b \|_{A_0}, \| b \|_{A_1}) = \\ &= \| a \|_{A_0\cap A_1} + \| b \|_{A_0\cap A_1}\ . \end{aligned}$$

b) $\| \cdot \|_{A_0 + A_1}$ *é uma norma em* $A_0 + A_1$.
Só mostraremos positividade e a desigualdade triangular.
Para a positividade, seja $a \in A_0 + A_1$ tal que $\| a \|_{A_0+A_1} = 0$.
Para cada $n \in \mathbb{N}$ existem $a_{0,n} \in A_0$ e $a_{1,n} \in A_1$ tais que

$$a = a_{0,n} + a_{1,n}, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

e

$$\| a_{0,n} \|_{A_0} + \| a_{1,n} \|_{A_1} < 1/n, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Logo,

$$\lim_{n\to\infty} a_{i,n} = 0, \quad i = 0, 1.$$

Da inclusão contínua em U, que é Hausdorff, segue que

$$a = \lim_{n\to\infty} a_{0,n} + a_{1,n} = 0 + 0 = 0.$$

Para a desigualdade triangular, sejam $a,\, b \in A_0 + A_1$. Então,

$$\| a+b \|_{A_0+A_1} = \inf\{\| x \|_{A_0} + \| y \|_{A_1};\ x+y = a+b,\ x \in A_0,\ y \in A_1\}.$$

Como $a,\, b \in A_0 + A_1$, existem $a_0,\, b_0 \in A_0$ e $a_1,\, b_1 \in A_1$, tais que $a + b = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)$.
Desse modo,

$$\begin{aligned} \| a+b \|_{A_0+A_1} &= \inf\{\| x \|_{A_0} + \| y \|_{A_1};\ x+y = a+b,\ x \in A_0,\ y \in A_1\} \leq \\ &\leq \| a_0 + b_0 \|_{A_0} + \| a_1 + b_1 \|_{A_1} \leq \\ &\leq (\| a_0 \|_{A_0} + \| a_1 \|_{A_1}) + (\| b_0 \|_{A_0} + \| b_1 \|_{A_1}). \end{aligned}$$

Tomando os ínfimos convenientes, temos a desigualdade desejada.

c) A_0 *e* A_1 *completos* $\Rightarrow A_0 \cap A_1$ *completo.*
Seja (x_n) uma sequência de Cauchy em $A_0 \cap A_1$.
É fácil ver que pela definição da norma em $A_0 \cap A_1$, a sequência (x_n) é de Cauchy em A_0 e também em A_1. Como ambos são completos, existem $x_0 \in A_0$ e $x_1 \in A_1$ tais que (x_n) converge a x_0 em A_0 e (x_n) converge a x_1 em A_1.
Como os espaços são compatíveis, a topologia de U é Hausdorff, e portanto, o limite é único, garantindo assim que $x_0 = x_1$ e que (x_n) tende a $x_0 = x_1$ em $A_0 \cap A_1$.
Portanto, $A_0 \cap A_1$ é completo.

d) *A_0 e A_1 completos $\Rightarrow A_0 + A_1$ completo.*
Seja (a_n) uma sequência em $A_0 + A_1$ tal que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \| a_n \|_{A_0+A_1} < \infty.$$

Para cada n natural, existem $x_n \in A_0$ e $y_n \in A_1$ tais que $a_n = x_n + y_n$ e

$$\| a_n \|_{A_0+A_1} \leq \| x_n \|_{A_0} + \| y_n \|_{A_1} < \| a_n \|_{A_0+A_1} + 2^{-n}.$$

Assim, por hipótese, como $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \| a_n \|_{A_0+A_1} < \infty$, temos

$$\sum_{n=1}^{\infty} \| x_n \|_{A_0} + \sum_{n=1}^{\infty} \| y_n \|_{A_1} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \| a_n \|_{A_0+A_1} + 1 < \infty.$$

Como A_0 e A_1 são espaços de Banach, pelo Lema 1.1.1, existem $x \in A_0$ e $y \in A_1$ tais que

$$\lim_{n\to\infty} \left\| x - \sum_{k=1}^{n} x_k \right\|_{A_0} = \lim_{n\to\infty} \left\| y - \sum_{k=1}^{n} y_k \right\|_{A_1} = 0.$$

Fixado n natural, temos

$$\left\| (x+y) - \sum_{k=1}^{n} a_k \right\|_{A_0+A_1} \leq \left\| x - \sum_{k=1}^{n} x_k \right\|_{A_0} + \left\| y - \sum_{k=1}^{n} y_k \right\|_{A_1}.$$

Tomando o limite com $n \to \infty$, temos

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = x + y \in A_0 + A_1.$$

■

1.2 Espaços de Interpolação

A partir daqui, dado um par $(A_0, A_1) = \overline{A}$ de espaços normados compatíveis, iremos denotar

$$\Delta(\overline{A}) := A_0 \cap A_1$$

e

$$\Sigma(\overline{A}) := A_0 + A_1,$$

com as normas definidas anteriormente.

Agora, definiremos os elementos básicos para o ambiente da interpolação em espaços normados.

Definição 1.2.1. Seja $\overline{A} = (A_0, A_1)$ um par de espaços normados compatíveis. Um espaço A é chamado de **espaço intermediário** para A_0 e A_1 se

$$\Delta(\overline{A}) \subseteq A \subseteq \Sigma(\overline{A})$$

e as inclusões são contínuas.

Exemplo 1.2.1. Sejam $1 < p, q < \infty$ e $\theta \in [0, 1]$. Se $\dfrac{1}{r} = \dfrac{1-\theta}{p} + \dfrac{\theta}{q}$, pela *desigualdade de Lyapunov*,

$$L_p \cap L_q \subseteq L_r \subseteq L_p + L_q,$$

com inclusões contínuas.

Definição 1.2.2. Dizemos que um espaço intermediário A com relação ao par compatível $\overline{A} = (A_0, A_1)$ é um **espaço de interpolação** se para todo operador linear contínuo

$$T : A_0 + A_1 \to A_0 + A_1,$$

tal que as restrições

$$T_k = T|_{A_k} : A_k \to A_k, \quad k = 0, 1$$

também são lineares e contínuas, então tem-se $T_A = T|_A : A \to A$ é linear e contínua.

Podemos estender a ideia de espaço de interpolação no seguinte sentido

Definição 1.2.3. Sejam A um espaço intermediário em relação ao par (A_0, A_1) e B um espaço intermediário em relação ao par (B_0, B_1). Dizemos que A **e** B **são espaços de interpolação com respeito aos pares** (A_0, A_1) **e** (B_0, B_1), respectivamente, se para todo operador T tal que

$$T : A_0 + A_1 \to B_0 + B_1$$

e

$$T_k = T|_{A_k} : A_k \to B_k, \quad k = 0, 1$$

são lineares e contínuos, então $T_A = T|_A : A \to B$ é linear e contínuo.

Observação 1.2.1. Claramente $\Delta(\overline{A})$ e $\Delta(\overline{B})$ são espaços de interpolação com respeito a $\overline{A}$ e $\overline{B}$. O mesmo vale para $A = \Sigma(\overline{A})$ e $B = \Sigma(\overline{B})$.

Definição 1.2.4. Sejam A e B dois espaços de interpolação com relação aos pares compatíveis (A_0, A_1) e (B_0, B_1), respectivamente. Se, para todo operador linear T : $A_0 + A_1 \to B_0 + B_1$ contínuo, com restrições $T_k = T|_{A_k} : A_k \to B_k$, para $k \in \{0, 1\}$, também contínuas, então

$$\| T \|_{A,B} \leq k \max\{\| T \|_{A_0,B_0}, \| T \|_{A_1,B_1}\},$$

dizemos que A **e** B **são espaços de interpolação uniformes**. No caso em que $k = 1$, dizemos que a interpolação é exata.
Os espaços de interpolação A **e** B **são de expoente** θ $(0 < \theta < 1)$ se para T nas mesmas condições acima, tem-se

$$\| T \|_{A,B} \leq k \| T \|_{A_0,B_0}^{1-\theta} \cdot \| T \|_{A_1,B_1}^{\theta}.$$

1.3 Os Funcionais K e J

Definimos nesta seção os funcionais introduzidos por *Peetre* em seus trabalhos sobre interpolação.

Fixado $t > 0$, se (A_0, A_1) é um par de espaços normados, definimos os funcionais

$$K(t, a) := \inf_{a_0 + a_1 = a} \| a_0 \|_{A_0} + t \| a_1 \|_{A_1}, \quad \forall a \in A_0 + A_1,$$

e

$$J(t, a) := \max\{\| a \|_{A_0}, t \| a \|_{A_1}\}, \quad \forall a \in A_0 \cap A_1.$$

É imediato que esses funcionais são normas nesses espaços e a demonstração é análoga à demonstração já feita para quando $t = 1$.

Além disso, esses funcionais satisfazem

- $K(t, a) \leq \max\{1, t/s\}\, K(s, a)$ para todos $t, s \in (0, \infty)$ e todo $a \in A_0 + A_1$;
- $J(t, a) \leq \max\{1, t/s\} J(s, a)$ para todos $t, s \in (0, \infty)$ e todo $a \in A_0 \cap A_1$;
- $K(t, a) \leq \min\{1, t/s\}\, J(s, a)$, para todos $t, s \in (0, \infty)$ e todo $a \in A_0 \cap A_1$.

Agora, vamos definir novos espaços através de um operador e esses espaços serão espaços de interpolação.

Definição 1.3.1. Para $0 < \theta < 1$ e $q \in [1, \infty]$, definimos, para uma função mensurável ϕ, o funcional

$$\Phi_{\theta,q}(\phi) := \begin{cases} \left[\displaystyle\int_0^\infty [t^{-\theta} |\phi(t)|]^q \frac{dt}{t} \right]^{\frac{1}{q}}, & \text{se } q < \infty \\ \\ \displaystyle\sup_{t>0} \{t^{-\theta} |\phi(t)|\}, & \text{se } q = \infty\,. \end{cases}$$

Lema 1.3.1. *Se $f:(0,\infty)\to[0,\infty)$ é uma função mensurável e $s>0$, então*

$$\Phi_{\theta,q}(f(t/s)) = s^{-\theta}\,\Phi_{\theta,q}(f(t))\,.$$

Demonstração:

Com efeito, seja $t = s\,u$. Então, temos $dt = s\,du$ e vale

$$\begin{aligned}\Phi_{\theta,q}(f(t/s)) &= \left[\int_0^\infty [t^{-\theta}f(t/s)]^q\frac{dt}{t}\right]^{\frac{1}{q}} = \left[\int_0^\infty [(su)^{-\theta}f(u)]^q\frac{sdu}{su}\right]^{\frac{1}{q}}\\ &= s^{-\theta}\left[\int_0^\infty [u^{-\theta}f(u)]^q\frac{du}{u}\right]^{\frac{1}{q}} = s^{-\theta}\,\Phi_{\theta,q}(f(t)).\end{aligned}$$

■

De modo análogo, para o caso discreto, temos a definição seguinte.

Definição 1.3.2. Para $0<\theta<1$ e $q\in[1,\infty]$, definimos, para uma sequência $c=(c_k)_{k\in\mathbb{Z}}$, o funcional

$$\Gamma_{\theta,q}(c) := \begin{cases}\left[\displaystyle\sum_{k=-\infty}^{\infty}[2^{-k\theta}|c_k|]^q\right]^{\frac{1}{q}}, & \text{se } q<\infty\\[2ex] \displaystyle\sup_{k\in\mathbb{Z}}\,[2^{-k\theta}|c_k|], & \text{se } q=\infty\,.\end{cases}$$

O conjunto das sequências $c=(c_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ tais que $\Gamma_{\theta,q}(c)<\infty$ é um espaço vetorial normado que denotaremos por $\lambda_{\theta,q}$, com norma $\|\,(c_k)\,\|_{\lambda_{\theta,q}} = \Gamma_{\theta,q}((c_k))$.

1.3.1 O K-Espaço

A primeira família de espaços de interpolação é dada por

Definição 1.3.3 (O K-espaço)**.** Sejam $\theta\in(0,1)$ e $q\in[1,\infty]$. Definimos o K**-espaço**, denotado por $\overline{A}^K_{\theta,q}$, como sendo o conjunto

$$\overline{A}^K_{\theta,q} := \{a\in A_0+A_1;\ \Phi_{\theta,q}(K(\cdot,a))<\infty\}\,.$$

Proposição 1.3.1. *Se $\theta\in(0,1)$ e $q\in[1,\infty]$, então o conjunto $\overline{A}^K_{\theta,q}$, definido como acima é um subespaço vetorial de A_0+A_1, munido com a norma*

$$\|\,a\,\|_{\theta,q,K} := \Phi_{\theta,q}(K(\cdot,a))\,.$$

Demonstração:

É imediato que $0 \in \overline{A}^K_{\theta,q}$. Mostremos que se $a, b \in \overline{A}^K_{\theta,q}$ e $\lambda \in \mathbb{R}$, então $a+b, \lambda\, a \in \overline{A}^K_{\theta,q}$.

Temos

$$\begin{aligned} \| \, a+b \, \|_{\theta,q,K} &= \Phi_{\theta,q}(K(\cdot, a+b)) \leq \Phi_{\theta,q}(K(\cdot, a)) + \Phi_{\theta,q}(K(\cdot, b)) \\ &= \| \, a \, \|_{\theta,q,K} + \| \, b \, \|_{\theta,q,K} \ . \end{aligned} \tag{1.1}$$

Essa desigualdade já mostra que $a + b \in \overline{A}^K_{\theta,q}$ e é a desigualdade triangular.

A positividade vem de $K(t, a) \leq \max\{1, t/s\}\, K(s, a)$, com $t = 1$ considerando que $\min\{1, s\} = (\max\{1, 1/s\})^{-1}$, pois decorre disso que

$$\min\{1, s\}\, K(1, a) \leq K(s, a).$$

Aplicando $\Phi_{\theta,q}$ na desigualdade acima, na variável s

$$\Phi_{\theta,q}(\min\{1, \cdot\})\, K(1, a) \leq \| \, a \, \|_{\theta,q,K} \ .$$

Como $M_{\theta,q} = \Phi_{\theta,q}(\min\{1, \cdot\}) \in \mathbb{R}$, segue a positividade. Resta agora mostrar que $\lambda\, a \in \overline{A}^K_{\theta,q}$.

Com efeito,

$$\| \, \lambda\, a \, \|_{\theta,q,K} = \Phi_{\theta,q}(K(\cdot, \lambda\, a)) = |\lambda| \Phi_{\theta,q}(K(\cdot, a)) = |\lambda| \ \| \, a \, \|_{\theta,q,K} \ .$$

Esses fatos demonstram que $\overline{A}^K_{\theta,q}$ é um subespaço vetorial de $A_0 + A_1$ com norma própria dada por $\| \cdot \|_{\theta,q,K}$.

■

Proposição 1.3.2. *Se $\theta \in (0, 1)$ e $q \in [1, \infty]$, então o subespaço $\overline{A}^K_{\theta,q}$ é um espaço de interpolação para o par (A_0, A_1).*

Demonstração:

Inicialmente, mostremos que é um espaço intermediário, isto é, que

$$A_0 \cap A_1 \subseteq \overline{A}^K_{\theta,q} \subseteq A_0 + A_1,$$

com inclusões contínuas:

Como $K(t, a) \leq \min\{1, t/s\}\, J(s, a)$, para todos $t, s \in (0, \infty)$ e todo $a \in A_0 \cap A_1$, segue que

$$K(t, a) \leq \min\{1, t\}\, J(1, a),$$

para todo $t > 0$ e todo $a \in A_0 \cap A_1$.

Assim, aplicando o funcional $\Phi_{\theta,q}$, na variável t, temos

$$\| \, a \, \|_{\theta,q,K} \leq M_{\theta,q}\, J(1, a).$$

Como $M_{\theta,q} = \Phi_{\theta,q}(\min\{1, \cdot\}) \in \mathbb{R}$, essa desigualdade significa que $A_0 \cap A_1$ está continuamente contida em $\overline{A}^K_{\theta,q}$.

De modo análogo à demonstração da positividade da norma $\| \cdot \|_{\theta,q,K}$, temos

$$M_{\theta,q}\, K(1,a) \leq \| \, a \, \|_{\theta,q,K}$$

e isso significa que $\overline{A}^K_{\theta,q}$ está continuamente contido em $A_0 + A_1$. Logo,

$$A_0 \cap A_1 \subseteq \overline{A}^K_{\theta,q} \subseteq A_0 + A_1$$

com inclusões contínuas. Portanto, $\overline{A}^K_{\theta,q}$ é um espaço intermediário.

Agora, mostremos que esse espaço é de interpolação. Para tanto, sejam (B_0, B_1) um par de espaços normados compatíveis e T um operador linear tal que $T_i = T|_{A_i} : A_i \to B_i$ é contínuo e $\| \, T_i \, \|_{A_i,B_i} = M_i$, com $i = 0, 1$. Vale

$$\begin{aligned} K(t, T(a); \overline{B}) &= \inf_{b_0+b_1=T(a)} \| \, b_0 \, \|_{B_0} + t \, \| \, b_1 \, \|_{B_1} \\ &\leq \| \, T(a_0) \, \|_{B_0} + t \, \| \, T(a_1) \, \|_{B_1} \leq M_0 \, \| \, a_0 \, \|_{A_0} + t\, M_1 \, \| \, a_1 \, \|_{A_1} \\ &= M_0 \left[\, \| \, a_0 \, \|_{A_0} + \frac{t\, M_1}{M_0} \, \| \, a_1 \, \|_{A_1} \right]. \end{aligned}$$

Consequentemente,

$$K(t, T(a); \overline{B}) \leq M_0\, K\left(\frac{t\, M_0}{M_1}, a; \overline{A} \right).$$

Aplicando o operador $\Phi_{\theta,q}$ e tendo em vista o Lema 1.3.1, vale

$$\| \, T(a) \, \|_{\theta,q,K;\overline{B}} \leq M_0^{\theta}\, M_1^{1-\theta} \, \| \, a \, \|_{\theta,q,K;\overline{A}} \, .$$

Portanto, $\overline{A}^K_{\theta,q}$ é um espaço de interpolação.

■

Note que pelo Lema 1.3.1 temos

$$K(s,a) \leq C_{\theta,q}\, s^{\theta} \, \| \, a \, \|_{\theta,q,K}, \quad \forall a \in \overline{A}^K_{\theta,q} \tag{1.2}$$

e essa desigualdade é devida à aplicação do funcional $\Phi_{\theta,q}$ na desigualdade

$$\min\{1, t/s\}\, K(s,a) \leq K(t,a)$$

na variável t.

Existe uma versão em variável discreta da definição do K-espaço, como segue na proposição seguinte.

Proposição 1.3.3 (Teorema da Discretização). *Se $a \in A_0 + A_1$, seja*

$$\alpha_k := K(2^k, a)\,,$$

para cada $k \in \mathbb{Z}$. Então, $a \in \overline{A}^K_{\theta,q}$ se, e somente se, $(\alpha_k)_{k\in\mathbb{Z}} \in \lambda_{\theta,q}$. Além disso,

$$2^{-\theta}\, (\ln 2)^{1/q} \, \| \, (\alpha_k)_{k\in\mathbb{Z}} \, \|_{\lambda_{\theta,q}} \leq \| \, a \, \|_{\theta,q,K} \leq 2\, (\ln 2)^{1/q} \, \| \, (\alpha_k)_{k\in\mathbb{Z}} \, \|_{\lambda_{\theta,q}} \, .$$

A demonstração pode ser vista na referência [2].

1.3.2 O J-Espaço

Definimos agora o J-espaço.

Definição 1.3.4 (O J-espaço)**.** Fixados $\theta \in (0,1)$ e $q \in [1,\infty]$, o J**-espaço**, denotado por $\overline{A}^J_{\theta,q}$, é o conjunto formado pelos elementos $a \in A_0 + A_1$ tais que existe uma função mensurável $u : (0,\infty) \to A_0 \cap A_1$ de modo que

$$a = \int_0^\infty u(t)\frac{dt}{t}, \tag{1.3}$$

com convergência em $A_0 + A_1$ e $\Phi_{\theta,q}(J(\cdot, u(\cdot))) < \infty$.

Quando existe u nessas condições, dizemos que a igualdade (1.3) é uma representação canônica de a.

É imediato que $\overline{A}^J_{\theta,q} \neq \emptyset$, pois $0 \in \overline{A}^J_{\theta,q}$.

Proposição 1.3.4. *Se $\theta \in (0,1)$ e $q \in [1,\infty]$, então $\overline{A}^J_{\theta,q}$ é um subespaço vetorial normado, com norma dada por*

$$\| a \|_{\theta,q,J} := \inf_u \Phi_{\theta,q}(J(\cdot, u(\cdot))),$$

onde o ínfimo é tomado sobre todas as funções u nas condições da representação canônica de a.

Demonstração:

Sejam $a, b \in \overline{A}^J_{\theta,q}$ e $\lambda \in \mathbb{R}$. Sejam ainda u e v funções de representação canônica para a e b, respectivamente, como na definição do J-espaço. Temos que $u+v : (0,\infty) \to A_0 \cap A_1$ é uma função mensurável e vale

$$\begin{aligned}\left\|a + b - \int_0^\infty [u(t)+v(t)]\frac{dt}{t}\right\|_{A_0+A_1} &= \left\|a + b - \left(\int_0^\infty u(t)\frac{dt}{t} + \int_0^\infty v(t)\frac{dt}{t}\right)\right\|_{A_0+A_1} \\ &\leq \left\|a - \int_0^\infty u(t)\frac{dt}{t}\right\|_{A_0+A_1} + \\ &+ \left\|b - \int_0^\infty v(t)\frac{dt}{t}\right\|_{A_0+A_1}.\end{aligned}$$

Além disso,

$$\Phi_{\theta,q}(J(\cdot, u(\cdot)+v(\cdot))) \leq \Phi_{\theta,q}(J(\cdot, u(\cdot))) + \Phi_{\theta,q}(J(\cdot, v(\cdot))). \tag{1.4}$$

Isso mostra que $a + b \in \overline{A}^J_{\theta,q}$. A prova de que $\lambda\, a \in \overline{A}^J_{\theta,q}$ é semelhante.

Por último, mostremos que $\| \cdot \|_{\theta,q,J}$ é uma norma sobre $\overline{A}^J_{\theta,q}$:

É imediato que $\| a \|_{\theta,q,J} \geq 0$, para todo $a \in \overline{A}^J_{\theta,q}$. Suponha que $\| a \|_{\theta,q,J} = 0$, para algum $a \in \overline{A}^J_{\theta,q}$. Temos

$$\begin{aligned}
K(1,a) = K\left(1, \int_0^\infty u(t)\frac{dt}{t}\right) &\leq \int_0^\infty K(1,u(t))\frac{dt}{t} \leq \\
&\leq \int_0^\infty \min\{1,1/t\}\, J(t,u(t))\frac{dt}{t} = \\
&= \int_0^\infty t^\theta \min\{1,1/t\} t^{-\theta}\, J(t,u(t))\frac{dt}{t} \leq \\
&\overset{(*)}{\leq} \left[\int_0^\infty [t^\theta \min\{1,1/t\}]^{q'}\frac{dt}{t}\right]^{1/q'} \left[\int_0^\infty [t^{-\theta}\, J(t,u(t))]^q \frac{dt}{t}\right]^{1/q} = \\
&= \left[\int_0^\infty [t^\theta \min\{1,1/t\}]^{q'}\frac{dt}{t}\right]^{1/q'} \Phi_{\theta,q}(J(\cdot,u(\cdot)))\,,
\end{aligned}$$

onde a passagem em $(*)$ se dá pela *Desigualdade de Hölder*, com

$$\frac{1}{q} + \frac{1}{q'} = 1.$$

Observe que

$$\left[\int_0^\infty [t^\theta \min\{1,1/t\}]^{q'}\frac{dt}{t}\right]^{1/q'} = M_{\theta,q'} \in \mathbb{R},$$

quaisquer que sejam $\theta \in (0,1)$ e $q \in [1,\infty]$. Assim, podemos escrever

$$\| a \|_{A_0+A_1} \leq M_{\theta,q'}\, \Phi_{\theta,q}(J(\cdot,u(\cdot))),$$

para toda função u como na definição de representação canônica de a. Tomando o ínfimo sobre todas as curvas u que satisfazem à condição de representação canônica de a, temos

$$\| a \|_{A_0+A_1} \leq M_{\theta,q'}\ \| a \|_{\theta,q,J}\ .$$

Disso, segue a positividade de $\| \cdot \|_{\theta,q,J}$ e também a inclusão contínua de $\overline{A}^J_{\theta,q}$ em $A_0 + A_1$. A desigualdade triangular decorre do mesmo raciocínio empregado na desigualdade (1.4). Do mesmo modo, a igualdade

$$\| \lambda\, a \|_{\theta,q,J} = |\lambda|\ \| a \|_{\theta,q,J}$$

segue do mesmo raciocínio empregado na demonstração de que $\lambda\, a \in \overline{A}^J_{\theta,q}$.

