

UNIVERSIDADE FEDERAL DA GRANDE DOURADOS
FACULDADE DE ENGENHARIA
ENGENHARIA MECÂNICA

GABRIEL BERRES

**ESTUDO DE ESTRUTURAS PERIÓDICAS PARA
APLICAÇÕES EM ISOLAMENTO DE VIBRAÇÕES
PELA BASE**

Dourados - MS

2022

GABRIEL BERRES

**ESTUDO DE ESTRUTURAS PERIÓDICAS PARA
APLICAÇÕES EM ISOLAMENTO DE VIBRAÇÕES
PELA BASE**

Trabalho de conclusão de curso apresentado a Faculdade de Engenharia da Universidade Federal da Grande Dourados, como requisito para a obtenção do título de Bacharel em Engenharia Mecânica.

Área de concentração: Mecânica dos Sólidos.

Prof. Dr. Rodrigo Borges Santos
Orientador

Dourados - MS

2022

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP).

B533e Berres, Gabriel
Estudo de estruturas periódicas para aplicações em isolamento de vibrações pela base [recurso eletrônico] / Gabriel Berres. -- 2022.
Arquivo em formato pdf.

Orientador: Rodrigo Borges Santos.
TCC (Graduação em Engenharia Mecânica)-Universidade Federal da Grande Dourados, 2022.
Disponível no Repositório Institucional da UFGD em:
<https://portal.ufgd.edu.br/setor/biblioteca/repositorio>

1. Isolamento sísmico. 2. Estruturas periódicas. 3. Método dos elementos espectrais. I. Santos, Rodrigo Borges. II. Título.

Ficha catalográfica elaborada automaticamente de acordo com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).

©Direitos reservados. Permitido a reprodução parcial desde que citada a fonte.



MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
FUNDAÇÃO UNIVERSIDADE FEDERAL DA GRANDE DOURADOS

ANEXO D - AVALIAÇÃO FINAL DO TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO

Aluno: **GABRIEL BERRES**

Título do trabalho e subtítulo (se houver): **ESTUDO DE ESTRUTURAS PERIÓDICAS PARA APLICAÇÕES EM ISOLAMENTO DE VIBRAÇÕES PELA BASE**

BANCA EXAMINADORA

1. Presidente (orientador):

Prof. Dr. RODRIGO BORGES SANTOS, Universidade Federal da Grande Dourados - UFGD

2. Membro:

Prof. Dr. DOUGLAS DOMINGUES BUENO, Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho – FEIS/UNESP

3. Membro:

Prof. Dr. SANDERSON MANOEL DA CONCEIÇÃO, Universidade Federal da Grande Dourados - UFGD

De acordo com o grau final obtido pelo aluno, nós da banca examinadora, declaramos **APROVADO** o aluno acima identificado, na componente curricular Trabalho de Conclusão de Curso (TCC-II) de Graduação no Curso de Engenharia Mecânica da Universidade Federal da Grande Dourados.

Dourados, 07 de outubro de 2022.

Prof. Dr. Rodrigo Borges Santos

Prof. Dr. Douglas Domingues Bueno

Prof. Dr. Sanderson Manoel da Conceição

Ao curso de Engenharia Mecânica.

AGRADECIMENTOS

Em primeiro lugar agradeço a Deus por me permitir chegar até aqui.

Gostaria de agradecer ao meu orientador Prof. Rodrigo Borges Santos, desde os anos de iniciação científica até o presente momento, pela motivação, incentivo, paciência e por acreditar na realização deste trabalho. Obrigado por tudo.

Também gostaria de agradecer o Prof. Sanderson Manoel da Conceição por compartilhar o conhecimento relacionado ao método dos elementos espectrais e por nortear o desenvolvimento dos apêndices A e B deste texto. Obrigado, também, Prof. Douglas Domingues Bueno pelas sugestões e direcionamentos no decorrer deste trabalho.

A minha família, em especial ao meu pai e meus irmãos, por serem a base para a realização desta graduação. Muito obrigado.

A todos meus amigos da graduação, em especial a Luana Marcante, Lucas Simon, Everson Eichinger, Allan Kaiser e André Yudi, pelo companheirismo e anos de convivência.

Por último, mas não menos importante, agradeço a todos os professores da Universidade Federal da Grande Dourados que fizeram parte desta graduação.

“Faça o teu melhor, na condição que você tem, enquanto você não tem condições melhores, para fazer melhor ainda!”

