

Edilson Hideki Kinoshita

**Identificação de dano estrutural em um modelo de barra  
e viga pelo Método de Elementos Espectrais**

Universidade Federal da Grande Dourados - UFGD

Faculdade de Engenharia - FAEN

Graduação em Engenharia Mecânica

Orientador: Professor Dr. Sanderson Manoel da Conceição

Área de concentração: Mecânica dos Corpos Sólidos, Elásticos e Plásticos

Dourados - MS

Maio/2022

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP).

K52i Kinoshita, Edilson Hideki

Identificação de dano estrutural em um modelo de barra e viga pelo Método de Elementos Espectrais [recurso eletrônico] / Edilson Hideki Kinoshita. -- 2022.  
Arquivo em formato pdf.

Orientador: Sanderson Manoel da Conceição.

TCC (Graduação em Engenharia Mecânica)-Universidade Federal da Grande Dourados, 2022.

Disponível no Repositório Institucional da UFGD em:

<https://portal.ufgd.edu.br/setor/biblioteca/repositorio>

1. Monitoramento da integridade estrutural. 2. Método de Elementos Finitos. 3. Método de Elementos Espectrais. 4. Função de Resposta em Frequência. I. Conceição, Sanderson Manoel Da.  
II. Título.

Ficha catalográfica elaborada automaticamente de acordo com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).

©Direitos reservados. Permitido a reprodução parcial desde que citada a fonte.



MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO  
FUNDAÇÃO UNIVERSIDADE FEDERAL DA GRANDE DOURADOS

**ANEXO D - AVALIAÇÃO FINAL DO TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO**

Aluno: **EDILSON HIDEKI KINOSHITA**

Título do trabalho: **Identificação de dano estrutural em um modelo de barra e viga pelo Método de Elementos Espectrais**

**BANCA EXAMINADORA**

**1. Presidente (orientador):**

Prof. Dr. Sanderson Manoel da Conceição, Universidade Federal da Grande Dourados - UFGD

**2. Membro:**

Prof. Dr. Rodrigo Borges Santos, Universidade Federal da Grande Dourados – UFGD

**3. Membro:**

Prof. Dr. Douglas Domingues Bueno, Universidade Estadual Paulista - UNESP

De acordo com o grau final obtido pelo aluno, nós da banca examinadora, declaramos **Aprovado** o aluno acima identificado, na componente curricular Trabalho de Conclusão de Curso (TCC-II) de Graduação no Curso de Engenharia Mecânica da Universidade Federal da Grande Dourados.

Dourados, 11 de Maio de 2022.

*Sanderson Manoel da Conceição*

---

Prof. Dr. Sanderson Manoel da Conceição

*Rodrigo Borges Santos*

---

Prof. Dr. Rodrigo Borges Santos

*Douglas Bueno*

---

Prof. Dr. Douglas Domingues Bueno

*Dedico este trabalho a minha querida mãe Eliza Akemi Kinoshita Isioka e ao meu eterno pai H elio Tetsuo Kinoshita.*



# Agradecimentos

Primeiramente, gostaria de agradecer a Deus por me abençoar em todas as etapas de minha vida.

À minha família pelo apoio e incentivo, sem eles não chegaria onde estou.

À Universidade Federal da Grande Dourados por fornecer toda a estrutura necessária durante minha etapa acadêmica.

Ao Professor Sanderson Manoel da Conceição pela orientação, incentivo e companheirismo para que este trabalho fosse realizado.

Aos Professores do curso de Engenharia Mecânica por todo o conhecimento e experiência compartilhados.

Aos Professores que contribuíram para minha formação, desde o ensino fundamental ao superior.

À todos aqueles que contribuíram, diretamente ou indiretamente, na minha formação profissional e pessoal.



*"Volte seu entusiasmo ao que precisa ser feito e enfrente os desafios."  
(Soichiro Honda)*





# Resumo

Um dos grandes benefícios do desenvolvimento da área de engenharia e novas tecnologias, é que os sistemas de segurança das pessoas também se desenvolvem e são tomadas como indispensáveis na rotina. O Monitoramento da Integridade Estrutural, além de ser um sistema de grande avanço na engenharia, nos proporciona tomar decisões planejadas e antecipadas, agindo sempre a favor da segurança. Com intuito de continuar superando as limitações na análise dinâmica estrutural, foram desenvolvidos métodos baseados no Método de Elementos Finitos, visto que este apresenta imprecisão em sistemas de altas frequências. Com isso, o Método de Elementos Espectrais mostra-se promissor por apresentar vantagens durante a solução de problemas estruturais. Neste presente trabalho será abordado o Método de Elementos Finitos e Método de Elementos Espectrais, no conceito de monitoramento da integridade estrutural através da variação das frequências naturais do sistema. Os estudos se deram de maneira comparativa entre os métodos apresentados, implementando-os em um modelo de barra e viga. Primeiramente, foi necessário um estudo das equações que regem o método, para que então elaborasse um código de obtenção da matriz espectral, que torna-se possível obter as Funções de Resposta em Frequência (FRF). O estudo da FRF mostra-se importante no monitoramento da integridade estrutural, pois a variação nas frequências naturais podem sinalizar a presença de danos estruturais.

**Palavras-chave:** Monitoramento da integridade estrutural. Método de Elementos Finitos. Método de Elementos Espectrais. Função Resposta em Frequência.



# Abstract

One of the great benefits of the development of the engineering area and new technologies, is that the safety of people also develops and is taken as indispensable in the routine. Structural Health Monitoring, in addition to being a system of great advancement in engineering, allows us to make planned and anticipated decisions, acting always in favor of safety. In order to continue overcoming the limitations in the analysis structural dynamics, methods were developed based on the Finite Element Method, since it presents imprecision in high frequency systems. With that, the Spectral Element Method is promising as it presents advantages during the solving structural problems. In this present work, will be approached the Finite Element Method and Spectral Element Method, in the concept of structural health monitoring through the variation of the system's natural frequencies. The studies took place in a comparative way between the methods presented, implementing them in a bar and beam model. First, it was necessary to study the equations that govern the method, so that it could then elaborate a script to obtain the spectral matrix, that it becomes possible to obtain the Frequency Response Functions (FRF). The study of FRFs proves to be important in structural health monitoring, as the variation in natural frequencies can signal the presence of cracks and damage to the structure.

**Keywords:** Structural Health Monitoring. Finite Element Method. Spectral Element Method. Frequency Response Function.



# Lista de ilustrações

Figura 1 – Colapso do condomínio Champlain Tower South. . . . .	24
Figura 2 – Queda do avião C-5 Galaxy. . . . .	24
Figura 3 – Desenho esquemático de sistemas SHM. . . . .	29
Figura 4 – Representação uniforme de dano local em um elemento de estrutura. . . . .	30
Figura 5 – Conversão de resposta temporal em frequência. . . . .	31
Figura 6 – Efeito direto (sensor) e efeito inverso (atuador). . . . .	31
Figura 7 – Aplicação de barras em treliças. . . . .	32
Figura 8 – Aplicação de viga em uma ponte rolante. . . . .	33
Figura 9 – Nós e elementos presentes em uma malha. . . . .	36
Figura 10 – Barra em movimento longitudinal. . . . .	38
Figura 11 – Viga em flexão. . . . .	39
Figura 12 – Forças e deslocamentos em um elemento de barra. . . . .	46
Figura 13 – Forças e deslocamentos em um elemento de viga. . . . .	49
Figura 14 – Representação do modelo de barra. . . . .	51
Figura 15 – FRF modelo de barra de 0 a 8.000 Hz por Elementos Finitos. . . . .	53
Figura 16 – FRF modelo de barra de 11.000 a 16.000 Hz por Elementos Finitos. . . . .	53
Figura 17 – FRF modelo de barra de 16.000 a 26.000 Hz por Elementos Finitos. . . . .	54
Figura 18 – FRF modelo de barra de 0 a 8.000 Hz por Elementos Espectrais. . . . .	54
Figura 19 – FRF modelo de barra de 11.000 a 16.000 Hz por Elementos Espectrais. . . . .	55
Figura 20 – FRF modelo de barra de 16.000 a 26.000 Hz por Elementos Espectrais. . . . .	55
Figura 21 – Representação do modelo de viga. . . . .	56
Figura 22 – FRF modelo de viga de 0 a 1.600 Hz por Elementos Finitos. . . . .	57
Figura 23 – FRF modelo de viga de 1.600 a 2.400 Hz por Elementos Finitos. . . . .	58
Figura 24 – FRF modelo de viga de 3.000 a 4.800 Hz por Elementos Finitos. . . . .	58
Figura 25 – FRF modelo de viga de 0 a 1.600 Hz por Elementos Espectrais. . . . .	59
Figura 26 – FRF modelo de viga de 1.600 a 2.400 Hz por Elementos Espectrais. . . . .	59
Figura 27 – FRF modelo de viga de 3.000 a 4.800 Hz por Elementos Espectrais. . . . .	60
Figura 28 – Comparativo FRF em relação ao refino da malha. . . . .	61



# Lista de tabelas

Tabela 1 – Propriedades físicas da barra . . . . .	52
Tabela 2 – Frequências naturais no modelo de barras de 0 a 26.000 Hz . . . . .	52
Tabela 3 – Propriedades físicas da viga . . . . .	56
Tabela 4 – Frequências naturais no modelo de vigas de 0 a 4.800 Hz . . . . .	57
Tabela 5 – Comparativo de frequências naturais em relação ao refino da malha. . .	60





# Lista de símbolos

$E$	módulo de Young ou módulo de elasticidade
$n$	número de elementos
$D$	severidade do dano
$T$	energia cinética
$U$	energia de deformação
$R$	função dissipação
$\varepsilon$	deslocamento
$\mathbf{N}$	matriz funções de forma
$\delta$	vetor deslocamento nodais finitos
$B$	derivada espacial da matriz função de forma
$\sigma$	tensão
$\nu$	coeficiente de Poisson
$\mathbf{K}$	matriz de rigidez
$A$	área de seção transversal
$u$	componente energia deformação
$L$	comprimento da estrutura
$I$	momento de inércia
$\rho$	densidade
$v$	deslocamento vertical
$\Psi$	inclinação
$t$	tempo
$V$	velocidade
$\mathbf{m}$	matriz de massa

$L$	operador estrutural diferencial linear
$M$	operador inercial
$\partial$	operador diferencial parcial
$\omega$	frequência em rad/s
$i$	unidade imaginária
$k$	número de onda
$\phi$	componente vetor normalizado
$\mathbf{d}$	vetor deslocamento
$\mathbf{f}$	vetor forças espectrais nodais
$\mathbf{H}_B$	matriz deslocamento espectral modelo de barra
$\mathbf{F}_B$	matriz força espectral modelo de barra
$\mathbf{S}_B$	matriz rigidez espectral modelo de barra
$G$	módulo de cisalhamento
$w$	deslocamento transversal
$W$	deslocamento transversal em frequência
$\theta$	rotação
$Q$	cisalhamento transversal
$M$	momento fletor
$\mathbf{H}_{EB}$	matriz deslocamento espectral modelo de viga Euler-Bernoulli
$\mathbf{F}_{EB}$	matriz força espectral modelo de viga Euler-Bernoulli
$\mathbf{S}_{EB}$	matriz elemento espectral modelo de viga Euler-Bernoulli
<b>Siglas</b>	,
$FRF$	Função Resposta em Frequência
$SHM$	Strutural Health Monitoring
$FEM$	Finite Element Method

<i>SEM</i>	Spectral Element Method
<i>DFT</i>	Discret Fourier Transform
<i>FFT</i>	Fast Fourier Transform
<i>PZT</i>	Lead Zirconate Titanate
<i>DOF</i>	Degrees Of Freedom



# Sumário

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b>	<b>23</b>
1.1	Objetivo do trabalho	26
<b>2</b>	<b>REVISÃO BIBLIOGRÁFICA</b>	<b>29</b>
<b>3</b>	<b>MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS</b>	<b>35</b>
3.1	Derivações das equações	36
3.2	Discretização: A divisão da estrutura em elementos finitos	37
3.3	Energia de deformação - Matriz de rigidez	37
3.4	Energia cinética - Matriz de massa	39
<b>4</b>	<b>MÉTODO DE ELEMENTOS ESPECTRAIS</b>	<b>41</b>
4.1	Formulação pelo Método Força-deslocamento	41
4.2	Modelo de Barra	45
4.3	Modelo de Viga	47
<b>5</b>	<b>RESULTADOS E DISCUSSÕES</b>	<b>51</b>
<b>5.1</b>	<b>Função de Resposta em Frequência no modelo de barra</b>	<b>51</b>
5.1.1	FRF modelo de barra pelo Método de Elementos Finitos	53
5.1.2	FRF modelo de barra pelo Método de Elementos Espectrais	54
<b>5.2</b>	<b>Função de Resposta em Frequência no modelo de viga</b>	<b>56</b>
5.2.1	FRF modelo de viga pelo Método de Elementos Finitos	57
5.2.2	FRF modelo de viga pelo Método de Elementos Espectrais	59
5.2.3	Comparação entre convergência da malha	60
<b>6</b>	<b>CONSIDERAÇÕES FINAIS</b>	<b>63</b>
<b>7</b>	<b>SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS</b>	<b>65</b>
	<b>REFERÊNCIAS</b>	<b>67</b>
	<b>APÊNDICES</b>	<b>71</b>
<b>A</b>	<b>– CÓDIGO DO MODELO DE BARRA POR ELEMENTOS FINITOS</b>	<b>73</b>

<b>B</b>	<b>-</b>	<b>CÓDIGO DO MODELO DE BARRA POR ELEMENTOS ESPECTRAIS . . . . .</b>	<b>77</b>
<b>C</b>	<b>-</b>	<b>CÓDIGO DO MODELO DE VIGA POR ELEMENTOS FINITOS .</b>	<b>81</b>
<b>D</b>	<b>-</b>	<b>CÓDIGO DO MODELO DE VIGA POR ELEMENTOS ESPECTRAIS</b>	<b>85</b>

# 1 Introdução

O monitoramento da integridade estrutural, também conhecido como SHM (do inglês, *Structural Health Monitoring*), tem como objetivo detectar, em tempo real ou não, danos estruturais. Entre os vários campos de aplicação, estão as estruturas civis (prédios, plataformas e pontes), estruturas marítimas (navios e submarinos), estruturas aeronáuticas e aeroespaciais (aviões, helicópteros e satélites). Os danos e falhas de determinada estrutura são descobertas através do comportamento dinâmico devido uma excitação externa. A motivação é tanto científica quanto econômica. Do ponto de vista científico, monitorar e detectar danos estruturais podem prevenir catástrofes como, por exemplo, quedas de pontes e aeronaves. Isto significa conquistar um elevado grau de segurança. No aspecto econômico, projetos com esta capacidade permitem uma elevada redução de custos em manutenções. Portanto, é necessário prever com precisão, de forma eficiente e econômica.

A definição de dano é importante em sistemas de SHM. O dano é definido como qualquer alteração que venha ocorrer na estrutura que afete o desempenho atual ou futuro, ocasionando deflexões não previstas em projeto. Subentendido nessa definição está o conceito de que a identificação do dano é fundamentada na comparação entre dois estados da estrutura, sendo que em um deles a estrutura é considerada íntegra. O dano causa alterações nas propriedades físicas da estrutura (massa, rigidez, amortecimento e seção transversal), nas quais, alteram a resposta dinâmica da estrutura. A partir desse conceito, surgem então as técnicas baseadas na Função de Resposta em Frequência (FRF).

Métodos baseados em dados modais ou vibracionais são fundamentados no conceito de que a presença do dano estrutural reduz a rigidez estrutural, modifica as frequências naturais, altera os modos de vibrar e as funções de resposta em frequência. Os parâmetros modais são funções das propriedades físicas da estrutura, portanto, alterações em suas propriedades físicas causará mudanças detectáveis nas propriedades modais (DOEBLING, 1998).

Além disso, sempre que a frequência natural de vibração de uma máquina ou estrutura coincidir com a frequência de excitação externa, ocorre o fenômeno conhecido como ressonância, que resulta em deflexões excessivas e falha (RAO, 2008). Portanto, o estudo das frequências de um sistema é importantíssimo devido ao efeito devastador que as vibrações podem causar às máquinas e estruturas e também, porque suas alterações podem prever uma falha eminente.

A Figura 1 mostra o colapso de um dos prédios do condomínio Champlain Tower South em Miami Beach ocorrido em 24 de junho de 2021, onde os motivos do desabamento ainda não foram esclarecidos. Outro caso mais antigo de grande destaque foi a queda



do avião de transporte C-5 Galaxy da Força Aérea Norte-Americana ocorrido em 03 de abril de 2006, no qual a cabine se desprendeu da fuselagem (Figura 2). O C-5 é um dos maiores aviões militares do mundo e é utilizado para transportar grandes cargas. A implementação do sistema SHM em pontos críticos da estrutura predial e da estrutura da aeronave, poderia alertar sobre possíveis danos e risco de colapso, assim, intervenções seriam realizadas antecipadamente.

Figura 1 – Colapso do condomínio Champlain Tower South.



Fonte: TANABE, 2021.

Figura 2 – Queda do avião C-5 Galaxy.



Fonte: LOCKHEED C-5 GALAXY, 2009.

Após eventos extremos e acidentes pontuais, o SHM pode ser utilizado para uma inspeção das avarias e disponibilização de informações confiáveis sobre a integridade da estrutura. Dessa maneira, espera-se que o SHM indique se a estrutura ainda é capaz de desempenhar a função para qual foi projetada. Essa análise possibilita tomadas de decisões mais assertivas, pois são baseadas em fatos e dados, além de evitar a exposição de pessoas ao risco da estrutura que pode ter sido severamente comprometida.

Além da prevenção de acidentes trágicos, o SHM tem grande influência no ramo industrial. Nos últimos anos, a indústria em geral vem passando por uma revolução digital com a evolução dos seus sistemas e tecnologias. Tem-se a indústria cada vez mais entrelaçada e dependente das contribuições do SHM, no que se diz respeito, à inspeção e coleta de dados que corroboram o diagnóstico e análise de suas máquinas e equipamentos. Com o diagnóstico em tempo real de seus ativos, uma indústria poderá planejar e economizar custos voltados à manutenção (FERREIRA, 2020).