■

Proposição 1.3.5. *Se $0 < \theta < 1$ e $q \in [1,\infty]$, então $\overline{A}^J_{\theta,q}$ é um espaço de interpolação para o par (A_0, A_1).*

Demonstração:

Já vimos na proposição anterior que $\overline{A}^J_{\theta,q} \subseteq A_0 + A_1$ e a inclusão é contínua, dado que

$$\| a \|_{A_0+A_1} \leq M_{\theta,q} \| a \|_{\theta,q,J}, \quad \forall a \in \overline{A}^J_{\theta,q}.$$

Agora, se $a \in A_0 \cap A_1$, tomamos $u(t) = (\ln 2)^{-1} \chi_{(1,2)}(t)\, a$, para todo $t > 0$ e temos

$$a = \int_0^\infty u(t) \frac{dt}{t}$$

e tal convergência é válida sob a norma $\| \cdot \|_{A_0+A_1}$. Podemos então escrever

$$\Phi_{\theta,q}(J(\cdot, u(\cdot))) = \left[\int_1^2 [t^{-\theta} J(t, (\ln 2)^{-1} a)]^q \frac{dt}{t} \right]^{1/q} \leq \eta_{\theta,q} J(1, a).$$

Consequentemente,

$$\| a \|_{\theta,q,J} \leq \eta_{\theta,q} J(1, a), \quad \forall a \in A_0 \cap A_1.$$

Isso mostra que $\overline{A}^J_{\theta,q}$ é um espaço intermediário para o par (A_0, A_1).

Se (B_0, B_1) é um par de espaços normados compatíveis e T é um operador linear tal que $T_i = T|_{A_i} : A_i \to B_i$ é contínuo com $\| T_i \|_{A_i,B_i} = M_i$, para $i = 0, 1$, e $a \in \overline{A}^J_{\theta,q}$, temos

$$T(a) = T\left(\int_0^\infty u(t) \frac{dt}{t} \right) = \int_0^\infty T(u(t)) \frac{dt}{t}.$$

Essa convergência se dá em $B_0 + B_1$. Portanto, $T(u)$ é uma função que satisfaz à condição de representação canônica para o ponto $T(a)$. Assim, $T(a) \in \overline{B}^J_{\theta,q}$, pois

$$J(\cdot, T(u(\cdot))) \leq M_0\, J(\cdot\, M_1/M_0, u(\cdot)).$$

Aplicando o funcional $\Phi_{\theta,q}$, e usando o Lema 1.3.1, temos

$$\Phi_{\theta,q}(J(\cdot, T(u(\cdot)))) \leq M_0^{1-\theta} M_1^\theta\, \Phi_{\theta,q}(J(\cdot, u(\cdot))).$$

Tomando os ínfimos convenientes, temos

$$\| T(a) \|_{\theta,q,J;\overline{B}} \leq M_0^{1-\theta} M_1^\theta \| a \|_{\theta,q,J;\overline{A}} .$$

Isso conclui a nossa prova.

$\blacksquare$

Existe também uma definição do J-espaço em termos de sequências. É a forma discreta como segue na proposição abaixo.

Proposição 1.3.6 (Discretização do J-espaço)**.** *Temos que $a \in \overline{A}^J_{\theta,q}$ se, e somente se, existir uma sequência $(u_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ de pontos em $A_0 \cap A_1$ com*

$$a = \sum_{k\in\mathbb{Z}} u_k, \quad \text{convergência em } A_0 + A_1 \tag{1.5}$$

e tal que $(J(2^k, u_k))_{k\in\mathbb{Z}} \in \lambda_{\theta,q}$. Além disso, $\| \ a \ \|_{\theta,q,J}$ e $\inf\limits_{(u_k)} \| \ (J(2^k, u_k)) \ \|_{\lambda_{\theta,q}}$ são equivalentes, onde o ínfimo é tomado sobre todas as sequências que satisfazem à condição (1.5).

Demonstração.

A demonstração está na referência [2].

■

Existe uma equivalência entre esses dois métodos, isto é, os espaços $\overline{A}^K_{\theta,q}$ e $\overline{A}^J_{\theta,q}$ são iguais e têm normas equivalentes. A inclusão $\overline{A}^J_{\theta,q} \subseteq \overline{A}^K_{\theta,q}$ é fácil de demonstrar. A inclusão contrária é devida ao *Lema Fundamental da Interpolação*, que enunciamos a seguir.

Lema 1.3.2 (Lema Fundamental da Interpolação)**.** *Se*

$$\min\{1, 1/t\}\, K(t, a) \to 0, \quad \text{quando } t \to 0^+ \text{ ou } t \to \infty,$$

então, para todo $\varepsilon > 0$ existe uma representação

$$a = \sum_{k\in\mathbb{Z}} u_k, \quad (\text{convergência em } A_0 + A_1)$$

de a tal que

$$J(2^k, u_k) \le (\varepsilon + \gamma)\, K(2^k, a),$$

onde $\gamma \le 3$ é uma constante universal.

Demonstração:

Para cada $k \in \mathbb{Z}$ existe uma decomposição $a = a_{0,k} + a_{1,k}$, com $a_{0,k} \in A_0$ e $a_{1,k} \in A_1$ tal que

$$\| \ a_{0,k} \ \|_{A_0} + 2^k \ \| \ a_{1,k} \ \|_{A_1} \le (1 + \varepsilon)\, K(2^k, a).$$

Usando a hipótese de que

$$\min\{1, 1/t\}\, K(t, a) \to 0, \quad \text{quando } t \to 0^+ \text{ ou } t \to \infty,$$

temos que $\| \ a_{0,k} \ \|_{A_0} \to 0$ se $k \to -\infty$ e que $\| \ a_{1,k} \ \|_{A_1} \to 0$ quando $k \to \infty$. Para cada $k \in \mathbb{Z}$ seja

$$u_k = a_{0,k} - a_{0,k-1} = a_{1,k-1} - a_{1,k}.$$

Assim, $u_k \in A_0 \cap A_1$ para todo $k \in \mathbb{Z}$ e

$$a - \sum_{k=-N}^{M} u_k = a - a_{0,M} + a_{0,-N-1} = a_{0,-N-1} + a_{1,M}.$$

Além disso, temos

$$K\left(1, a - \sum_{k=-N}^{M} u_k\right) = K(1, a_{0,-N-1} + a_{1,M}) \leq \| a_{0,-N-1} \|_{A_0} + \| a_{1,M} \|_{A_1} .$$

Tomando os limites com $M, N \to \infty$ temos

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} u_k = a, \quad \text{(convergência em } A_0 + A_1).$$

Por

$$\| a_{0,k} \|_{A_0} + 2^k \| a_{1,k} \|_{A_1} \leq (1+\varepsilon)\, K(2^k, a)$$

vemos que

$$\begin{aligned} J(2^k, u_k) &= J(2^k, a_{0,k} - a_{0,k-1}) = J(2^k, a_{1,k-1} - a_{1,k}) \\ &= \max\{\| a_{0,k} - a_{0,k-1} \|_{A_0}, 2^k \| a_{0,k} - a_{0,k-1} \|_{A_1}\} \\ &= \max\{\| a_{1,k-1} - a_{1,k} \|_{A_0}, 2^k \| a_{1,k-1} - a_{1,k} \|_{A_1}\} \\ &\leq \max\{\| a_{0,k} \|_{A_0} + \| a_{0,k-1} \|_{A_0}, 2^k(\| a_{1,k-1} \|_{A_1} + \| a_{1,k} \|_{A_1})\} \\ &\overset{(*)}{\leq} 3\,(1+\varepsilon)\, K(2^k, a)\,, \end{aligned}$$

onde a passagem em $(*)$ é justificada pela família de decomposição de a que satisfaz

$$\| a_{0,k} \|_{A_0} + 2^k \| a_{1,k} \|_{A_1} \leq (1+\varepsilon)\, K(2^k, a).$$

Se γ é supremo dos números x que satisfazem $x + \varepsilon < 3 + 3\varepsilon$, temos $\gamma \leq 3$ e daí, vale

$$J(2^k, u_k) \leq (\varepsilon + \gamma)\, K(2^k, a),$$

como queríamos demonstrar.

■

1.4 Equivalência dos Métodos J e K

Agora estamos em condições de demonstrarmos a equivalência dos métodos de interpolação K e J, ou seja, que os espaços de interpolação obtidos por esses métodos, fixados $\theta \in (0,1)$ e $q \in [1,\infty]$, são iguais e suas normas são equivalentes.

Teorema 1.4.1 (Equivalência dos Métodos K e J)**.** *Se $\theta \in (0,1)$ e $q \in [1,\infty]$, então, $\overline{A}^K_{\theta,q} = \overline{A}^J_{\theta,q}$ e as normas $\| \cdot \|_{\theta,q,K}$ e $\| \cdot \|_{\theta,q,J}$ são equivalentes.*

Demonstração:

Seja $a \in \overline{A}^J_{\theta,q}$. Então, existe uma representação canônica

$$\int_0^\infty u(s)\frac{ds}{s} = a,$$

com convergência na norma de $A_0 + A_1$. Desse modo, podemos escrever, para qualquer $t > 0$,

$$\begin{aligned} K(t,a) &= K\left(t, \int_0^\infty u(s)\frac{ds}{s}\right) \\ &\leq \int_0^\infty K(t,u(s))\frac{ds}{s} \leq \int_0^\infty \min\{1,t/s\}\, J(s,u(s))\frac{ds}{s}\,. \end{aligned}$$

Aplicando o funcional $\Phi_{\theta,q}$ nessa desigualdade, temos

$$\begin{aligned} \| \, a \, \|^q_{\theta,q,K} &\leq \int_0^\infty \left[t^{-\theta} \int_0^\infty \min\{1,t/s\}\, J(s,u(s))\frac{ds}{s}\right]^q \frac{dt}{t} \\ &= \int_0^\infty \left[\int_0^\infty t^{-\theta} \min\{1,t/s\}\, J(s,u(s))\frac{ds}{s}\right]^q \frac{dt}{t} \\ &= \int_0^\infty \left[\int_0^\infty t^{-\theta}\, s^{\theta} \min\{1,t/s\}\, s^{-\theta} J(s,u(s))\frac{ds}{s}\right]^q \frac{dt}{t} \\ &= \int_0^\infty \left[\int_0^\infty (t/s)^{-\theta} \min\{1,t/s\}\, s^{-\theta} J(s,u(s))\frac{ds}{s}\right]^q \frac{dt}{t}\,. \end{aligned}$$

Fazendo a mudança de variáveis $t = sx$, temos $\dfrac{dt}{t} = \dfrac{dx}{x}$ e logo,

$$\begin{aligned} &\int_0^\infty \left[\int_0^\infty (t/s)^{-\theta} \min\{1,t/s\}\, s^{-\theta} J(s,u(s))\frac{ds}{s}\right]^q \frac{dt}{t} = \\ &= \int_0^\infty \left[\int_0^\infty x^{-\theta} \min\{1,x\}\, s^{-\theta} J(s,u(s))\frac{ds}{s}\right]^q \frac{dx}{x} \\ &= \left[\int_0^\infty [x^{-\theta} \min\{1,x\}]^q \frac{dx}{x}\right] \left[\int_0^\infty [s^{-\theta} J(s,u(s))]^q \frac{ds}{s}\right]. \end{aligned}$$

Consequentemente,

$$\| \, a \, \|_{\theta,q,K} \leq M_{\theta,q} \;\| \, a \, \|_{\theta,q,J},$$

onde

$$M_{\theta,q} = \left[\int_0^\infty [x^{-\theta} \min\{1,x\}]^q \frac{dx}{x}\right]^{1/q} \in \mathbb{R}.$$

Isso mostra que $a \in \overline{A}^K_{\theta,q}$.

Agora, seja $a \in \overline{A}^K_{\theta,q}$. Pelo Lema Fundamental da Interpolação e pela discretização da norma dos espaços de interpolação,

$$\| a \|_{\theta,q,J} \leq C_{\theta,q} \ \| a \|_{\theta,q,K} \ .$$

Portanto, $a \in \overline{A}^J_{\theta,q}$ e consequentemente temos a igualdade desejada.

Além disso, acoplando as desigualdades paras as normas obtidas em cada inclusão, temos a equivalência dessas normas.

■

Listaremos agora algumas propriedades dos espaços de interpolação.

1.5 Propriedades Básicas dos Espaços $\overline{A}^K_{\theta,q}$ e $\overline{A}^J_{\theta,q}$

Nesta seção demonstraremos algumas propriedades básicas dos espaços de interpolação. Tais propriedades são comuns a todos os espaços de interpolação gerados pelo método K ou J.

Proposição 1.5.1. *Se $a \in A_0 \cap A_1$, então*

$$\| a \|_{\theta,q,K} \leq M_{\theta,q}\, t^{-\theta}\, J(t,a), \quad \forall t > 0.$$

Demonstração:

Com efeito, como $K(s,a) \leq \min\{1, s/t\}\, J(t,a)$, aplicando o funcional $\Phi_{\theta,q}$ na variável s e usando o lema 1.3.1, temos

$$\| a \|_{\theta,q,K} \leq \Phi_{\theta,q}(\min\{1, s/t\}\, J(t,a)) = M_{\theta,q}\, t^{-\theta}\, J(t,a).$$

■

Corolário 1.5.1. *A proposição anterior é equivalente a*

$$\| a \|_{\theta,q,K} \leq M_{\theta,q} \ \| a \|^{1-\theta}_{A_0} \| a \|^{\theta}_{A_1}, \ \ \forall a \in A_0 \cap A_1.$$

Demonstração:

O caso em que $a = 0$ é imediato. Consideremos então apenas o caso em que $a \neq 0$.

Se

$$\| a \|_{\theta,q,K} \leq M_{\theta,q}\, t^{-\theta}\, J(t,a), \quad \forall t > 0,$$

então para $t = \dfrac{\| a \|_{A_0}}{\| a \|_{A_1}} > 0$, temos

$$\begin{aligned} \| a \|_{\theta,q,K} &\leq M_{\theta,q} \frac{\| a \|^{\theta}_{A_1}}{\| a \|^{\theta}_{A_0}} \max\{\| a \|_{A_0}, \frac{\| a \|_{A_0}}{\| a \|_{A_1}} \ \| a \|_{A_1}\} \\ &= M_{\theta,q} \ \| a \|^{1-\theta}_{A_0} \| a \|^{\theta}_{A_1} \ . \end{aligned}$$

Reciprocamente, admitamos que vale

$$\| a \|_{\theta,q,K} \leq M_{\theta,q} \ \| a \|_{A_0}^{1-\theta} \| a \|_{A_1}^{\theta},$$

para todo $a \in A_0 \cap A_1$. Assim, para todo $t > 0$ vale que $\| a \|_{A_0} \leq J(t,a)$ e $\| a \|_{A_1} \leq J(t,a)/t$. Acoplando essas desigualdades na anterior, temos o resultado desejado.

■

Proposição 1.5.2. *Se $a \in \overline{A}^K_{\theta,q}$, então*

$$K(t,a) \leq C\, t^{\theta} \ \| a \|_{\theta,q,K}, \quad \forall\, t > 0.$$

Demonstração:

Segue imediatamente de $K(t,a) \leq \max\{1, t/s\}\, K(s,a)$, observado que essa desigualdade é equivalente a $\min\{1, s/t\}\, K(t,a) \leq K(s,a)$.

Agora aplicamos o funcional $\Phi_{\theta,q}$ na variável s e usamos o lema 1.3.1.

■

Teorema 1.5.1. *Se $\overline{A} = (A_0, A_1)$ é um par de espaços normados compatíveis, então*

a) Se denotarmos por $(A_0, A_1)_{\theta,q;K}$ o espaço de interpolação quando o primeiro espaço do par é A_0 e por $(A_1, A_0)_{\theta,q;K}$ o espaço de interpolação quando o primeiro espaço do par é A_1, então vale $(A_0, A_1)_{\theta,q;K} = (A_1, A_0)_{1-\theta,q;K}$ com normas iguais para todos $\theta \in (0,1)$ e $q \in [1, \infty]$.

b) $\overline{A}^K_{\theta,q} \subseteq \overline{A}^K_{\theta,r}$ se $q \leq r$ e $\theta \in (0,1)$.

c) $\overline{A}^K_{\theta_0,q_0} \cap \overline{A}^K_{\theta_1,q_1} \subseteq \overline{A}^K_{\theta,q}$ se $\theta_0 < \theta < \theta_1$.

d) Se $\theta_0 < \theta_1$ e $A_1 \subseteq A_0$, com inclusão contínua, então $\overline{A}^K_{\theta_1,q} \subseteq \overline{A}^K_{\theta_0,q}$.

e) $A_0 = A_1$ com normas iguais $\Rightarrow$ $\overline{A}^K_{\theta,q} = A_0$ e

$$\| a \|_{A_0} = (M_{\theta,q})^{-1} \ \| a \|_{\theta,q,K} \ .$$

A demonstração se encontra na referência [2].

Definição 1.5.1. Sejam $\overline{A}$ um par de espaços normados compatíveis e $\theta \in [0,1]$. Suponha que X é um espaço intermediário com respeito a $\overline{A}$. Então, dizemos que

- X **é de classe** $\mathcal{C}_K(\theta; \overline{A})$ se

$$K(t,a) \leq C\, t^{\theta} \ \| a \|_X,$$

para todo $t > 0$ e todo $a \in X$;

- X **é de classe** $\mathcal{C}_J(\theta; \overline{A})$ se
$$\| a \|_X \leq C\, t^{-\theta}\, J(t, a),$$
para todo $t > 0$ e todo $a \in A_0 \cap A_1$.

- X **é de classe** $\mathcal{C}(\theta; \overline{A})$ se X é de classe $\mathcal{C}_K(\theta; \overline{A})$ e de classe $\mathcal{C}_J(\theta; \overline{A})$ simultaneamente.

Note que para todos $\theta \in (0,1)$ e $q \in [1, \infty]$ temos que $\overline{A}^K_{\theta,q}$ e $\overline{A}^J_{\theta,q}$ são espaços de classe $\mathcal{C}(\theta; \overline{A})$.

1.6 Interpolação de Operadores Lineares Compactos

Uma das questões de interesse na teoria de interpolação é descrever o comportamento de operadores compactos. Tais operadores ocorrem em problemas importantes nas mais variadas áreas da análise. Existem alguns resultados sobre compacidade no contexto dos espaços normados que apresentamos aqui e cuja demonstração se encontra nas referências.

Proposição 1.6.1 (Compacidade de Operadores em Espaços Banach). *Sejam B um espaço de Banach e $\overline{A}$ um par de espaços de Banach compatíveis. Se $T : A_0 + A_1 \to B$ é um operador linear tal que*

- $T_0 = T|_{A_0} : A_0 \to B$ *é um operador linear compacto;*
- $T_1 = T|_{A_1} : A_1 \to B$ *é um operador linear contínuo*

e E um espaço de classe $\mathcal{C}_K(\theta; \overline{A})$, para algum $\theta \in (0,1)$, então
$$T_E = T|_E : E \to B$$
é um operador linear compacto.

E mais, se $S : B \to A_0 \cap A_1$ é um operador linear que satisfaz

- $S : B \to A_0$ *é um operador linear compacto;*
- $S : B \to A_1$ *é um operador linear contínuo*

e E um espaço de classe $\mathcal{C}_J(\theta; \overline{A})$, para algum $\theta \in (0,1)$, então
$$S : B \to E$$
é compacto.

Este teorema se encontra demonstrado na referência [2].

No próximo capítulo veremos que muitas propriedades vistas aqui no contexto de espaços normados podem ser readequadas e generalizadas para espaços métricos.

CAPÍTULO 2

INTERPOLAÇÃO DE ESPAÇOS MÉTRICOS

2.1 Preliminares

Nesta seção definiremos alguns objetos e introduzimos linguagens e expressões que serão constantemente usadas ao longo de todo o restante deste trabalho.

Definição 2.1.1. Seja $M \neq \emptyset$. Uma **métrica** em M é uma função

$$d : M \times M \to \mathbb{R}$$

$$(x, y) \mapsto d(x, y)$$

tal que

i) $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$;

ii) $d(x, y) = d(y, x)$, para todos $x, y \in M$;

iii) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y), \quad \forall\, x, y, z \in M$.

Definição 2.1.2. Um **espaço métrico** é um par constituído por um conjunto não vazio M e por uma métrica d em M e a este objeto denotamos por (M, d).

Quando não houver possibilidade de confusão com relação à metrica definida em M, nos referiremos ao espaço métrico (M, d) apenas por M.

Observação 2.1.1. Se uma função d satisfaz às condições $i)$ e $ii)$, dizemos que d é uma **função distância**.

2.2 Completamento Relativo

2.2.1 Introdução

Sejam (B, d_B) e (A, d_A) espaços métricos tais que $A \subseteq B$ e existe $C > 0$ de modo que

$$d_B(x, y) \leq C\, d_A(x, y), \ \ \forall x, y \in A. \tag{2.1}$$

Dado um ponto $x \in B$ se existir uma sequência (x_n) de Cauchy em (A, d_A) tal que

$$d_B(x_n, x) \to 0,$$

dizemos que (x_n) é **uma sequência aproximante de** x **em** (A, d_A).

Seja agora A_B o conjunto de todos os pontos $x \in B$ tais que existe alguma sequência aproximante de x em (A, d_A).

Observe que $A \subseteq A_B$, pois dado $x \in A$, a sequência $(x, x, x, \ldots)$ é uma sequência aproximante de x em (A, d_A).

Sobre $A_B \times A_B$ defina a função

$$\overline{d_A}(x, y) := \inf \lim_{n\to\infty} d_A(x_n, y_n), \tag{2.2}$$

onde o ínfimo é tomado sobre todas as sequências aproximantes de x e de y em (A, d_A).

Temos que

Proposição 2.2.1. *Se (x_n) e (y_n) são sequências de Cauchy em (A, d_A), então existe o limite $\lim\limits_{n\to\infty} d_A(x_n, y_n)$.*

Demonstração:

Sejam (x_n) e (y_n) sequências de Cauchy em (A, d_A). Vale,

$$\begin{aligned} d_A(x_n, y_n) &\leq d_A(x_n, x_m) + d_A(x_m, y_n) \\ &\leq d_A(x_n, x_m) + d_A(x_m, y_m) + d_A(y_m, y_n)\,. \end{aligned}$$

Logo, $d_A(x_n, y_n) - d_A(x_m, y_m) \leq d_A(x_n, x_m) + d_A(y_n, y_m)$.

E da mesma forma obtemos

$$d_A(x_m, y_m) - d_A(x_n, y_n) \leq d_A(x_n, x_m) + d_A(y_n, y_m).$$

Portanto,

$$|d_A(x_n, y_n) - d_A(x_m, y_m)| \leq d_A(x_n, x_m) + d_A(y_n, y_m)\,. \qquad (*)$$

Como (x_n) e (y_n) são sequências de Cauchy em (A, d_A), podemos tornar o lado direito de $(*)$ tão pequeno quanto quisermos, para m e n suficientemente grandes. Assim a sequência $(d_A(x_n, y_n))$ é uma sequência de Cauchy em $\mathbb{R}$, e portanto, o limite existe.

■

Proposição 2.2.2. *Se $\overline{d_A}$ é a função como definida na igualdade (2.2), então $\overline{d_A}$ é uma função distância em A_B.*

Demonstração.

Positividade:

De fato, temos que $\overline{d_A}(x,y) \geq 0$, para todos $x, y \in A_B$ e $\overline{d_A}(x,x) = 0$. Além disso, pela Proposição 2.2.1, temos $\overline{d_A}(x,y) < \infty$.

Agora, sejam $x, y \in A_B$ tais que $\overline{d_A}(x,y) = 0$. Pela desigualdade (2.1), temos

$$d_B(x,y) = \inf \lim_{n\to\infty} d_B(x_n, y_n) \leq C \inf \lim_{n\to\infty} d_A(x_n, y_n) = C\,\overline{d_A}(x,y),$$

onde o ínfimo é tomado sobre todas as sequências aproximantes de x e de y em (A, d_A).

Assim, temos

$$d_B(x,y) \leq C\,\overline{d_A}(x,y), \tag{2.3}$$

para todos $x, y \in A_B$. Disso, segue imediatamente que $x = y$ sempre que $\overline{d_A}(x,y) = 0$.

Simetria:

É imediato da simetria de d_A.

Portanto, a função $\overline{d_A}$ definida acima é uma função distância e será chamada neste caso de **função distância associada à métrica** d_A.

■

2.2.2 O Completamento Relativo

Definição 2.2.1 (Sequências Ligantes)**.** Dados um conjunto A não vazio e $x, y \in A$, chamamos de **sequência ligante de** x **a** y **em** A a qualquer $(n+1)$-upla $(x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n)$ de pontos em A tais que $x_0 = x$ e $x_n = y$.

Denotemos por $(x_n^{x,y})$ a uma sequência do tipo $(x, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, y)$ que é ligante de x a y em X e por $[x,y]_A$ o conjunto das sequências ligantes de x a y em A.

Observação 2.2.1. Em particular, as n-uplas com elementos repetidos e mesmo as que possuem todos os elementos iguais são sequências ligantes. Para o caso em que as sequências ligantes sejam do tipo $(x, x, x, \ldots, x)$ elas serão sequências ligantes de x a x em A.

Ainda nesse sentido, $(x, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x)$ é uma sequência ligante de x a x no conjunto A.

Definimos agora a função d em $A_B \times A_B$, dada por

$$d(x,y) := \inf_{(x_n^{x,y})} \sum_{k=0}^{n-1} \overline{d_A}(x_k, x_{k+1}), \tag{2.4}$$

onde o ínfimo é tomado sobre todas as sequências $(x_n^{x,y}) \in [x,y]_{A_B}$.