Mario Sergio Cortella

RESUMO

Atividade sísmica tem o potencial de gerar grande devastação na construção civil. Nesse sentido, sistemas de controle do tipo ativo, semi-ativo, híbrido e passivo, foram desenvolvidos ao longo do tempo para evitar o colapso estrutural durante estes eventos. Pesquisas recentes conduzidas por diferentes autores mostraram que estruturas periódicas (EP) tem potencial de serem utilizadas para o controle passivo de vibrações sísmicas através do isolamento de base. Em síntese, uma EP é formada a partir da repetição de camadas alternadas, com diferentes propriedades geométricas e/ou físicas, ao longo do seu comprimento. O efeito de filtragem de ondas desenvolvido por uma EP através da formação de intervalos de frequência, conhecidos como *Band Gap*, possibilita sua aplicação em diferentes campos da engenharia. Neste trabalho, estruturas periódicas são modeladas via método dos elementos espectrais, utilizando a formulação de elementos de barra e elementos de viga do tipo Euler-Bernoulli. Um estudo numérico é desenvolvido para avaliar a formação do *Band Gap* de uma EP em baixa frequência, sob ondas longitudinais e flexionais, com base em diferentes tipos de periodicidade. Na sequência, um estudo de caso é desenvolvido para investigar a aplicação de uma EP em isolamento sísmico, tomando como referência soluções existentes no mercado. O modelo acoplado de uma estrutura periódica conectada a uma estrutura flexível também é desenvolvido, permitindo visualizar o comportamento dinâmico do conjunto. Por fim, a metodologia é validada através de resultados experimentais baseados em curvas de transmissibilidade e funções de resposta em frequência.

Palavras-chave: Isolamento sísmico. Estruturas periódicas. Método dos elementos espectrais.

ABSTRACT

Seismic activity has the potential creating enormous devastation in the civil construction field. In doing so, active, semi-active, hybrid, and passive control systems have been developed over time to prevent structural collapse during these events. Recent research conducted by different authors has shown that periodic structures (PS) can potentially be used for passive seismic vibration control through base isolation. In summary, a PS is formed from the repetition of alternating layers with different geometrical and/or physical properties along its length. The wave filtering effect developed by a PS through the formation of frequency intervals, known as Band Gap, enables its application in different engineering fields. In this paper, periodic structures are modeled by the spectral element method, using the bar element formulation and the Euler-Bernoulli beam elements. A numerical study is conducted to evaluate the Band Gap formation of a PS at low frequency, subjected by longitudinal and flexural waves, based on different types of periodicity. In sequence, a case study is developed to investigate the application of a PS in seismic isolation, taking existing solutions as a reference. The coupled model of a periodic structure connected to a flexible structure is also developed, allowing to visualize the dynamic behavior of the assembly. At last, the methodology is validated through experimental results based on transmissibility curves and frequency response functions.

Key words: Seismic isolation. Periodic structures. Spectral element method.

LISTA DE FIGURAS

1	Representação esquemática do modelo em estudo - fundação periódica - estrutura flexível.	24
2	Estrutura periódica genérica.	27
3	Regiões de bandas de passagem e dos <i>band gaps</i>	29
4	Elemento espectral de barra.	30
5	Elemento espectral de viga.	33
6	Modelo de barra e viga acoplado.	37
7	Modelo espectral com dois elementos.	38
8	Influência dos tipos de periodicidade na formação do <i>Band Gap</i> : (a) sob ondas longitudinais, (b) sob ondas flexionais.	40
9	Influência de diferentes tipos de materiais na formação do <i>Band Gap</i> em uma célula mista: (a) sob ondas longitudinais, (b) sob ondas flexionais.	42
10	Influência do número de células (N_{cell}) na formação do <i>Band Gap</i> : (a) sob ondas longitudinais, (b) sob ondas flexionais.	43
11	Influência da razão de área (A_{ca}) na formação do <i>Band Gap</i> : (a) sob ondas longitudinais, (b) sob ondas flexionais.	45
12	Influência da razão de comprimentos L_{ca} na formação do <i>Band Gap</i> : (a) sob ondas longitudinais, (b) sob ondas flexionais.	46
13	Isolamento de base: soluções comerciais.	48
14	Transmissibilidade coxim convencional <i>versus</i> coxim periódico: (a) Ondas longitudinais e (b) Ondas flexionais.	50
15	Configurações experimentais.	51
16	Montagem experimental.	52
17	Cotas do modelo.	52
18	Função de Resposta em Frequência: (a) config. 01: Estrutura periódica, (b) config. 02: Estrutura flexível e (c) config. 03: Estrutura completa (EP+EF).	57
19	Curvas de transmissibilidade: (a) Caso 01, (b) Caso 02, (c) Caso 03.	58
20	Cotas do modelo.	69

LISTA DE TABELAS

1	Razões de propriedades entre as partes da célula.	39
2	Propriedades assumidas para combinações de materiais.	41
3	Síntese do potencial de formação de <i>Band Gap</i> em baixa frequência. . .	47
4	Configurações da EP escolhidas para o estudo de caso.	49
5	Propriedades utilizadas durante avaliações teóricas.	53
6	Dimensões reais.	69