Com esta demanda de tratamento de falhas e previsões dos efeitos vibratórios em projetos de engenharia, surgiu a necessidade de detectar os danos estruturais e analisar as alterações das Funções de Resposta em Frequência do sistema. Em muitos casos, a avaliação dos danos é difícil de ser analisado a partir deles, principalmente em sistemas mais complexos. Com isso, métodos que examinam as alterações nas características vibratórias de determinada estrutura foram desenvolvidos. Vantagens da aplicação destes métodos é que são simples, de baixo custo e particularmente eficazes para a detecção de grandes danos em estrutura de grande porte ou máquinas rotativas. Como limitações, são insensíveis a pequenos danos ou à propagação deles, difíceis de excitar em altas frequências, necessitam de um número grande de pontos de medição e são hipersensíveis a alterações do contorno e do meio ambiente (MAIA, 2003).

Métodos de identificação de danos podem ser classificados por quatro níveis de identificação de dano:

- Nível 1 - Determina que o dano está presente na estrutura;
- Nível 2 - Determina a localização geométrica do dano;
- Nível 3 - Quantifica a gravidade do dano;
- Nível 4 - Prevê a vida útil restante da estrutura.

Segundo (SILVA, 2008), chegar ao nível 1 já pode ser considerada uma tarefa desafiadora envolvendo estruturas reais e que o fundamental é detectar com confiabilidade a presença do dano na estrutura, tendo em vista a complexidade de estruturas reais, presença de incertezas, desconhecimento das fontes de excitação, entre outros fatores.

O Método de Elementos Finitos, também conhecido como FEM (do inglês, *Finite Element Method*), pode ser utilizado para simular computacionalmente as Funções de Resposta em Frequência (FRF) de estruturas das mais diversas geometrias. Segundo (LEE, 2009), o método de elementos finitos é um dos métodos de computação mais poderosos e populares que pode ser utilizado em muitas áreas da engenharia e ciência. No entanto, observa-se que a tecnologia está evoluindo e é preciso obter um maior número de resultados em intervalos de tempo cada vez menores, com a mesma eficiência ou superior. Com isso,

foram desenvolvidos métodos elaborados a partir do FEM, como, por exemplo, o Método dos Elementos Espectrais que será abordado neste presente trabalho.

O Método dos Elementos Espectrais, também conhecido como SEM (do inglês, *Spectral Element Method*), possui as características semelhantes e as vantagens dos métodos de baixa ordem (método de elementos finitos) com a precisão e menor tempo de convergência dos métodos de alta ordem (métodos espectrais). Uma das principais diferenças entre os métodos citados é que enquanto o FEM as matrizes elementares são escritas no domínio do tempo, no SEM a matriz espectral é formulada no domínio da frequência. Neste método as matrizes de rigidez dinâmica exatas são usadas como matrizes de rigidez do elemento para os elementos finitos em uma estrutura. Adota-se que as respostas dinâmicas deste método sejam devido a superposição de um número finito de modos de ondas de diferentes frequências com base na teoria da Transformada Discreta de Fourier, assim, a computação da rigidez dinâmica deve ser repetida em todas as frequências discretas até a maior frequência de interesse (LEE, 2009).

Devido a solução do SEM ser exata, a estrutura pode ser modelada por apenas um elemento espectral, desde que não haja descontinuidades ou danos ao longo da estrutura. Como o SEM é um método de elemento, assim como o FEM, a refinação da malha também pode ser aplicada quando houver irregularidades ou danos, e também quando houver forças externas aplicadas. Os elementos espectrais podem ser montados para formar uma matriz global para todo o domínio do problema, utilizando exatamente o mesmo procedimento de montagem no Método de Elementos Finitos. A equação da matriz global do sistema é então resolvida para os graus de liberdade nodais repetidamente em todas as frequências discretas e utiliza-se o algoritmo da Transformada Inversa de Fourier para calcular as soluções no domínio do tempo.

Neste presente trabalho será abordado a identificação de danos através da análise das alterações nas FRF entre os modelos de barra e viga, íntegros e com danos, utilizando o Método de Elementos Espectrais no monitoramento da integridade estrutural. Por fim, será realizada uma comparação na identificação de dano estrutural entre os métodos SEM e FEM.

## 1.1 Objetivo do trabalho

O presente trabalho tem como principal objetivo implementar computacionalmente o Método dos Elementos Espectrais para o monitoramento da integridade estrutural de um modelo de barra e viga através das Funções de Resposta em Frequência.

Como objetivos secundários destaca-se:

- Discutir a importância do Monitoramento da Integridade Estrutural na engenharia;

- Implementar o Método de Elemento Finitos para aplicação em um modelo de barra e viga;
- Apresentar outros estudos envolvendo os Métodos de Elementos Finitos e Espectrais.

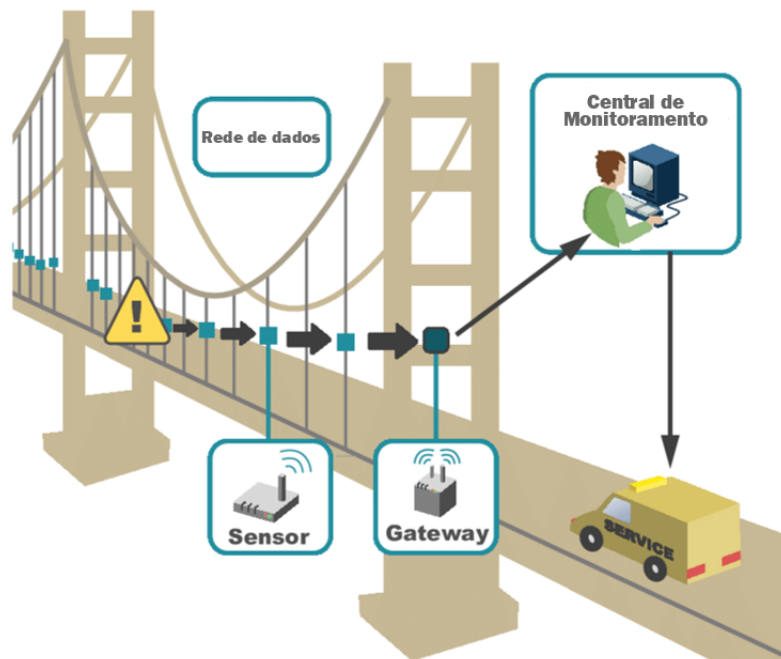


## 2 Revisão Bibliográfica

Neste capítulo será abordada a contribuição que o SHM traz para a engenharia e outras contribuições científicas que usam o Método dos Elementos Espectrais, assim, será possível destacar as áreas onde este método está envolvido, apresentando alguns trabalhos e seus respectivos autores.

Praticamente, os sistemas de monitoramento da integridade estrutural são constituídos de sensores distribuídos pela estrutura que enviam sinais para uma central de processamento, responsável por analisar os dados e apresentar o diagnóstico. O monitoramento estrutural, dependendo do modelo de aplicação, pode se basear em várias técnicas não destrutivas como, por exemplo, a inspeção por partículas magnéticas, análise de deformações, técnicas utilizando fibras óticas, ultrassom, propagações de ondas, impedância eletromecânica, análise FRF, análise modal, etc.

Figura 3 – Desenho esquemático de sistemas SHM.

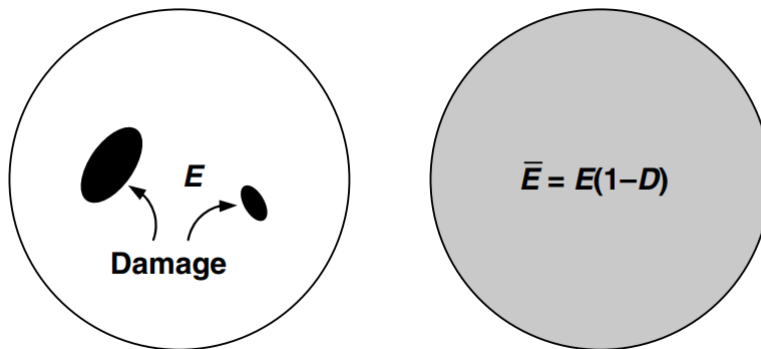


Fonte: Adaptado de KRIVTSOVA, 2016.

As técnicas de monitoramento que utilizam medições de vibração são reconhecidas como alternativas úteis, pois são obtidos resultados conclusivos mesmo quando o local do dano não está acessível ou até mesmo desconhecido (CARDEN, FANNING, 2004). Isto pelo fato de o dano, por menor que seja, causa alterações nas propriedades físicas de um sistema mecânico, no qual comprometem o desempenho e resultam mudanças da resposta dinâmica do sistema, que é refletida nos seus sinais de vibração. Neste trabalho, a propriedade

física escolhida para comportar a severidade dos danos foi o módulo de elasticidade. Na prática, a maioria das situações são impossíveis de atribuir uma representação definitiva para a rigidez nos locais com danos. Com isso, para representar um elemento de estrutura danificado pela alteração do módulo de elasticidade, é utilizado o método dado pela Figura 4.

Figura 4 – Representação uniforme de dano local em um elemento de estrutura.

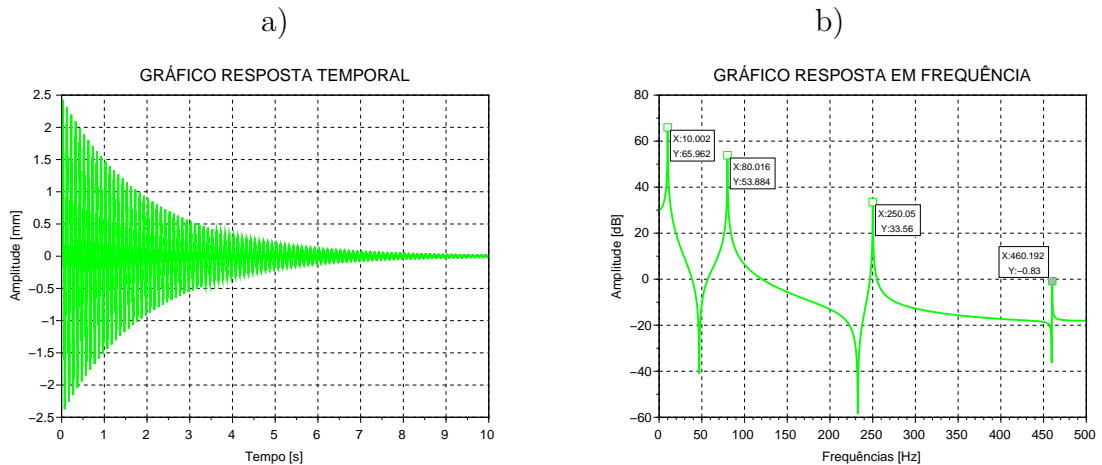


Fonte: LEE, 2009.

A utilização dos sinais vibracionais para o monitoramento estrutural teve como ponto de partida os anos 70 nas indústrias aeroespaciais e petrolíferas. As primeiras técnicas fundamentaram-se em modelos numéricos e na medição das propriedades modais do sistema em condições íntegras e, posteriormente, em condições desconhecidas (DOEBLING, 1999). Existem diversos tipos de técnicas SHM que utilizam sinais de vibração, separados em relação ao domínio do tempo, frequência e modal. As medições dos sinais vibracionais são coletadas no domínio do tempo e a partir deste princípio, os dados são convertidos para o domínio da frequência ou modal dependendo da interpretação de dados buscada.

A resposta temporal obtida pelos sensores em determinada estrutura é convertida em resposta em frequência pela Transformada Discreta de Fourier, que pode ser calculada através do algoritmo Transformada Rápida de Fourier, também conhecido como FFT (do inglês, *Fast Fourier Transform*) para possibilitar a avaliação e interpretação dos dados. Para evidenciar a importância desta conversão, a seguir, ilustra-se um exemplo de dados na resposta temporal (Figura 5a) e após o uso do algoritmo, os dados na resposta em frequência (Figura 5b) em uma estrutura qualquer. Percebe-se que na Figura 5a não é possível a identificação das frequências naturais para monitoração. Informações detalhadas do algoritmo FFT pode ser encontrado em (LATHI, 2007).

Figura 5 – Conversão de resposta temporal em frequência.

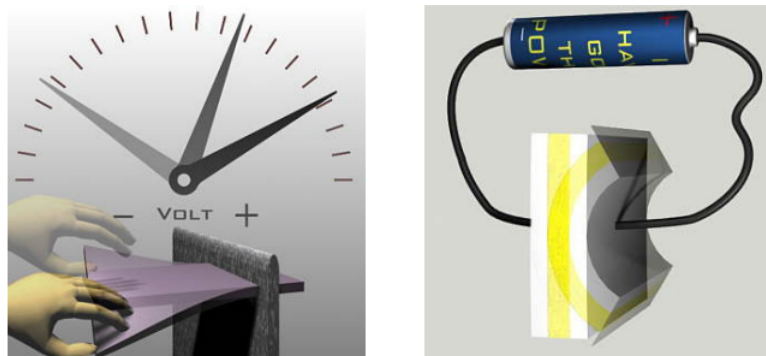


Fonte: Próprio autor.

A aquisição dos sinais de vibração pode ser realizada por uma série de sensores como, por exemplo, acelerômetros e cerâmicas piezelétricas, que é o grande destaque da área nos últimos 15 anos. Estudos publicados evidenciam que a técnica SHM baseada na impedância tem sido aplicada experimentalmente em diversos tipos de estruturas, como por exemplo, treliças (SUN, 1995), estruturas civis (PARK, 1999), redes de tubulação (PARK, 2001), estruturas aeronáuticas e aeroespaciais (GIURGIUTIU e ZAGRAI, 2005).

Os materiais inteligentes piezelétricos conhecidos como PZT (do inglês, *Lead Zirconate Titanate*), são acoplados à estrutura, exibindo deformação significativa quando uma corrente elétrica é aplicada, efeito inverso ou efeito atuador, e produzem corrente elétrica quando são deformados elasticamente, efeito direto ou efeito sensor (Figura 6). Acelerômetros são utilizados em diversos testes relacionados a medições de vibrações estruturais, como por exemplo, análise de vibrações e análise modal. Já o PZT, normalmente são aplicados onde ocorre o controle ativo de sistemas, no qual permitem reduzir as vibrações sem alterar as propriedades físicas da estrutura. Estes materiais inteligentes se destacam como uma ferramenta importante do SHM, pois podem ser utilizados como sensores e atuadores, em avaliações não-destrutivas e controle de vibrações.

Figura 6 – Efeito direto (sensor) e efeito inverso (atuador).



Fonte: MARQUI, 2007.

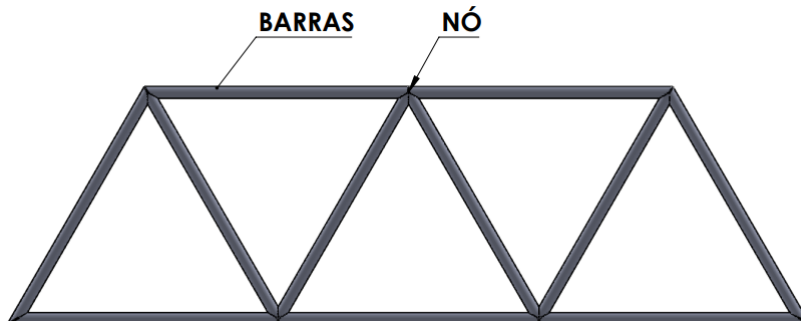


Outra técnica SHM amplamente utilizada é a de Observador de Estados, baseada no monitoramento no domínio modal através da análise dos modos de vibrar da estrutura. O estudo realizado por (RIZOS, ASPRAGATHOS e DIMAROGOMAS, 1990) mostrou a localização e quantificação da severidade de danos a partir dos modos de vibrar de uma viga engastada em uma das extremidades. (MAIA, 2003) apresentou uma série de simulações numéricas e um estudo experimental de uma viga a fim de comprovar algumas técnicas SHM baseadas nas alterações dos modos de vibrar. (ARAUJO DOS SANTOS, 2000) apresentou com sucesso um procedimento de detecção de danos baseados nas condições de ortogonalidade da forma dos modos de vibrar. Deste modo, foi validado que a forma dos modos de vibrar pode ser utilizada para identificação dos danos estruturais.

Alguns trabalhos na literatura têm concentrado no uso de medidas de FRF, opondo-se aos dados modais. Segundo (LEE, 2009), os dados modais podem ser contaminados com erros de extração por serem medidos a partir de uma faixa de frequência muito limitada próxima à ressonância. Outro ponto é que um conjunto completo de dados modais não pode ser medido em todas as estruturas, mas apenas nas estruturas mais simples. Dados de FRF podem providenciar mais informações referente ao dano em uma faixa de frequência desejada, quando comparado com os dados modais que são extraídos de uma faixa limitada de frequência.

Neste trabalho será abordado os modelos de barra e viga unidimensional por serem estruturas simplificadas para a modelagem numérica e computacional, porém que podem ser consideradas como modelos e componentes de frequente uso no dia a dia. Treliças são, basicamente, estruturas constituídas por barras retas unidas pelas extremidades através de nós articulados. Como os esforços são aplicados apenas nestes nós, somente esforços axiais de tração e compressão atuam nas barras. Outra gama de aplicação industrial do modelo de barras, são para eixos de máquinas rotativas.

Figura 7 – Aplicação de barras em treliças.

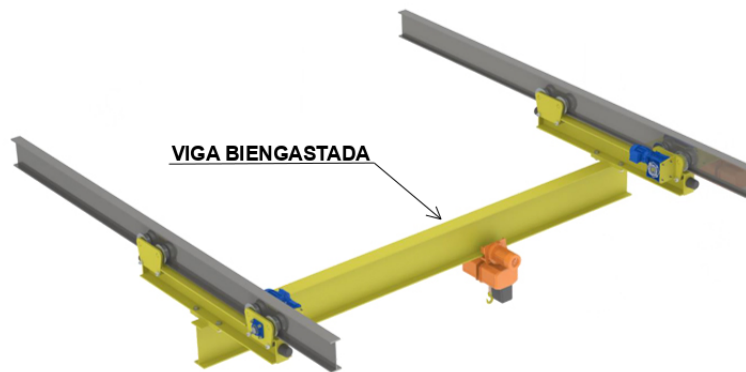


Fonte: Próprio autor.