Lema 2.2.1. *A função d é uma métrica sobre A_B.*

Demonstração:

Positividade:

Temos $d(x,y) \geq 0$, para todos $x, y \in A_B$.

E ainda $d(x,x) = 0$, pois tomamos a sequência ligante de x a x em A_B dada por $x_0 = x$ e $x_1 = x$ e vale $d(x_0, x_1) \leq \overline{d_A}(x_0, x_1) = \overline{d_A}(x,x) = 0$. Além disso, quaisquer que sejam $x, y \in A_B$ temos $d(x,y) \leq \overline{d_A}(x,y) < \infty$, bastando que se tome a sequência ligante de x a y em A_B dada por $x_0 = x$ e $x_1 = y$.

Sejam agora $x, y \in A_B$ tais que $d(x,y) = 0$ e uma sequência ligante de x a y em A_B qualquer. Temos da desigualdade (2.3) que

$$d_B(x_k, x_{k+1}) \leq C\,\overline{d_A}(x_k, x_{k+1}),$$

para todo $k = 0, 1, \ldots, n-1$.

Somando em k, temos

$$d_B(x,y) \leq \sum_{k=0}^{n-1} d_B(x_k, x_{k+1}) \leq C \sum_{k=0}^{n-1} \overline{d_A}(x_k, x_{k+1}).$$

Tomando o ínfimo da definição de d,

$$d_B(x,y) \leq C\, d(x,y), \tag{2.5}$$

para todos $x, y \in A_B$. Disso segue que $d(x,y) = 0$ implica em $x = y$.

Simetria:

Note que dados $x, y \in A_B$, se $x_0 = x, x_1, x_2, \ldots, x_n = y$ é uma sequência ligante de x a y em A_B, então $y_0 = x_n = y, y_1 = x_{n-1}, y_2 = x_{n-2}, \ldots, y_n = x_0 = x$ é uma sequência ligante de y a x em A_B e vale

$$\sum_{k=0}^{n-1} \overline{d_A}(x_k, x_{k+1}) = \sum_{j=0}^{n-1} \overline{d_A}(y_j, y_{j+1}).$$

Portanto, existe uma bijeção entre as sequências ligantes de x a y em A_B e as sequências ligantes de y a x em A_B, onde as sequências correspondentes nessa bijeção têm a mesma soma como acima.

Em vista desse fato, temos $d(x,y) = d(y,x)$, para todos $x, y \in A_B$, que é a simetria de d.

Desigualdade Triangular:

Sejam $x, y, z \in A_B$ e $\varepsilon > 0$.

Então, existem sequências ligantes $(x_{n_\varepsilon}^{x,y})$ e $(y_{m_\varepsilon}^{y,z})$ sequências ligantes de x a y em A_B e de y a z em A_B, respectivamente, tais que

$$\sum_{i=0}^{n_\varepsilon - 1} \overline{d_A}(x_i, x_{i+1}) < d(x,y) + \varepsilon$$

e

$$\sum_{j=0}^{m_\varepsilon - 1} \overline{d_A}(y_j, y_{j+1}) < d(y,z) + \varepsilon.$$

A sequência dada por $z_k = x_k$, para $0 \leq k \leq n_\varepsilon$ e $z_{n_\varepsilon + r} = y_r$, para $0 \leq r \leq m_\varepsilon$ é uma sequência ligante de x a z em A_B e vale

$$\begin{aligned} d(x,z) \leq & \sum_{k=0}^{n_\varepsilon + m_\varepsilon - 1} \overline{d_A}(z_k, z_{k+1}) = \\ & = \sum_{i=0}^{n_\varepsilon - 1} \overline{d_A}(x_i, x_{i+1}) + \sum_{j=0}^{m_\varepsilon - 1} \overline{d_A}(y_j, y_{j+1}) < \\ & < d(x,y) + d(y,z) + 2\,\varepsilon. \end{aligned}$$

Da arbitrariedade de $\varepsilon > 0$, segue $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$.

Portanto, d é uma métrica sobre A_B.

■

Observação 2.2.2. Note que para todos $x, y \in A_B$, tomando $x_0 = x$ e $x_1 = y$, vale

$$d(x,y) \leq \overline{d_A}(x,y). \tag{2.6}$$

Observação 2.2.3. Da desigualdade (2.5), temos que a inclusão de A_B em B é contínua, com relação às métricas definidas nesses espaços.

Definição 2.2.2 (Completamento Relativo)**.** O espaço (A_B, d) como acima construído é chamado de **completamento relativo de** (A, d_A) **no espaço** (B, d_B).

Lema 2.2.2. *Se (A_B, d) é o completamento de (A, d_A) relativamente ao espaço (B, d_B), então $A \subseteq A_B$ e a inclusão é contínua, com relação às métricas definidas nesses espaços.*

Demonstração:

Dados $x, y \in A$, considere as sequências aproximantes de x em (A, d_A) e de y em (A, d_A), respectivamente, dadas por $(x, x, x, \ldots)$ e $(y, y, y, \ldots)$.

Temos, pela igualdade (2.2) que

$$\overline{d_A}(x,y) \leq d_A(x,y), \tag{2.7}$$

para todos $x, y \in A$.

Ainda, acoplando as desigualdades (2.6) e (2.7), temos

$$d(x,y) \leq \overline{d_A}(x,y) \leq d_A(x,y), \tag{2.8}$$

para todos $x, y \in A$.

■

2.2.3 Propriedades Intrínsecas do Completamento Relativo

Lema 2.2.3. *Se (A_B, d) é o completamento relativo de (A, d_A) no espaço (B, d_B), então A é denso em (A_B, d).*

Demonstração:

Seja $x \in A_B$. Então, existe (x_n) de Cauchy em (A, d_A) de modo que $d_B(x_n, x) \to 0$. Para cada $k \in \mathbb{N}$, temos da desigualdade (2.6),

$$d(x, x_k) \leq \overline{d_A}(x, x_k) \leq \lim_{n\to\infty} d_A(x_n, x_k).$$

Tomando o limite com $k \to \infty$, temos $d(x, x_k) \to 0$, como queríamos, já que (x_n) é de Cauchy em (A, d_A).

∎

Proposição 2.2.3. *Se (B, d_B) é completo e (A_B, d) é o completamento relativo de (A, d_A) no espaço (B, d_B), então (A_B, d) é completo.*

Demonstração.

Seja $(x^N)_{N\in\mathbb{N}}$ uma sequência de Cauchy em (A_B, d). Para toda sequência aproximante $(x_n^N)_{n\in\mathbb{N}}$ de (x^N) em (A, d_A) existe $n_N \in \mathbb{N}$ de modo que para todos $m, n \geq n_N$ tem-se

$$d_A(x_n^N, x_m^N) \leq \frac{1}{N}. \tag{2.9}$$

Seja $\varepsilon > 0$. Como (x^N) é uma sequência de Cauchy, existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tal que $N_0 \geq 1/\varepsilon$ e se $M, N \geq N_0$ então

$$d(x^N, x^M) \leq \varepsilon. \tag{2.10}$$

Fixe $M, N \geq N_0$. Existem sequências aproximantes (x_n^N) de x^N e (x_n^M) de x^M de modo que

$$d(x^N, x^M) \leq \lim_{n\to\infty} d_A(x_n^M, x_n^N) < d(x^M, x^N) + \varepsilon \leq 2\varepsilon.$$

Como $\lim\limits_{n\to\infty} d_A(x_n^M, x_n^N) \leq 2\varepsilon$, existe $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ de modo que

$$d_A(x_n^M, x_n^N) \leq 2\varepsilon, \ \ \forall n \geq n_\varepsilon. \tag{2.11}$$

Para todo $N \in \mathbb{N}$, seja $y_N = x_{n_N}^N$, onde (x_n^N) e (x_n^M) satisfazem à desigualdade (2.11).

Agora, se $n \geq \max\{n_\varepsilon, n_N, n_M\}$, temos

$$\begin{aligned} d_A(y_N, y_M) &\leq d_A(y_N, x_n^N) + d_A(x_n^N, x_n^M) + d_A(x_n^M, y_M) \\ &= d_A(x_{n_N}^N, x_n^N) + d_A(x_n^N, x_n^M) + d_A(x_n^M, x_{n_M}^M) \\ &\leq \frac{1}{N} + 2\varepsilon + \frac{1}{M} \leq 4\varepsilon. \end{aligned}$$

Isso mostra que $(y_N)_{N\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de Cauchy em (A, d_A).

Agora, pela continuidade da inclusão $A_B \subset B$, (y^N) é uma sequência de Cauchy em (B, d_B) que é completo. Então, existe $x \in B$ tal que $d_B(y_N, x) \to 0$.

Portanto $x \in A_B$. Mostremos que $d(x^N, x) \to 0$:

Temos, para todo $N \in \mathbb{N}$

$$d(x^N, x) \leq \lim_{n\to\infty} d_A(x_n^N, y_n) = \lim_{n\to\infty} d_A(x_n^N, x_{k_n}^n).$$

Se $N \geq \max\{N_0, n_\varepsilon\}$ temos $d(x^N, x) \leq 2\varepsilon$ e portanto, $d(x^N, x) \to 0$, completando a prova.

■

Lema 2.2.4. *Sejam (B, d_B) um espaço métrico e A um conjunto tal que $A \subseteq B$. Se m_1 e m_2 são métricas sobre A, com*

$$d_B(x, y) \leq \mu\, m_1(x, y) \leq \nu\, m_2(x, y), \;\; \forall x, y \in A,$$

para constantes positivas μ e ν convenientes, então se A_B^1 e A_B^2 são o completamentos relativos de (A, m_1) e de (A, m_2), respectivamente, em (B, d_B), vale $A_B^2 \subseteq A_B^1$ com inclusão contínua. Além disso, vale

$$\mu\, d_1(x, y) \leq \nu\, d_2(x, y),$$

para todos $x, y \in A_B^2$, onde d_i é a métrica do completamento de (A, m_i) em (B, d_B), com $i = 0, 1$.

Demonstração.

Seja $x \in A_B^2$. Então, existe uma sequência (x_n) de Cauchy em (A, m_2) de modo que $d_B(x_n, x) \to 0$. Como $\mu\, m_1 \leq \nu\, m_2$, temos que (x_n) é uma sequência de Cauchy em (A, m_1). Portanto, $x \in A_B^1$.

Além disso, dados $x, y \in A_B^2$, temos

$$\mu\, \overline{m_1}(x, y) \leq \inf \lim_{n\to\infty} \mu m_1(x_n, y_n) \leq \nu\, \inf \lim_{n\to\infty} m_2(x_n, y_n) = \nu\, \overline{m_2}(x, y),$$

onde o ínfimo é tomado sobre todas as sequências aproximantes de x e de y em (A, m_2).

Disso, temos que $\mu\, d_1(x, y) \leq \nu\, \overline{m_2}(x, y)$, para todos $x, y \in A_B^2$.

Seja agora uma sequência $x_0 = x, x_1, \ldots, x_n = y$ ligante de x a y em A_B^2. Temos

$$\mu\, d_1(x, y) \leq \mu \sum_{k=0}^{n-1} d_1(x_k, x_{k+1}) \leq \nu \sum_{k=0}^{n-1} \overline{m_2}(x_k, x_{k+1}).$$

Tomando o ínfimo sobre todas as sequências ligantes de x a y em A_B^2, temos $\mu\, d_1(x, y) \leq \nu\, d_2(x, y)$, para todos $x, y \in A_B^2$.

■

2.3 Par de Espaços Métricos Compatíveis

Definição 2.3.1. Sejam X_0 e X_1 dois conjuntos tais que $X_0 \cap X_1 \neq \emptyset$ e ambos sejam subconjuntos de um conjunto X. Além disso, assuma que d_0, d_1 e d_X sejam métricas nos conjuntos X_0, X_1 e X, respectivamente, tais que existam constantes positivas C_0 e C_1 que satisfazem

$$d_X(x,y) \leq C_i\, d_i(x,y), \quad \forall\, x,y \in X_i, \quad i \in \{0,1\}. \tag{2.12}$$

A este objeto chamamos de **par de espaços métricos compatíveis** e denotamos por $\overrightarrow{X}$ ou por $(X_0, X_1)_X$.

Sejam $(X_0, X_1)_X$ e $t > 0$. Para $(x,y) \in X_0 \times X_0 \cup X_1 \times X_1$, defina a função h_t dada por

$$h_t(x,y) = \begin{cases} \min\{d_0(x,y), t\, d_1(x,y)\}, \text{ se } x,y \in X_0 \cap X_1; \\ d_0(x,y), \text{ se } \{x,y\} \subseteq X_0 \text{ e } \{x,y\} \nsubseteq X_1; \\ t\, d_1(x,y), \text{ se } \{x,y\} \subseteq X_1 \text{ e } \{x,y\} \nsubseteq X_0. \end{cases}$$

Definição 2.3.2. Dados $x, y \in X_0 \cup X_1$, com $X_0 \cap X_1 \neq \emptyset$, **uma sequência ligante admissível de** x **a** y **em** $X_0 \cup X_1$ é qualquer sequência finita de pontos $x_0, x_1, \ldots, x_n \in X_0 \cup X_1$ que satisfaz:

- $x_0 = x$ e $x_n = y$;
- Para cada $k \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$, vale $(x_k, x_{k+1}) \in X_0 \times X_0 \cup X_1 \times X_1$.

Denotemos uma sequência ligante admissível $(x, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, y)$ de x a y em $X_0 \cup X_1$ por $(x_n^{x,y})_{adm}$.

Observação 2.3.1. Note que dados quaisquer $x, y \in X_0 \cup X_1$, sempre existe uma sequência ligante admissível de x a y em $X_0 \cup X_1$, pois se $x, y \in X_i$, então $x_0 = x$ e $x_1 = y$ é uma sequência ligante admissível de x a y em $X_0 \cup X_1$, para $i = 0, 1$. E quando $x \in X_i \setminus X_{1-i}$ e $y \in X_{1-i} \setminus X_i$, como $X_0 \cap X_1 \neq \emptyset$, escolhendo um elemento $z \in X_0 \cap X_1$ a sequência $x_0 = x$, $x_1 = z$ e $x_2 = y$ é ligante admissível de x a y em $X_0 \cup X_1$, para $i = 0, 1$.

2.3.1 O Funcional K_M

Esta seção se dedica a apresentar os funcionais análogos aos funcionais K e J definidos no capítulo anterior para espaços normados. Esses novos funcionais são adequados para o ambiente dos espaços métricos pois cumprem a mesma função que os funcionais dos espaços normados, sem no entanto, dependerem da soma ou do produto por escalar.

Definição 2.3.3 (O K_M-Funcional Métrico)**.** Sejam $(X_0, X_1)_X$ um par de espaços métricos compatíveis e $t > 0$. Dados $x, y \in X_0 \cup X_1$, definimos o **K_M-funcional métrico** por

$$K_M(t, x, y) := \inf \sum_{k=0}^{n-1} h_t(x_k, x_{k+1}), \tag{2.13}$$

onde o ínfimo é tomado sobre todas as sequências ligantes admissíveis de x a y no conjunto $X_0 \cup X_1$.

Lema 2.3.1. *Se $(X_0, X_1)_X$ é um par de espaços métricos compatíveis, então a função $K_M(1, \cdot\,, \cdot\,)$ é uma métrica em $X_0 \cup X_1$.*

Demonstração:

Vamos provar os três axiomas de métrica.

Dados $x, y \in X_0 \cup X_1$ se $(x_n^{x,y})_{adm}$ é uma sequência ligante admissível de x em y, então

$$K(1, x, y) \leq \sum_{k=0}^{n-1} h_1(x_k, x_{k+1}) < \infty.$$

Agora, vamos provar cada axioma de métrica separadamente:

i) Positividade:

Seja $x \in X_0 \cup X_1$. Então, $x_0 = x$ e $x_1 = x$ é uma sequência ligante admissível de x a x em $X_0 \cup X_1$ e vale $0 \leq K_M(1, x, x) \leq h_1(x, x) = 0$. Disso segue que

$$K_M(1, x, x) = 0, \;\; \forall x \in X_0 \cup X_1.$$

Agora, sejam $x, y \in X_0 \cup X_1$ e $(x_n^{x,y})_{adm}$ uma sequência ligante admissível de x a y em $X_0 \cup X_1$. Temos,

$$d_X(x, y) \leq \sum_{k=0}^{n-1} d_X(x_k, x_{k+1}) \leq C \sum_{k=0}^{n-1} h_1(x_k, x_{k+1}).$$

Tomando o ínfimo sobre todas as sequências ligantes admissíveis de x a y em $X_0 \cup X_1$, temos

$$d_X(x, y) \leq C\, K_M(1, x, y), \;\; \forall x, y \in X_0 \cup X_1. \tag{2.14}$$

Como d_X é métrica, então $x = y$ sempre que $K_M(1, x, y) = 0$.

ii) Simetria:

Se $(x_n^{x,y})_{adm}$ é uma sequência ligante admissível de x a y em $X_0 \cup X_1$, então

$$y_0 = x_n = y, y_1 = x_{n-1}, y_2 = x_{n-2}, \ldots, y_n = x_0 = x \in X_0 \cup X_1$$

é uma sequência ligante admissível de y a x tal que

$$\sum_{i=0}^{n-1} h_1(x_i, x_{i+1}) = \sum_{j=0}^{n-1} h_1(y_j, y_{j+1}).$$

Isso mostra que existe uma bijeção entre as sequências ligantes admissíveis de x a y em $X_0 \cup X_1$ e as sequências admissíveis de y a x em $X_0 \cup X_1$.

Além disso, as somas das imagens de cada par pela função h_1 de sequências correspondentes por essa tal bijeção são iguais. Logo,

$$K_M(1, x, y) \leq \sum_{i=0}^{n-1} h_1(x_i, x_{i+1}) = \sum_{j=0}^{n-1} h_1(y_j, y_{j+1}),$$

Para toda sequência ligante admissível $(y_n^{y,x})_{adm}$ de y a x em $X_0 \cup X_1$. Disso, seque $K_M(1, x, y) \leq K_M(1, y, x)$.

E vale também

$$K_M(1, y, x) \leq \sum_{j=0}^{n-1} h_1(y_j, y_{j+1}) = \sum_{i=0}^{n-1} h_1(x_i, x_{i+1}),$$

Para toda sequência ligante admissível $(x_n^{x,y})_{adm}$ de x a y em $X_0 \cup X_1$. Assim, $K_M(1, y, x) \leq K_M(1, x, y)$. E consequentemente, $K_M(1, x, y) = K_M(1, y, x)$.

iii) Desigualdade Triangular:

Sejam $x, y, z \in X_0 \cup X_1$ e $\varepsilon > 0$. Então, existem $a_0 = x, a_1, \ldots, a_n = z$ e $b_0 = z, b_1, \ldots, b_m = y$ sequências ligantes admissíveis de x a z e de z a y, respectivamente, em $X_0 \cup X_1$ tais que

$$\sum_{i=0}^{n-1} h_1(a_i, a_{i+1}) < K_M(1, x, z) + \varepsilon$$

e

$$\sum_{j=0}^{m-1} h_1(b_j, b_{j+1}) < K_M(1, z, y) + \varepsilon.$$

Defina $c_k = a_k$, para $0 \leq k \leq n$ e $c_{n+r} = b_r$, para $0 \leq r \leq m$. Observe que $(c_{m+n+1}^{x,y})_{adm}$ é uma sequência ligante admissível de x a y em $X_0 \cup X_1$ e que

$$\begin{aligned} K_M(1, x, y) \leq \sum_{k=0}^{m+n-1} h_1(c_k, c_{k+1}) = \\ = \sum_{i=0}^{n-1} h_1(a_i, a_{i+1}) + \sum_{j=0}^{m-1} h_1(b_j, b_{j+1}) < \\ < K_M(1, x, z) + K_M(1, z, y) + 2\,\varepsilon. \end{aligned}$$

Da arbitrariedade de $\varepsilon > 0$, segue

$$K_M(1,x,y) \leq K_M(1,x,z) + K_M(1,z,y)\,.$$

■

Proposição 2.3.1. *Se $(X_0, X_1)_X$ é um par de espaços métricos compatíveis, então*

$$K_M(1,x,y) \leq d_i(x,y), \quad \forall x,y \in X_i\,,$$

com $i \in \{0,1\}$.

Demonstração:

Com efeito, sejam $x, y \in X_i$, para $i = 0, 1$. Então, para a sequência ligante admissível $x_0 = x$ e $x_1 = y$, de x a y em $X_0 \cap X_1$, vale

$$K_M(1,x,y) \leq h_1(x,y) \leq d_i(x,y).$$

■

A partir daqui, salvo menção contrária e quando não houver possibilidade de confusão por notação, (X_0, d_0) e (X_1, d_1) serão considerados um par de espaços métricos compatíveis com relação ao espaço (X, d_X), ou seja, representarão $(X_0, X_1)_X$.

Lema 2.3.2. *Se $0 < a < b$, então para todos $x, y \in X_0 \cup X_1$ vale*

$$K_M(a,x,y) \leq K_M(b,x,y).$$

Demonstração:

Basta notar que dada uma sequência ligante admissível $(x_n^{x,y})_{adm}$ de x a y em $X_0 \cup X_1$, vale

$$\sum_{k=0}^{n-1} h_a(x_k, x_{k+1}) \leq \sum_{k=0}^{n-1} h_b(x_k, x_{k+1}).$$

O resultado segue tomando o ínfimo sobre todas as sequências ligantes admissíveis de x a y em $X_0 \cup X_1$.

■

Lema 2.3.3. *Se $a, b \in (0, \infty)$ e $x, y \in X_0 \cup X_1$, então*

$$K_M(a,x,y) \leq \max\left\{1, \frac{a}{b}\right\} K_M(b,x,y) \tag{2.15}$$

Demonstração:

- Se $a < b$:
  Neste caso, $\max\left\{1, \dfrac{a}{b}\right\} = 1$. Então,

$$\max\left\{1, \frac{a}{b}\right\} K_M(b,x,y) = K_M(b,x,y) \geq K_M(a,x,y),$$

  pelo Lema 2.3.2.

- Se $a > b$:
  Neste caso, $\max\left\{1, \dfrac{a}{b}\right\} = \dfrac{a}{b}$ e dada qualquer sequência ligante admissível $(x_n^{x,y})_{adm}$ de x a y em $X_0 \cup X_1$, vale

$$\frac{a}{b} \sum_{k=0}^{n-1} h_b(x_{k+1}, x_k) \geq \sum_{k=0}^{n-1} h_a(x_{k+1}, x_k),$$

  pois $h_a(x_k, x_{k+1}) \leq \dfrac{a}{b} h_b(x_k, x_{k+1})$, para todo $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$.
  O resultado segue tomando o ínfimo sobre todas as sequências ligantes admissíveis de x a y em $X_0 \cup X_1$.

■

Proposição 2.3.2. *Se $t \in (0, \infty)$, então a função $K_M(t, \cdot, \cdot)$ é uma métrica em $X_0 \cup X_1$.*

Demonstração:
Seja $t > 0$. Pelo Lema 2.3.3, com $a = 1$ e $b = t$, temos

$$\min\{1,\ t\}\, K_M(1,x,y) \leq K_M(t,x,y), \tag{2.16}$$

pois $(\min\{1,t\})^{-1} = \max\{1, 1/t\}$. Disso segue a positividade de $K_M(t,\cdot,\cdot)$, já que $K_M(1,\cdot,\cdot)$ é uma métrica em $X_0 \cup X_1$.

Ainda do Lema 2.3.3, com $a = t$ e $b = 1$, temos

$$K_M(t,x,y) \leq \max\{1,t\}\, K_M(1,x,y) < \infty,$$

para todo $t > 0$ e todos $x, y \in X_0 \cup X_1$.

Para a simetria, sejam $(x_n^{x,y})_{adm}$ uma sequência ligante admissível de x a y em $X_0 \cup X_1$. Considere a sequência ligante admissível de y a x em $X_0 \cup X_1$ dada por $y_k = x_{n-k}$. Temos

$$\sum_{k=0}^{n-1} h_t(x_k, x_{k+1}) = \sum_{j=0}^{n-1} h_t(y_j, y_{j+1}).$$

Tomando os ínfimos e observando que essa relação entre sequências ligantes admissíveis é biunívoca, temos a igualdade $K_M(t,x,y) = K_M(t,y,x)$.

Para a desigualdade triangular, sejam $x, y, z \in X_0 \cup X_1$ e $\varepsilon > 0$. Então, existem sequências ligantes admissíveis $(x_n^{x,z})_{adm}$ de x a z em $X_0 \cup X_1$ e $(y_m^{z,y})_{adm}$ de z a y em $X_0 \cup X_1$, tais que

$$\sum_{i=0}^{n-1} h_t(x_i, x_{i+1}) < K_M(t, x, z) + \varepsilon$$

e

$$\sum_{j=0}^{m-1} h_t(y_j, y_{j+1}) < K_M(t, z, y) + \varepsilon$$

Considere a sequência dada por $z_k = x_k$ se $0 \leq k \leq n$ e $z_{k+j} = y_j$ se $0 \leq j \leq m$. Note que $(z_{m+n}^{x,y})_{adm}$ é uma sequência ligante admissível de x a y em $X_0 \cup X_1$. Portanto, podemos escrever

$$\begin{aligned} K_M(t, x, y) \leq & \sum_{i=0}^{m+n-1} h_t(z_i, z_{i+1}) = \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} h_t(x_k, x_{k+1}) + \sum_{j=0}^{m-1} h_t(y_j, y_{j+1}) < \\ &< K_M(t, x, z) + K_M(t, z, y) + 2\,\varepsilon. \end{aligned}$$

Da arbitrariedade de $\varepsilon > 0$, segue

$$K_M(t, x, y) \leq K_M(t, x, z) + K_M(t, z, y).$$

■

2.3.2 O Funcional J_M

Proposição 2.3.3. *Se $x, y \in X_0 \cap X_1$ e $t > 0$, definindo*

$$J_M(t, x, y) := \max\{d_0(x, y), t\, d_1(x, y)\},$$

então, $J_M(t, \cdot\,, \cdot\,)$ é uma métrica sobre $X_0 \cap X_1$.