Já o modelo de viga possui mais graus de liberdade, pois leva-se em consideração os esforços que envolvem a rigidez axial, rigidez à flexão e rigidez à torção. As ações flexão e torção não afetam as forças axiais presentes, ou seja, pode-se torcer a viga ou submetê-la

à flexão que não surgirão forças axiais decorrentes dessa solicitação. Desta forma, estas ações são tratadas independentemente (AVELINO, 2000). O modelo de viga pode ser considerado em diversas aplicações reais como, por exemplo, a estrutura de uma ponte civil, uma asa de avião, pilares, ponte rolante, entre outros.

Figura 8 – Aplicação de viga em uma ponte rolante.



Fonte: Próprio autor.

Os Métodos de Elementos Finitos e Espectrais permitem analisar o comportamento dinâmico dos modelos citados, além de estruturas mais complexas e serão a base para o estudo de frequência deste trabalho. É importante citar outros estudos que estes métodos possibilitam.

Em particular, na área de Cálculo Estrutural, o engenheiro deve garantir que a estrutura de análise não estará sujeita a falhas sob as diversas condições de operação. Os subsídios para este problema são normalmente obtidos a partir da Resistência dos Materiais, que trata da resistência e da rigidez dos elementos das estruturas, baseando-se nos Teoremas da Mecânica Geral e no estudo da Estática. Seguindo este fundamento, foram desenvolvidas técnicas clássicas (Teoria de Vigas, Teoria Geral de Placas e Cascas, Teoria Matemática da Elasticidade), porém, na prática a maioria das estruturas são muito complexas para serem analisadas através dessas técnicas. Segundo (AVELINO, 2000), para estruturas de forma arbitrária a solução analítica frequentemente torna-se impossível e o problema requer grandes e excessivas simplificações para aplicar de forma analítica tais técnicas, resultando em cálculos pouco confiáveis. Portanto, surgiu o interesse em desenvolver procedimentos aproximados que podem ser aplicados em caráter geral, independente da geometria da estrutura e da condição de carregamento, dentro da precisão aceitável do problema de engenharia. Esse caminho alternativo aos procedimentos analíticos clássicos deu origem ao Método dos Elementos Finitos.

Embora o FEM tenha sido inicialmente mais associado a aplicações estruturais, como análise linear de estruturas, vibrações livres e forçadas, análise não linear envolvendo grandes deformações e deflexões, também pode ser aplicado em outras áreas de engenharia

e análise, sendo poderosas ferramentas em física e matemática, tais como: Transferência de Calor, escoamento de Fluidos, Ondas Eletromagnéticas, Hidrodinâmica, etc. As variáveis de estado, nestes casos, são as temperaturas, velocidades, viscosidades, etc., enfim, as grandezas relacionadas aos fenômenos físicos do objeto de estudo.

O Método dos Elementos Espectrais é um método considerado recente que combina a versatilidade geométrica, as características comuns e vantagens do FEM, com precisão e convergência rápida dos resultados. Neste cenário, várias aplicações têm englobado modelagem espectral, destacando-se assuntos de grande interesse da engenharia, o desenvolvimento de sistemas de monitoramento da integridade estrutural e as aplicações no controle ativo de vibrações. Além da técnica por Impedância Eletromecânica utilizando os PZT, pode-se citar a aplicação do SEM em problemas de propagação de ondas como destaque. O método de propagação de ondas é aplicável a estruturas periódicas, nos quais calculam-se as frequências e modos de propagação da onda, a partir dos quais determinam-se as amplitudes da onda e posteriormente encontram-se os deslocamentos da estrutura. O estudo aprofundado sobre estas aplicações envolvendo o SEM, podem ser encontradas em (FRANCO, 2009).

Após destacar algumas das principais aplicações dos métodos FEM e SEM, no capítulo a seguir será formulado os dois métodos para o modelo de barra e viga para entendimento de toda a teoria por trás. A partir disso, pode-se comparar e discutir os resultados encontrados por ambos os métodos no monitoramento da integridade estrutural.

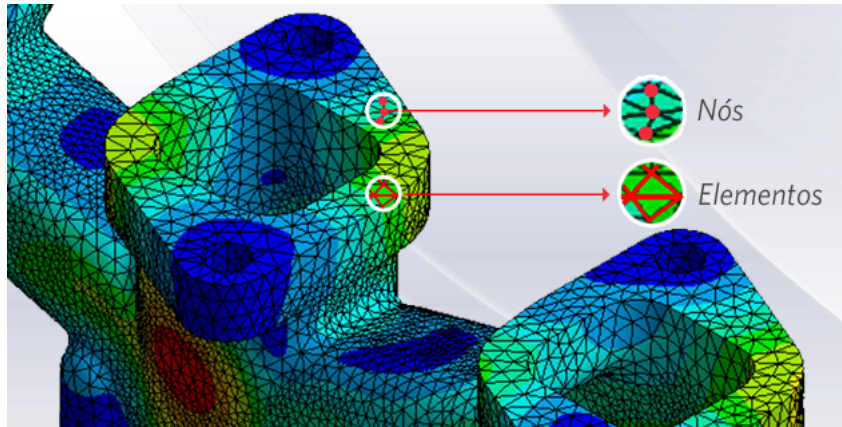
## 3 Método de Elementos Finitos

A análise de elementos finitos é um método para solução numérica de problemas reais que requerem determinar a distribuição espacial de uma ou mais variáveis dependentes. Numericamente, um problema de campo é descrito por equações diferenciais ou por uma expressão integral. Em softwares como *SolidWorks*, *Inventor*, *ANSYS*, entre outros, todas as formulações de elementos finitos se encontram prontas para uso, sendo possível utilizar estes programas com pouco conhecimento do método de análise e do problema no qual ele é aplicado, devido aos softwares serem intuitivos na resolução. Porém, sem a base de conhecimento teórico dos fenômenos e variáveis que envolvem o problema, pode-se gerar resultados inconclusivos.

A mente humana é limitada de tal forma que ela não consegue compreender o comportamento dos sistemas ao seu redor e os fenômenos em uma só operação. É próprio da mente humana querer subdividir os sistemas em seus componentes individuais, ou em seus elementos. Assim, surgiu a ideia de que, a partir do entendimento do comportamento de cada elemento, é possível entender o comportamento do conjunto (AVELINO, 2000). A variação real na região abrangida por um elemento, normalmente é mais complicada, portanto, o FEM obtém uma solução aproximada. Elementos são conectados em pontos chamados de nós (Figura 9). O agrupamento de elementos é chamado estrutura de elementos finitos e o arranjo particular dos elementos é denominado malha. Matematicamente, a malha de elementos finitos é representada por um sistema de equações algébricas a serem resolvidas para incógnitas nos nós. A solução para grandezas nodais, em conjunto com o campo assumido em qualquer dado elemento, determina a variação espacial do campo naquele elemento. Com isso, a quantidade de campo em toda a estrutura é aproximada de elemento em elemento. Embora a solução FEM não seja exata, ela pode ser melhorada utilizando mais elementos para representar a estrutura.

Algumas análises serão necessárias para representar com maior exatidão a estrutura a ser estudada: os graus de liberdade e as condições de contorno (PEPPER; HEINRICH, 2006). Os Graus de Liberdade, também conhecidos como DOF (do inglês, *Degrees Of Freedom*), são quantidades independentes que governam a variação espacial de um campo. Conforme dito anteriormente, o modelo de viga possui mais graus de liberdade em comparação ao modelo de barra, devido o primeiro levar em consideração, além da rigidez axial, a rigidez à flexão e a rigidez à torção. As condições de contorno são aplicadas para eliminar uma parte da resposta e modificam o resultado final. Por exemplo, quando considerado que o sistema possui suas extremidades fixas, ou seja, não possui deslocamentos nos nós das extremidades, é preciso que seja excluído as respostas de deslocamento nestes nós.

Figura 9 – Nós e elementos presentes em uma malha.



Fonte: MIRLIENNA, 2016.

### 3.1 Derivações das equações

O Método de Elementos Finitos pode ser simplesmente apresentada em termos das seguintes etapas (LALLANE, 2007):

- A estrutura é dividida em elementos de finito tamanho, denominado elemento finito, o qual são conectados em certos pontos, denominados nós, situado nos limites do elemento;
- Após definir hipóteses razoáveis para o campo de deslocamento do elemento  $i$ , a energia cinética  $T_i$ , a energia de deformação  $U_i$ , e a energia dissipada  $R_i$ , são calculadas em função dos deslocamentos nodais;
- Se a estrutura é composta por  $n$  elementos, então:

$$T = \sum_{i=1}^n T_i$$

$$U = \sum_{i=1}^n U_i \quad (3.1)$$

$$R = \sum_{i=1}^n R_i$$

As forças generalizadas são determinadas pela excitação das forças externas do sistema. A aplicação das equações de Lagrange permitem que todas as equações diferenciais de movimento do sistema sejam obtidas. Com intuito de simplificar a apresentação do método a seguir, será assumido que não há dissipação de energia, ou seja,  $R = 0$  para todo elemento  $i$ .

## 3.2 Discretização: A divisão da estrutura em elementos finitos

Primeiramente, o tipo e distribuição dos elementos finitos devem ser definidos. Esta definição deve levar em consideração a geometria e o comportamento da estrutura. Uma discretização eficiente e eficaz exige muita experiência. Em cada caso, a análise deve levar em consideração descontinuidades na geometria, descontinuidades no material, condições de deslocamento e as forças aplicadas na estrutura (LALLANE, 2007).

Para o cálculo preciso das frequências e modos ou o cálculo da resposta dinâmica, a distribuição dos elementos finitos, também conhecida como malha, pode ser relativamente grossa e regular. A malha deve ser refinada para calcular as tensões com precisão, principalmente em campos de concentração de tensão.

## 3.3 Energia de deformação - Matriz de rigidez

Com a finalidade de simplificar a notação, o termo  $i$  referente a quantidades associadas com o  $i$ ésimo elemento é omitida da seguinte derivação. A expressão genérica para energia de deformação para um elemento é:

$$U = \frac{1}{2} \int_{\tau} \varepsilon^t \sigma \mathbf{d}\tau \quad (3.2)$$

O vetor deslocamento  $\mathbf{d}$  para um ponto qualquer do elemento está relacionada com o vetor de deslocamento nodal  $\delta$  do elemento, através da matriz  $\mathbf{N}$ . A matriz  $\mathbf{N}$  é gerada a partir da hipótese sobre o campo de deslocamento dentro do elemento. A relações entre as variáveis  $\mathbf{d}$  e  $\delta$  é:

$$\mathbf{d} = \mathbf{N}\delta \quad (3.3)$$

Diferenciando a equação (3.3), a relação entre as deformações do elemento e as deformações nodais é obtida da seguinte forma:

$$\varepsilon = \mathbf{B}\delta \quad (3.4)$$

Em casos onde não há tensões iniciais, as tensões e deformações são relacionadas por:

$$\sigma = \mathbf{D}\varepsilon \quad (3.5)$$

sendo  $\mathbf{D}$  uma matriz quadrada simétrica, cujo elementos dependem das características mecânicas do material, como módulo de Young  $E$  e coeficiente de Poisson  $\nu$ . Aplicando a equação (3.5) e (3.4), tem-se a equação (3.2) da seguinte forma:

$$U = \frac{1}{2} \int_{\tau} (\mathbf{B}\delta)^t \mathbf{D} \mathbf{B} \delta \, d\tau \quad (3.6)$$

$$= \frac{1}{2} \delta^t \left[ \int_{\tau} \mathbf{B}^t \mathbf{D} \mathbf{B} \, d\tau \right] \delta \quad (3.7)$$

Pode ser escrito como:

$$U = \frac{1}{2} \delta^t \mathbf{K} \delta \quad (3.8)$$

sendo  $\mathbf{K}$  a matriz de rigidez do elemento:

$$\mathbf{K} = \int_{\tau} \mathbf{B}^t \mathbf{D} \mathbf{B} \, d\tau \quad (3.9)$$

A determinação da energia de deformação  $U$  e a matriz de rigidez  $\mathbf{K}$  podem ser expressas da seguinte maneira.

Figura 10 – Barra em movimento longitudinal.



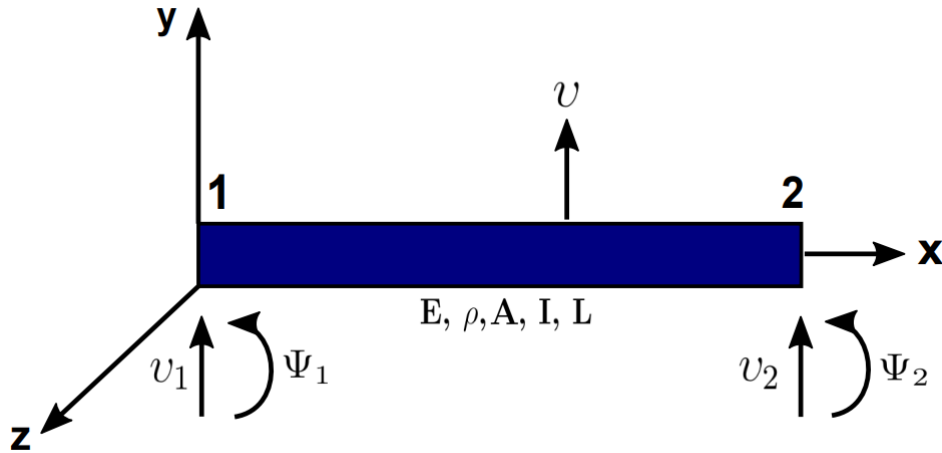
Fonte: Adaptado de (LALLANE, 2007).

$$U = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}^t \int_0^L EA \begin{bmatrix} \frac{1}{L^2} & -\frac{1}{L^2} \\ -\frac{1}{L^2} & \frac{1}{L^2} \end{bmatrix} dx \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \quad (3.10)$$

$$= \frac{1}{2} \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}^t \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \quad (3.11)$$

$$\mathbf{K} = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.12)$$

Figura 11 – Viga em flexão.



Fonte: Adaptado de (LALLANE, 2007).

$$U = \frac{1}{2} \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} v_1 \\ \Psi_1 \\ v_2 \\ \Psi_2 \end{bmatrix}^t \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ \Psi_1 \\ v_2 \\ \Psi_2 \end{bmatrix} \quad (3.13)$$

$$\mathbf{K} = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix} \quad (3.14)$$

### 3.4 Energia cinética - Matriz de massa

A expressão geral para energia cinética de um elemento é:

$$T = \frac{1}{2} \int_{\tau} \rho V^2 \mathbf{d}\tau \quad (3.15)$$

sendo  $V = \mathbf{d}^0$ . Aplicando a equação (3.3), temos a velocidade  $V$  como:

$$V = \mathbf{N}\delta^0 \quad (3.16)$$

Substituindo na equação (3.15), obtêm-se:

$$T = \frac{1}{2} \int_{\tau} \rho (\mathbf{N}\delta^0)^t \mathbf{N}\delta^0 \mathbf{d}\tau \quad (3.17)$$



Que pode ser escrita da seguinte forma:

$$T = \frac{1}{2} \delta^{0t} \mathbf{m} \delta^0 \quad (3.18)$$

sendo

$$\mathbf{m} = \int_{\tau} \rho \mathbf{N}^t \mathbf{N} \, d\tau \quad (3.19)$$

A matriz de massa definida pela equação (3.19) é denominada matriz de massa consistente por ser calculada utilizando as mesmas funções de forma que a matriz de rigidez. Neste sentido, o cálculo de  $\mathbf{K}$  e  $\mathbf{m}$  são consistentes.

Ao invés da matriz de massa consistente, a matriz de massa concentrada  $\mathbf{m}_1$  é utilizada na maioria das vezes. Esta matriz é obtida considerando que a matriz de massa do elemento é aglomerada nos nós do elemento. A vantagem da matriz de massa concentrada é que ela se torna simples de construir sua diagonal. A diagonal da matriz  $\mathbf{m}_1$  é conveniente por ela utilizar menos memória computacional e simplificar os algoritmos utilizados na computação de frequências e modos. Para diversos elementos, como uma barra em movimento longitudinal, é observado que a matriz  $\mathbf{m}_1$  é eficiente como a matriz  $\mathbf{m}$  (LALLANE, 2007).

Barra em movimento longitudinal:

$$\mathbf{m} = \frac{\rho AL}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \quad (3.20)$$

$$\mathbf{m}_1 = \frac{\rho AL}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.21)$$

Viga em flexão:

$$\mathbf{m} = \frac{\rho AL}{420} \begin{bmatrix} 156 & 22L & 54 & -13L \\ 22L & 4L^2 & 13L & -3L^2 \\ 54 & 13L & 156 & -22L \\ -13L & -3L^2 & -22L & 4L^2 \end{bmatrix} \quad (3.22)$$

$$\mathbf{m}_1 = \frac{\rho AL}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.23)$$

Em flexão, a matriz de massa consistente é mais eficiente que a matriz de massa concentrada, pois  $\mathbf{m}_1$  não leva em consideração o efeito de rotação da viga.

## 4 Método de Elementos Espectrais

A formulação do modelo de elemento espectral para um elemento de estrutura é bastante semelhante à formulação do modelo convencional de elementos finitos. A principal diferença é que a formulação do SEM começa com a transformação das equações diferenciais de movimento, no domínio do tempo para o domínio da frequência, aplicando a Transformada Discreta de Fourier, conhecida com DFT (do inglês, *Discrete Fourier Transform*). Para problemas unidimensionais, como resultado do DFT, a variável temporal desaparece e a frequência torna-se um parâmetro independente que transforma a equação diferencial parcial original no domínio do tempo para o domínio da frequência, no qual a solução é obtida de forma exata. A matriz de rigidez dinâmica exata, denominada matriz de elemento espectral é formulada utilizando a forma dinâmica, de maneira análoga à aplicada no FEM convencional.

Neste trabalho será abordada a formulação para elemento espectral fundamentada no conceito força-deslocamento. Existem formulações baseadas em outros métodos como, por exemplo, o método variacional e vetor de estado, que também são muito aplicados. Estas últimas formulações podem ser encontradas em (LEE, 2009).

### 4.1 Formulação pelo Método Força-deslocamento

Para formular o modelo de elemento espectral para uma estrutura são utilizadas as soluções exatas que regem as equações de movimento, nas quais estão relacionadas diretamente com as forças e deslocamentos nodais. Segundo (LEE, 2009), as equações que regem o movimento de uma estrutura submetida à vibração forçada podem ser representadas da seguinte forma:

$$\mathbf{L}u(x, t) + \mathbf{M}\ddot{u}(x, t) = p(x, t) \quad (4.1)$$

no qual  $\mathbf{L}$  é o operador estrutural diferencial linear que depende do tempo  $t$  e do espaço  $x$ , e  $\mathbf{M}$  o operador inercial. Os pontos ( $\cdot$ ) referem-se as derivadas em relação ao tempo  $t$ . Os termos  $u(x, t)$  e  $p(x, t)$  são vetores deslocamento e excitações externas, respectivamente.

Considerando que a formulação espectral das excitações externas é representada por:

$$p(x, t) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} P_n(x, \omega_n) \exp^{i\omega_n t} \quad (4.2)$$

no qual  $P_n(x, \omega)$  são os componentes espectrais, também conhecido como coeficientes de Fourier do vetor de forças externas  $p(x, t)$ . A variável  $\omega$  refere-se à frequência e  $i = \sqrt{-1}$  à unidade imaginária. Analogamente, tem-se como solução da equação (4.1) a seguinte expressão:

$$u(x, t) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} U_n(x, \omega_n) \exp^{i\omega_n t} \quad (4.3)$$

no qual  $U_n(x, \omega)$  refere-se aos componentes espectrais do vetor deslocamento  $u(x, t)$ . Substituindo as equações (4.2) e (4.3) na equação (4.1) e considerando que os componentes espectrais  $U_n$  e  $P_n$  satisfazem a equação (4.1) e cada componente de frequência  $\omega_n$ , temos que:

$$\mathbf{L}U_n(x, \omega_n) - \omega_n^2 \mathbf{M}U_n(x, \omega_n) = P_n(x, \omega_n) \quad (4.4)$$

sendo  $\mathbf{L}$  o operador diferencial linear no domínio do espaço.

As funções de forma dependentes da frequência, denominadas funções de forma dinâmica, são usadas para elaborar a matriz de elemento espectral. Estas funções são obtidas a partir da seguinte equação homogênea:

$$\mathbf{L}U_n(x) - \omega_n^2 \mathbf{M}U_n(x) = 0 \quad (4.5)$$

Simplificando, o termo  $n$  pode ser desconsiderado, e a equação (4.5) torna-se

$$\mathbf{L}U(x) - \omega^2 \mathbf{M}U(x) = 0 \quad (4.6)$$

A solução geral para equação (4.6) pode ser assumida pela solução harmônica

$$U(x) = c \exp^{-ikx} \quad (4.7)$$

sendo  $c$  é uma constante e  $k$  é o número de onda. Substituindo a equação (4.7) na equação (4.6), temos um problema de autovalor dado por

$$A = (k, \omega)c = 0 \quad (4.8)$$

A determinante deve ser zero para que a equação (4.8) tenha solução não trivial, ou seja

$$\det|A(k, \omega)| = 0 \quad (4.9)$$

Esta determinante calcula a equação característica, no qual as raízes são os números de onda  $k$

$$k^p + \alpha_{p-1}(\omega)k^{p-1} + \alpha_{p-2}(\omega)k^{p-2} + \dots + \alpha_1(\omega)k + \alpha_0(\omega) = 0 \quad (4.10)$$

A equação (4.10) é chamada de relação de dispersão ou relação de espectro, sendo  $k_1, k_2, \dots, k_p$  as raízes distintas em uma frequência discreta  $\omega$ . Os autovetores  $c_i$  podem ser obtidos a partir da equação (4.8) como

$$c_i = a_i \begin{pmatrix} 1 \\ \beta_i \end{pmatrix} = a_i \phi_i \quad (i = 1, 2, \dots, p) \quad (4.11)$$

O vetor  $c_i$  é normalizado de modo que um componente de vetor normalizado  $\phi_i$  torna-se unitário e os outros componentes são inseridos no vetor  $\beta_i$ . As constantes  $a_i$  serão determinadas para satisfazer as condições de contorno relacionadas ao problema. Sendo encontradas as soluções  $k_i$  e  $c_i$  que satisfazem o problema de autovalor da equação (4.8), a solução geral da equação (4.6) pode ser escrita como

$$U(x) = \sum_{i=1}^p \phi_i \exp^{-ik_i(\omega)x} a_i \equiv \mathbf{E}(x, \omega) \mathbf{a} \quad (4.12)$$

sendo

$$\mathbf{E}(x, \omega) = [\phi_1 \quad \phi_2 \quad \dots \quad \phi_p] \Lambda(x, \omega)$$

$$\Lambda(x, \omega) = \text{diag}[\exp^{-ik_i(\omega)x}] \quad (4.13)$$

$$\mathbf{a} = [a_1 \quad a_2 \quad \dots \quad a_p]^T$$

Considerando um elemento finito de comprimento  $L$ , a equação (4.12) deve atender as condições de contorno geométricas e naturais em dois nós finais  $x = 0$  e  $x = L$ , os deslocamentos espectrais nodais e ângulos (graus de liberdade) vetor  $\mathbf{d}$ , e as forças espectrais nodais (forças nodais) vetor  $\mathbf{f}$ . O deslocamento e angulação, normalmente são denominados variáveis primárias e suas características de contorno compõem as condições de contorno geométricas. As variáveis primárias estão relacionadas aos campos de deslocamento da seguinte forma

$$\mathbf{D}(x) = \mathbf{L}_{GB} U(x) \quad (4.14)$$

sendo  $\mathbf{L}_{GB}$  o operador diferencial linear para as condições de contorno geométricas.

Substituindo a equação (4.12) na equação (4.14) e assumindo os graus de liberdade nodais  $\mathbf{d}$  nos dois nós do elemento, obtém-se (LEE, 2009)

$$\mathbf{d} = \begin{pmatrix} D(0) \\ D(L) \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{L}_{GB}\mathbf{E}(x, \omega)|_{x=0} \\ \mathbf{L}_{GB}\mathbf{E}(x, \omega)|_{x=L} \end{bmatrix} \mathbf{a} = \mathbf{H}(\omega)\mathbf{a} \quad (4.15)$$

Eliminando o vetor constante  $\mathbf{a}$  da equação (4.12) e substituindo na equação (4.15), as soluções podem ser reescritas em termos do vetor graus de liberdade nodais como

$$U(x) = \mathbf{N}(x, \omega)\mathbf{d} \quad (4.16)$$

no qual  $\mathbf{N}(x, \omega)$  são as funções de forma definidas por

$$\mathbf{N}(x, \omega) = \mathbf{E}(x, \omega)\mathbf{H}^{-1}(\omega) \quad (4.17)$$

As forças internas e os momentos são denominados variáveis secundárias e suas especificações de contorno constituem as condições de contorno naturais. A resistência dos materiais estabelece a relação entre as variáveis secundárias e os campos de deslocamento pela expressão

$$F(x) = \mathbf{L}_{NB}U(x) \quad (4.18)$$

sendo  $\mathbf{L}_{NB}$  o operador diferencial linear para as condições de contorno naturais. Substituindo a equação (4.16) na equação (4.18) e considerando as cargas concentradas nos dois nós finais do elemento, ou forças nodais  $\mathbf{f}_c$ , encontra-se a equação de elemento espectral

$$\mathbf{f}_c \equiv \begin{pmatrix} -F(0) \\ +F(L) \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} -\mathbf{L}_{NB}\mathbf{N}(x, \omega)|_{x=0} \\ +\mathbf{L}_{NB}\mathbf{N}(x, \omega)|_{x=L} \end{bmatrix} \mathbf{d} \equiv \mathbf{S}(\omega)\mathbf{d} \quad (4.19)$$

sendo

$$\mathbf{S}(\omega) = \begin{bmatrix} -\mathbf{L}_{NB}\mathbf{N}(x, \omega)|_{x=0} \\ +\mathbf{L}_{NB}\mathbf{N}(x, \omega)|_{x=L} \end{bmatrix} = G(\omega)\mathbf{H}^{-1}(\omega) \quad (4.20)$$

com

$$G(\omega) = \begin{bmatrix} -\mathbf{L}_{NB}\mathbf{E}(x, \omega)|_{x=0} \\ +\mathbf{L}_{NB}\mathbf{E}(x, \omega)|_{x=L} \end{bmatrix} \quad (4.21)$$

A matriz  $\mathbf{S}(\omega)$  é a matriz de rigidez dinâmica exata no domínio da frequência, chamada de matriz de elemento espectral. Na equação (4.19) os sinais de mais (+) e menos (-) referem-se a diferença entre as convenções de sinais usadas na teoria de resistência dos materiais, comumente adotadas nos métodos de Elementos Finitos ou Elementos

Espectrais. A seguir será abordado o modelo do método de elementos espectrais para barra em movimento longitudinal através da formulação por força-deslocamento.

## 4.2 Modelo de Barra

A vibração longitudinal livre de uma barra uniforme é representada por (Lee, 2009)

$$EA \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} - \rho A \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} = 0 \quad (4.22)$$

no qual  $u(x, t)$  é o deslocamento longitudinal,  $E$  é o módulo de Young,  $A$  é a área de seção transversal e  $\rho$  é a densidade do material da barra. A força axial interna é dada por

$$N(x, t) = EA \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \quad (4.23)$$

no qual o termo  $t$  é usado para representar a quantidade no domínio do tempo.

A solução da equação (4.22) é assumida na forma espectral como

$$u(x, t) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} U_n(x, \omega_n) \exp^{i\omega_n t} \quad (4.24)$$

Substituindo a equação (4.24) na equação (4.22) obtém-se a seguinte equação diferencial

$$EA \frac{\partial^2 U(x, t)}{\partial x^2} + \omega^2 \rho A U(x, t) = 0 \quad (4.25)$$

A solução para equação (4.25) é assumida como

$$U(x) = \mathbf{a} \exp^{-ik(\omega)x} \quad (4.26)$$

Substituindo a equação (4.26) na equação (4.25), obtém-se a seguinte relação de dispersão

$$k^2 - k_L^2 = 0 \quad (4.27)$$

com  $k_L$  o número de onda definido por

$$k_L = \omega \left( \frac{\rho A}{EA} \right)^{1/2} \quad (4.28)$$

A equação (4.28) resulta em duas raízes, sendo

$$k_1 = -k_2 = k_L \quad (4.29)$$

Em uma barra finita de comprimento  $L$ , a solução geral pode ser obtida da seguinte forma

$$U(x, \omega) = a_1 \exp^{-ik_L x} + a_2 \exp^{ik_L x} = \mathbf{e}(x, \omega) \mathbf{a} \quad (4.30)$$

sendo

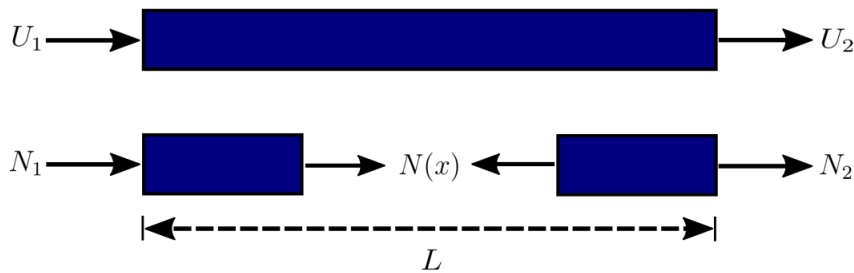
$$\mathbf{e}(x, \omega) = \begin{bmatrix} \exp^{-ik_L x} & \exp^{ik_L x} \end{bmatrix} \quad (4.31)$$

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \end{bmatrix}^T$$

Os deslocamentos nodais espectrais de um modelo de barra de comprimento  $L$  podem ser distribuídos em um vetor de deslocamento  $\mathbf{d}$ , conforme Figura 12.

$$\mathbf{d} = \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U(0) \\ U(L) \end{pmatrix} \quad (4.32)$$

Figura 12 – Forças e deslocamentos em um elemento de barra.



Fonte: Adaptado de (LEE, 2009).

Substituindo a equação (4.30) na equação (4.32), obtém-se

$$\mathbf{d} = \begin{bmatrix} \mathbf{e}(0, \omega) \\ \mathbf{e}(L, \omega) \end{bmatrix} \mathbf{a} = \mathbf{H}_B(\omega) \mathbf{a} \quad (4.33)$$

com

$$\mathbf{H}_B(\omega) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \exp^{-ik_L L} & \exp^{ik_L L} \end{bmatrix} \quad (4.34)$$

Através da equação (4.33), o vetor constante  $\mathbf{a}$  pode ser anulado da equação (4.30) e a solução geral pode ser definida como

$$U(x) = \mathbf{N}_B(x, \omega) \mathbf{d} \quad (4.35)$$

sendo

$$\mathbf{N}_B(x, \omega) = \mathbf{e}(x, \omega) \mathbf{H}_B^{-1}(\omega) \quad (4.36)$$

Através da equação (4.23), os componentes espectrais da força axial estão relacionados com  $U(x)$  por

$$N(x) = EA \frac{\partial U}{\partial x} \quad (4.37)$$

As forças axiais nodais para um elemento de barra finita estão relacionadas com as forças através da resistência dos materiais dado por

$$\mathbf{f}_c(\omega) = \begin{pmatrix} N_1 \\ N_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -N(0) \\ N(L) \end{pmatrix} = \mathbf{F}_B(\omega) \mathbf{a} \quad (4.38)$$

Através da equação (4.20) e usando as matrizes de força e deslocamento nodais espectrais, calcula-se a matriz de elemento espectral para uma barra

$$\mathbf{S}_B(\omega) = \mathbf{F}_B(\omega) \mathbf{H}_B^{-1}(\omega) \quad (4.39)$$

### 4.3 Modelo de Viga

Vigas são consideradas como estruturas de corpo esbelto, ou seja, possuem a área da seção transversal pequena em comparação ao seu comprimento. A vibração de flexão livre de uma viga de Euler-Bernoulli é representada pela seguinte expressão

$$EI \frac{\partial^4 \mathbf{w}(x, t)}{\partial x^4} + \rho A \frac{\partial^2 \theta(x, t)}{\partial t^2} = 0 \quad (4.40)$$

sendo  $\mathbf{w}(x, t)$  o deslocamento transversal,  $\theta(x, t)$  a rotação,  $E$  o módulo de Young,  $A$  é a área de seção transversal,  $I$  é o momento de inércia e  $\rho$  é a densidade do material. As forças de cisalhamento transversal  $Q$  e momento fletor  $M$  são representados por

$$M(x, t) = EI \frac{\partial^2 \mathbf{w}(x, t)}{\partial x^2}, \quad Q(x, t) = -EI \frac{\partial^3 \mathbf{w}(x, t)}{\partial x^3} \quad (4.41)$$



A solução da equação (4.40) na forma espectral é assumida como

$$\mathbf{w}(x, t) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} W_n(x, \omega_n) \exp^{i\omega_n t} \quad (4.42)$$

Substituindo a equação (4.42) na equação (4.40) encontra-se um problema de autovalor para uma frequência discreta (como  $\omega = \omega_n$ ) dado por

$$EI \frac{\partial^4 W(x, t)}{\partial x^4} - \omega^2 \rho A W(x, \omega) = 0 \quad (4.43)$$

A solução geral da equação (4.43) é assumida como

$$W(x) = a \exp^{-ik(\omega)x} \quad (4.44)$$

Substituindo a equação (4.44) na equação (4.43) obtém-se a relação de dispersão

$$k^4 - k_F^4 = 0 \quad (4.45)$$

sendo  $k_F$  o número de onda definido por

$$k_F = \sqrt{\omega} \left( \frac{\rho A}{EI} \right)^{1/4} \quad (4.46)$$

A equação (4.46) resulta em quatro raízes

$$k_1 = -k_2 = k_F, \quad k_3 = -k_4 = ik_F \quad (4.47)$$

Para uma viga de comprimento  $L$ , a solução geral da equação (4.43) pode ser obtida da seguinte forma

$$W(x, \omega) = a_1 \exp^{-ik_F x} + a_2 \exp^{-k_F x} + a_3 \exp^{+ik_F x} + a_4 \exp^{+k_F x} = \mathbf{e}(x, \omega) \mathbf{a} \quad (4.48)$$

com

$$\mathbf{e}(x, \omega) = \begin{bmatrix} \exp^{-ik_F x} & \exp^{-k_F x} & \exp^{+ik_F x} & \exp^{+k_F x} \end{bmatrix} \quad (4.49)$$

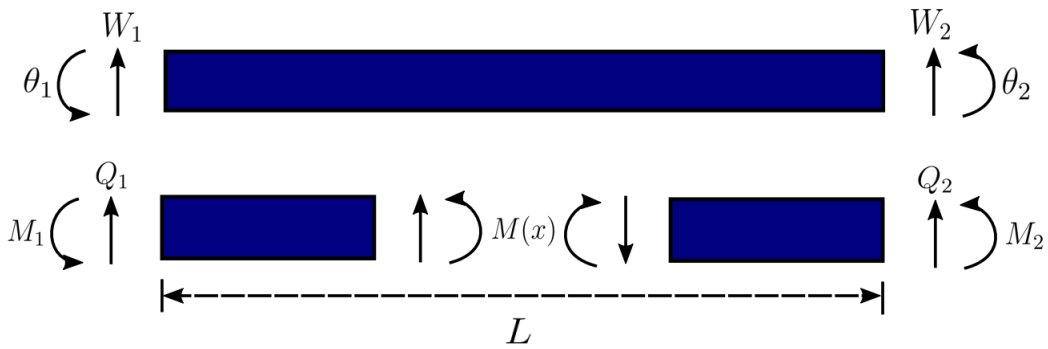
$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \end{bmatrix}^T$$

Os deslocamentos e inclinações nodais de uma viga Euler-Bernoulli de comprimento  $L$  podem ser dispostos em um vetor deslocamento  $\mathbf{d}$ , conforme equação (4.50). As forças e

deslocamentos no elemento são representados pela Figura 13, no qual os subíndices 1 e 2 indicam o início e o fim do elemento.

$$\mathbf{d} = \begin{bmatrix} W_1 \\ \theta_1 \\ W_2 \\ \theta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W(0) \\ \theta(0) \\ W(L) \\ \theta(L) \end{bmatrix} \quad (4.50)$$

Figura 13 – Forças e deslocamentos em um elemento de viga.