Demonstração:

Com efeito, temos $0 \leq J_M(t, x, y) < \infty$ para todos $x, y \in X_0 \cap X_1$ e ainda $J_M(t, x, x) = 0$ qualquer que seja $x \in X_0 \cap X_1$.

Sejam agora $x, y \in X_0 \cap X_1$ tais que $J_M(t, x, y) = 0$. Temos

$$0 = J_M(t, x, y) = \max\{d_0(x, y), t\, d_1(x, y)\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow d_0(x, y) = t\, d_1(x, y) = 0 \Rightarrow x = y.$$

A simetria é imediata e decorre da simetria de d_0 e d_1.

Para a desigualdade triangular, dados $x, y, z \in X_0 \cap X_1$, vale

$$J_M(t,x,z) + J_M(t,z,y) \geq d_0(x,z) + d_0(z,y) \geq d_0(x,y)$$

e

$$J_M(t,x,z) + J_M(t,z,y) \geq t\,d_1(x,z) + t\,d_1(z,y) \geq t\,d_1(x,y).$$

Portanto, $J_M(t,x,z) + J_M(t,z,y) \geq \max\{d_0(x,y), t\,d_1(x,y)\} = J_M(t,x,y)$.

■

Lema 2.3.4. *Se $a, b \in (0,\infty)$ e $x, y \in X_0 \cap X_1$, então*

$$J_M(a,x,y) \leq \max\left\{1, \frac{a}{b}\right\} J_M(b,x,y), \quad x, y \in X_0 \cap X_1. \tag{2.17}$$

Demonstração:

- Se $a < b$:
  Nesse caso, $\max\left\{1, \frac{a}{b}\right\} = 1$. É fácil ver que J_M é não decrescente na primeira entrada. Logo, temos

$$J_M(a,x,y) \leq 1\,J_M(b,x,y) = \max\left\{1, \frac{a}{b}\right\} J_M(b,x,y).$$

- Se $b < a$:
  Nesse caso, $\max\left\{1, \frac{a}{b}\right\} = \frac{a}{b}$. Assim,

$$\begin{aligned}\max\left\{1, \frac{a}{b}\right\} J_M(b,x,y) = \frac{a}{b}\,J_M(b,x,y) &= \max\left\{\frac{a}{b}d_0(x,y), \frac{a}{b}b\,d_1(x,y)\right\}\\ &\geq \max\left\{d_0(x,y), a\,d_1(x,y)\right\} = J_M(a,x,y).\end{aligned}$$

■

Lema 2.3.5. *Se $x, y \in X_0 \cap X_1$ e $a, b \in (0,\infty)$, então*

$$K_M(a,x,y) \leq \min\left\{1, \frac{a}{b}\right\} J_M(b,x,y). \tag{2.18}$$

Demonstração:

A sequência $x_0 = x$ e $x_1 = y$ é ligante de x a y em $X_0 \cup X_1$ e é admissível. Logo,

$$\begin{aligned}K_M(a,x,y) &\leq h_a(x,y) \leq d_0(x,y) \leq\\ &\leq J_M(b,x,y) = \max\{d_0(x,y), b\,d_1(x,y)\},\end{aligned}$$

e também

$$\begin{aligned} K_M(a,x,y) &\leq h_a(x,y) \leq a\, d_1(x,y) \leq \\ &\leq \max\left\{ \frac{a}{b}\, d_0(x,y), a\, d_1(x,y) \right\} = \\ &= \frac{a}{b}\, J_M(b,x,y). \end{aligned}$$

Portanto,

$$K_M(a,x,y) \leq \min\left\{1, \frac{a}{b}\right\} J_M(b,x,y).$$

■

Observação 2.3.2. Note que os funcionais K e J definidos para a interpolação de espaços normados satisfazem às mesmas desigualdades.

2.4 Espaços de Interpolação

Nessa seção fazemos uma conexão entre o completamento relativo e os funcionais K_M e J_M definidos na seção anterior. Tal conexão será feita através dos funcionais $\Phi_{\theta,q}$ e $\Gamma_{\theta,q}$ como definidos no capítulo anterior.

Nosso objetivo será construir espaços de interpolação métricos usando o completamento relativo da intersecção por métricas convenientes adaptadas aos espaços em questão.

2.4.1 Criando o Ambiente para Interpolação de Espaços Métricos

O lema a seguir servirá como uma maneira de generalizar alguns resultados demonstrados para $q < \infty$, mas que podem ser estendidos para $q = \infty$.

Lema 2.4.1. *Dado $q \geq 1$, se $l_q(\mathbb{Z})$ é o espaço das sequências (x_n) tais que*

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} |x_n|^q < \infty$$

e $l_\infty(\mathbb{Z})$ é o espaço das sequências limitadas, ambos com as normas usuais, então vale

$$\lim_{q\to\infty} \|\cdot\|_q = \|\cdot\|_\infty .$$

Demonstração:

Seja $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ um conjunto de números não negativos com eventuais repetições e pelo menos um elemento não nulo. Considere

$$c = \sup_{1\leq j\leq n} \{a_j\}.$$

Temos

$$\begin{aligned}\lim_{q\to\infty}\left(\sum_{j=1}^{n} a_j^q\right)^{1/q} &= \lim_{q\to\infty}\left[c^q\sum_{j=1}^{n}(a_j/c)^q\right]^{1/q} = \\ &= c\lim_{q\to\infty}\left[\sum_{j=1}^{n}(a_j/c)^q\right]^{1/q} = \\ &= c\lim_{q\to\infty}\left[s+\sum_{a_j\neq c}(a_j/c)^q\right]^{1/q},\end{aligned}$$

onde $1 \leq s \leq n$ é a quantidade de termos iguais a c.

Como $c = \sup\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$, segue que $a_j/c < 1$, para todo j tal que $a_j \neq c$ e por conseguinte, $\lim\limits_{q\to\infty}(a_j/c)^q = 0$, para todo j tal que $a_j \neq c$. Portanto, vale o resultado

$$\lim_{q\to\infty}\left(\sum_{j=1}^{n} a_j^q\right)^{1/q} = c = \sup_{1\leq j\leq n}\{a_j\},$$

já que $\lim\limits_{q\to\infty} s^{1/q} = 1$, para s nas condições acima.

Seja $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de termos não negativos com pelo menos um termo não nulo tal que $(x_n) \in l_\infty(\mathbb{N})$, isto é, (x_n) é limitada. Para cada $n \in \mathbb{N}$, seja

$$y_n := \lim_{q\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n} x_k^q\right)^{1/q} = \sup_{1\leq k\leq n}\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}.$$

Note que (y_n) é uma sequência não decrescente de números não negativos e limitada superiormente por $\| (x_n) \|_\infty$. Assim, pelo *Teorema da Convergência Monótona*, existe $y \in \mathbb{R}$ tal que

$$\sup_{n\in\mathbb{N}}\{y_n\} = \lim_{n\to\infty} y_n = y.$$

Afirmamos que $y = \| (x_n) \|_\infty$. Com efeito, é imediato que $y \leq \| (x_n) \|_\infty$.

Suponhamos que $y < \| (x_n) \|_\infty$. Da definição de $\| (x_n) \|_\infty$, existe um termo x_{n_0} da sequência tal que

$$\| (x_n) \|_\infty - \frac{\| (x_n) \|_\infty - y}{2} < x_{n_0} \leq \| (x_n) \|_\infty,$$

ou seja

$$\frac{\| (x_n) \|_\infty + y}{2} < x_{n_0} \leq \| (x_n) \|_\infty .$$

Isso nos diz que $x_{n_0} > y$ e é um absurdo porque $y \geq y_{n_0} \geq x_{n_0}$. Portanto, tem-se

$$\lim_{q\to\infty} \| (x_n) \|_q = \lim_{q\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{\infty} x_k^q\right)^{1/q} = \| (x_n) \|_\infty .$$

O resultado está provado para a soma em $\mathbb{N}$. Para a soma em $\mathbb{Z}$, sejam ϕ uma bijeção qualquer de $\mathbb{N}$ em $\mathbb{Z}$ e $(x_k)_{k\in\mathbb{Z}} \in l_q(\mathbb{Z})$ uma sequência de termos positivos. Então, vale

$$\sum_{i\in\mathbb{N}} x^q_{\phi(i)} = \sum_{k\in\mathbb{Z}} x^q_k, \quad \forall\, q \geq 1,$$

pois ambas as séries são absolutamente convergentes. O resultado vale também para a sequência nula, trivialmente.

■

Proposição 2.4.1. *Se $\theta \in (0,1)$ e $q \in [1,\infty]$, então*

$$\beta_{\theta,q}(x,y) := \Phi_{\theta,q}(K_M(\ \cdot\ , x, y))$$

é uma métrica sobre $X_0 \cap X_1$, com $\Phi_{\theta,q}$ como na Definição 1.3.1

Demonstração:

Se $q < \infty$:
Temos $\beta_{\theta,q}(x,y) \geq 0$ para todos $x, y \in X_0 \cap X_1$, e que $\beta_{\theta,q}(x,x) = 0$, para todo $x \in X_0 \cap X_1$. Além disso, pelo Lema 2.3.5, com $a = t$ e $b = 1$, temos

$$K_M(t,x,y) \leq \min\{1,t\} J_M(1,x,y), \quad \forall x, y \in X_0 \cap X_1, \quad \forall t > 0.$$

Aplicando o funcional $\Phi_{\theta,q}$:

$$\beta_{\theta,q}(x,y) \leq M_{\theta,q}\, J_M(1,x,y), \tag{2.19}$$

onde

$$M_{\theta,q} = \Phi_{\theta,q}(\min\{1,\cdot\}) \in \mathbb{R}_+. \tag{2.20}$$

Essa desigualdade nos mostra que se $x, y \in X_0 \cap X_1$, então $\beta_{\theta,q}(x,y) < \infty$.
Sejam agora $x, y \in X_0 \cap X_1$ tais que $\beta_{\theta,q}(x,y) = 0$. Acoplando as desigualdades (2.14) e (2.16), temos, após aplicarmos o funcional $\Phi_{\theta,q}$:

$$C^{-1}\, M_{\theta,q}\, d_X(x,y) \leq \beta_{\theta,q}(x,y). \tag{2.21}$$

Assim, como d_X é uma métrica, $\beta_{\theta,q}(x,y) = 0$ implica em $x = y$.
A simetria de $\beta_{\theta,q}$ é imediata e decorre da simetria de $K_M(\cdot,\cdot,\cdot)$ nas segunda e terceira entradas.
Para a desigualdade triangular, dados $x, y, z \in X_0 \cap X_1$. Temos, para todo $t > 0$

$$K_M(t,x,y) \leq K_M(t,x,z) + K_M(t,z,y).$$

Aplicando o funcional $\Phi_{\theta,q}$ na desigualdade acima, vale

$$\Phi_{\theta,q}(K_M(\cdot,x,y)) \leq \Phi_{\theta,q}(K_M(\cdot,x,z) + K_M(\cdot,z,y)),$$

ou seja,

$$\begin{aligned}\left[\int_0^\infty [t^{-\theta}\, K_M(t,x,y)]^q \frac{dt}{t}\right]^{1/q} &\leq \left[\int_0^\infty [t^{-\theta}\,(K_M(t,x,z)+K_M(t,z,y))]^q \frac{dt}{t}\right]^{1/q} \\ &= \left[\int_0^\infty [t^{-\theta-1/q}\, K_M(t,x,z)+t^{-\theta-1/q}\, K_M(t,z,y)]^q dt\right]^{1/q} \\ &\overset{(*)}{\leq} \left[\int_0^\infty [t^{-\theta}\, K_M(t,x,z)]^q \frac{dt}{t}\right]^{1/q} + \\ &+ \left[\int_0^\infty [t^{-\theta}\, K_M(t,z,y)]^q \frac{dt}{t}\right]^{1/q},\end{aligned}$$

onde a desigualdade em $(*)$ é devida à *Desigualdade de Minkowski* aplicada nas funções $f(t) = t^{-\theta-1/q}\, K_M(t,x,z)$ e $g(t) = t^{-\theta-1/q}\, K_M(t,z,y)$. Logo,

$$\beta_{\theta,q}(x,y) \leq \beta_{\theta,q}(x,z) + \beta_{\theta,q}(z,y),$$

como queríamos mostrar.

Portanto, $\beta_{\theta,q}$ é uma métrica sobre $X_0 \cap X_1$.

Se $q = \infty$:

$\beta_{\theta,\infty}(x,y) = \sup_{t>0} t^{-\theta}\, K(t,x,y) \geq 0$ e $\beta_{\theta,\infty}(x,x) = 0$.

Sejam $x, y \in X_0 \cap X_1$ tais que $\beta_{\theta,\infty}(x,y) = 0$. Novamente, acoplando as desigualdades (2.14) e (2.16), temos

$$t^{-\theta}\, \min\{1,t\}\, d_X(x,y) \leq C\, t^{-\theta}\, K(t,x,y).$$

Tomando o supremo sobre todos os $t > 0$:

$$d_X(x,y) \leq C\, \beta_{\theta,\infty}(x,y) = 0.$$

Como d_X é métrica, segue $x = y$.

A simetria é imediata.

Sejam $x, y, z \in X_0 \cap X_1$. Temos

$$t^{-\theta}\, K(t,x,y) \leq t^{-\theta}\, K(t,x,z) + t^{-\theta}\, K(t,z,y),$$

para todo $t > 0$. Tomando o supremo:

$$\beta_{\theta,\infty}(x,y) \leq \beta_{\theta,\infty}(x,z) + \beta_{\theta,\infty}(z,y).$$

■

Proposição 2.4.2 (Discretização da Métrica $\beta_{\theta,q}$)**.** *Se $\theta \in (0,1)$, $q \in [1,\infty]$ e $x, y \in X_0 \cap X_1$, então$\|\, (K_M(2^i,x,y))_{i\in\mathbb{Z}}\, \|_{\lambda_{\theta,q}}$ é uma métrica equivalente a $\beta_{\theta,q}(x,y)$.*

Demonstração:

Seja $q < \infty$:

Inicialmente, notemos que para todo $i \in \mathbb{Z}$ temos

$$K_M(2^{i+1}, x, y) \leq \max\{1, 2^{i+1}/2^i\} K_M(2^i, x, y) = 2K_M(2^i, x, y).$$

Assim, para cada $t > 0$ existe $i \in \mathbb{Z}$ tal que $2^i \leq t \leq 2^{i+1}$. Logo

$$\beta_{\theta,q}^q(x,y) = \sum_{i \in \mathbb{Z}} \int_{2^i}^{2^{i+1}} [t^{-\theta} K_M(t,x,y)]^q \frac{dt}{t}.$$

Levando em consideração que

$$2^{-i\theta} \geq t^{-\theta} \geq 2^{-i\theta} 2^{-\theta}$$

e que $K_M(\cdot, x, y)$ é não decrescente, temos

$$[2^{-\theta} 2^{-i\theta} K_M(2^i, x, y)]^q \leq [t^{-\theta} K_M(t, x, y)]^q \leq [2^{-i\theta+1} K_M(2^i, x, y)]^q.$$

Agora, integrando cada membro com relação a $\dfrac{dt}{t}$ no intervalo $[2^i, 2^{i+1}]$:

$$\begin{aligned} \int_{2^i}^{2^{i+1}} [2^{-\theta} 2^{-i\theta} K_M(2^i, x, y)]^q \frac{dt}{t} &\leq \int_{2^i}^{2^{i+1}} [t^{-\theta} K_M(t, x, y)]^q \frac{dt}{t} \leq \\ &\leq \int_{2^i}^{2^{i+1}} [2^{-i\theta+1} K_M(2^i, x, y)]^q \frac{dt}{t}. \end{aligned}$$

Disso resulta

$$\begin{aligned} 2^{-\theta q} \ln 2 [2^{-i\theta} K_M(2^i, x, y)]^q &\leq \int_{2^i}^{2^{i+1}} [t^{-\theta} K_M(t, x, y)]^q \frac{dt}{t} \\ &\leq 2^q \ln 2 [2^{-i\theta} K_M(2^i, x, y)]^q \,. \end{aligned}$$

Somando em $i \in \mathbb{Z}$ e depois elevando a $1/q$:

$$\begin{aligned} 2^{-\theta} (\ln 2)^{1/q} \parallel (K_M(2^i, x, y)) \parallel_{\lambda_{\theta,q}} &\leq \beta_{\theta,q}(x,y) \leq \\ &\leq 2 (\ln 2)^{1/q} \parallel (K_M(2^i, x, y)) \parallel_{\lambda_{\theta,q}} \,. \end{aligned}$$

<u>Se $q = \infty$:</u>
Como para todo $i \in \mathbb{Z}$ temos

$$K_M(2^{i+1}, x, y) \leq \max\{1, 2^{i+1}/2^i\} K_M(2^i, x, y) = 2K_M(2^i, x, y)$$

e que para cada $t > 0$ existe $i \in \mathbb{Z}$ tal que $2^i \leq t \leq 2^{i+1}$, temos

$$2^{-i\theta} \geq t^{-\theta} \geq 2^{-i\theta} 2^{-\theta}$$

e como $K_M(\cdot, x, y)$ é não decrescente:

$$2^{-\theta} 2^{-i\theta} K_M(2^i, x, y) \leq t^{-\theta} K_M(t, x, y) \leq 2^{-i\theta+1} K_M(2^i, x, y),$$

para $2^i \leq t \leq 2^{i+1}$.

Fixado $t > 0$, para todo $i \in \mathbb{Z}$ tal que $2^i \leq t \leq 2^{i+1}$, vale

$$2^{-\theta}\, 2^{-j\theta}\, K_M(2^j, x, y) \leq t^{-\theta}\, K_M(t, x, y) \leq \beta_{\theta,\infty}(x, y).$$

Como $t > 0$ é arbitrário, então é válida para todo $j \in \mathbb{Z}$. Logo,

$$2^{-\theta} \;\| \,(K(2^j, x, y))_{j\in\mathbb{Z}}\, \|_{\lambda_{\theta,\infty}} \leq \beta_{\theta,\infty}(x, y).$$

Por raciocínio análogo, tem-se

$$\beta_{\theta,\infty}(x, y) \leq 2 \;\| \,(K_M(2^j, x, y))_{j\in\mathbb{Z}}\, \|_{\lambda_{\theta,\infty}} .$$

■

Definição 2.4.1. Dados $x, y \in X_0 \cap X_1$, sejam $(x_n^{x,y})$ uma sequência ligante de x a y em $X_0 \cap X_1$ e $(k_j)_{j=0}^{n-1}$ uma n-upla de números inteiros, ambos fixados. Definimos

$$c_i = c_i((x_n^{x,y}), (k_j)) = \begin{cases} \displaystyle\sum_{k_j = i} J_M(2^i, x_j, x_{j+1}) & \\ 0, & \text{se } k_j \neq i, \quad \forall\, j \in \{0, 1, \ldots, n-1\}. \end{cases}$$

Uma sequência $c = (c_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ como acima é chamada de **sequência derivada de x a y, associada à sequência ligante $(x_n^{x,y})$ em $X_0 \cap X_1$ e à sequência (k_j).**

Exemplo 2.4.1. Sejam $x_0 = x, x_1, x_2, x_3, x_4 = y \in X_0 \cap X_1$ uma sequência ligante de x a y em $X_0 \cap X_1$ e $(-5, 2, -5, 7)$ uma sequência de números inteiros com quatro termos. Para $i = 0$, temos

$$c_0 = \begin{cases} \displaystyle\sum_{k_j = 0} J_M(2^0, x_j, x_{j+1}) & \\ 0, & \text{se } k_j \neq i, \quad \forall\, j \in \{0, 1, \ldots, n-1\}. \end{cases}$$

Como nenhum termo da sequência $(-5, 2, -5, 7)$ é igual a zero, segue que $c_0 = 0$.

Para $i = -5$, temos

$$c_{-5} = \begin{cases} \displaystyle\sum_{k_j = -5} J_M(2^{-5}, x_j, x_{j+1}) & \\ 0, & \text{se } k_j \neq i, \quad \forall\, j \in \{0, 1, \ldots, n-1\}. \end{cases}$$

Como o número -5 ocorre na 0-ésima e segunda posições da sequência $(-5, 2, -5, 7)$, segue que

$$c_{-5} = J_M(2^{-5}, x_0, x_1) + J_M(2^{-5}, x_2, x_3).$$

A sequência (c_i) para este caso é $c_{-5} = J_M(2^{-5}, x_0, x_1) + J_M(2^{-5}, x_2, x_3)$, $c_2 = J_M(2^2, x_1, x_2)$, $c_7 = J_M(2^7, x_3, x_4)$ e todos os demais iguais a zero.

Lema 2.4.2. *Se $x, y \in X_0 \cap X_1$, $\theta \in (0,1)$, $q \in [1,\infty)$ e $t > 0$, então para toda sequência derivada (c_i) de x a y em $X_0 \cap X_1$, vale*

$$K_M(t, x, y) \leq \gamma_{\theta,q,t}\, \Gamma_{\theta,q}((c_i)_{i\in\mathbb{Z}}),$$

onde $\gamma_{\theta,q,t} > 0$ é uma constante que depende apenas de θ, q e t e para $\Gamma_{\theta,q}$ como na Definição 1.3.2.

Demonstração:
Sejam $x, y \in X_0 \cap X_1$, $(x_n^{x,y})$ uma sequência ligante de x a y em $X_0 \cap X_1$ e $(k_0, k_1, \ldots, k_{n-1})$ uma n-upla de números inteiros. Então, para todo $t > 0$ vale,

$$\begin{aligned} K_M(t, x, y) &\leq \sum_{j=0}^{n-1} K_M(t, x_j, x_{j+1}) \leq \\ &\leq \sum_{j=0}^{n-1} \min\{1, t/2^{k_j}\} J_M(2^{k_j}, x_j, x_{j+1}) = \\ &= \sum_{i\in\mathbb{Z}} \min\{1, t/2^i\}\, c_i\,. \end{aligned}$$

Pela *Desigualdade de Hölder*,

$$\begin{aligned} \sum_{i\in\mathbb{Z}} \min\{1, t/2^i\} c_i &= \sum_{i\in\mathbb{Z}} (2^{i\theta} \min\{1, t/2^i\})(2^{-i\theta} c_i) \leq \\ &\leq \left[\sum_{i\in\mathbb{Z}} [2^{i\theta} \min\{1, t/2^i\}]^p\right]^{\frac{1}{p}} \left[\sum_{i\in\mathbb{Z}} [2^{-i\theta} c_i]^q\right]^{\frac{1}{q}} = \\ &= \gamma_{\theta,q,t}\, \Gamma_{\theta,q}(c), \end{aligned}$$

com $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$ e

$$\gamma_{\theta,q,t} = \left[\sum_{i\in\mathbb{Z}} [2^{i\theta} \min\{1, t/2^i\}]^{\frac{q}{q-1}}\right]^{\frac{q-1}{q}}.$$

■

Observação 2.4.1. O lema acima ainda é válido se $q = \infty$. Isso é obtido pelo Lema 2.4.1 e a discretização da métrica, já que

$$\sum_{i\in\mathbb{Z}} (2^{i\theta} \min\{1, t/2^i\})(2^{-i\theta} c_i) \leq \| (2^{i\theta} \min\{1, t/2^i\}) \|_{\ell_1} \| (2^{-i\theta} c_i) \|_{\ell_\infty}\,.$$

Proposição 2.4.3. *Se $\theta \in (0,1)$ e $q \in [1,\infty)$, então a função*

$$\alpha_{\theta,q}(x,y) := \inf_{(c_i)_{i\in\mathbb{Z}}} \Gamma_{\theta,q}((c_i)_{i\in\mathbb{Z}})$$

é uma métrica sobre $X_0 \cap X_1$, onde o ínfimo é tomado sobre todas as sequências derivadas (c_i) obtidas por todas as sequências ligantes de x a y e todas as sequências $(k_j)_{j=0}^{n-1}$, como na Definição 2.4.1.

Demonstração:

Para cada $x \in X_0 \cap X_1$, temos que $z_0 = x = z_1$ é uma sequência ligante de x a x em $X_0 \cap X_1$. Para o conjunto unitário $\{k_0 = 0\}$ vale

$$c_i = \sum_{0=i} J_M(2^0, z_j, z_{j+1}).$$

Isso significa que apenas o termo c_0 poderia não ser nulo. Porém, pela escolha da sequência ligante, temos $c_0 = J_M(2^0, x, x) = 0$. Assim sendo, vale $\alpha_{\theta,q}(x,x) = 0$.

É imediato também que $\alpha_{\theta,q}(x,y) \in \mathbb{R}$, para todos $x, y \in X_0 \cap X_1$, pois para a sequência $z_0 = x$ e $z_1 = y$ e $\{k_0 = 0\}$, temos $c_0 = J_M(1,x,y) \in \mathbb{R}$ e $c_i = 0$, para todo $i \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$.

Note que pelo Lema 2.4.2, vale, tomando o ínfimo sobre todas as sequências derivadas de x a y,

$$K_M(t,x,y) \leq \gamma_{\theta,q,t}\, \alpha_{\theta,q}(x,y), \tag{2.22}$$

onde $\gamma_{\theta,q,t} > 0$ é uma constante que depende apenas de θ, q e t. Essa desigualdade garante a positividade de $\alpha_{\theta,q}$ em $X_0 \cap X_1$.

Para a simetria de $\alpha_{\theta,q}$ sejam $(x_n^{x,y})$ uma sequência ligante de x a y em $X_0 \cap X_1$ e $(k_0, k_1, \ldots, k_{n-1})$ uma n-upla de números inteiros. Considere agora a sequência $(y_n^{y,x})$ dada por $y_j = x_{n-j}$ e $(\tau_0, \tau_1, \ldots, \tau_{n-1})$ uma n-upla de números inteiros dada por $\tau_r = k_{n-1-r}$. Se $(c_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ é a sequência derivada de x a y associada à sequência ligante $(x_n^{x,y})$ e à n-upla $(k_0, k_1, \ldots, k_{n-1})$ e $(d_j)_{j\in\mathbb{Z}}$ é a sequência derivada de y a x associada à sequência ligante $(y_n^{y,x})$ e à n-upla $(\tau_0, \tau_1, \ldots, \tau_{n-1})$, vale

$$\Gamma_{\theta,q}((c_i)_{i\in\mathbb{Z}}) = \Gamma_{\theta,q}((d_j)_{j\in\mathbb{Z}}).$$

Assim, se (c_i) é uma sequência derivada de x a y qualquer, temos

$$\alpha_{\theta,q}(y,x) \leq \alpha_{\theta,q}(x,y).$$

Reciprocamente, se (d_j) é uma sequência derivada de y a x qualquer, temos

$$\alpha_{\theta,q}(x,y) \leq \alpha_{\theta,q}(y,x).$$

Disso, segue que $\alpha_{\theta,q}(x,y) = \alpha_{\theta,q}(y,x)$ que é a simetria de $\alpha_{\theta,q}$.

Para a desigualdade triangular, sejam $x, y, z \in X_0 \cap X_1$ e $\varepsilon > 0$.

Então, existem sequências ligantes $(a_{n_\varepsilon}^{x,z})$ e $(b_{m_\varepsilon}^{z,y})$ sequências ligantes de x a z e de z a y, respectivamente, ambas em $X_0 \cap X_1$ e $(k_0, k_1, \ldots, k_{n_\varepsilon - 1})$ e $(l_0, l_1, \ldots, l_{m_\varepsilon - 1})$

sequências finitas de números inteiros tais que se (c_i^ε) é a sequência derivada de x a z associada à sequência ligante $(a_{n_\varepsilon}^{x,z})$ e à n_ε-upla $(k_0, k_1, \ldots, k_{n_\varepsilon - 1})$ e (d_j^ε) é a sequência derivada de z a y associada à sequência ligante $(b_{m_\varepsilon}^{x,z})$e à m_ε-upla $(l_0, l_1, \ldots, l_{m_\varepsilon - 1})$, vale

$$\Gamma_{\theta,q}((c_i)) < \alpha_{\theta,q}(x,z) + \varepsilon$$

e

$$\Gamma_{\theta,q}((d_j)) < \alpha_{\theta,q}(z,y) + \varepsilon.$$

Definimos a sequência $(e_s^{x,y})$ ligante de x a y em $X_0 \cap X_1$ dada por $e_s = a_s$ se $0 \leq s \leq n_\varepsilon$ e $e_{n_\varepsilon + r} = b_r$ se $0 \leq r \leq m_\varepsilon$, e a $(m_\varepsilon + n_\varepsilon)$-upla $(\tau_0, \tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_{m_\varepsilon + n_\varepsilon - 1})$ dada por $\tau_j = k_j$ se $0 \leq j \leq n_\varepsilon - 1$ e $\tau_{n_\varepsilon + i} = l_i$, se $0 \leq i \leq m_\varepsilon - 1$.

Se (f_k) é a sequência derivada de x a y associada à sequência ligante $(e_s^{x,y})$ em $X_0 \cap X_1$ e à $(m_\varepsilon + n_\varepsilon)$-upla $(\tau_0, \tau_1, \ldots, \tau_{m_\varepsilon + n_\varepsilon - 1})$ vale

$$\begin{aligned}
\alpha_{\theta,q}(x,y) &\leq \Gamma_{\theta,q}((f_i)) \leq \\
&\overset{(2)}{\leq} \Gamma_{\theta,q}((a_i)) + \Gamma_{\theta,q}((b_i)) \leq \\
&\leq \alpha_{\theta,q}(x,z) + \alpha_{\theta,q}(z,y) + 2\,\varepsilon.
\end{aligned}$$

A passagem em (2) é decorrente da *Desigualdade de Minkowski* para os espaços de sequências ℓ_q.

Da arbitrariedade de $\varepsilon > 0$, temos

$$\alpha_{\theta,q}(x,y) \leq \alpha_{\theta,q}(x,z) + \alpha_{\theta,q}(z,y).$$

■

Observação 2.4.2. O resultado acima continua válido se $q = \infty$ e a demonstração é análoga ao caso $q < \infty$ graças ao Lema 2.4.1.

Observação 2.4.3. A desigualdade (2.22) nos diz que $(X_0 \cap X_1, \alpha_{\theta,q})$ está continuamente contido em (X, d_X), pelas desigualdades (2.14) e (2.16).

2.4.2 Espaços de Interpolação

Definição 2.4.2 (O K_M-espaço). Dados $(X_0, X_1)_X$, $\theta \in (0,1)$ e $q \in [1, \infty]$, definimos o K_M**-espaço** como sendo o completamento relativo de $(X_0 \cap X_1, \beta_{\theta,q})$ no espaço (X, d_X). Denotaremos esse espaço por $\overrightarrow{X}_{\theta,q}^{K}$ e a métrica desse espaço por $\mathcal{D}_{\theta,q}$.

Definição 2.4.3 (O J_M-espaço). Dados $(X_0, X_1)_X$, $\theta \in (0,1)$ e $q \in [1, \infty]$, definimos o J_M**-espaço** como sendo o completamento relativo de $(X_0 \cap X_1, \alpha_{\theta,q})$ no espaço (X, d_X). Denotaremos esse espaço por $\overrightarrow{X}_{\theta,q}^{J}$ e a métrica desse espaço por $d_{\theta,q}$.

2.5 Algumas Propriedades dos Espaços de Intepolação Métrica

Do mesmo modo que na interpolação de espaços normados, a interpolação do espaços métricos gera espaços com propriedades básicas desse tipo de interpolação e algumas dessas propriedades são inteiramente análogas às do caso normado.

Definição 2.5.1. Sejam $(X_0, X_1)_X$ um par de espaços métricos compatíveis e E um subconjunto de X.

Dizemos que (E, d_E) é um **espaço métrico intermediário** para o par $(X_0, X_1)_X$ se

$$X_0 \cap X_1 \subseteq E \subseteq X$$

e as inclusões são contínuas, considerando $X_0 \cap X_1$ munido da norma $J_M(1, \cdot, \cdot)$.

Lema 2.5.1. *Se $x, y \in X_0 \cap X_1$ e $\overrightarrow{X}^J_{\theta,q}$ é o J-espaço munido da métrica $d_{\theta,q}$, então*

$$d_{\theta,q}(x,y) \le \alpha_{\theta,q}(x,y) \le (2^\lambda)^{-\theta}\, J_M(2^\lambda, x, y), \quad \forall \lambda \in \mathbb{Z}.$$

Demonstração:

Dados $x, y \in X_0 \cap X_1$ sejam $x_0 = x$, $x_1 = y$ e $\lambda \in \mathbb{Z}$. Então, por definição, se $q < \infty$, vale

$$\begin{aligned}\alpha^q_{\theta,q}(x,y) &\le \sum_{i\in\mathbb{Z}} \left[2^{-i\theta} \sum_{\lambda=i} J_M(2^i, x, y) \right]^q = \\ &= [(2^\lambda)^{-\theta}\, J_M(2^\lambda, x, y)]^q, \quad \forall \lambda \in \mathbb{Z}\,.\end{aligned}$$

Pela inclusão dada na desigualdade (2.8), temos

$$\begin{aligned}d^q_{\theta,q}(x,y) &\le \alpha^q_{\theta,q,\overrightarrow{X}}(x,y) \le \\ &\le \sum_{i\in\mathbb{Z}} \left[2^{-i\theta} \sum_{\lambda=i} J_M(2^i, x, y) \right]^q = \\ &= [(2^\lambda)^{-\theta}\, J_M(2^\lambda, x, y)]^q, \quad \forall \lambda \in \mathbb{Z}\,.\end{aligned}$$

■

Observação 2.5.1. O lema acima continua válido se $q = \infty$ pelo Lema 2.4.1.

Proposição 2.5.1. *Se $E = \overrightarrow{X}^K_{\theta,q}$ ou $E = \overrightarrow{X}^J_{\theta,q}$, existem $\mu, \eta > 0$ tais que*

$$d_X(x,y) \le \mu\, d_E(x,y) \tag{2.23}$$

para todos $x, y \in E$, e

$$d_E(x,y) \le \eta\, J(1, x, y), \tag{2.24}$$

para todos $x, y \in X_0 \cap X_1$.

Demonstração:

Essas afirmações decorrem diretamente da desigualdade (2.5) e dos lemas 2.3.5 e 2.5.1 e continuam válidas se $q = \infty$.

■

Observação 2.5.2. Em vista do Lema 2.2.3, temos que $X_0 \cap X_1$ é denso em $(\overrightarrow{X}^K_{\theta,q}, \mathcal{D}_{\theta,q})$ e em $(\overrightarrow{X}^J_{\theta,q}, d_{\theta,q})$. E pela Proposição 2.2.3, temos que $(\overrightarrow{X}^K_{\theta,q}, \mathcal{D}_{\theta,q})$ e $(\overrightarrow{X}^J_{\theta,q}, d_{\theta,q})$ são completos sempre que (X, d_X) é completo.

Como consequência da Proposição 2.5.1, temos que $\overrightarrow{X}^K_{\theta,q}$ e $\overrightarrow{X}^J_{\theta,q}$ são espaços intermediários.

Proposição 2.5.2. *Se $E = \overrightarrow{X}^K_{\theta,q}$ ou $E = \overrightarrow{X}^J_{\theta,q}$, então vale*

$$d_E(x, y) \leq Ct^{-\theta} J_M(t, x, y), \quad \forall x, y \in X_0 \cap X_1.$$

Demonstração:

1) Se $E = \overrightarrow{X}^K_{\theta,q}$:

Como $K_M(s, x, y) \leq \min\{1, s/t\} J_M(t, x, y)$, para todos $x, y \in X_0 \cap X_1$, aplicando $\Phi_{\theta,q}$ com relação a s, temos

$$\beta_{\theta,q}(x, y) \leq t^{-\theta} M_{\theta,q} J_M(t, x, y).$$

Em $X_0 \cap X_1$ vale $\beta_{\theta,q} \geq \mathcal{D}_{\theta,q}$. Logo,

$$\mathcal{D}_{\theta,q}(x, y) \leq t^{-\theta} M_{\theta,q} J_M(t, x, y)$$

e o resultado segue tomando $C = M_{\theta,q}$.

2) Se $E = \overrightarrow{X}^J_{\theta,q}$:

Dado $t > 0$, existe $\lambda_0 \in \mathbb{Z}$ tal que $2^{\lambda_0} \leq t \leq 2^{\lambda_0+1}$. Como $J_M(\cdot, \cdot, \cdot)$ é não decrescente na sua primeira entrada, segue

$$J_M(2^{\lambda_0}, x, y) \leq J_M(t, x, y) \leq J_M(2^{\lambda_0+1}, x, y).$$

Ainda, de $2^{\lambda_0} \leq t \leq 2^{\lambda_0+1}$, temos

$$t \leq 2^{\lambda_0+1} \Rightarrow 2^{-\theta\lambda_0} \leq 2^\theta t^{-\theta}.$$

Acoplando essas desigualdades, temos

$$(2^{\lambda_0})^{-\theta} J_M(2^{\lambda_0}, x, y) \leq 2^\theta t^{-\theta} J_M(t, x, y).$$

Pelo Lema 2.5.1, temos o resultado, com $C = 2^\theta$

■

Esta é uma propriedade também verificada pela interpolação de espaços normados.

Corolário 2.5.1. *A proposição anterior é equivalente a*

$$d_E(x,y) \leq C(d_0(x,y))^{1-\theta}(d_1(x,y))^{\theta}, \quad \forall\, x,y \in X_0 \cap X_1$$

onde $E = \overrightarrow{X}^J_{\theta,q}$ *ou* $E = \overrightarrow{X}^K_{\theta,q}$.

Demonstração:

($\Rightarrow$): Basta tomar $t = d_0(x,y)/d_1(x,y)$.

($\Leftarrow$): Para todo $t > 0$ vale $d_0(x,y) \leq J_M(t,x,y)$ e $d_1(x,y) \leq J_M(t,x,y)/t$. Assim,

$$\begin{aligned} d_E(x,y) &\leq C(J_M(t,x,y))^{1-\theta}((J_M(t,x,y)/t)^{\theta} = \\ &= Ct^{-\theta} J_M(t,x,y). \end{aligned}$$

■

Teorema 2.5.1. *Temos que*

$$\overrightarrow{X}^J_{\theta,q} \subseteq \overrightarrow{X}^K_{\theta,q}$$

com

$$\mathcal{D}_{\theta,q}(x,y) \leq 2\,\gamma_{\theta,\infty,1}\, d_{\theta,q}(x,y), \quad \forall x,y \in \overrightarrow{X}^J_{\theta,q}.$$

Demonstração:

É suficiente provar que

$$\beta_{\theta,q}(x,y) \leq c\,\alpha_{\theta,q}, \quad x,y \in X_0 \cap X_1, \tag{2.25}$$

para alguma constante $c > 0$. Para tanto, sejam $x,y \in X_0 \cap X_1$, $(x_n^{x,y})$ uma sequência ligante de x a y em $X_0 \cap X_1$ e $(k_0, k_1, \ldots, k_{n-1})$ uma n-upla de números inteiros. Como foi feito no Lema 2.4.2, temos

$$\begin{aligned} K_M(t,x,y) &\leq \sum_{j=0}^{n-1} K_M(t,x_j,x_{j+1}) \leq \\ &\leq \sum_{j=0}^{n-1} \min\{1, t/2^{k_j}\} J_M(2^{k_j}, x_j, x_{j+1}) = \\ &= \sum_{i \in \mathbb{Z}} \min\{1, t/2^i\}\, c_i\,, \end{aligned}$$

para todo $t > 0$. Em particular, se $t = 2^j$, vale

$$K_M(2^j,x,y) \leq \sum_{i\in\mathbb{Z}} \min\{1, 2^{j-i}\}\, c_i.$$

Se $i = k + j$, temos

$$\begin{aligned} K_M(2^j, x, y) &\leq \sum_{i\in\mathbb{Z}} \min\{1, 2^{j-i}\}\, c_i = \\ &= \sum_{k\in\mathbb{Z}} \min\{1, 2^{-k}\}\, c_{k+j} = \\ &= \sum_{k\in\mathbb{Z}} [2^{k\theta} \min\{1, 2^{-k}\}]\, [2^{-k\theta}\, c_{k+j}]. \end{aligned}$$

Agora, aplicamos o funcional $\Gamma_{\theta,q}$ com relação à variável j e temos

$$\Gamma_{\theta,q}(K_M(2^j, x, y)_{j\in\mathbb{Z}}) \leq \Gamma_{\theta,q}((c_{k+j})_{j\in\mathbb{Z}})) \sum_{k\in\mathbb{Z}} 2^{k\theta} \min\{1, 2^{-k}\}\,.$$

Em virtude do teorema de discretização da métrica $\beta_{\theta,q}$, podemos escrever

$$\beta_{\theta,q}(x, y) \leq 2\, \gamma_{\theta,\infty,1}\, \alpha_{\theta,q}(x, y).$$

Agora, aplicamos o Lema 2.2.4, para $A = X_0 \cap X_1$, $m_1 = \beta_{\theta,q}$, $m_2 = \alpha_{\theta,q}$ e $B = X$ com $d_X = d_B$.

■

Esta inclusão também é verdadeira para a interpolação de espaços normados. No entanto, no caso normado, temos o *Lema Fundamental da Interpolação* que garante a inclusão contrária.

Para o caso métrico, não sabemos se existe um análogo ao lema fundamental.

Proposição 2.5.3. *Dado um par de espaços métricos compatíveis* $(X_0, X_1)_X$*,* $\theta \in (0, 1)$ *e* $q \in [1, \infty]$ *se a função inclusão de* $(X_0 \cup X_1, d_X)$ *em* $(X_0 \cup X_1, K(1, \cdot, \cdot))$ *é contínua, então*

$$K_M(t, x, y) \leq Ct^\theta d_E(x, y), \quad \forall x, y \in E \cap (X_0 \cup X_1),$$

onde $E = \overrightarrow{X}^K_{\theta,q}$ *ou* $E = \overrightarrow{X}^J_{\theta,q}$.

Demonstração:

1) Se $E = \overrightarrow{X}^K_{\theta,q}$:

Ja sabemos que $K_M(t, a, b) \leq \max\{1, t/s\} K_M(s, a, b)$, para todos $a, b \in X_0 \cup X_1$. Assim

$$\min\{1, s/t\} K_M(t, a, b) \leq K_M(s, a, b), \quad \forall\, a, b \in X_0 \cup X_1.$$

Aplicando $\Phi_{\theta,q}$ com variável s e usando o Lema 1.3.1, temos

$$t^{-\theta} M_{\theta,q} K_M(t, a, b) \leq \beta_{\theta,q}(a, b),$$

ou ainda

$$K_M(t, a, b) \leq M_{\theta,q}^{-1} t^\theta \beta_{\theta,q}(a, b),$$

para todos $a, b \in X_0 \cap X_1$.

Sejam agora $x, y \in \overrightarrow{X}^K_{\theta,q} \cap (X_0 \cup X_1)$. Então, existem sequências de Cauchy (x_n) e (y_n) em $(X_0 \cap X_1, \beta_{\theta,q})$ tais que $\lim\limits_{n\to\infty} d_X(x_n, x) = \lim\limits_{n\to\infty} d_X(y_n, y) = 0$. Assim, vale

$$K_M(t, x_n, y_n) \leq M^{-1}_{\theta,q} t^\theta \beta_{\theta,q}(x_n, y_n),$$

para todo $n \in \mathbb{N}$.

A desigualdade acima é válida para quaisquer sequências aproximantes de x e de y em $(X_0 \cap X_1, \beta_{\theta,q})$. Logo,

$$\inf \lim_{n\to\infty} K_M(t, x_n, y_n) \leq \inf \lim_{n\to\infty} M^{-1}_{\theta,q}\, t^\theta\, \beta_{\theta,q}(x_n, y_n),$$

onde o ínfimo é tomado sobre todas as sequências aproximantes de x e de y em $(X_0 \cap X_1, \beta_{\theta,q})$. Da inclusão contínua da hipótese, segue $K_M(t, x, y) \leq M^{-1}_{\theta,q}\, t^\theta\, \overline{\beta_{\theta,q}}(x, y)$

Se $x_0 = x, x_1, \ldots, x_n = y$ é uma sequência ligante de x a y em $\overrightarrow{X}^K_{\theta,q}$, temos

$$K_M(t, x, y) \leq \sum_{k=0}^{n-1} K_M(t, x_k, x_{k+1}) \leq M^{-1}_{\theta,q}\, t^\theta \sum_{k=0}^{n-1} \overline{\beta_{\theta,q}}(x_k, x_{k+1}).$$

Tomando o ínfimo sobre todas as sequências ligantes de x a y em $\overrightarrow{X}^K_{\theta,q}$, temos

$$K_M(t, x, y) \leq M^{-1}_{\theta,q}\, t^\theta\, \mathcal{D}_{\theta,q}(x, y).$$

2) Se $E = \overrightarrow{X}^J_{\theta,q}$:

A demonstração segue de $K_M(t, x, y) \leq C t^\theta \mathcal{D}_{\theta,q}(x, y), \quad \forall x, y \in \overrightarrow{X}^K_{\theta,q}$ e do teorema anterior, já que

$$\mathcal{D}_{\theta,q}(x, y) \leq 2\, \gamma_{\theta,\infty,1}\, d_{\theta,q}(x, y), \quad \forall x, y \in \overrightarrow{X}^J_{\theta,q}.$$

■

Essa propriedade também é verificada pelos espaços de interpolação gerados pela interpolação de espaços normados.

Definição 2.5.2. Dizemos que $(X_0, X_1)_X$ **satisfaz à condição** $\mathcal{H}$ se para todos $x, y \in X_0 \cap X_1$, existem uma sequência ligante $(x_n^{x,y})$, de x a y em $X_0 \cap X_1$ e uma n-upla de números inteiros $(k_0, k_1, \ldots, k_{n-1})$ de modo que para alguma constante γ, vale

$$c_i \leq \gamma\, K_M(2^i, x, y), \tag{2.26}$$

com $c = (c_i)$ sendo a sequência derivada de x a y em $X_0 \cap X_1$ associada à sequência ligante e à n-upla de números inteiros acima..

É imediato que para pares de espaços que satisfazem à condição $\mathcal{H}$ temos

$$\overrightarrow{X}^{J}_{\theta,q} = \overrightarrow{X}^{K}_{\theta,q}$$

com métricas equivalentes.

Essa definição é a maneira de contornarmos o estudo dos espaços métricos onde vale a inclusão contrária. Espaços onde valha algum tipo de teorema como o lema fundamental da interpolação dos espaços normados, necessariamente satisfazem à condição $\mathcal{H}$.

Teorema 2.5.2. *Seja $(X_0, X_1)_X$ um par de espaços métricos compatíveis. Então*

a) Denotemos, para o par (X_0, X_1), nesta ordem, o espaço interpolado K_M por $(X_0, X_1)^K_{\theta,q}$ e para o par (X_1, X_0), nesta ordem, o K-espaço interpolado por $(X_1, X_0)^K_{\theta,q}$. Então, vale

$$(X_0, X_1)^K_{\theta,q} = (X_1, X_0)^K_{1-\theta,q},$$

com métricas iguais.

b) $\overrightarrow{X}^K_{\theta,q} \subseteq \overrightarrow{X}^K_{\theta,r}$ se $q \leq r$ e ainda

$$\mathcal{D}_{\theta,q}(x, y) \leq C' \, \mathcal{D}_{\theta,r}(x, y),$$

para todos $x, y \in \overrightarrow{X}_{\theta,r}$.

Demonstração:

$\boxed{\text{ítem } a)}$

Sejam $x, y \in X_0 \cup X_1$ e $(x^{x,y}_n)$ uma sequência ligante admissível de x a y em $X_0 \cup X_1$.

É fácil ver que $h_t(x_k, x_{k+1}; (X_0, X_1)) = t\, h_{t^{-1}}(x_k, x_{k+1}; (X_1, X_0))$, para todo $k = 0, 1, \ldots, n-1$, onde os argumentos (X_0, X_1) e (X_1, X_0) são adicionados aos funcionais para diferenciar a ordem em que os espaços métricos compatíveis está sendo considerada.

Então,

$$t \sum_{k=0}^{n-1} h_{t^{-1}}(x_k, x_{k+1}; (X_0, X_1)) = \sum_{k=0}^{n-1} h_t(x_k, x_{k+1}; (X_1, X_0)).$$

Tomando o ínfimo sobre todas as sequências ligantes admissíveis de x a y, temos

$$t\, K_M(t^{-1}, x, y; (X_0, X_1)) = K_M(t, x, y; (X_1, X_0)).$$

Aplicando o funcional $\Phi_{\theta,q}$, temos

$$\beta_{1-\theta,q}(x, y; (X_0, X_1)) = \beta_{\theta,q}(x, y; (X_1, X_0)).$$

Consequentemente, levam ao mesmo completamento relativo e ambos têm a mesma métrica, ou seja,

$$\mathcal{D}_{1-\theta,q}(x, y; (X_0, X_1)) = \mathcal{D}_{\theta,q}(x, y; (X_1, X_0)).$$

$\boxed{\text{ítem } b)}$

Sejam $x, y \in X_0 \cap X_1$. Usaremos a equivalência de $\beta_{\theta,q}$ com sua versão discreta.