Fonte: Adaptado de (LEE, 2009).

Substituindo a equação (4.48) na equação (4.50) obtém-se

$$\mathbf{d} = \begin{bmatrix} \mathbf{e}(0, \omega) \\ \mathbf{e}'(0, \omega) \\ \mathbf{e}(L, \omega) \\ \mathbf{e}'(L, \omega) \end{bmatrix} \mathbf{a} = \mathbf{H}_{EB}(\omega) \mathbf{a} \quad (4.51)$$

com

$$\mathbf{H}_{EB}(\omega) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -ik_F & -k_F & ik_F & k_F \\ exp^{-ik_FL} & exp^{-k_FL} & exp^{+ik_FL} & exp^{+k_FL} \\ -ik_F exp^{-ik_FL} & -k_F exp^{-k_FL} & ik_F exp^{+ik_FL} & k_F exp^{+k_FL} \end{bmatrix} \quad (4.52)$$

O vetor constante  $\mathbf{a}$  pode ser eliminado da equação (4.48) usando a equação (4.51), assim, a solução geral pode ser representada por

$$W(x) = \mathbf{N}_{EB}(x, \omega) \mathbf{d} \quad (4.53)$$

com

$$\mathbf{N}_{EB}(x, \omega) = \mathbf{e}(x, \omega) \mathbf{H}_{EB}^{-1}(\omega) \quad (4.54)$$

Através da equação (4.41), os componentes espectrais do momento fletor e força de cisalhamento podem ser relacionados a  $W(x)$  por

$$M(x) = EI \frac{\partial^2 W(x)}{\partial x^2}, \quad Q(x) = -EI \frac{\partial^3 W(x)}{\partial x^3} \quad (4.55)$$

A força cortante e momento fletor para o elemento de viga Euler-Bernoulli são relacionados com o vetor de forças nodais da seguinte forma

$$\mathbf{f}_c(\omega) = \begin{pmatrix} Q_1 \\ M_1 \\ Q_2 \\ M_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -Q(0) \\ -M(0) \\ Q(L) \\ M(L) \end{pmatrix} \quad (4.56)$$

Substituindo a equação (4.53) na equação (4.55) e os resultados no lado direito da equação (4.56), obtém-se

$$\mathbf{S}_{EB}(\omega) \mathbf{d}(\omega) = \mathbf{f}(\omega) \quad (4.57)$$

sendo  $\mathbf{S}_{EB}(\omega)$  a matriz de elemento espectral para a viga de Euler-Bernoulli expressa por

$$\mathbf{S}_{EB}(\omega) = \mathbf{F}_{EB}(\omega) \mathbf{H}_{EB}^{-1}(\omega) \quad (4.58)$$

no qual  $\mathbf{F}_{EB}(\omega)$  é a matriz contendo as forças espectrais em todos os nós, dada por

$$\mathbf{f}_c = \mathbf{F}_{EB}(\omega) \mathbf{a} \quad (4.59)$$

$$\mathbf{F}_{EB}(\omega) = EI \begin{bmatrix} -ik_1^3 & -ik_2^3 & -ik_3^3 & -ik_4^3 \\ -k_1^2 & -k_2^2 & -k_3^2 & -k_4^2 \\ ik_1^3 \exp^{-ik_1 L} & ik_2^3 \exp^{-ik_2 L} & ik_3^3 \exp^{-ik_3 L} & ik_4^3 \exp^{-ik_4 L} \\ k_1^2 \exp^{-ik_1 L} & k_2^2 \exp^{-ik_2 L} & k_3^2 \exp^{-ik_3 L} & k_4^2 \exp^{-ik_4 L} \end{bmatrix} \quad (4.60)$$

sendo  $k_j, j = 1, 2, 3, 4$  são definidos na equação (4.47).

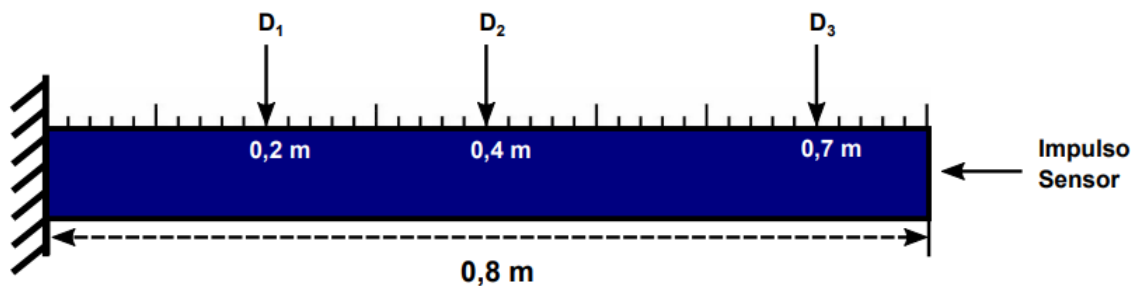
No capítulo a seguir, será discutido os resultados do método de identificação de danos estruturais baseado no método de elementos finitos e elementos espectrais abordados ao longo deste trabalho, no qual os gráficos FRF serão analisados para identificação dos danos.

## 5 Resultados e discussões

O software *Scilab* versão 6.0.1 foi utilizado para implementação dos códigos para simular a identificação dos danos estruturais, pois além de seu uso ser gratuito, oferece um ambiente eficiente para solução de diversos problemas de engenharia. Para este trabalho foram elaborados quatro códigos de simulações, nos quais dois são para o modelo de barra e viga pelo Método de Elementos Finitos e outros dois são para o modelo de barra e viga pelo Método de Elementos Espectrais. Nos códigos, foram realizados os equacionamentos utilizando todas as formulações apresentadas na metodologia. Com a obtenção das matrizes globais, matrizes espectrais e implementação dos danos estruturais, foi possível gerar gráficos em que mostram as frequências naturais do sistema (FRF) em três intervalos de frequências diferentes, assim, sendo possível comparar os valores da estrutura íntegra e com danos entre os dois métodos abordados.

### 5.1 Função de Resposta em Frequência no modelo de barra

Figura 14 – Representação do modelo de barra.



Fonte: Próprio autor.

Para simulação no modelo de barras será adotada a condição de contorno de estrutura engastada, localização dos danos, posição de impulso e leitura das respostas dinâmicas, conforme esquematizado na Figura 14. Para o FEM será considerado  $n = 40$  elementos e para o SEM,  $n = 8$  elementos. A identificação do dano será dada pela alteração no módulo de elasticidade da estrutura, sendo os graus de danos equivalente à  $D_1 = 10\%$ ,  $D_2 = 20\%$ ,  $D_3 = 30\%$ . A tabela a seguir, mostra as propriedades físicas da barra utilizada na simulação.

Tabela 1 – Propriedades físicas da barra

Propriedades	Valores	Unidades
Comprimento ( $L$ )	0.8	$m$
Modulo de Young ( $E$ )	$69.10^9$	$Pa$
Área de seção transversal ( $A$ )	$2.10^{-4}$	$m^2$
Densidade ( $\rho$ )	2700	$kg/m^3$

Segundo (LALLANE, 2007), em sistemas contínuos as frequências naturais de um modelo de barra engastada, podem ser obtidas com a seguinte expressão:

$$\omega_q = \frac{(2q - 1)\pi}{2L} \sqrt{\frac{E}{\rho}} \quad (5.1)$$

sendo  $q = 1, 2, 3, \dots$ , a sequência numérica da frequência a ser obtida.

Com intuito de validar os valores das frequências naturais obtidas através dos gráficos FRF e conseqüentemente os códigos, será realizada a comparação de valores com o método da equação (5.1).

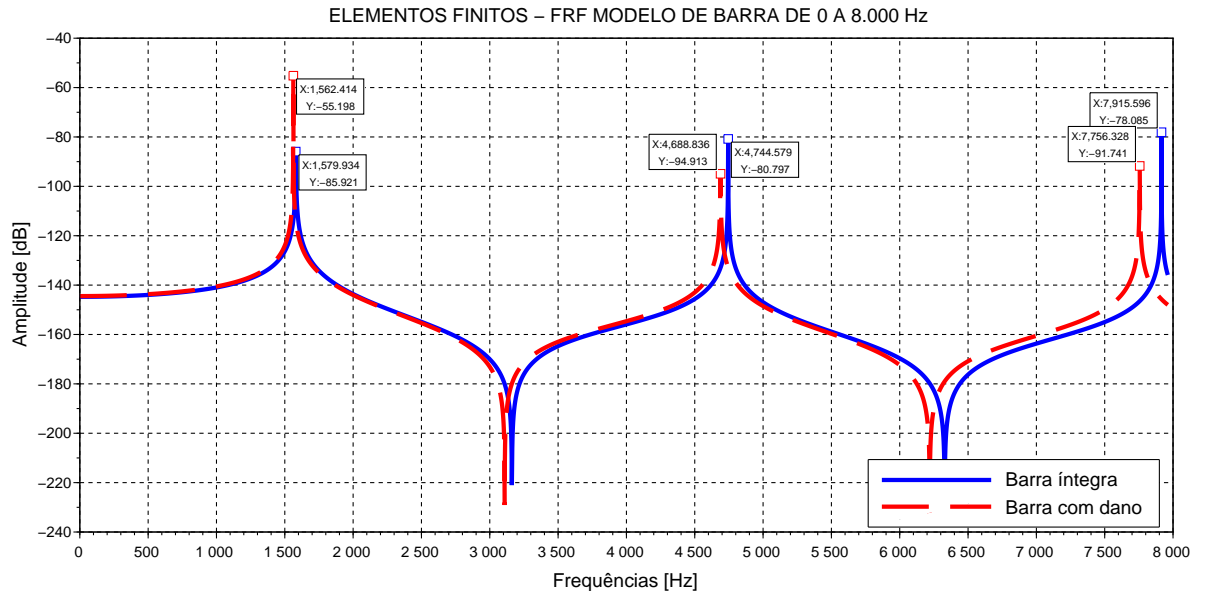
Tabela 2 – Frequências naturais no modelo de barras de 0 a 26.000 Hz

EQUAÇÃO 5.1	FINITOS $n = 40$		ESPECTRAIS $n = 8$	
	Sem danos	Com danos	Sem danos	Com danos
1.580,567	1.579,934	1.562,414	1.580,061	1.482,910
4.741,701	4.744,579	4.688,836	4.741,459	4.413,374
7.902,835	7.915,596	7.756,328	7.902,856	7.049,199
14.225,103	14.299,038	13.918,707	14.225,457	13.157,090
17.386,237	17.522,454	17.310,628	17.385,483	19.074,356
20.547,371	20.771,511	20.569,241	20.547,740	22.120,985
23.708,505	24.052,422	23.896,347	23.708,245	25.039,721

Os gráficos FRF do modelo de barra para o Método de Elementos Finitos e Método de Elementos Espectrais, com danos e sem danos, estão ilustrados a seguir.

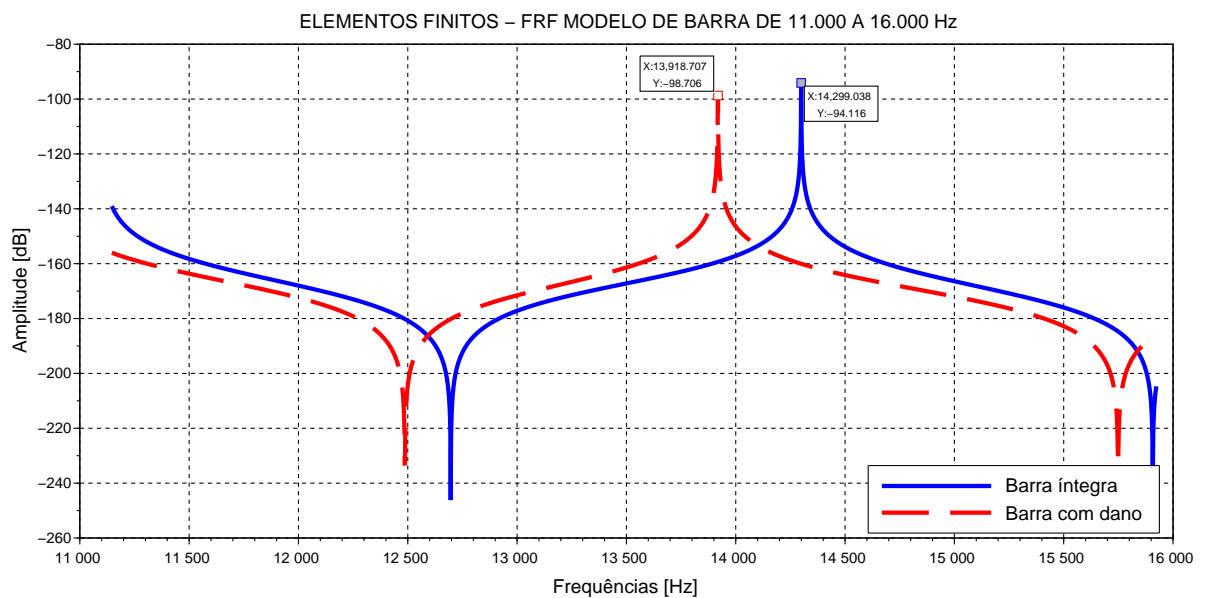
## 5.1.1 FRF modelo de barra pelo Método de Elementos Finitos

Figura 15 – FRF modelo de barra de 0 a 8.000 Hz por Elementos Finitos.



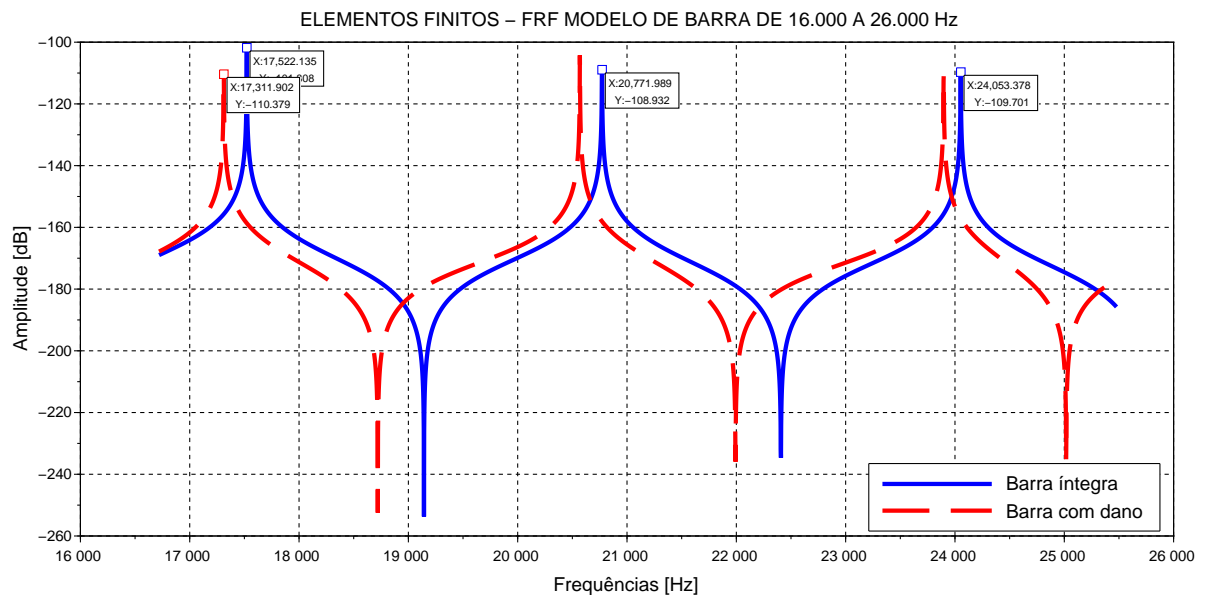
Fonte: Próprio autor.

Figura 16 – FRF modelo de barra de 11.000 a 16.000 Hz por Elementos Finitos.



Fonte: Próprio autor.

Figura 17 – FRF modelo de barra de 16.000 a 26.000 Hz por Elementos Finitos.



### 5.1.2 FRF modelo de barra pelo Método de Elementos Espectrais

Figura 18 – FRF modelo de barra de 0 a 8.000 Hz por Elementos Espectrais.