Com efeito, se $q \leq r$, temos que $\ell_q(\mathbb{Z}) \subseteq \ell_r(\mathbb{Z})$. Fixado $\theta \in (0, 1)$ considere a sequência cujo termo geral é dado por

$$c_k = 2^{-k\theta} \, K_M(2^k, x, y), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Temos $\| \ (c_k)_{k\in\mathbb{Z}} \ \|_{\ell_p} = \| \ (K_M(2^k, x, y))_{k\in\mathbb{Z}} \ \|_{\lambda_{\theta,p}}$, para todo $p \in [1, \infty]$. Como, $\beta_{\theta,q}(x, y)$ e $\| \ (K_M(2^k, x, y))_{k\in\mathbb{Z}} \ \|_{\lambda_{\theta,q}}$ são equivalentes para todo $\theta \in (0, 1)$ e todo $q \in [1, \infty]$ e como $\| \ (K_M(2^k, x, y))_{k\in\mathbb{Z}} \ \|_{\lambda_{\theta,q}} \leq \| \ (K_M(2^k, x, y))_{k\in\mathbb{Z}} \ \|_{\lambda_{\theta,r}}$, para todo $\theta \in (0, 1)$, segue o resultado acoplando as desigualdades.

Além disso, pelo Lema 2.2.4, temos

$$\mathcal{D}_{\theta,q}(x, y) \leq C' \, \mathcal{D}_{\theta,r}(x, y),$$

para todos $x, y \in \overrightarrow{X}_{\theta,r}$.

■

Como já comentado, uma questão que está em aberto é saber se o K-espaço métrico e o J-espaço métrico coincidem, com métricas equivalentes, isto é, se algum par de espaços métricos compatíveis satisfaz à condição $\mathcal{H}$ na Definição $2.5.2$.

Essa questão se traduz, em analogia ao caso da interpolação normada, em sabermos se existe um lema fundamental de interpolação métrica.

CAPÍTULO 3

INTERPOLAÇÃO DE OPERADORES DE LIPSCHITZ

Nesse capítulo vamos relacionar os espaços de interpolação com operadores lipschitizianos definidos nesses espaços. De um modo geral, mostraremos que a propriedade de ser lipschitiziano de um operador é invariante por interpolação métrica.

Esse resultado é importante porque através dele mostraremos que sob algumas condições, a compacidade desses operadores também pode ser preservada. Muitos problemas em análise recaem em propriedades de operadores compactos, como no caso particular de operadores lineares compactos que desempenham importante papel na teoria da aproximação.

Neste capítulo considere os pares de espaços métricos compatíveis $(X_0, X_1)_X$ e $(Y_0, Y_1)_Y$.

Definição 3.0.1 (Operadores Lipschitz)**.** Sejam (M, d_M), (N, d_N) espaços métricos e $T : M \to N$. Dizemos que T é um **operador Lipschitz** se existir uma constante $\gamma > 0$ tal que

$$d_N(T(x), T(y)) \leq \gamma\, d_M(x, y),\ \forall x, y \in M.$$

Além disso se T é um operador de Lipschitz,

$$\kappa = \sup_{\substack{x,y\in M\\ x\neq y}} \frac{d_N(T(x), T(y))}{d_M(x, y)}$$

é chamada de constante de Lipschitz de T.

3.1 Interpolação de Operadores Lipschitz

Para evitar possíveis confusões, quando estivermos lidando com dois pares de espaços métricos compatíveis $(X_0, X_1)_X$ e $(Y_0, Y_1)_Y$, iremos agregar os símbolos $\overrightarrow{X}$ para nos referirmos ao par $(X_0, X_1)_X$ e $\overrightarrow{Y}$ para nos referirmos ao par $(Y_0, Y_1)_Y$ em cada funcional ou notação que se fizer necessária essa distinção.

Teorema 3.1.1. *Fixados $\theta \in (0,1)$ e $q \in [1,\infty]$, se (Y,d_Y) é completo e o operador $T : X \to Y$ tem as propriedades seguintes*

$$\lim_{n\to\infty} d_X(x_n,x) = 0 \;\; e \;\; \lim_{n\to\infty} d_Y(T(x_n),y) = 0 \Rightarrow T(x) = y, \tag{3.1}$$

$$T_i = T\Big|_{X_i} : X_i \to Y_i, \quad (i = 0,1), \tag{3.2}$$

$$d_{Y_i}(T_i(x),T_i(z)) \le \omega_i d_{X_i}(x,z), \quad x,z \in X_i, \quad (i=0,1)\,, \tag{3.3}$$

então,

$$T_{\theta,q} = T\Big|_{\overrightarrow{X}^K_{\theta,q}} : \overrightarrow{X}^K_{\theta,q} \to \overrightarrow{Y}^K_{\theta,q} \tag{3.4}$$

e

$$\mathcal{D}_{\theta,q,\overrightarrow{Y}}(T_{\theta,q}(x),T_{\theta,q}(z)) \le \omega_0^{1-\theta}\omega_1^{\theta}\mathcal{D}_{\theta,q,\overrightarrow{X}}(x,z), \quad x,z \in \overrightarrow{X}^K_{\theta,q}. \tag{3.5}$$

Demonstração:

Inicialmente, das propriedades (3.2) e (3.3) afirmamos que

$$K_M(t,T(x),T(z),\overrightarrow{Y}) \le \omega_0 K_M\left(\frac{t\omega_1}{\omega_0},x,z,\overrightarrow{X}\right), \quad x,z \in X_0 \cup X_1.$$

Com efeito, sejam $(x_n^{x,z})_{adm}$ uma sequência ligante admissível de x a z em $X_0 \cup X_1$. Para cada $k = 0,1,\ldots,n-1$ vale

$$\begin{aligned}\omega_0\, h_{\frac{t\,\omega_1}{\omega_0}}(x_k,x_{k+1};\overrightarrow{X}) &= \omega_0\, d_{X_0}(x_k,x_{k+1}) \ge \\ &\ge \omega_0\,\omega_0^{-1} d_{Y_0}(T_0(x_k),T_0(x_{k+1})) \ge \\ &\ge h_t(T_0(x_k),T_0(x_{k+1});\overrightarrow{Y})\end{aligned}$$

sempre que $\{x_k,x_{k+1}\} \subseteq X_0$ e $\{x_k,x_{k+1}\} \not\subseteq X_1$.

Do mesmo modo,

$$\begin{aligned}\omega_0\, h_{\frac{t\,\omega_1}{\omega_0}}(x_k,x_{k+1};\overrightarrow{X}) &= \frac{\omega_1\, t}{\omega_0}\,\omega_0\, d_{X_1}(x_k,x_{k+1}) = \\ &= \omega_1\, t\, d_{X_1}(x_k,x_{k+1}) \ge \\ &\ge \omega_1\, t\,\omega_1^{-1}\, d_{Y_1}(T_1(x_k),T_1(x_{k+1})) \ge \\ &\ge h_t(T_1(x_k),T_1(x_{k+1});\overrightarrow{Y})\end{aligned}$$

sempre que $\{x_k,x_{k+1}\} \subseteq X_1$ e $\{x_k,x_{k+1}\} \not\subseteq X_0$.

Por último, se $x_k, x_{k+1} \in X_1 \cap X_0$,

$$\begin{aligned}
\omega_0\, h_{\frac{t\,\omega_1}{\omega_0}}(x_k, x_{k+1}; \overrightarrow{X}) &= \omega_0 \,\min\{d_{X_0}(x_k, x_{k+1}), \frac{\omega_1\, t}{\omega_0}\, d_{X_1}(x_k, x_{k+1})\} \geq \\
&\geq \min\{d_{Y_0}(T_0(x_k), T_0(x_{k+1})), t\, d_{Y_1}(T_1(x_k), T_1(x_{k+1}))\} = \\
&= h_t(T(x_k), T(x_{k+1}); \overrightarrow{Y}).
\end{aligned}$$

Portanto, para toda sequência ligante admissível $(x_n^{x,z})_{adm}$, temos

$$\sum_{k=0}^{n-1} h_t(T(x_k), T(x_{k+1}); \overrightarrow{Y}) \leq \omega_0 \sum_{k=0}^{n-1} h_{\frac{\omega_1\, t}{\omega_0}}(x_k, x_{k+1}; \overrightarrow{X}).$$

Na desigualdade acima os índices do operador T indicando suas restrições foram retirados uma vez que o operador T está definido em todo o espaço (X, d_X).

Tomando o ínfimo sobre todas as sequências ligantes admissíveis de x a z em $X_0 \cup X_1$, temos

$$K_M(t, T(x), T(z); \overrightarrow{Y}) \leq \omega_0\, K_M(\frac{\omega_1\, t}{\omega_0}, x, z; \overrightarrow{X}).$$

Aplicando o operador $\Phi_{\theta,q}$ na última desigualdade e usando o Lema 1.3.1, temos

$$\beta_{\theta,q,\overrightarrow{Y}}(T(x), T(y)) \leq \omega_0^{1-\theta}\omega_1^{\theta}\beta_{\theta,q,\overrightarrow{X}}(x, y), \quad x, y \in X_0 \cap X_1. \tag{3.6}$$

Seja agora $x \in \overrightarrow{X}^K_{\theta,q}$. Devemos mostrar que $T(x) \in \overrightarrow{Y}^K_{\theta,q}$. De fato, seja (x_n) uma sequência aproximante de x. Como (x_n) é de Cauchy em $(X_0 \cap X_1, \beta_{\theta,q,\overrightarrow{X}})$, segue da desigualdade (3.6) que $(T(x_n))$ é de Cauchy em $(Y_0 \cap Y_1, \beta_{\theta,q,\overrightarrow{Y}})$. Da inclusão de $(Y_0 \cap Y_1, \beta_{\theta,q,\overrightarrow{Y}})$ em (Y, d_Y), segue que $(T(x_n))$ é uma sequência de Cauchy em (Y, d_Y). Como este último espaço é completo, existe $y \in Y$ tal que

$$\lim_{n\to\infty} d_Y(T(x_n), y) = 0.$$

Pela propriedade (3.1), segue $T(x) = y$. Assim, $T(x) \in \overrightarrow{Y}^K_{\theta,q}$.

Agora, sejam $x, y \in \overrightarrow{X}^K_{\theta,q}$. Temos, para quaisquer sequências aproximantes (x_n) de x e (y_n) de y, que

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}_{\theta,q,\overrightarrow{Y}}(T(x), T(y)) &\leq \overline{\beta_{\theta,q,Y}}(T(x), T(y)) \\
&\leq \lim_{n\to\infty} \beta_{\theta,q,\overrightarrow{Y}}(T(x_n), T(y_n)) \\
&\leq \lim_{n\to\infty} \omega_0^{1-\theta}\omega_1^{\theta}\beta_{\theta,q,\overrightarrow{X}}(x_n, y_n),
\end{aligned}$$

onde $\overline{\beta_{\theta,q,Y}}$ é a função distância associada à métrica $\beta_{\theta,q,Y}$.

Tomando o ínfimo sobre todas as sequências aproximantes de x e de y em $(X_0 \cap X_1, \beta_{\theta,q,X})$, temos

$$\mathcal{D}_{\theta,q,Y}(T(x),T(y)) \leq \omega_0^{1-\theta}\,\omega_1^{\theta}\,\overline{\beta_{\theta,q,X}}(x,y),$$

para todos $x, y \in \overrightarrow{X}^K_{\theta,q}$.

Seja agora uma sequência ligante $x_0 = x, x_1, x_2, \ldots, x_n = y \in \overrightarrow{X}^K_{\theta,q}$ de x a y. Temos

$$\begin{aligned}\mathcal{D}_{\theta,q,Y}(T(x),T(y)) &\leq \sum_{k=0}^{n-1}\mathcal{D}_{\theta,q,Y}(T(x_k),T(x_{k+1})) \leq \\ &\leq \sum_{k=0}^{n-1}\overline{\beta_{\theta,q,Y}}(T(x_k),T(x_{k+1})) \leq \\ &\leq \omega_0^{1-\theta}\,\omega_1^{\theta}\sum_{k=0}^{n-1}\overline{\beta_{\theta,q,X}}(x_k,x_{k+1}).\end{aligned}$$

Tomando o ínfimo sobre todas as sequências ligantes de x a y em $\overrightarrow{X}^K_{\theta,q}$, temos

$$\mathcal{D}_{\theta,q,Y}(T(x),T(y)) \leq \omega_0^{1-\theta}\,\omega_1^{\theta}\mathcal{D}_{\theta,q,X}(x,y).$$

Essa desigualdade implica na continuidade de $T_{\theta,q}$.

■

Observação 3.1.1. No teorema anterior, não exigimos a continuidade de T de (X, d_X) em (Y, d_Y). Em troca, exigimos que a aplicação T possua uma propriedade específica e também exigimos que (Y, d_Y) seja completo. O teorema seguinte mostra que podemos obter o mesmo resultado que o teorema anterior, se trocarmos a completude de (Y, d_Y) e a propriedade (3.1) por apenas a continuidade de T de (X, d_X) em (Y, d_Y).

Teorema 3.1.2. *Se o operador T é contínuo de (X, d_X) em (Y, d_Y) e satisfaz as condições (3.2) e (3.3) como no teorema anterior, então vale*

$$T_{\theta,q} = T\Big|_{\overrightarrow{X}^K_{\theta,q}} : \overrightarrow{X}^K_{\theta,q} \to \overrightarrow{Y}^K_{\theta,q}$$

e

$$\mathcal{D}_{\theta,q,\overrightarrow{Y}}(T(x),T(z)) \leq \omega_0^{1-\theta}\omega_1^{\theta}\mathcal{D}_{\theta,q,\overrightarrow{X}}(x,z), \quad x, z \in \overrightarrow{X}^K_{\theta,q}.$$

Demonstração:

Só precisamos mostrar que, $T(\overrightarrow{X}^K_{\theta,q}) \subseteq \overrightarrow{Y}^K_{\theta,q}$, pois o restante da afirmação tem demonstração idêntica à demonstração do teorema anterior.

De fato, seja $x \in \overrightarrow{X}^K_{\theta,q}$. Então, existe $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ sequência de Cauchy em $(X_0 \cap X_1, \beta_{\theta,q,\overrightarrow{X}})$ tal que $\lim\limits_{k\to\infty} d_X(x_k, x) = 0$. Vamos mostrar que $w = T(x) \in \overrightarrow{Y}^K_{\theta,q}$. Para cada $k \in \mathbb{N}$ seja $w_k = T(x_k)$. Temos, para todo $k \in \mathbb{N}$

$$x_k \in X_0 \cap X_1 \Rightarrow w_k = T(x_k) \in T(X_0 \cap X_1) \subseteq T(X_0) \cap T(X_1).$$

Pela condição (3.2), temos que $T(X_i) \subseteq Y_i$, $i = 0, 1$. Disso segue que $w_k = T(x_k) \in Y_0 \cap Y_1$, para todo $k \in \mathbb{N}$. Pela desigualdade (3.6) temos que (w_k) é de Cauchy em $(Y_0 \cap Y_1, \beta_{\theta,q,\overrightarrow{Y}})$. Além disso, da continuidade de $T : X \to Y$, segue que

$$\lim_{k\to\infty} d_X(x_k, x) = 0 \Rightarrow \lim_{k\to\infty} d_Y(T(x_k), T(x)) = \lim_{k\to\infty} d_Y(w_k, w) = 0.$$

Portanto, $(w_k = T(x_k))$ é uma sequência aproximante de $w = T(x)$, sempre que (x_k) for uma sequência aproximante de x. Consequentemente, $w = T(x) \in \overrightarrow{Y}^K_{\theta,q}$.

O restante da demonstração é idêntico ao Teorema 3.1.1.

■

Corolário 3.1.1. *Sejam $(X_0, X_1)_X$ e $(Y_0, Y_1)_Y$ pares de espaços métricos compatíveis tais que $X_i = Y_i$, com $i = 0, 1$, $X = Y$, com métricas iguais e (X, d_X) completo. Se $\omega_0^{1-\theta}\,\omega_1^{\theta} < 1$, então T tem um único ponto fixo em $\overrightarrow{X}^K_{\theta,q}$.*

Demonstração:

Admitindo que (X, d_X) é completo, segue que $(\overrightarrow{X}^K_{\theta,q}, \mathcal{D}_{\theta,q})$ é completo, pela Proposição 2.2.3. Então, podemos aplicar o *princípio da contração de Banach*.

■

Lema 3.1.1. *Se $a > 0$, $x, y \in X_0 \cap X_1$, $(x_n^{x,y})$ é uma sequência ligante de x a y em $X_0 \cap X_1$ e $(k_0, k_1, \ldots, k_{n-1})$ é uma n-upla de números inteiros, vale*

$$\begin{aligned}
&[a^{-\theta}\,\min\{1,a\}]^q \sum_{i\in\mathbb{Z}} \left[2^{-i\theta} \sum_{k_j=i} J_M(2^i, x_j, x_{j+1})\right]^q \leq \\
&\leq \sum_{i\in\mathbb{Z}} \left[(2^i\,a)^{-\theta} \sum_{k_j=i} J_M(2^i\,a, x_j, x_{j+1})\right]^q \\
&\leq [a^{-\theta}\,\max\{1,a\}]^q \sum_{i\in\mathbb{Z}} \left[2^{-i\theta} \sum_{k_j=i} J_M(2^i, x_j, x_{j+1})\right]^q .
\end{aligned}$$

Demonstração:

Sejam $a > 0$ e $x, y \in X_0 \cap X_1$. Como $J_M(A, x, y) \leq \max\{1, A/B\}\, J_M(B, x, y)$, para todos $A, B \in (0, \infty)$ e

$$\min\{1, B/A\} = \frac{1}{\max\{1, A/B\}},$$

temos

$$\min\{1, B/A\} \leq \frac{J_M(B, x, y)}{J_M(A, x, y)} \leq \max\{1, B/A\},$$

ou equivalentemente,

$$\min\{1, B/A\}\, J_M(A, x, y) \leq J_M(B, x, y) \leq \max\{1, B/A\}\, J_M(A, x, y).$$

Então, para $A = 2^i$ e $B = 2^i\, a$,

$$\min\{1, a\}\, J_M(2^i, x, y) \leq J_M(2^i\, a, x, y) \leq \max\{1, a\}\, J_M(2^i, x, y),$$

qualquer que seja $i \in \mathbb{Z}$. Assim, se $(x_n^{x,y})$ é uma sequência ligante de x a y em $X_0 \cap X_1$ e $(k_0, k_1, \ldots, k_{n-1})$ é uma n-upla de números inteiros, vale

$$\begin{aligned}\min\{1, a\} \sum_{k_j = i} J(2^i, x_j, x_{j+1}) &\leq \sum_{k_j = i} J_M(2^i\, a, x_j, x_{j+1}) \\ &\leq \max\{1, a\} \sum_{k_j = i} J_M(2^i, x_j, x_{j+1})\,.\end{aligned}$$

ou ainda

$$\begin{aligned}a^{-\theta}\, \min\{1, a\}\, 2^{-i\theta} \sum_{k_j = i} J_M(2^i, x_j, x_{j+1}) &\leq (2^i\, a)^{-\theta} \sum_{k_j = i} J_M(2^i\, a, x_j, x_{j+1}) \\ &\leq a^{-\theta}\, \max\{1, a\}\, 2^{-i\theta} \sum_{k_j = i} J_M(2^i, x_j, x_{j+1})\,.\end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}&[a^{-\theta}\, \min\{1, a\}]^q \sum_{i \in \mathbb{Z}} \left[2^{-i\theta} \sum_{k_j = i} J_M(2^i, x_j, x_{j+1})\right]^q \leq \\ &\leq \sum_{i \in \mathbb{Z}} \left[(2^i\, a)^{-\theta} \sum_{k_j = i} J_M(2^i\, a, x_j, x_{j+1})\right]^q \\ &\leq [a^{-\theta}\, \max\{1, a\}]^q \sum_{i \in \mathbb{Z}} \left[2^{-i\theta} \sum_{k_j = i} J_M(2^i, x_j, x_{j+1})\right]^q.\end{aligned}$$

■

Teorema 3.1.3. *Se $T : X \to Y$ é uma aplicação com as propriedades (3.1), (3.2) e (3.3), então temos*

$$T : \overrightarrow{X}^J_{\theta,q} \to \overrightarrow{Y}^J_{\theta,q} \tag{3.7}$$

e

$$d_{\theta,q,\overrightarrow{Y}}(T(x), T(y)) \leq \max\{\omega_0, \omega_1\}\, d_{\theta,q,\overrightarrow{X}}(x, y), \quad x, y \in \overrightarrow{X}^J_{\theta,q}. \tag{3.8}$$

Demonstração:

Sejam $x, y \in X_0 \cap X_1$, $(x_n^{x,y})$ uma sequência ligante de x a y em $X_0 \cap X_1$ e

$(k_0, k_1, \ldots, k_{n-1})$ uma sequência de números inteiros. Assim, temos

$$\begin{aligned}
\sum_{k_j=i} J_M(2^i, T(x_j), T(x_{j+1}); \overrightarrow{Y}) &= \sum_{k_j=i} \max\{d_{Y_0}(T_0(x_j), T_0(x_{j+1})), 2^i d_{Y_1}(T_1(x_j), T_1(x_{j+1}))\} \\
&\leq \sum_{k_j=i} \max\{\omega_0\, d_{X_0}(x_j, x_{j+1}), 2^i\, \omega_1\, d_{X_1}(x_j, x_{j+1})\} \\
&\leq \omega_0 \sum_{k_j=i} \max\{d_{X_0}(x_j, x_{j+1}), 2^i\, \omega_1/\omega_0\, d_{X_1}(x_j, x_{j+1})\} \\
&= \omega_0 \sum_{k_j=1} J_M(2^i\omega_1/\omega_0, x_j, x_{j+1}; \overrightarrow{X})\,.
\end{aligned}$$

Aplicando o funcional $\Gamma_{\theta,q}$ nas sequências derivadas geradas acima:

$$\begin{aligned}
\alpha^q_{\theta,q,\overrightarrow{Y}}(T(x), T(y)) &\leq \omega_0^q \sum_{i\in\mathbb{Z}} \left[2^{-\theta i} \sum_{k_j=i} J_M(2^i\omega_1/\omega_0, x_j, x_{j+1}; \overrightarrow{X})\right]^q \\
&= \omega_0^q(\omega_1/\omega_0)^{\theta q} \sum_{i\in\mathbb{Z}} \left[(2^i\omega_1/\omega_0)^{-\theta} \sum_{k_j=i} J_M(2^i\omega_1/\omega_0, x_j, x_{j+1}; \overrightarrow{X})\right]^q \\
&= \omega_0^{(1-\theta)q}\, \omega_1^{\theta q} \sum_{i\in\mathbb{Z}} \left[(2^i\omega_1/\omega_0)^{-\theta} \sum_{k_j=i} J_M(2^i\omega_1/\omega_0, x_j, x_{j+1}; \overrightarrow{X})\right]^q.
\end{aligned}$$

Usando o Lema 3.1.1, com $a = \omega_1/\omega_0$, temos

$$\alpha_{\theta,q,\overrightarrow{Y}}(T(x), T(y)) \leq \max\{\omega_0, \omega_1\}\alpha_{\theta,q,\overrightarrow{X}}(x, y),$$

para todos $x, y \in X_0 \cap X_1$.

Seja agora $x \in \overrightarrow{X}^J_{\theta,q}$. Vamos mostrar que $T(x) \in \overrightarrow{Y}^J_{\theta,q}$. Com efeito, como $x \in \overrightarrow{X}^J_{\theta,q}$, existe uma sequência aproximante de x em $X_0 \cap X_1$. Como

$$\alpha_{\theta,q,\overrightarrow{Y}}(T(x), T(y)) \leq \max\{\omega_0, \omega_1\}\alpha_{\theta,q,\overrightarrow{X}}(x, y), \;\; \forall x, y \in X_0 \cap X_1,$$

segue que $(T(x_n))$ é de Cauchy em $Y_0 \cap Y_1$. Como $(y_n = T(x_n))$ é de Cauchy em $(Y_0 \cap Y_1, \alpha_{\theta,q,\overrightarrow{Y}})$, que está continuamente incluso em (Y, d_Y) que é completo, existe $y \in Y$ tal que

$$\lim_{n\to\infty} d_Y(y_n, y) = 0.$$

Da propriedade (3.1) segue $T(x) = y$ e logo, $T(x) \in \overrightarrow{Y}^J_{\theta,q}$.

O restante da demonstração é análogo à demonstração do Teoreoma 3.1.1.

■

3.2 Compacidade de Operadores Lipschitz nos Espaços de Interpolação Métrica

O estudo da interpolação de operadores compactos é um dos temas mais importantes dentro da teoria de interpolação. No clássico artigo de Lions-Peetre [14] temos os dois resultados mais famosos para o caso de espaços normados. Esses foram seguidos por diversas generalizações ao longo dos anos, como os teoremas de Persson [17], Hayakawa [11], Cobos e Fernandez [7], Cobos, Edmunds e Potter [6], e Cwikel [8] e [9]. Todos esses resultados são para operadores lineares, exceto um dos artigos de Cwikel que trata de operadores Lipschitz, porém em espaços normados.

Aqui apresentamos resultados para operadores Lipschtiz, na linha dos teoremas de Lions-Peetre.

Definição 3.2.1. Sejam (A, d_A), (B, d_B) espaços métricos e $T : A \to B$ um operador qualquer. Dizemos que T **é um operador compacto** se T é contínuo e para todo conjunto limitado $L \subseteq A$ tem-se $\overline{T(L)} \subseteq B$ é um conjunto compacto.

A definição acima é equivalente a dizermos que T é compacto quando a imagem por T de uma sequência limitada em (A, d_A) possui uma subsequência convergente em (B, d_B).