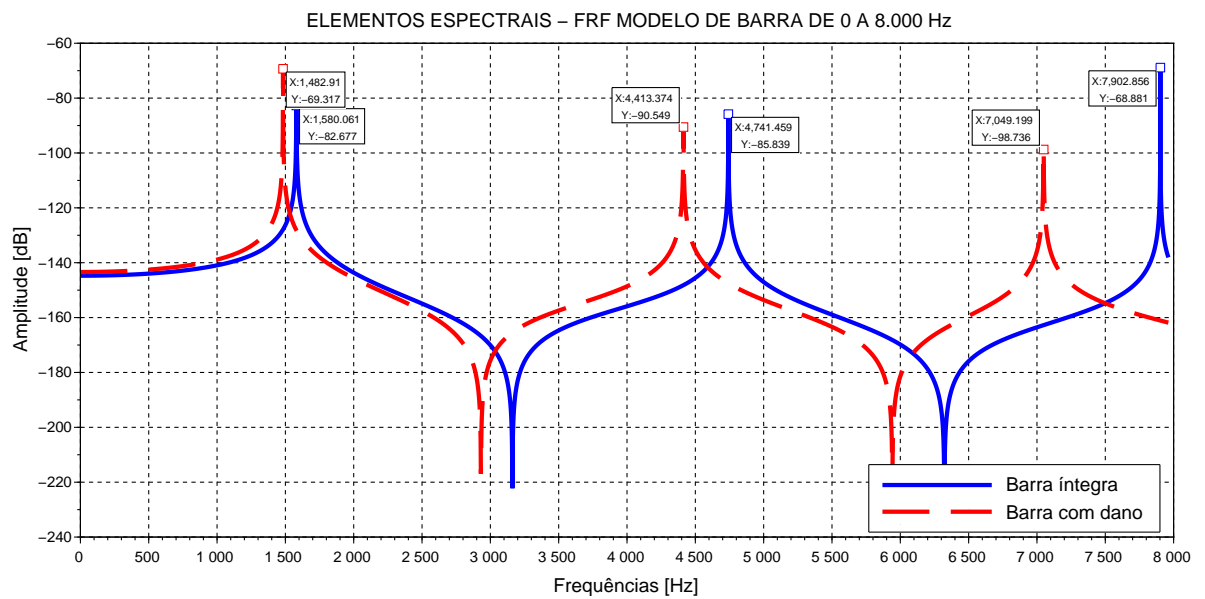
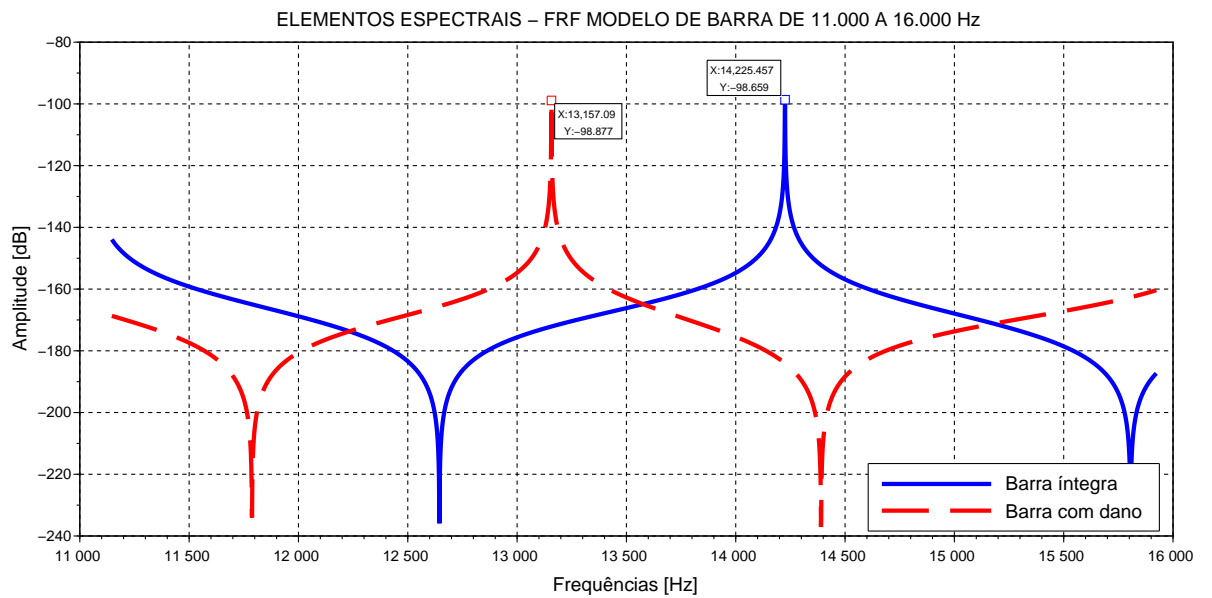
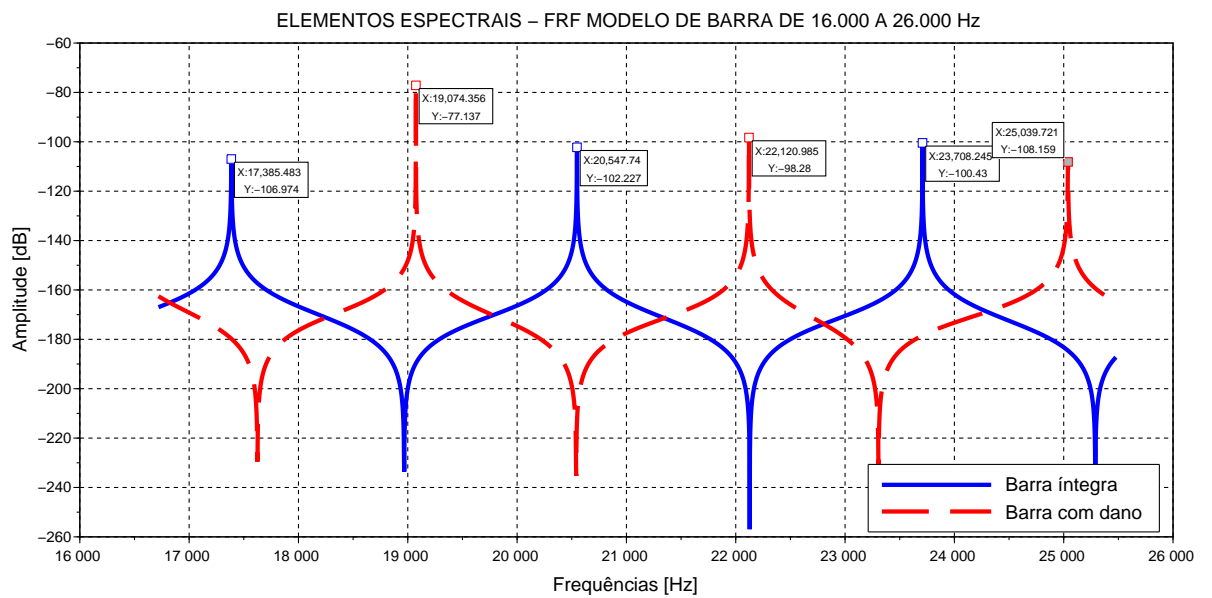


Figura 19 – FRF modelo de barra de 11.000 a 16.000 Hz por Elementos Espectrais.



Fonte: Próprio autor.

Figura 20 – FRF modelo de barra de 16.000 a 26.000 Hz por Elementos Espectrais.

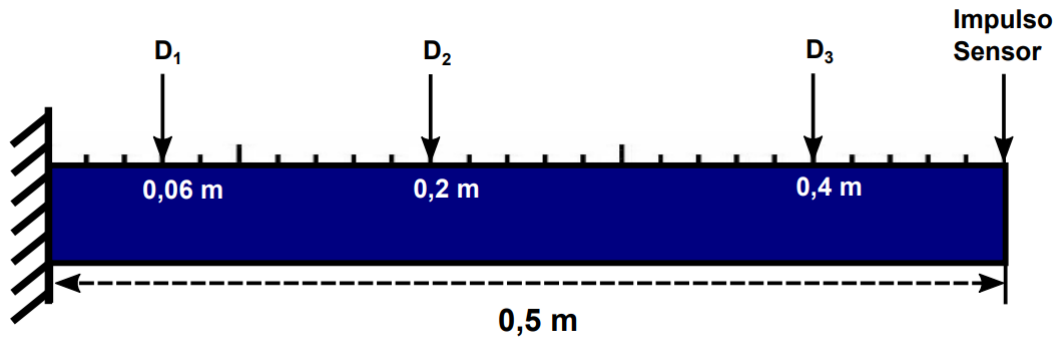


Fonte: Próprio autor.



## 5.2 Função de Resposta em Frequência no modelo de viga

Figura 21 – Representação do modelo de viga.



Fonte: Próprio autor.

Para simulação no modelo de vigas será adotada a condição de contorno de estrutura engastada, localização dos danos, posição de impulso e leitura das respostas dinâmicas, conforme esquematizado na Figura 21. Para o FEM será considerado  $n = 100$  elementos e para o SEM,  $n = 50$  elementos. A identificação do dano será dada pela alteração no módulo de elasticidade da estrutura, sendo os graus de danos equivalente à  $D_1 = 10\%$ ,  $D_2 = 20\%$ ,  $D_3 = 30\%$ . A tabela a seguir, mostra as propriedades físicas da viga utilizada na simulação.

Tabela 3 – Propriedades físicas da viga

Propriedades	Valores	Unidades
Comprimento ( $L$ )	0.5	$m$
Modulo de Young ( $E$ )	$69 \cdot 10^9$	$Pa$
Área de seção transversal ( $A$ )	$1,5 \cdot 10^{-4}$	$m^2$
Momento de Inércia ( $I$ )	$4,5 \cdot 10^{-4}$	$m^4$
Densidade ( $\rho$ )	2700	$kg/m^3$

Segundo (LALLANE, 2007), em sistemas contínuos as frequências naturais de um modelo de viga engastada, podem ser obtidas com a seguinte expressão:

$$\omega_q = \frac{X_q^2}{L^2} \sqrt{\frac{EI}{\rho A}} \quad (5.2)$$

$X_1^2$	$X_2^2$	$X_3^2$	$X_4^2$	$X_5^2$
3,516	22,03	61,69	120,9	199,8

sendo  $q = 1, 2, 3, 4$  e  $5$ , a sequência numérica da frequência a ser obtida.

Com intuito de validar os valores das frequências naturais obtidas através dos gráficos FRF e conseqüentemente os códigos, será realizada a comparação de valores com o método da equação (5.2).

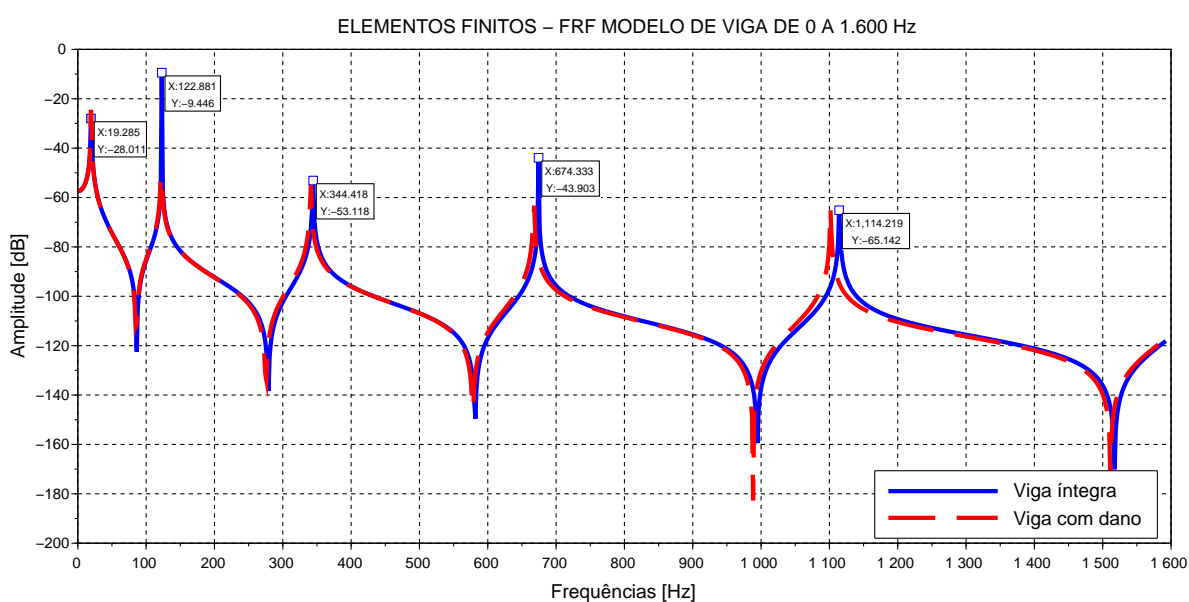
Tabela 4 – Frequências naturais no modelo de vigas de 0 a 4.800 Hz

<b>EQUAÇÃO 5.2</b>	<b>FINITOS <math>n = 100</math></b>		<b>ESPECTRAIS <math>n = 50</math></b>	
Sem danos	Sem danos	Com danos	Sem danos	Com danos
19,608	19,285	19,285	19,285	19,285
122,862	122,881	122,881	122,881	119,694
344,047	344,418	341,231	344,418	333,262
674,263	674,333	667,958	674,333	665,207
1.114,292	1.114,219	1.101,469	1.114,219	1.080,75
-	1.665,296	1.660,610	1.665,296	1.648,894
-	2.325,271	2.311,994	2.325,271	2.278,409
-	3.095,612	3.062,298	3.095,771	2.975,268
-	3.977,544	3.940,724	3.977,544	3.876,169

Os gráficos FRF do modelo de viga para o Método de Elementos Finitos e Método de Elementos Espectrais, com danos e sem danos, estão ilustrados a seguir.

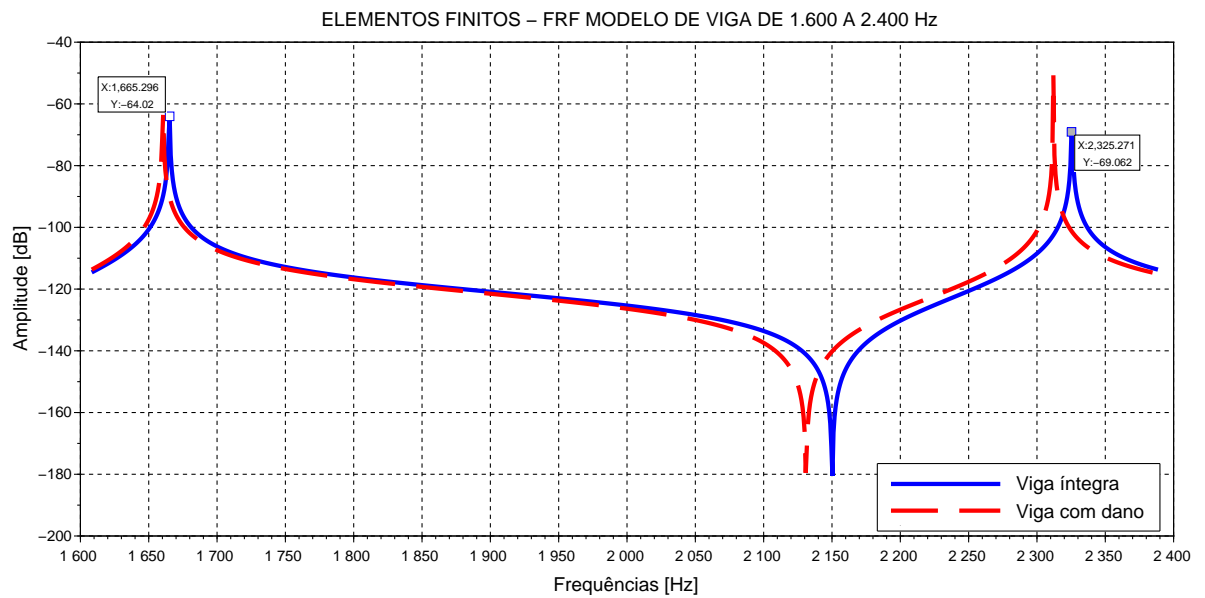
### 5.2.1 FRF modelo de viga pelo Método de Elementos Finitos

Figura 22 – FRF modelo de viga de 0 a 1.600 Hz por Elementos Finitos.



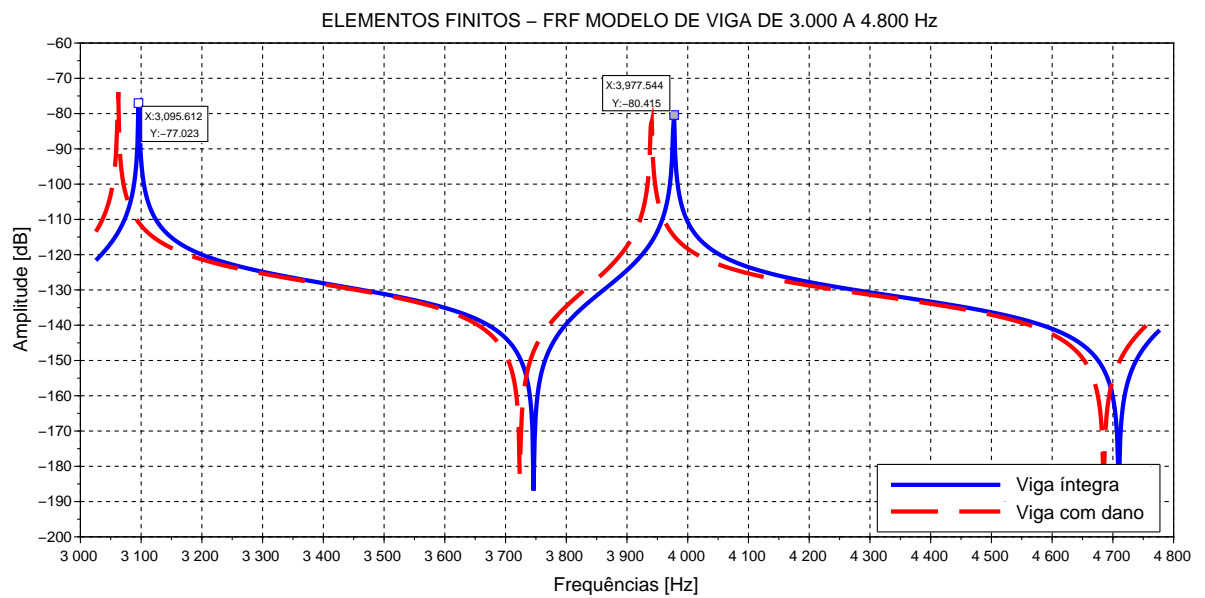
Fonte: Próprio autor.

Figura 23 – FRF modelo de viga de 1.600 a 2.400 Hz por Elementos Finitos.



Fonte: Próprio autor.

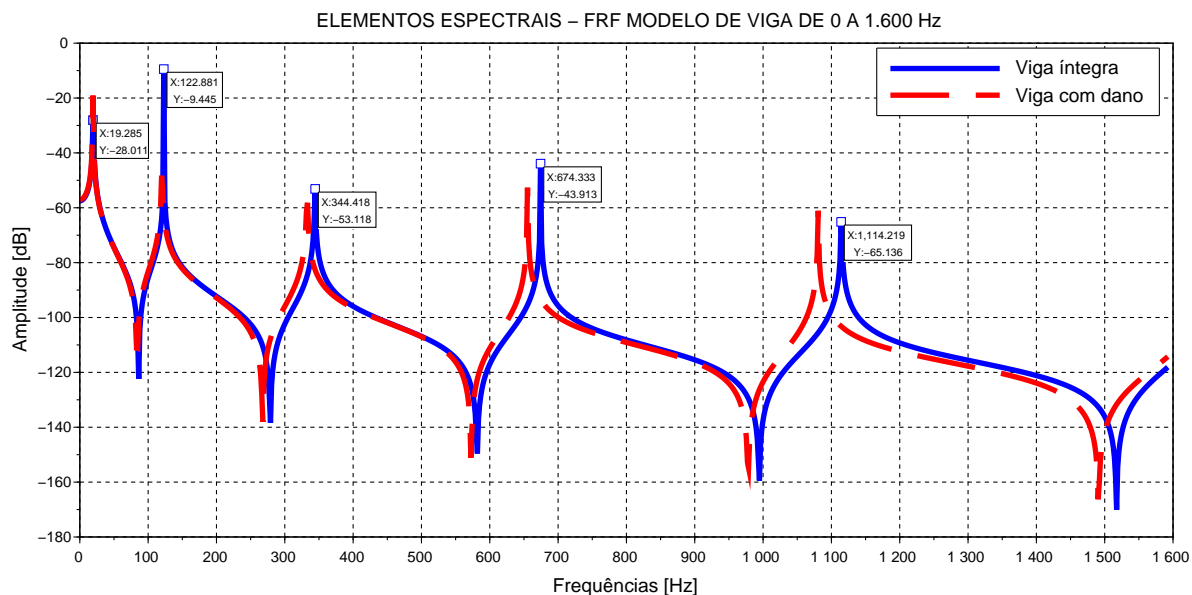
Figura 24 – FRF modelo de viga de 3.000 a 4.800 Hz por Elementos Finitos.



Fonte: Próprio autor.

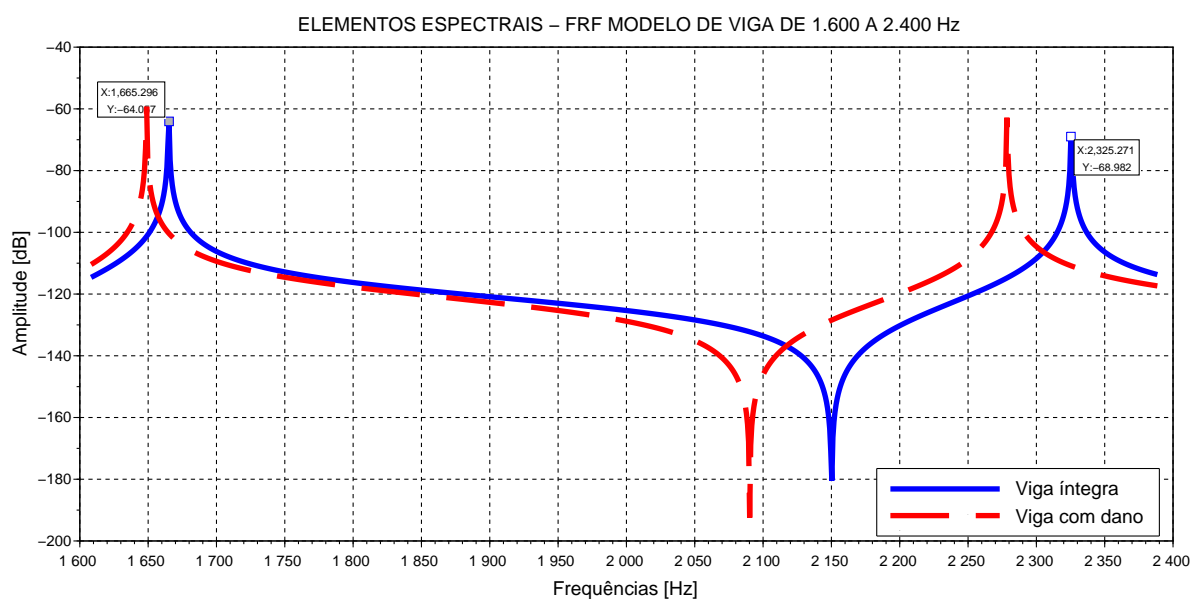
## 5.2.2 FRF modelo de viga pelo Método de Elementos Espectrais

Figura 25 – FRF modelo de viga de 0 a 1.600 Hz por Elementos Espectrais.



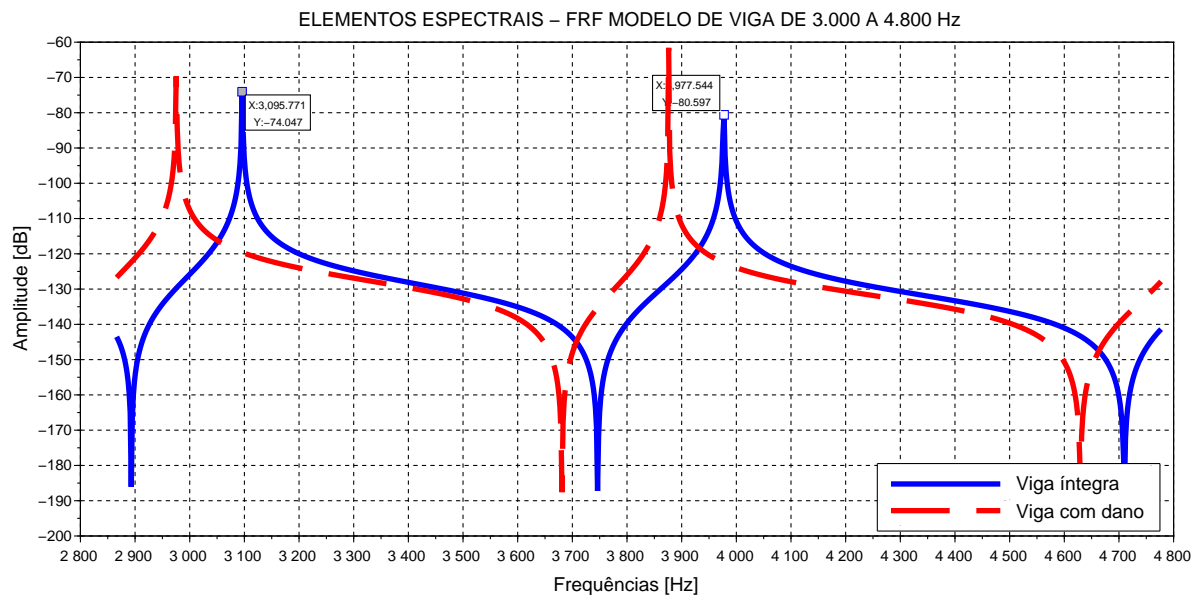
Fonte: Próprio autor.

Figura 26 – FRF modelo de viga de 1.600 a 2.400 Hz por Elementos Espectrais.



Fonte: Próprio autor.

Figura 27 – FRF modelo de viga de 3.000 a 4.800 Hz por Elementos Espectrais.



Fonte: Próprio autor.

### 5.2.3 Comparação entre convergência da malha

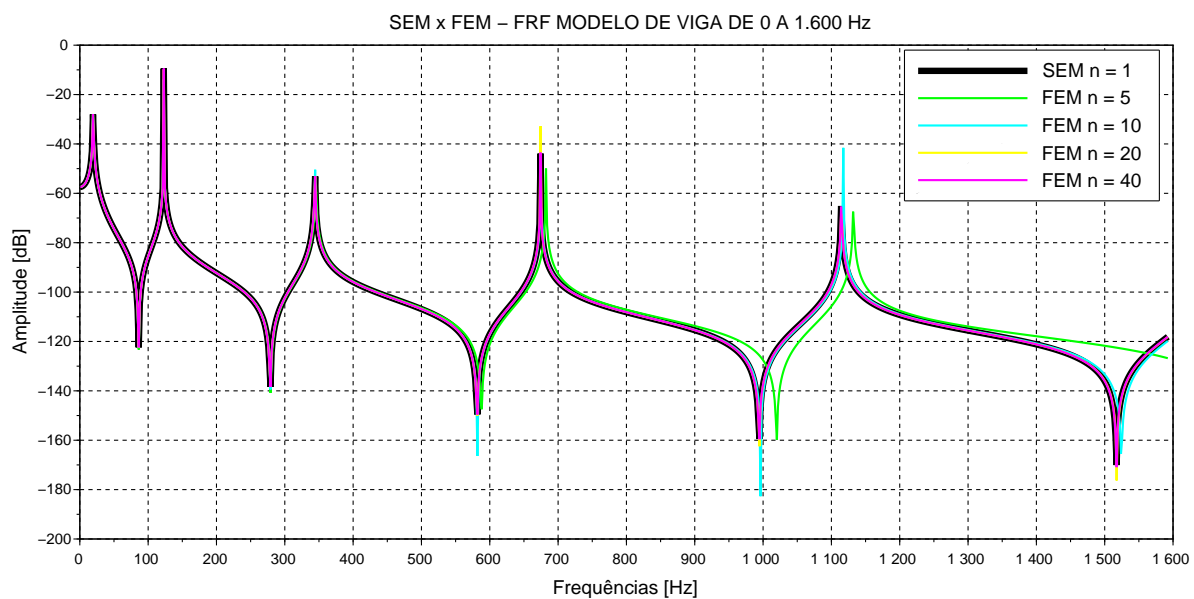
Analisando a Tabela 2 e Tabela 4, percebe-se que no FEM foi utilizada uma malha mais refinada, ou seja, um maior número de elementos. Conforme mencionado no primeiro capítulo, as matrizes espectrais são escritas no domínio da frequência e possuem solução exata. Com isso, no SEM uma estrutura pode ser modelada com apenas um elemento, desde que não haja descontinuidades e danos ao longo do seu corpo. Esta vantagem permite que códigos e futuros *softwares* que envolva o SEM, ocupem uma memória computacional menor e gastem menos tempo de processamento para alcançar uma solução.

Com intuito de evidenciar a convergência da malha com maior eficácia do SEM, a Figura 28 ilustra as FRF de ambos os métodos e a variação das frequências naturais em relação ao refino da malha. Foi considerado apenas um elemento para o SEM, na modelagem de uma viga íntegra com as mesmas propriedades físicas da Tabela 3. Vale lembrar, que os valores das frequências naturais do SEM estão validadas pela equação 5.2, conforme valores da Tabela 5.

Tabela 5 – Comparativo de frequências naturais em relação ao refino da malha.

SEM $n = 1$	FEM $n = 5$	FEM $n = 10$	FEM $n = 20$	FEM $n = 40$
19,285	19,285	19,285	19,285	19,285
122,881	122,881	122,881	122,881	122,881
344,418	346,012	344,418	344,418	344,418
674,333	682,302	674,333	674,333	674,333
1.114,219	1.131,751	1.117,407	1.114,219	1.114,219

Figura 28 – Comparativo FRF em relação ao refino da malha.



Fonte: Próprio autor.

Através dos resultados obtidos, percebe-se que são necessários vinte elementos finitos para obter a mesma precisão de um elemento espectral.



## 6 Considerações finais

O estudo SHM mostra-se de grande importância, visto que estruturas civis e equipamentos mecânicos, estão muitas vezes relacionados a segurança de pessoas. Desabamento de uma ponte, desabamento de um prédio, rompimento de uma barragem, queda de transportes aéreos, entre outros desastres que podem ser evitados com identificação precoce de danos nos componentes críticos. Os gráficos FRF abordados, mostram um exemplo de modificações nas frequências devido a presença de danos, um dos principais fenômenos a ser levado em consideração no monitoramento da integridade estrutural.

Uma característica comum no modelo de barra é que as frequências naturais são observadas em valores mais elevados em comparação ao modelo de viga. Analisando a Tabela 2 e Tabela 4, nota-se que as frequências naturais obtidas no FEM e SEM estão próximas aos valores obtidos pelos métodos das equações 5.1 e 5.2, assim, mostrando a assertividade dos códigos elaborados neste trabalho. Analisando também os gráficos FRF, observa-se que a variação de frequência devido a presença de danos estruturais são mais evidentes em altas frequências.

Com os resultados é possível concluir que existem vantagens do Método de Elementos Espectrais. Para o FEM é necessário a divisão da malha estrutural em muito mais elementos para alcançar resultados próximos ao SEM. No modelo de barra, enquanto foram considerados  $n = 40$  elementos finitos, em elementos espectrais foram considerados apenas  $n = 8$ . Para o modelo de viga foram considerados metade de elementos espectrais em relação à elementos finitos, com  $n = 100$  para o FEM e  $n = 50$  para o SEM. Mesmo utilizando uma malha mais refinada no Método de Elementos Finitos, foi no SEM que as frequências naturais obtiveram os valores mais próximos ao método teórico representado pelas equações 5.1 e 5.2, evidente nos resultados da Tabela 2. Além disso, conclui-se na Figura 28 e Tabela 5, que um elemento espectral equivale a precisão de vinte elementos finitos para obtenção das cinco primeiras frequências naturais do modelo de viga abordado. Portanto, o Método de Elementos Espectrais mostra-se mais eficaz, utilizando menos memória computacional para solucionar um mesmo problema.

O SEM é um método recente em comparação ao FEM e apresenta formulações mais complexas em termos matemáticos, porém mostra-se um método promissor na implementação de *softwares*, visto a sua gama de aplicações e também devido à diminuição dos custos computacionais de modelagens e simulações. Assim como os softwares *SolidWorks*, *Inventor*, *ANSYS*, entre outros são fundamentados no FEM, logo veremos softwares baseados no SEM.





## 7 Sugestões para trabalhos futuros

Durante as pesquisas realizadas para elaboração deste trabalho foram encontradas diversas outras aplicações, já abordadas no desenvolvimento deste artigo, que podem ampliar o entendimento do Método de Elementos Espectrais. A seguir são apresentadas algumas ideias para trabalhos futuros.

- Realizar o estudo experimental de SHM no modelo de barra e viga para comparação com os resultados teóricos deste trabalho;
- Implementar os algoritmos do SEM para localizar e quantificar a severidade dos danos na estrutura através de gráficos;
- Implementar o SEM na modelagem de estruturas flexíveis mais complexas como placas e treliças;



# Referências

ARAÚJO DOS SANTOS, J. V. et al. A Damage identification numerical model based on the sensitivity of orthogonality conditions and Least squares techniques. *Computers and Structures*, Elmsford, v. 78, p. 283-291, 2000.

BALACHANDRAN, Balakumar; MAGRAB, Edward B. *Vibrações Mecânicas*. Tradução da 2. ed. americana, Austrália: Cengage Learning, 2009.

CARDEN, E. P.; FANNING, P. Vibration based condition monitoring: a review. *Structural Health Monitoring*, Newbury Park, v. 3, n. 5, p. 355-377, 2004.

CONCEIÇÃO, S. M. Métodos de identificação e redução de modelos para atenuação de vibrações em estruturas inteligentes. 2012. 85 f. Dissertação (Mestrado -Engenharia Mecânica) – Faculdade de Engenharia, Universidade Estadual Paulista, Ilha Solteira, 2012.

DOEBLING, S.W.; FARRAR, C.F.; PRIME, M.B.; SHEVITS, D.W. Damage identification and health monitoring of structural and mechanical systems from changes in their vibration characteristics: a literature review, Los Alamos National Laboratory Report LA13070-MS, USA, 1996.

DOYLE, J. F. Wave propagation in structure: spectral analysis using fast discrete fourier transforms. 2nd ed. Springer-Verlag, New York, USA, 1997.

FERREIRA, A. SHM (Structural Health Monitoring) na Indústria 4.0. KOT Engenharia, 2020. Disponível em: <<https://kotengenharia.com.br/shm-structural-health-monitoring-na-industria-4-0/>>. Acesso em: 26 de fevereiro de 2022.

FILHO, AVELINO ALVES, *Elementos Finitos a Base da Tecnologia CAE*, ed. Érica, 7 edição, 2002.

FRANCO, V. R. Monitoramento da Integridade em Estruturas Aeronáuticas. 2009. 202 p. Dissertação (Mestrado em Engenharia Mecânica), Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira, Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", Ilha Solteira, 2009.

GIURGIUTIU, V.; ZAGRAI, A. Damage detection in thin plates and aerospace structures with the electro-mechanical impedance method. *Structural Health Monitoring*, London, v. 4, n. 2, p. 99-118, 2005. doi: 10.1177/1475921705049752.

KRIVTSOVA, I.; LEBEDEV I.; SUKHOPAROV M.; BAZHAYEV, N.; ZIKRATOV, I.; OMETOV, A.; ANDREEV, S.; MASEK, P.; FUJDIK, R.; HOSEK, J. Implementing a Broadcast Storm Attack on a Mission-Critical Wireless Sensor Network. ResearchGate, 2016. Disponível em: <<https://www.researchgate.net/figure/Example-ad-hoc-WSN-deployment-for-structural-health-monitoringfig5301711045>>. Acesso em: 25 de

fevereiro de 2022

LATHI, B.P. Sinais e sistemas lineares; tradução Gustavo Guimarães Parma. 2. ed. Porto Alegre: Bookman, 2007.

LALANNE M. ; BERTHIER, P. . H. J. Mechanical Vibrations for Engineers. 1. ed. [S.l.]: John Wiley and Sons, 1983.

LEE, U. Spectral Element Method in Structural Dynamics. [S.l.]: Publication Services, Inc, 2009.

LOCKHEED C-5 GALAXY. Stringfixer, 2009. Disponível em: <<https://stringfixer.com/pt/LockheedC-5Galaxy>>. Acesso em: 25 de fevereiro de 2022.

MAIA, N. M. M. et al. Damage detection in structures: from mode shape to frequency response function methods. Mechanical Systems and Signal Processing, London, 2003.

MIRLISENNA, G. Método dos Elementos Finitos: o que é?. Blog ESSS, 2016. Disponível em: <<https://www.esss.co/blog/metodo-dos-elementos-finitos-o-que-e/>>. Acesso em: 25 de fevereiro de 2022.

PARK, G.; CUDNEY, H.; INMAN, D. J. Feasibility of using impedance-based damage assessment for pipeline systems. Earthquake Engineering and Structural Dynamics Journal, West Sussex, v. 30, n. 10, p. 1463–1474, 2001.

PARK, G.; CUDNEY, H.; INMAN, D. J. Impedance-based health monitoring technique for civil structures, Structural Health Monitoring, USA, v. . . . , n. . . . , p. 523–532, 1999.

PEPPER, D. W.; HEINRICH, J. C. The Finite Element Method. [S.l.]: Taylor e Francis Group, 2006.

RAO, SINGIRESU S., Vibrações Mecânicas, São Paulo, Pearson Prentice Hall, 2008.