Lema 3.2.1. *Se $X_0 = X_1 = X$ e $d_0 = d_1 = d_X$, então dados $\theta \in (0, 1)$ e $q \in [1, \infty]$, então $\overrightarrow{X}^K_{\theta,q} = X_0$ e $M_{\theta,q}\, d_0 = \mathcal{D}_{\theta,q}$.*

Demonstração:

Temos

$$d_0(x, y) \leq \sum_{k=0}^{n-1} d_0(x_k, x_{k+1}) = \sum_{k=0}^{n-1} h_1(x_k, x_{k+1}).$$

Tomando o ínfimo sobre todas as sequências ligantes admissíveis de x a y em $X_0 \cup X_1$, temos $d_0(x, y) \leq K(1, x, y)$, para todos $x, y \in X_0$.

Como $K(1, x, y) \leq \max\{1, 1/t\}\, K(t, x, y)$, temos

$$\min\{1, t\}\, d_0(x, y) \leq K(t, x, y).$$

Por outro lado, $K(t, x, y) \leq \min\{1, t\}\, J(1, x, y) = d_0(x, y)$. Logo,

$$K(t, x, y) = \min\{1, t\}\, d_0(x, y).$$

Aplicando o funcional $\Phi_{\theta,q}$ temos

$$\beta_{\theta,q} = M_{\theta,q}\, d_0.$$

Agora, como $X_0 = X_0 \cap X_1 \subseteq \overrightarrow{X}^K_{\theta,q} \subseteq X = X_0$, temos $\overrightarrow{X}^K_{\theta,q} = X_0$.

■

Proposição 3.2.1. *Sejam $(X_0, X_1)_X$ um par de espaços métricos, $\theta \in (0, 1)$, $q \in [1, \infty]$ e (F, d_F) um espaço métrico. Se T é um operador que satisfaz*

i) $T : F \to X$ está definido;

ii) $T : F \to X_0$ *é um operador lipschitiziano compacto;*

iii) $T : F \to X_1$ *é lipschitiziano,*

então $T : F \to \overrightarrow{X}^K_{\theta,q}$ *é lipschitziano e compacto.*

Demonstração:

Pelo Lema 3.2.1, temos $F = \overrightarrow{F}^K_{\theta,q}$ e $d_F = (M_{\theta,q})^{-1}\,\mathcal{D}_{\theta,q,\overrightarrow{F}}$. Pelo Teorema 3.1.1, desigualdade (3.5), temos

$$\mathcal{D}_{\theta,q,\overrightarrow{X}}(T(x),T(y)) \leq \omega_0^{1-\theta}\omega_1^{\theta}\mathcal{D}_{\theta,q,\overrightarrow{F}}(x,y), \quad x,y \in F,$$

onde ω_i é a constante de Lipschitz do operador T em cada espaço X_i, com $i = 0,1$. Portanto, $T : F \to \overrightarrow{X}^K_{\theta,q}$ está bem definido.

Seja (x_n) uma sequência limitada em (F, d_F). Como $X_0 \cap X_1$ é denso em $\overrightarrow{X}^K_{\theta,q}$, podemos, sem perda de generalidade, considerar que $T(x_n) = y_n \in X_0 \cap X_1$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Da compacidade de $T : F \to X_0$, existe uma subsequência (y_{n_k}) que converge, segundo a métrica d_0, para um ponto, digamos $y \in X_0$.

Devemos mostrar que $y \in \overrightarrow{X}^K_{\theta,q}$ e que $\mathcal{D}_{\theta,q,\overrightarrow{X}}(T(x_{n_k}), y) \to 0$, quando $k \to \infty$. Para todos $r, s \in \mathbb{N}$, vale, pela Proposição 2.5.2 e pelo Corolário 2.5.1, que

$$\begin{aligned}\beta_{\theta,q,\overrightarrow{X}}(T(x_{n_r}),T(x_{n_s})) &\leq \overline{C}\,[d_0(T(x_{n_r}),T(x_{n_s}))]^{1-\theta}\,[d_1(T(x_{n_r}),T(x_{n_s}))]^{\theta}\\ &\leq \overline{C}\,[d_0(T(x_{n_r}),T(x_{n_s}))]^{1-\theta}\,[\omega_1\, d_F(x_{n_r},x_{n_s})]^{\theta},\end{aligned}$$

onde $\overline{C}$ é uma constante positiva conveniente advinda da combinação da constante C do Corolário 2.5.1 com a constante do Lema 3.2.1.

Como (x_n) é limitada em (F, d_F) e (y_{n_k}) é de Cauchy em (X_0, d_0) (pois num espaço métrico toda sequência convergente é de Cauchy), segue que (y_{n_k}) é de Cauchy em $(X_0 \cap X_1, \beta_{\theta,q,\overrightarrow{X}})$. Como $d_X(x,y) \leq C_0\, d_0(x,y)$, para todos $x, y \in X_0$, temos

$$\lim_{k\to\infty} d_X(y_{n_k}, y) = 0.$$

Logo, $y \in \overrightarrow{X}^K_{\theta,q}$. Agora, para cada $k \in \mathbb{N}$, temos

$$\begin{aligned}\mathcal{D}_{\theta,q}(y_{n_k},y) &\leq \lim_{j\to\infty}\beta_{\theta,q}(y_{n_k},y_{n_j}) \leq\\ &\leq \lim_{j\to\infty}\overline{C}\,[d_0(y_{n_k},y_{n_j})]^{1-\theta}\,[d_1(y_{n_k},y_{n_j})]^{\theta} \leq\\ &\leq \overline{C}\,\lim_{j\to\infty}[d_0(y_{n_k},y_{n_j})]^{1-\theta}\,[\omega_1\, d_F(x_{n_k},x_{n_j})]^{\theta} \leq\\ &\leq M\,\overline{C}\,\lim_{j\to\infty}[d_0(y_{n_k},y_{n_j})]^{1-\theta},\end{aligned}$$

onde $M > 0$ é uma constante que não depende de k. Tomando o limite com $k \to \infty$ na desigualdade acima, temos o resultado, já que (y_{n_k}) é de Cauchy em (X_0, d_0).

Portanto, T é um operador compacto.

■

CAPÍTULO 4

ESPAÇOS MÉTRICOS *versus* ESPAÇOS NORMADOS

Neste capítulo traçamos um paralelo entre a interpolação de espaços métricos e a interpolação de espaços normados usual.

Mostramos que o método de interpolação de espaços métricos desenvolvida nesse trabalho é ainda um método de interpolação válido para espaços normados, com a vantagem de não depender da estrutura algébrica do espaço, como dependem por exemplo os métodos K e J desenvolvidos por Peetre que estão fortemente ligados à decomposição em componentes algébricas para o método K e à convergência de séries como no método J.

4.1 O Método de Interpolação de Espaços Métricos no Ambiente dos Espaços Normados

Lema 4.1.1. *Sejam $(\mathcal{X}, \|\cdot\|_{\mathcal{X}})$ e $(X, \|\cdot\|_X)$ espaços vetoriais normados tais que X é um subespaço vetorial de $\mathcal{X}$ e existe $C > 0$ de modo que $\| x \|_{\mathcal{X}} \leq C \ \| x \|_X$, para todo $x \in X$. Então, o completamento relativo de $(X, \|\cdot\|_X)$ em $(\mathcal{X}, \|\cdot\|_{\mathcal{X}})$, denotado por $(X_{\mathcal{X}}, \|\cdot\|_{X_{\mathcal{X}}})$ é um subespaço vetorial de $\mathcal{X}$ que contém o subespaço X e cuja norma $\|\cdot\|_{X_{\mathcal{X}}}$ satisfaz*

$$\| x \|_{\mathcal{X}} \leq C \ \| x \|_{X_{\mathcal{X}}}, \ \ \forall x \in X_{\mathcal{X}}$$

e

$$\| x \|_{X_{\mathcal{X}}} \leq \| x \|_X, \ \ \forall x \in X.$$

Demonstração:

Sejam $x, y, z \in X_{\mathcal{X}}$ e $\lambda \in \mathbb{F}$ ($\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). Como $(X, \|\cdot\|_X)$ é um espaço vetorial normado, segue que $(x_n + \lambda\, y_n)$ é uma sequência aproximante de $x + \lambda\, y$ sempre que (x_n) e (y_n) forem sequências aproximantes de x e de y em $(X, \|\cdot\|_X)$.

Com isso, mostramos que $X_{\mathcal{X}}$ é um subespaço vetorial de $\mathcal{X}$.

Vamos agora mostrar que a métrica d definida para o completamento relativo de $(X, \|\cdot\|_X)$ em $(\mathcal{X}, \|\cdot\|_{\mathcal{X}})$ é na verdade, uma norma para esse completamento, que denotaremos por $\|\cdot\|_{X_{\mathcal{X}}}$. Para tanto, é necessário apenas mostrarmos que essa métrica é invariante por translação e a propriedade $\| \lambda\, x \|_{X_{\mathcal{X}}} = |\lambda| \; \| x \|_{X_{\mathcal{X}}}$.

Sejam $x, y, z \in X_{\mathcal{X}}$. Vamos mostrar a invariância por translação apoiados em duas afirmações:

Afirmação 1: *A função distância associada à $\|\cdot\|_X$ é invariante por translação.*

Vamos denotar essa função distância por $\overline{d_X}$. Temos

$$\overline{d_X}(x+z, z+y) = \inf \lim_{n\to\infty} \| r_n - s_n \|_X,$$

onde o ínfimo é tomado sobre todas as sequências aproximantes de $x+z$ e de $z+y$ em $(X, \|\cdot\|_X)$.

Quaisquer que sejam (x_n), (y_n) e (z_n) sequências aproximantes quaisquer de x, y e z em $(X, \|\cdot\|_X)$, vale

$$\lim_{n\to\infty} \| x_n - y_n \|_X = \lim_{n\to\infty} \| (x_n + z_n) - (z_n + y_n) \|_X \,. \tag{4.1}$$

Por outro lado, dadas (r_n), (s_n) e (z_n) sequências aproximantes quaisquer de $x+z$, de $z+y$ e de z, respectivamente, vale

$$\lim_{n\to\infty} \| (r_n - z_n) - (s_n - z_n) \|_X = \lim_{n\to\infty} \| r_n - s_n \|_X \,. \tag{4.2}$$

Tomando o ínfimo sobre todas as sequências aproximantes de x e de y na igualdade (4.1), temos $\overline{d_X}(x, y) \geq \overline{d_X}(x+z, z+y)$.

Note que $(r_n - z_n)$ é uma sequência de Cauchy em $(X, \|\cdot\|_X)$ e

$$\| r_n - z_n - x \|_{\mathcal{X}} \to \| x + z - z - x \|_{\mathcal{X}} = 0$$

e o mesmo raciocínio pode ser empregado para $(s_n - z_n)$. Portanto, $(r_n - z_n)$ é uma sequência aproximante de x em $(X, \|\cdot\|_X)$ e do mesmo modo, $(s_n - z_n)$ é uma sequência aproximante de y em $(X, \|\cdot\|_X)$.

Tomando o ínfimo sobre todas as sequências aproximantes de $x+z$ e de $z+y$ na igualdade (4.2), temos $\overline{d_X}(x, y) \leq \overline{d_X}(x+z, z+y)$. Logo, vale $\overline{d_X}(x, y) = \overline{d_X}(x+z, z+y)$, para todos $x, y, z \in X_{\mathcal{X}}$ e temos a invariância por translações.

Afirmação 2: *Para todos $x \in X_{\mathcal{X}}$ e $\lambda \in \mathbb{F}$, vale $\overline{d_X}(\lambda\, x, 0) = |\lambda|\, \overline{d_X}(x, 0)$.*

De fato, se (x_n) é uma sequência aproximante de x em $(X, \|\cdot\|_X)$, então $(\lambda\, x_n)$ é uma sequência aproximante de $\lambda\, x$ em $(X, \|\cdot\|_X)$ e vale a recíproca, para $\lambda \neq 0$. O caso $\lambda = 0$ é trivial. Seja então, $\lambda \neq 0$. Temos

$$\overline{d_X}(\lambda\, x, 0) = \inf \lim_{n\to\infty} \| \lambda\, x_n - \lambda\, z_n \|_X = |\lambda| \inf \lim_{n\to\infty} \| x_n - z_n \|_X = |\lambda|\, \overline{d_X}(x, 0),$$

onde o ínfimo é tomado sobre todas as sequências aproximantes de x e de 0 no espaço $(X, \|\cdot\|_X)$.

Por último, vamos mostrar que a métrica do completamento relativo é uma norma.

Para $x, y, z \in X_{\mathcal{X}}$, dada qualquer sequência ligante $x_0 = x, x_1, \ldots, x_n = y \in X_{\mathcal{X}}$, temos que $z_0 = x_0 + z, z_1 = x_1 + z, \ldots, z_n = x_n + z$ é uma sequência ligante de $x + z$ a $z + y$ em $X_{\mathcal{X}}$ e vale

$$\sum_{k=0}^{n-1} \overline{d_X}(x_k, x_{k+1}) = \sum_{k=0}^{n-1} \overline{d_X}(x_k + z, x_{k+1} + z) = \sum_{k=0}^{n-1} \overline{d_X}(z_k, z_{k+1}).$$

Agora, se $m_0 = x + z, m_1, \ldots, m_s = z + y \in X_{\mathcal{X}}$ é uma sequência ligante de $x + z$ em $z + y$, temos que $c_i = m_i - z \in X_{\mathcal{X}}$, para $i = 0, 1, \ldots, s - 1$ é uma sequência ligante de x a y em $X_{\mathcal{X}}$ e vale

$$\sum_{k=0}^{s-1} \overline{d_X}(m_k, m_{k+1}) = \sum_{k=0}^{s-1} \overline{d_X}(m_k - z, m_{k+1} - z) = \sum_{k=0}^{s-1} \overline{d_X}(c_k, c_{k+1}).$$

Dessas observações, temos a invariância por translação de $\| \cdot \|_{\overline{X}_{\mathcal{X}}}$, tomando os ínfimos sobre as sequências ligantes adequadas consecutivamente.

Usando raciocínio semelhante, mostra-se que $\| \lambda x \|_{X_{\mathcal{X}}} = |\lambda| \; \| x \|_{X_{\mathcal{X}}}$.

■

Proposição 4.1.1. *Se $(X_0, X_1)_X$ é um par de espaços normados compatíveis e $K_M(\cdot, \cdot, \cdot)$ é o K-funcional definido para espaços métricos, então $K_M(t, \cdot, \cdot)$ é uma norma em $X_0 \cap X_1$, considerando $X = X_0 + X_1$ e $d_X(x, y) = \| x - y \|_{X_0 + X_1}$, para $x, y \in X_0 + X_1$.*

Demonstração:

Só precisamos mostrar que $K_M(t, x + z, y + z) = K_M(t, x, y)$, para todos $x, y \in X_0 \cup X_1$ e $z \in X_0 \cap X_1$ e $K_M(t, \lambda x, \lambda y) = |\lambda| \, K_M(t, x, y)$, para todo $\lambda \in \mathbb{F}$ ($\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).

Com efeito sejam $(x_n^{x,y})_{adm}$ uma sequência ligante admissível qualquer de x a y em $X_0 \cup X_1$. Considere a sequência admissível$(z_n^{x+z,y+z})_{adm}$, dada por $z_k = x_k + z$, para $0 \leq k \leq n$. Temos

$$\sum_{k=0}^{n-1} h_t(x_k, x_{k+1}) = \sum_{k=0}^{n-1} h_t(z_k, z_{k+1}).$$

Logo, $K_M(t, x + z, y + z) = K_M(t, x, y)$, bastando tomar os ínfimos sobre todas as sequências ligantes admissíveis de x a y em $X_0 \cup X_1$ e depois sobre todas as sequências ligantes admissíveis de $x + z$ a $z + y$ em $X_0 \cup X_1$, obtendo a desigualdade inversa.

Agora, seja $\lambda \in \mathbb{F}$. Se $(p_m^{x,y})_{adm}$ é uma sequência ligante admissível qualquer de x a y em $X_0 \cup X_1$, temos que $(\lambda \, p_m^{\lambda x, \lambda y})_{adm}$ é uma sequência ligante admissível de λx a λy em $X_0 \cup X_1$. E vale

$$\sum_{k=0}^{m-1} h_t(\lambda \, p_k, \lambda \, p_{k+1}) = |\lambda| \sum_{k=0}^{m-1} h_t(p_k, p_{k+1}).$$

Isso é suficiente para garantirmos que $K_M(t, \lambda x, \lambda y) = |\lambda| \, K_M(t, x, y)$.

As demais propriedades de norma já são satisfeitas pela métrica.

■

Corolário 4.1.1 (Outro Método de Interpolação). *Se $(X_0, X_1)_X$ é um par de espaços normados compatíveis e $K_M(\cdot,\cdot,\cdot)$ é o K-funcional definido para espaços métricos, então fixados $\theta \in (0,1)$ e $q \in [1,\infty]$, o espaço $\overrightarrow{X}^{K}_{\theta,q}$, definido para os espaços métricos, é um espaço de interpolação exponencial exato para o par $(X_0, X_1)_X$, considerando $X = X_0 + X_1$ e métrica em X dada por $\|\cdot\|_{X_0+X_1}$.*

Demonstração:

Com efeito, seja $\overrightarrow{X}^{K_M}_{\theta,q}$ o espaço que é o completamento relativo de $X_0 \cap X_1$ com relação à norma

$$\|\cdot\|_{\theta,q,K_M} = \left[\int_0^\infty [t^{-\theta} K_M(t,\cdot,\cdot)]^q dt/t\right]^{1/q},$$

no espaço $X = X_0 + X_1$ com norma $\|\cdot\|_{X_0+X_1}$. Pela pProposição 4.1.1 e pelo Lema 4.1.1, segue o resultado, completando o espaço normado $(X_0 \cap X_1, \beta_{\theta,q})$ no espaço normado $(X_0 + X_1, \|\cdot\|_{X_0+X_1})$ e bastando observar que operadores lineares contínuos em espaços normados são operadores lipschitzianos.

■

Lema 4.1.2. *Para todo $t > 0$ e todo $x \in X_0 \cap X_1$ temos*

$$K_N(t,x) \leq K_M(t,x) \leq 3K_N(t,x),$$

onde $K_M(t,x) := K_M(t,x,0)$ e K_N é funcional K definido para a interpolação de espaços normados usual.

Demonstração.

Mostraremos $K_M(t,x) \leq 3\,K_N(t,x)$ primeiramente.

Sejam $x \in X_0 \cap X_1$ e $x = x_0 + x_1 \in X_0 + X_1$. Considere a sequência ligante admissível de x a 0 em $X_0 \cup X_1$:

$$y_0 = x, y_1 = x_0, y_2 = 0, y_3 = x_1, y_4 = 0$$

e em X_1 considere a norma $t\ \|\cdot\|_1$. Temos

$$\begin{aligned}
K_M(t,x) &\leq \sum_{k=0}^{3} h_t(y_k, y_{k+1}) = \\
&= h_t(y_0,y_1) + h_t(y_1,y_2) + h_t(y_2,y_3) + h_t(y_3,y_4) = \\
&= h_t(x_1,0) + h_t(x_0,0) + h_t(x_1,0) + h_t(x_1,0) \leq \\
&\leq 3(\|x_0\|_0 + t\ \|x_1\|_1)\,.
\end{aligned}$$

Portanto, tomando o ínfimo sobre todas as decomposições $x_0 + x_1 = x$ no espaço $X_0 + X_1$, temos

$$M(t,x) \leq 3\,K_N(t,x), \ \ \forall x \in X_0 \cap X_1 \ \text{ e } \ \forall t > 0. \qquad (4.3)$$

Mostremos agora que $K_N(t,x) \leq K_M(t,x)$. Para tanto, seja $(x_n^{x,0})$ uma sequência ligante admissível de x a 0 em $X_0 \cup X_1$.

Temos que

$$\sum_{k=0}^{n-1}(x_k - x_{k+1}) = x, \quad \text{com soma em } X_0 + X_1.$$

Agora, note que para cada par x_k, x_{k+1} que pertença à intersecção, vale

$$K_N(t, x_k - x_{k+1}) \leq \| x_k - x_{k+1} \|_0 + t \ \| 0 \|_1, \text{ se } x_k, x_{k+1} \in X_0$$

e

$$K_N(t, x_k - x_{k+1}) \leq \| 0 \|_0 + t \ \| x_k - x_{k+1} \|_1, \text{ se } x_k, x_{k+1} \in X_1.$$

Assim, podemos escrever

$$K_N(t, x_k - x_{k+1}) \leq h_t(x_k, x_{k+1}) = \min\{\| x_k - x_{k+1} \|_0, t \ \| x_k - x_{k+1} \|_1\}.$$

Se $x_k, x_{k+1} \in X_i \setminus X_{1-i}$, com $i \in \{0, 1\}$ temos

$$K_N(t, x_k - x_{k+1}) \leq t^i \ \| x_k - x_{k+1} \|_i = h_t(x_k, x_{k+1}).$$

Então,

$$\begin{aligned} K_N(t,x) = K_N\left(t, \sum_{k=0}^{n-1} x_k - x_{k+1}\right) &\leq \\ \leq \sum_{k=0}^{n-1} K_N(t, x_k - x_{k+1}) &\leq \\ \leq \sum_{k=0}^{n-1} h_t(x_k, x_{k+1})\,. \end{aligned}$$

Tomando o ínfimo sobre as sequências ligantes admissíveis de x a 0 em $X_0 \cup X_1$, temos $K_N(t,x) \leq K_M(t,x)$, como queríamos.

Consequentemente, para todo $t > 0$ e todo $x \in X_0 \cap X_1$, tem-se

$$K_N(t,x) \leq K_M(t,x) \leq 3\, K_N(t,x).$$

■

Proposição 4.1.2. *Dado um par de espaços normados compatíveis $(X_0, X_1)_X$, $\theta \in (0,1)$ e $1 \leq q < \infty$, seja $Z = X_0 \cap X_1$ munido com a norma usual do K-espaço normado interpolado*

$$\| z \|_{\theta,q,K_N} = \left(\int_0^\infty [t^{-\theta} \, K_N(t,z)]^q \, \frac{dt}{t} \right)^{1/q}.$$

Agora, sejam $X = X_0 + X_1$ com a norma $K_N(1,\cdot)$ e M o completamento relativo de Z em $X = X_0 + X_1$. Então $M = \overline{X}^{K_N}_{\theta,q}$, onde $\overline{X}^{K_N}_{\theta,q}$ é o espaço interpolado normado usual.

Demonstração:

Primeiro vamos mostrar que

$$(I) \qquad M \subset \overline{X}_{\theta,q}^{K_N}.$$

Seja $x \in M$. Pela definição de M, existe uma sequência (x_n) de pontos em $Z = X_0 \cap X_1$ tal que

$$(1) \qquad \| x_n - x \|_{X_0+X_1} \to 0,$$

$$(2) \qquad \lim_{m,n\to\infty} \| x_m - x_n \|_{\theta,q,K_N} = 0$$

Como

$$\lim_{n\to\infty} K_N(1, x_n - x) = \lim_{n\to\infty} \| x_n - x \|_{X_0+X_1} = 0$$

e $K_N(1, \cdot)$ é equivalente a $K_N(t, \cdot)$, para todo $t > 0$, segue que $\lim_{n\to\infty} K_N(t, x_n - x) = 0$, para todo $t > 0$, ou ainda $\lim_{n\to\infty} K_N(t, x_n) = K_N(t, x)$, para todo $t > 0$.

Para cada $t > 0$ e cada $n \in \mathbb{N}$ seja $f_n(t) = (t^{-\theta} K_N(t, x_n))^q/t$. Como (x_n) é de Cauchy em $(X_0 \cap X_1, \| \cdot \|_{\theta,q,K_N})$, segue que existe $\gamma > 0$ de modo que para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$\int_0^\infty f_n(t)dt = \| x_n \|_{\theta,q,K_N}^q \leq \gamma,$$

porque num espaço métrico toda sequência de Cauchy é limitada. Portanto, cada f_n é mensurável e

$$\lim_{n\to\infty} f_n(t) = \lim_{n\to\infty} (t^{-\theta} K_N(t, x_n))^q/t = (t^{-\theta} K_N(t, x))^q/t := f(t).$$

Pelo *Lema de Fatou*, temos

$$\int_0^\infty \liminf_{n\to\infty} f_n(t)dt \leq \liminf_{n\to\infty} \int_0^\infty f_n(t)dt,$$

ou seja,

$$\| x \|_{\theta,q,K_N}^q = \int_0^\infty [t^{-\theta} K_N(t, x)]^q \frac{dt}{t} \leq \liminf_{n\to\infty} \| x_n \|_{\theta,q,K_N}^q \leq \gamma < \infty.$$

Portanto, $x \in \overline{X}_{\theta,q}^{K_N}$.

Agora, vamos mostrar que

$$(II) \qquad \overline{X}_{\theta,q}^{K_N} \subset M.$$

Seja $x \in \overline{X}_{\theta,q}^{K_N}$. Como $q < \infty$, então para $x \in \overline{X}_{\theta,q}^{K_N}$ (pela densidade de $X_0 \cap X_1$ em $\overline{X}_{\theta,q}^{K_N}$), concluimos que existe uma sequência $(x_n) \in X_0 \cap X_1$, tal que

$$(*) \qquad \| x_n - x \|_{\theta,q,K_N} \to 0.$$

Então por $(*)$, temos que $\| x_n - x \|_{X_0+X_1} \to 0$, porque o espaço interpolado está continuamente incluído em $X_0 + X_1$. Como toda sequência convergente é de Cauchy, então (x_n) é uma sequência de Cauchy em X, tal que

$$\lim_{n\to\infty} d_X(x_n, x) = \lim_{n\to\infty} \| x_n - x \|_{X_0+X_1} = 0.$$

Isso mostra que $x \in M$, portanto (I) e (II) garantem que $M = \overline{X}_{\theta,q}^{K_N}$.