RIZOS, P. F.; ASPRAGATHOS, N.; DIMAROGONAS, A. D. Identification of crack location and magnitude in a cantilever beam from the vibration modes. Journal of Sound and Vibration, London, 1990.

SANTOS, J.V.A.; SOARES, C.M.M.; SOARES, C.A.M.; MAIA,N.M.M. Structural damage identification in composite structures using FRF data. Composite Structures, USA, v. 67, n. 2, p. 239–249, 2005.

SANTOS, J.V.A.; SOARES, C.M.M.; SOARES, C.A.M.; PINA, H.L.G. Damage identification of composite structures: a numerical model. Mechanics of Composite Materials and Structures, USA, v. 6, p. 363–379, 1999.

SILVA, S.; DIAS JÚNIOR, M.; LOPES JÚNIOR, V. Structural health monitoring

in smart structures through time series analysis. *Structural Health Monitoring, USA*, v. 7, n. 3, p. 231-244, 2008.

SUN, F. et al. Truss structure integrity identification using PZT sensor-actuator. *Journal of Intelligent Material Systems and Structure, London*, v. 6, n. 1, p. 134-139, 1995.

TANABE, J.A. Estudo sobre o desabamento do prédio em Miami Beach. PET Engenharia civil UEM, 2021. Disponível em: <<https://petciviluem.com/2021/07/09/estudo-sobre-o-desabamento-do-predio-em-miami-beach/>>. Acesso em: 25 de fevereiro de 2022.



# Apêndices





# A Código do modelo de Barra por Elementos Finitos

```

//Elementos finitos - Modelo de Barra
clc
clear
warning off
//Dados de entrada:
n=40 //n° de elementos
L=0.8/n; //comprimento da barra [m]
E=69e9; //modulo de Young [Pa]
rho=2700; //densidade [kg/m^3]
A=0.02*0.01; //área de secção transversal [m^2]

//Implementação do dano [%]:
D1=0.2;
D2=0.3;
D3=0.4;
E_bar=zeros(n,1)
E_bar(1:9)=E;
E_bar(10)=E*(1-D1);
E_bar(11:19)=E;
E_bar(20)=E*(1-D2);
E_bar(21:34)=E;
E_bar(35)=E*(1-D3);
E_bar(36:n)=E;

//Definição das matrizes:
n_gdl=zeros(n,2);
for p=1:n
n_gdl(p,:)= [p p+1];
end

klocal=((E*A)/L)*[1 -1;-1 1]; //matriz de rigidez local
klocal_bar=(A/L)*[1 -1;-1 1]; // matriz de rigidez local com dano
mlocal=((rho*A*L)/6)*[2 1;1 2] //matriz de massa local
kglobal=zeros(n+1,n+1); //matriz de rigidez global

```

```

kglobal_bar=zeros(n+1,n+1); //matriz de rigidez global com dano
mglobal=zeros(n+1,n+1); //matriz de massa global

for q=1:n
elemento_gdl=n_gdl(q,:);
kglobal(elemento_gdl,elemento_gdl)=kglobal(elemento_gdl,elemento_gdl)+klocal;
kglobal_bar(elemento_gdl,elemento_gdl)=kglobal_bar(elemento_gdl,elemento_gdl)
+E_bar(q)*klocal_bar;
mglobal(elemento_gdl,elemento_gdl)=mglobal(elemento_gdl,elemento_gdl)+mlocal;
end

//Condição de contorno (Engastada):
keng=kglobal(2:n+1,2:n+1);
keng_bar=kglobal_bar(2:n+1,2:n+1);
meng=mglobal(2:n+1,2:n+1);

//Intervalo de frequências:
//w=linspace(0,50000,5000); // [0-8000 Hz]
//w=linspace(70000,100000,5000); // [11000-16000 Hz]
w=linspace(105000,160000,5000); //[16000-26000 Hz]
f=w/6.28 // conversão de rad para Hz

for pp=1:length(w)
G(:, :, pp)=inv(keng-(w(pp).^2)*meng);
G_bar(:, :, pp)=inv(keng_bar-(w(pp).^2)*meng);
end

//Posição do impulso e leitura:
G1=squeeze(G(40,40,:)); //posição de impulso e sensor ao final da barra
G1_bar=squeeze(G_bar(40,40,:));

//Plot FRF:
figure()
scf()
xgrid
plot(f,20*log10(abs(G1)), 'linewidth',4);
plot(f,20*log10(abs(G1_bar)), '--r', 'linewidth',4);
title('ELEMENTOS FINITOS - FRF MODELO DE BARRA DE 16.000 A 25.000 Hz', 'fontsize', 3);
xlabel('Frequências [Hz]', 'fontsize', 3);

```

```
ylabel('Amplitude [dB]','fontsize',3);  
legend('Barra íntegra','Barra com dano',4);
```



## B Código do modelo de Barra por Elementos Espectrais

```
//Elementos espectrais - Modelo de Barra
clc
clear
warning off
//Dados de entrada:
n=8 //n° de elementos
L=0.8/n; //comprimento da barra [m]
E=69e9; //módulo de Young [Pa]
rho=2700; //densidade [kg/m^3]
A=0.02*0.01; //área de secção transversal [m^2]
im=sqrt(-1); //n° imaginário

//Implementação do dano [%]:
D1=0.2;
D2=0.3;
D3=0.4;
E_bar=zeros(n,1)
E_bar(1)=E;
E_bar(2)=E*(1-D1);
E_bar(3)=E;
E_bar(4)=E*(1-D2);
E_bar(5:6)=E;
E_bar(7)=E*(1-D3);
E_bar(8)=E;

//Intervalo de frequências:
//w=linspace(1,50000,5000); // [0-8000 Hz]
//w=linspace(70000,100000,5000); // [11000-16000 Hz]
w=linspace(105000,160000,5000); // [16000-26000 Hz]
f=w/6.28; //conversão de rad para Hz

//Definição das matrizes:
Sg=zeros(n,n,length(w)); //matriz espectral global
```

```

Sg_bar=zeros(n,n,length(w)); //matriz espectral global com dano

for p=1:length(w)
S=zeros(n+1,n+1); //matriz espectral local
S_bar=zeros(n+1,n+1); //matriz espectral local com dano

for q=1:n
k=w(p)*sqrt(rho/E); //n° de onda
k_bar=w(p)*sqrt(rho/E_bar(q)); //n° de onda com dano
kl=k;
kr=-kl;
kl_bar=k_bar;
kr_bar=-kl_bar;
n_gdl(q,:)= [q q+1];
el_gdl=n_gdl(q,:);

H=[1 1;exp(-im*kl*L) exp(-im*kr*L)]; //matriz deslocamento axial
H_bar=[1 1;exp(-im*kl_bar*L) exp(-im*kr_bar*L)]; //matriz deslocamento axial com dano

N=(E*A)*[im*kl im*kr;exp(-im*kl*L)*(-im*kl) exp(-im*kr*L)*(-im*kr)];
//matriz de força axial
N_bar=(E_bar(q)*A)*[im*kl_bar im*kr_bar;
exp(-im*kl_bar*L)*(-im*kl_bar) exp(-im*kr_bar*L)*(-im*kr_bar)];
//matriz de força axial com dano

S1=(N*inv(H)); //matriz espectral
S1_bar=(N_bar*inv(H_bar)); //matriz espectral com dano
S(el_gdl,el_gdl)=S(el_gdl,el_gdl)+(S1);
S_bar(el_gdl,el_gdl)=S_bar(el_gdl,el_gdl)+(S1_bar);
end

//Condição de contorno (Engastada):
S3=S(2:n+1,2:n+1);
Sg(:, :, p)=Sg(:, :, p)+inv(S3);
S3_bar=S_bar(2:n+1,2:n+1);
Sg_bar(:, :, p)=Sg_bar(:, :, p)+inv(S3_bar);

end

```

---

```
//Posição do impulso e leitura:
G1=squeeze(Sg(8,8,:)); //posição de impulso e sensor ao final
G1_bar=squeeze(Sg_bar(8,8,:));

//Plot FRF :
figure()
scf()
xgrid
plot(f,20*log10(abs(G1)), 'linewidth',4);
plot(f,20*log10(abs(G1_bar)), '--r', 'linewidth',4);
title('ELEMENTOS ESPECTRAIS - FRF MODELO DE BARRA DE 16.000 A 26.000 Hz',
'fontsize' ,3);
xlabel('Frequências [Hz]', 'fontsize' ,3);
ylabel('Amplitude [dB]', 'fontsize' ,3);
legend('Barra íntegra', 'Barra com dano', 4);
```





## C Código do modelo de Viga por Elementos Finitos

```

//Elementos Finitos - Modelo de Viga
clc
clear
warning off
//Dados de entrada:
n=100 //n° de elementos
L=0.5; //comprimento [m]
E=69e9 //módulo de Young [Pa]
rho=2700; //densidade [kg/m^3]
b=0.025; //base da seção transversal
h=0.006; //altura da seção transversal
A=b*h; //área da seção transversal
I=(b*h^3)/12; //momento de inércia
l=L/n;

//Definição dos graus de liberdade:
no_gdl=zeros(n,2)
for p=1:n
no_gdl(p,:)=[p p+1];
end

//Implementação do dano [%]:
D1=0.1;
D2=0.2;
D3=0.3;
E_bar=zeros(n,1);
E_bar(1:10)=69e9;
E_bar(11:12)=E*(1-D1);
E_bar(13:38)=69e9;
E_bar(39:40)=E*(1-D2);
E_bar(41:78)=69e9;
E_bar(79:80)=E*(1-D3);
E_bar(81:n)=69e9;

```

```

//Definição das matrizes:
kglobal=zeros(2*n+2,2*n+2); //matriz de rigidez global
kglobal_bar=zeros(2*n+2,2*n+2);
mglobal=zeros(2*n+2,2*n+2); //matriz de massa global
klocal_bar=(I/l^3)*[12 6*l -12 6*l;6*l 4*l^2 -6*l 2*l^2;-12 -6*l 12 -6*l;
6*l 2*l^2 -6*l 4*l^2]; //matriz de rigidez local com dano
klocal=((E*I)/l^3)*[12 6*l -12 6*l;6*l 4*l^2 -6*l 2*l^2;-12 -6*l 12 -6*l;
6*l 2*l^2 -6*l 4*l^2]; //matriz de rigidez local
mlocal=((rho*A*l)/420)*[156 22*l 54 -13*l;22*l 4*l^2 13*l -3*l^2;54 13*l 156 -22*l;
-13*l -3*l^2 -22*l 4*l^2] //matriz de massa local

for q=1:n
gdl=no_gdl(q,:)
elemento_gdl=[2*gdl(1)-1 2*gdl(1) 2*gdl(2)-1 2*gdl(2)];
kglobal(elemento_gdl,elemento_gdl)=kglobal(elemento_gdl,elemento_gdl)+klocal;
kglobal_bar(elemento_gdl,elemento_gdl)=kglobal_bar(elemento_gdl,elemento_gdl)
+E_bar(q)*klocal_bar;
mglobal(elemento_gdl,elemento_gdl)=mglobal(elemento_gdl,elemento_gdl)+mlocal;
end

//Condições de contorno (Engastada):
keng=kglobal(3:2*n+2,3:2*n+2);
keng_bar=kglobal_bar(3:2*n+2,3:2*n+2);
meng=mglobal(3:2*n+2,3:2*n+2);

//Intervalo de frequências:
//w=linspace(1,10000,1000); // [0 - 1600 Hz]
w=linspace(10100,15000,1000); // [1600 - 2400 Hz]
//w=linspace(19000,30000,1000); // [3000 - 4800 Hz]
f=w/6.28; //conversão de rad para Hz

for pp=1:length(w)
G(:, :, pp)=inv(keng-(w(pp).^2)*meng);
G_bar(:, :, pp)=inv(keng_bar-(w(pp).^2)*meng);
end

//Posição do impulso e leitura:
G1=squeeze(G(199,199,:)) //posição do sensor e impulso ao final da viga
G1_bar=squeeze(G_bar(199,199,:));

```

---

```
//Plot FRF:
figure()
scf()
xgrid
plot(f,20*log10(abs(G1)), 'linewidth',4);
plot(f,20*log10(abs(G1_bar)), '--r', 'linewidth',4);
title('ELEMENTOS FINITOS - FRF MODELO DE VIGA DE 3.000 A 4.800 Hz', 'fontsize' ,3)
legend(['Viga íntegra'; 'Viga com dano'], [4]);
xlabel('Frequências [Hz]', 'fontsize' ,3);
ylabel('Amplitude [dB]', 'fontsize' ,3);
```



## D Código do modelo de Viga por Elementos Espectrais

```

//Elementos Espectrais - Modelo de Viga
clc
clear
warning off
//Dados de entrada:
n=50 //n° de elementos
L=0.5; //comprimento [m]
E=69e9 //módulo de Young [Pa]
rho=2700; //densidade [kg/m^3]
b=0.025; //base da seção transversal [m]
h=0.006; //altura da seção transversal [m]
A=b*h; //área da seção transversal [m^2]
I=(b*h^3)/12; //momento de inércia [m^4]
im=sqrt(-1); //n° imaginário

//Implementação do dano [%]:
D1=0.2;
D2=0.3;
D3=0.4;
E_bar=zeros(n,1);
E_bar(1:4)=E;
E_bar(5:6)=E*(1-D1);
E_bar(7:18)=E;
E_bar(19:20)=E*(1-D2);
E_bar(21:38)=E;
E_bar(39:40)=E*(1-D3);
E_bar(41:n)=E;

//Intervalo de frequências:
//w=linspace(1,10000,1000); // [0 - 1600 Hz]
//w=linspace(10100,15000,1000); // [1600 - 2400 Hz]
w=linspace(18000,30000,1000); // [3000 - 4800 Hz]
f=w/6.28; //conversão de rad para Hz

```

```

//Definição das matrizes:
Sg=zeros(2*n,2*n,length(w));
Sg_bar=Sg;

for p=1:length(w)
S=zeros(2*n+2,2*n+2); //matriz espectral local
S_bar=S; //matriz espectral local com dano
for q=1:n
kf=sqrt(w(p))*((rho*A)/(E*I))^0.25; //nº de onda
kf_bar=sqrt(w(p))*((rho*A)/(E_bar(q)*I))^0.25; //nº de onda com dano
k1=kf;
k1_bar=kf_bar;
k2=-k1;
k2_bar=-k1_bar;
k3=im*kf;
k3_bar=im*kf_bar;
k4=-k3;
k4_bar=-k3_bar;
l=L/n;
n_gdl(q,:)= [2*q-1 2*q 2*q+1 2*q+2];
el_gdl=n_gdl(q,:);

H=[1 1 1 1;-im*k1 -im*k2 -im*k3 -im*k4;
exp(-im*k1*l) exp(-im*k2*l) exp(-im*k3*l) exp(-im*k4*l);
-im*k1*exp(-im*k1*l) -im*k2*exp(-im*k2*l) -im*k3*exp(-im*k3*l) -im*k4*exp(-im*k4*l)];
//matriz deslocamento axial

H_bar=[1 1 1 1;-im*k1_bar -im*k2_bar -im*k3_bar -im*k4_bar;
exp(-im*k1_bar*l) exp(-im*k2_bar*l) exp(-im*k3_bar*l) exp(-im*k4_bar*l);
-im*k1_bar*exp(-im*k1_bar*l) -im*k2_bar*exp(-im*k2_bar*l)
-im*k3_bar*exp(-im*k3_bar*l) -im*k4_bar*exp(-im*k4_bar*l)];
//matriz deslocamento axial com dano

N=(E*I)*[-im*k1^3 -im*k2^3 -im*k3^3 -im*k4^3;-k1^2 -k2^2 -k3^2 -k4^2;
im*k1^3*exp(-im*k1*l) im*k2^3*exp(-im*k2*l) im*k3^3*exp(-im*k3*l) im*k4^3*exp(-im*k4*l);
k1^2*exp(-im*k1*l) k2^2*exp(-im*k2*l) k3^2*exp(-im*k3*l) k4^2*exp(-im*k4*l)];
//matriz de força axial

```

---

```

N_bar=(E_bar(q)*I)*[-im*k1_bar^3 -im*k2_bar^3 -im*k3_bar^3 -im*k4_bar^3;
-k1_bar^2 -k2_bar^2 -k3_bar^2 -k4_bar^2;
im*k1_bar^3*exp(-im*k1_bar*1) im*k2_bar^3*exp(-im*k2_bar*1)
im*k3_bar^3*exp(-im*k3_bar*1) im*k4_bar^3*exp(-im*k4_bar*1);
k1_bar^2*exp(-im*k1_bar*1) k2_bar^2*exp(-im*k2_bar*1)
k3_bar^2*exp(-im*k3_bar*1) k4_bar^2*exp(-im*k4_bar*1)]
//matriz força axial com dano

S1=(N*inv(H)); //matriz espectral
S1_bar=(N_bar*inv(H_bar)); //matriz espectral com dano
S(el_gdl,el_gdl)=S(el_gdl,el_gdl)+(S1);
S_bar(el_gdl,el_gdl)=S_bar(el_gdl,el_gdl)+(S1_bar);
end

//Condições de contorno (Engastada):
S3=S(3:2*n+2,3:2*n+2);
S3_bar=S_bar(3:2*n+2,3:2*n+2);
Sg(:, :, p)=Sg(:, :, p)+inv(S3);
Sg_bar(:, :, p)=Sg_bar(:, :, p)+inv(S3_bar);

//Posição do impulso e leitura:
G1=squeeze((Sg(99,99,:))); //posição do sensor e impulso ao final
G1_bar=squeeze((Sg_bar(99,99,:)));
end

//Plot FRF:
figure()
scf()
xgrid
plot(f,20*log10(abs(G1)), 'linewidth',4);
plot(f,20*log10(abs(G1_bar)), '--r', 'linewidth',4);
title('ELEMENTOS ESPECTRAIS - FRF MODELO DE VIGA DE 3.000 A 4.800 Hz',
'fontsize' ,3)
legend(['Viga íntegra';'Viga com dano'],[4]);
xlabel('Frequências [Hz]', 'fontsize' ,3);
ylabel('Amplitude [dB]', 'fontsize' ,3);

```