■

Lema 4.1.3. *Dado um par de espaços normados compatíveis $(X_0, X_1)_X$, $\theta \in (0,1)$ e $1 \leq q < \infty$, considere $X_0 \cap X_1$ munido com a norma usual do K_N-espaço normado interpolado*

$$\beta_{\theta,q,\overline{X}} = \| z \|_{\theta,q,K_N} = \left(\int_0^\infty [t^{-\theta} K_N(t,z)]^q \frac{dt}{t} \right)^{1/q}.$$

Agora, seja $X = X_0 + X_1$ com a norma $d_X(x,y) = K_N(1, x-y)$. Se $\| \cdot \|_{\theta,q,\overline{X}}$ representa a norma do completamento relativo de $(X_0 \cap X_1, \beta_{\theta,q,\overline{X}})$ em (X, d_X), então, para todo $x \in \overline{X}_{\theta,q}^{K_N}$, vale

$$\| x \|_{\theta,q,\overline{X}} = \| x \|_{\theta,q,K_N} .$$

Demonstração:

Seja $x \in \overline{X}_{\theta,q}^{K_N}$. Pela Proposição 4.1.2, existe uma sequência (x_n) de pontos em $X = X_0 \cap X_1$ tal que

$$(1) \qquad \| x_n - x \|_{X_0+X_1} \to 0,$$

$$(2) \qquad \lim_{m,n\to\infty} \| x_m - x_n \|_{\theta,q,K_N} = 0$$

Como

$$\lim_{n\to\infty} K_N(1, x_n - x) = \lim_{n\to\infty} \| x_n - x \|_{X_0+X_1} = 0$$

e $K_N(1,\cdot)$ é equivalente a $K_N(t,\cdot)$, para todo $t > 0$, segue que $\lim_{n\to\infty} K_N(t, x_n - x) = 0$, para todo $t > 0$, ou ainda $\lim_{n\to\infty} K_N(t, x_n) = K_N(t,x)$, para todo $t > 0$.

Para cada $t > 0$ e cada $n \in \mathbb{N}$ seja $f_n(t) = (t^{-\theta} K_N(t, x_n))^q / t$. Como (x_n) é de Cauchy em $(X_0 \cap X_1, \| \cdot \|_{\theta,q,K_N})$, segue que existe $\gamma > 0$ de modo que para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$\int_0^\infty f_n(t) dt = \| x_n \|_{\theta,q,K_N}^q \leq \gamma,$$

porque num espaço métrico toda sequência de Cauchy é limitada. Portanto, cada f_n é mensurável e

$$\lim_{n\to\infty} f_n(t) = \lim_{n\to\infty} (t^{-\theta} K_N(t, x_n))^q / t = (t^{-\theta} K_N(t,x))^q / t := f(t).$$

Pelo *Lema de Fatou*, temos

$$\int_0^\infty \lim_{n\to\infty} \inf f_n(t) dt \leq \lim_{n\to\infty} \inf \int_0^\infty f_n(t) dt,$$

ou seja,

$$\| x \|_{\theta,q,K_N}^q = \int_0^\infty [t^{-\theta} K_N(t,x)]^q \frac{dt}{t} \leq \lim_{n\to\infty} \inf \| x_n \|_{\theta,q,K_N}^q = \lim_{n\to\infty} \| x_n \|_{\theta,q,K_N}^q .$$

Tomando o ínfimo sobre todas as sequências aproximantes de x em $(X_0 \cap X_1, \beta_{\theta,q,\overline{X}})$, temos

$$\| x \|_{\theta,q,K_N}^q \leq \overline{\beta_{\theta,q,\overline{X}}}(x,0),$$

onde $\overline{\beta_{\theta,q,\overline{X}}}$ é a função distância associada à métrica $\beta_{\theta,q,\overline{X}}$.

Como essa desigualdade é válida para todo $x \in \overline{X}_{\theta,q}^{K_N}$, segue

$$\| x \|_{\theta,q,K_N} \leq \| x \|_{\theta,q,\overline{X}}, \ \ \forall x \in \overline{X}_{\mathcal{X}}. \tag{4.4}$$

Agora, como $X_0 \cap X_1$ é denso no completamento de $(X_0 \cap X_1, \beta_{\theta,q,\overline{X}})$ em (X, d_X), para todo x existe (x_n) de pontos em $X_0 \cap X_1$ tal que

$$\| x_n - x \|_{\theta,q,\overline{X}} \to 0.$$

Logo, da desigualdade (4.4), (x_n) é uma sequência convergente a x na norma $\| \cdot \|_{\theta,q,K_N}$.

Como $(X_0 \cap X_1, \| \cdot \|_{\theta,q,K_N})$ está contínuamente contido no completamento relativo $(\overline{X}_{\theta,q}^{K_N}, \| \cdot \|_{\theta,q,\overline{X}})$, segue, para todo $n \in \mathbb{N}$, temos

$$\| x_n \|_{\theta,q,\overline{X}} \leq \| x_n \|_{\theta,q,K_N}$$

Tomando o limite com $n \to \infty$ na desigualdade acima, temos

$$\| x \|_{\theta,q,\overline{X}} \leq \| x \|_{\theta,q,K_N},$$

qualquer que seja $x \in \overline{X}_{\mathcal{X}}$.

Portanto, vale $\| x \|_{\theta,q,\overline{X}} = \| x \|_{\theta,q,K_N}$, como queríamos mostrar.

■

4.1.1 Relações entre o Método de Interpolação de Espaços Normados e o Método de Interpolação de Espaços Métricos

Corolário 4.1.2. *Sejam (X_0, X_1) um par de espaços normados compatíveis, $\theta \in (0,1)$ e $q \in [1,\infty)$. Denotando por $\overrightarrow{X}_{\theta,q}^{K_M}$ o espaço interpolado dado pela interpolação em espaços métricos pelo funcional K_M, com norma denotada por $\| \cdot \|_{\theta,q,K_M}$, e por $\overline{X}_{\theta,q}^{K_N}$ o espaço interpolado dado pela interpolação de espaços normados, com norma dada denotada por $\| \cdot \|_{\theta,q,K_N}$, vale, considerando $\mathcal{X} = X_0 + X_1$ com métrica $\| \cdot \|_{X_0+X_1}$, que*

$$\overline{X}_{\theta,q}^{K_N} = \overrightarrow{X}_{\theta,q}^{K_M},$$

com inclusão contínua e normas satisfazendo

$$\| x \|_{\theta,q,K_N} \leq \| x \|_{\theta,q,K_M} \leq 3 \| x \|_{\theta,q,K_N} .$$

Demonstração.

A demonstração segue do Lema 4.1.2 e do Lema 2.2.4. Depois, pela aplicação do Lema 4.1.3.

■

4.1.2 O J-Método Métrico no Contexto dos Espaços Normados

Outra questão que se põe é se o J-espaço do caso normado coincide com o J-espaço do caso métrico quando $\overrightarrow{X} = (X_0, X_1)$ é um par de espaços normados compatíveis.

Lema 4.1.4. *Seja $\overrightarrow{X} = (X_0, X_1)$ um par compatível de espaços normados. Então, $\alpha_{\theta,q,\overrightarrow{X}}$ é uma norma sobre $X_0 \cap X_1$.*

Demonstração:

Como $\alpha_{\theta,q,\overrightarrow{X}}$ é uma métrica sobre $X_0 \cap X_1$ só precisamos mostrar que é invariante por translação e que dado $\lambda \in \mathbb{R}$, temos $\alpha_{\theta,q,\overrightarrow{X}}(\lambda\, x, \lambda y) = |\lambda|\, \alpha_{\theta,q,\overrightarrow{X}}(x, y)$.

De fato, sejam $x, y, z \in X_0 \cap X_1$, $(x_n^{x,y})$ uma sequência ligante de x a y em $X_0 \cap X_1$ e $(k_0, k_1, \ldots, k_{n-1})$ uma sequência de números inteiros. Vale

$$\sum_{k_j=i} J(2^i, x_j, x_{j+1}) = \sum_{k_j=i} J(2^i, x_j + z, x_{j+1} + z).$$

Portanto, a sequência derivada de x a y é igual à sequência derivada de $x + z$ a $y + z$. Isso mostra que $\alpha_{\theta,q,\overrightarrow{X}}$ é invariante por translação em $X_0 \cap X_1$.

Agora, se $\lambda \in \mathbb{R}$, então

$$\sum_{k_j=i} J(2^i, \lambda\, x_j, \lambda\, x_{j+1}) = |\lambda| \sum_{k_j=i} J(2^i, x_j, x_{j+1}).$$

Consequentemente, $\alpha_{\theta,q,\overrightarrow{X}}(\lambda\, x, y) = |\lambda|\, \alpha_{\theta,q,\overrightarrow{X}}(x, y)$.

■

Proposição 4.1.3. *Seja $\overrightarrow{X} = (X_0, X_1)$ um par compatível de espaços normados. Então,*

$$\alpha_{\theta,q}(a, 0) \geq C \ \| \ a \ \|_{\theta,q,J}$$

e

$$\alpha_{\theta,q}(a, 0) \leq \left(1 + 2^{(1-\theta)q}\right)^{1/q} \| \ a \ \|_{\theta,q,J} + J(1, a),$$

para todo $a \in X_0 \cap X_1$.

Demonstração:

A afirmação $\alpha_{\theta,q}(a, 0) \geq C \ \| \ a \ \|_{\theta,q,J}$ segue da sequência de afirmações:

$$\alpha_{\theta,q}(a, 0) \geq \gamma\, \beta_{\theta,q}(a, 0) \sim \| \ a \ \|_{\theta,q,K} \sim \| \ a \ \|_{\theta,q,J} \ .$$

Seja $(a_j)_{j \in \mathbb{Z}}$ tal que

i) $a_j \in X_0 \cap X_1$ para todo $j \in \mathbb{Z}$,

ii) $\sum\limits_{j\in\mathbb{Z}} a_j = a$, (convergência em $X_0 + X_1$),

iii) $\| (J(2^j, a_j)) \|_{\lambda_{\theta,q}} < \infty$.

Então, considere a sequência ligante de 0 a a como segue:

$$x_0 = 0, \;\; x_1 = a_1, \;\; x_2 = 0 \quad \text{e} \quad x_3 = a$$

Agora, considere o trio de números inteiros dado por $\{(1,2,0)\}$. Para cada $i \in \mathbb{Z}$, temos

$$c_i = \begin{cases} J(2^1, x_0, x_1), & \text{se } i = 1 \\ J(2^2, x_1, x_2), & \text{se } i = 2 \\ J(1, x_2, x_3), & \text{se } i = 0 \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Note que

$$\begin{aligned}
\Phi_{\theta,q}((c)) &= \left(\sum_{i\in\mathbb{Z}} [2^{-i\theta}\, c_i]^q \right)^{1/q} = \left([2^{-\theta} c_1]^q + [2^{-2\theta} c_2]^q + [c_0]^q \right)^{1/q} \\
&= \left([2^{-\theta} J(2^1, 0, x_1)]^q + [2^{-2\theta} J(2^2, x_1, 0)]^q + [J(1, 0, a)]^q \right)^{1/q} \\
&\leq \left([2^{-\theta} J(2^1, a_1)]^q + [2^{-2\theta} J(2^2, a_1)]^q + [J(1, a)]^q \right)^{1/q} \\
&\leq \left[(1 + 2^{(1-\theta)q}) [2^{-\theta} J(2^1, a_1)]^q + [J(1, a)]^q \right]^{1/q} \\
&\leq \left[(1 + 2^{(1-\theta)q}) \sum_{i\in\mathbb{Z}} [2^{-i\theta} J(2^i, a_i)]^q \right]^{1/q} + J(1, a) \\
&= \left(1 + 2^{(1-\theta)q} \right)^{1/q} \| (J(2^i, a_i))_{i\in\mathbb{Z}} \|_{\lambda_{\theta,q}} + J(1, a), \quad \forall n \in \mathbb{Z}\,.
\end{aligned}$$

O resultado segue tomando o ínfimo sobre todas as representações canônicas discretas de a.

$\blacksquare$

CAPÍTULO 5

APLICAÇÕES E EXEMPLOS DE INTERPOLAÇÃO MÉTRICA

O presente capítulo mostra aplicações do método da interpolação de espaços métricos que não podem ser resolvidos com a interpolação de espaços normados usuais.

Vemos que existem espaços vetoriais normados, mas com corpo de escalares diferente de $\mathbb{R}$ e de $\mathbb{C}$, que aparecem na literatura e que carecem de um tratamento específico.

5.1 Os Espaços $\mathbb{Q}[\sqrt{r}]$ e $\mathbb{Q}[\sqrt{s}]$

Dado um número natural primo p, definimos o conjunto

$$\mathbb{Q}[\sqrt{p}] := \{a + b\sqrt{p};\;\; a, b \in \mathbb{Q}\}.$$

Este conjunto aparece com frequência na álgebra, em especial na teoria da extensão de corpos. Ele é um corpo obtido pelo isomorfismo com o quociente do anel de polinômios com coeficientes racionais $\mathbb{Q}[x]$, pelo ideal maximal gerado pelo polinômio irredutível $x^2 - p$.

Esse conjunto é um espaço vetorial normado, de dimensão 2, sobre o corpo dos números racionais.

Mostraremos que embora esse conjunto não possa ser analisado sob o tratamento da interpolação de espaços normados, por não ser um espaço vetorial real, ele ainda possui tratamento pela teoria da interpolação em espaços métricos.

Sejam $r, s \in \mathbb{N}$ números primos distintos. Considere $X_0 = \mathbb{Q}[\sqrt{r}]$, $X_1 = \mathbb{Q}[\sqrt{s}]$ e $X = \mathbb{R}$ munidos da métrica induzida do valor absoluto de $\mathbb{R}$. Temos que $X_0 \cap X_1 = \mathbb{Q}$ e, para $x, y \in X_0 \cap X_1$ e $t > 0$, vale

$$\min\{1,\, t\} d_{\mathcal{X}}(x, y) \leq K_M(t, x, y) \leq \min\{1,\, t\}\, J_M(1, x, y).$$

Note que $d_{\mathcal{X}}(x, y) = |x - y|$ e $J_M(1, x, y) = |x - y|$.

Assim, vale

$$\min\{1,\, t\}|x-y| \leq K_M(t,x,y) \leq \min\{1,\, t\}\, |x-y|.$$

Consequentemente,

$$\mathcal{D}_{\theta,q}(x,y) = M_{\theta,q}\, |x-y|,$$

onde $M_{\theta,q} = \Phi_{\theta,q}(\min\{1,\cdot\})$.

Isso nos mostra que o espaço interpolado é toda a reta, pois se $z \in \mathbb{R}$, existe uma sequência (z_n) de Cauchy de pontos em $(\mathbb{Q},\, |\cdot|)$ tal que $|z_n - z| \to 0$. Consequentemente, (z_n) é de Cauchy em $(\mathbb{Q},\, M_{\theta,q}|\cdot|)$ e $M_{\theta,q}\,|z_n - z| \to 0$. Portanto, $z \in \overrightarrow{X}^K_{\theta,q}$.

Como a inclusão contrária é imediata da definição de completamento de Cauchy, temos $\mathbb{R} = \overrightarrow{X}^K_{\theta,q}$.

Vamos determinar agora qual é o espaço interpolado $\overrightarrow{X}^J_{\theta,q}$. Da inclusão do J_M-espaço no K_M-espaço, segue que

$$\frac{1}{2\,\gamma_{\theta,\infty,1}} D_{\theta,q}(x,y) \leq d_{\theta,q}(x,y), \;\; \forall x,y \in \mathbb{Q}.$$

Já sabemos que nesse caso, $\mathcal{D}_{\theta,q}(x,y) = M_{\theta,q}\,|x-y|$ e que

$$d_{\theta,q}(x,y) \leq 2^\theta\, t^{-\theta}\, J(t,x,y), \;\; \forall x,y \in \mathbb{Q}, \;\; \forall t > 0.$$

Acoplando as desigualdades, temos, para $x,y \in \mathbb{Q}$

$$\frac{M_{\theta,q}}{2\,\gamma_{\theta,\infty,1}}\, |x-y| \leq d_{\theta,q}(x,y) \leq 2^\theta\, t^{-\theta}\, J(t,x,y), \;\; \forall t > 0.$$

Para

$$t = 2\left[\frac{4}{2-2^\theta} + \frac{2}{2^\theta - 1}\right]^{1/\theta} [(1-\theta)\theta\, q]^{1/(\theta q)},$$

temos

$$\frac{M_{\theta,q}}{2\,\gamma_{\theta,\infty,1}}\, |x-y| \leq d_{\theta,q}(x,y) \leq \frac{M_{\theta,q}}{2\,\gamma_{\theta,\infty,1}}\, J(t,x,y).$$

Se para os valores de θ e q temos $t \leq 1$, então $d_{\theta,q}(x,y) = \dfrac{M_{\theta,q}}{2\,\gamma_{\theta,\infty,1}}|x-y|$, para todos $x,y \in \mathbb{Q}$ e logo, $\mathbb{R} = \overrightarrow{X}^K_{\theta,q} = \overrightarrow{X}^J_{\theta,q}$ com métricas equivalentes.

5.2 Uma Aplicação da Interpolação Métrica na Teoria da ε-Capacidade

Sejam (Y, d_Y) um espaço métrico e $X \subseteq Y$ um subconjunto qualquer. Dado $\varepsilon > 0$, definimos a ε-Capacidade do conjunto X, denotada por $\mathcal{M}_X(\varepsilon)$, como sendo o número tal que

$$\mathcal{M}_X(\varepsilon) = \sup\{M;\; \exists\, x_1, x_2, \ldots, x_M \in X \text{ e } \inf_{i\neq j} d_Y(x_i,x_j) > \varepsilon\}.$$

O valor $\log_2 \mathcal{M}_X(\varepsilon)$ é chamado de ε-Capacidade do conjunto X em Y.

Note que podemos ter $\log_2 \mathcal{M}_X(\varepsilon) = \infty$, para algum subconjunto X e algum $\varepsilon > 0$.

Sejam (X_0, X_1) um par de espaços métricos compatíveis com $X_1 \subseteq X_0$ e $d_0(x,y) \le C\, d_1(x,y)$, para todo $x, y \in X_1$, $\theta \in (0,1)$ e $q \in [1,\infty]$.

Se $E = \overrightarrow{X}^K_{\theta,q}$ ou $E = \overrightarrow{X}^J_{\theta,q}$, definimos

$$\mathcal{M}_y(\varepsilon; E; X_1) = \sup\{M;\ \exists\, x_1, \ldots, x_M \in X_1,\ \sup d_1(x_i, y) \le 1\ \inf_{i\neq j} d_E(x_i, x_j) > \varepsilon\} \tag{5.1}$$

e também

$$\mathcal{M}_y(\varepsilon; X_0; X_1) = \sup\{M;\ \exists\, x_1, \ldots, x_M \in X_1,\ \sup d_1(x_i, y) \le 1\ \inf_{i\neq j} d_0(x_i, x_j) > \varepsilon\} \tag{5.2}$$

Podemos relacionar essas duas funções pela proposição seguinte.

Proposição 5.2.1. *Temos que*

$$\mathcal{M}_y(\varepsilon; E; X_1) \le \mathcal{M}_y(\mu\, (\varepsilon/C)^{\frac{1}{1-\theta}}; X_0; X_1), \tag{5.3}$$

onde C é a constante tal que $d_0 \le C\, d_1$ e μ depende apenas de $\theta \in (0,1)$.

Demonstração:

Sejam $x_1, x_2, \ldots, x_M \in X_1$ de modo que $M = \mathcal{M}_y(\varepsilon; E; X_1)$,

$$\sup d_1(x_i, y) \le 1$$

e

$$\inf_{i\neq j} d_E(x_i, x_j) > \varepsilon.$$

Usando o Corolário 2.5.1 e a desigualdade triangular, temos

$$\begin{aligned}
\varepsilon < \inf d_E(x_i, x_j) &\le C\, [d_0(x_i, x_j)]^{1-\theta}\, [d_1(x_i, x_j)]^{\theta} \\
&\le C\, [d_0(x_i, x_j)]^{1-\theta}\, [d_1(x_i, y) + d_1(x_j, y)]^{\theta} \\
&\le C\, [d_0(x_i, x_j)]^{1-\theta}\, [d_1(x_i, x_j)]^{\theta} \le C\, [d_0(x_i, x_j)]^{1-\theta}\, 2^{\theta}\,.
\end{aligned}$$

Logo,

$$2^{\frac{\theta}{1-\theta}} \left(\frac{\varepsilon}{C}\right)^{1-\theta} \le \inf d_0(x_i, x_j),$$

e temos assim o resultado com $\mu = 2^{\frac{\theta}{1-\theta}}$.

■

Considerações Finais

Esse trabalho objetivou contribuir com o estudo da teoria da interpolação. Ao longo do texto, o objetivo se manteve sempre em generalizar o máximo de propriedades da interpolação nos espaços normados. Ainda nessa direção, sempre foram considerados os espaços métricos com menos estruturas e propriedades específicas.

Embora a motivação inicial desse trabalho tenha sido mimetizar propriedades conhecidas, ele tomou sentidos independentes e é por si próprio uma área interessante e aparentemente ainda frutífera.

Muitos problemas surgiram na elaboração desse texto e ainda estão em aberto, como por exemplo a existência ou não de espaços métricos tais que o método J_M e o método K_M sejam equivalentes no sentido de gerarem o mesmo espaço de interpolação e terem métricas equivalentes.

Outro problema é a validade de um teorema sobre compacidade de operadores de Lipschitz, quando o domínio do operador é um dos espaços de interpolação. Tal teorema é verificado no caso de espaços normados, mas ainda não foi verificado para espaços métricos.

Também não foram estudadas as relações do método de interpolação métrico, aplicado em espaços normados, e o método de interpolação complexo.

REFERÊNCIAS

[1] N. Aronszajn and E. Gagliardo. Interpolation space and interpolation methods. *Ann. Mat. Pura Appl.*, 68(4):51–117, 1965.

[2] J. Bergh and J. Löfström. *Interpolation Spaces: An Introduction*. Springer-Verlag, Berlim, Heidelberg, New York, 1 edition, 1976.

[3] Y. Brudnyî and Y. N. Krugljak. *Interpolation Functors And Interpolation Spaces*. North-Holland Mathematical Library, Amsterdam, Oxford, New York, Tokyo, 1 edition, 1991.

[4] A. P. Calderón. Intermediate spaces and interpolation. *Studia Math. Special Series*, 1:31–34, 1963.

[5] Jachymski J. Chrzaszcz, K. and F. Turobos. Two refinements of frink's metrization theorem and fixed point results for lipschitzian mappings on quasimetric spaces. *Aequat. Math.*, (93):277–297, 2019.

[6] Fernando Cobos, David E Edmunds, and Anthony J.B Potter. Real interpolation and compact linear operators. *Journal of Functional Analysis*, 88(2):351–365, 1990.

[7] Fernando Cobos and Dicesar L. Fernandez. On interpolation of compact operators. *Arkiv för Matematik*, 27(1-2):211 – 217, 1989.

[8] Michael Cwikel, Alon Ivtsan, and Eitan Tadmor. Interpolation of compact lipschitz operators, 2009.

[9] Michael Cwikel and Nigel J. Kalton. Interpolation of compact operators by the methods of calderón and gustavsson-peetre, 1992.

[10] Jan Gustavsson. Interpolation of metric spaces. In *Technical Report*, Lund, 1971.

[11] K. Hayakawa. Interpolation by the real method preserves compactness of operators. *J. Math. Soc. Japan*, 21(2):31–34, 1969.

[12] J. L. Lions and J. Peetre. Sur une classe d'espaces d'interpolation. *Inst. Hautes Etudes Sci. Publ. Math.*, 253:5–68, 1964.

[13] L. Maligranda and L. E. Persson. Inequalities and interpolation. *Collectanea Mathematica*, 44:181–199, 1993.

[14] J. Peetre. Theory of interpolation of normed spaces. *Notas mat. Inst. mat. pura e apl.*, 39:86, 1968.

[15] J. Peetre. Interpolation of lipschitz operators and metric spaces. *Mathematica*, 12(25):325–334, 1970.

[16] J. Peetre and G. Sparr. Interpolation of normed abelian groups. *Ann. Mat. Pura Appl.*, 92(4):217–262, 1972.

[17] Arne Persson. Compact linear mappings between interpolation spaces. *Arkiv för Matematik*, 5(3-4):215 – 219, 1964.

[18] Marcel Riesz. Sur les maxima des formes bilinéaires et sur les fonctionnelles linéaires. *Acta Mathematica*, 49(3-4):465 – 497, 1926.

[19] Par A. Zygaund. *On a theorem of Marcinkiewicz concerning interpolation of operations*, pages 214–239. Springer Netherlands, Dordrecht, 1989.