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	23
1.1	OBJETIVOS	25
2	FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA	27
2.1	CONCEITO GERAL DE UMA ESTRUTURA PERIÓDICA	27
2.2	FORMAÇÃO DO <i>BAND GAP</i>	28
2.3	MÉTODO DOS ELEMENTOS ESPECTRAIS	29
2.3.1	Elemento Espectral de Barra	30
2.3.2	Elemento Espectral de Viga	33
2.3.3	Elemento Espectral de Barra e Viga	37
3	RESULTADOS NUMÉRICOS	39
3.1	ANÁLISE PARA DIFERENTES TIPOS DE PERIODICIDADE	39
3.2	ANÁLISE PARA DIFERENTES TIPOS DE MATERIAIS	41
3.3	ANÁLISE PARA DIFERENTES NÚMEROS DE CÉLULAS	42
3.4	ANÁLISE PARA DIFERENTES RAZÕES DE ÁREA DA SECÇÃO TRANSVERSAL	44
3.5	ANÁLISE PARA DIFERENTES RAZÕES DE COMPRIMENTO	45
3.6	SÍNTESE DAS ANÁLISES REALIZADAS	47
3.7	ESTUDO DE CASO	48
4	<i>SETUP</i> EXPERIMENTAL	51
5	RESULTADOS EXPERIMENTAIS	55
5.1	FUNÇÃO DE RESPOSTA EM FREQUÊNCIA	55
5.2	CURVAS DE TRANSMISSIBILIDADE	56
6	CONCLUSÃO	59
7	SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS	61
	REFERÊNCIAS	63
	APÊNDICE A - Matriz espectral para o elemento de barra.	65

APÊNDICE B - Matriz espectral para o elemento de viga. . .	67
APÊNDICE C - Informações geométricas do modelo real . . .	69

1 INTRODUÇÃO

Atividade sísmica é um tópico importante a ser levado em consideração para o projeto de estruturas em diversas regiões do mundo. O colapso estrutural, os danos materiais diversos e, nos piores casos, os danos à vida humana são encontrados em cenário pós tremores e refletem a importância do tema. Portanto, a busca de novas tecnologias e o desenvolvimento contínuo das soluções já existentes são justificadas.

A dinâmica dos abalos sísmicos é avaliada por meio do estudo de vibrações mecânicas. Nesse sentido, durante a ocorrência de um evento sísmico, ondas são geradas e se propagam pelo meio terrestre atingindo as estruturas. A inerência de qualquer sistema mecânico possuir frequências naturais de vibração abre caminho para que fenômenos como a ressonância aconteça. Neste cenário, a ausência de um mecanismo dissipador de energia permite que a estrutura seja estimulada de forma que a amplitude de vibração tenda ao infinito, resultando em um colapso estrutural (RAO, 2008).

Ao longo dos anos foram desenvolvidos diversos sistemas para evitar que os abalos sísmicos danifiquem as construções. As soluções se dividem em 4 tipos que são: os sistemas ativos, semi-ativos, híbridos e passivos (BENEVELI, 2002; CARNEIRO, 2009; SANTOS, 2008).

A alta performance em situações de projeto aliada a simplicidade do conceito destacam o controle passivo dentre os outros tipos citados. Este sistema pode se subdividir em dois grandes grupos que são: os amortecedores que tem a capacidade de absorver a energia dos movimentos indesejados; e o sistema de isolamento de base que é instalado na fundação do edifício para impedir que os vibrações cheguem na estrutura (BENEVELI, 2002).

Nos últimos anos, despertou-se um maior nível de atenção para o sistema de isolamento de base, onde pesquisadores propõem a utilização de estruturas periódicas (EP). Uma definição deste tipo de estrutura é dada por Mead (1996) como “um número idêntico de partes estruturais unidas ponta a ponta e/ou lado a lado para formar toda a estrutura”. A menor parte constituinte de uma EP que permite o desenvolvimento da periodicidade é chamada de célula unitária.

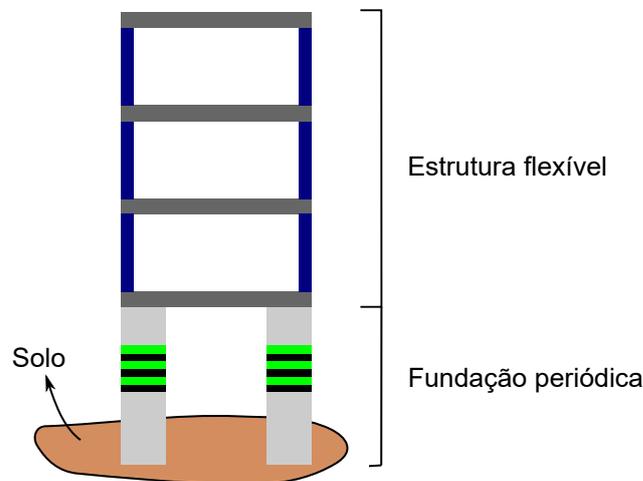
O arranjo periódico desenvolve uma característica conhecida como *Band Gap* (BG), que é descrita como faixas de frequência que não permitem propagação de ondas. A formação do *Band Gap* está relacionada com a presença de descontinuidades ao longo da EP. Dessa maneira, a interação do movimento ondulatório com as descontinuidades promove a reflexão de ondas formando as regiões atenuativas. Portanto, a organização das células unitárias, assim como as propriedades físicas e geométricas tem a capacidade

de modificar essas regiões (CARNEIRO Jr et al., 2021; SANTOS, 2018; CUNHA et al., 2014).

Os campos de aplicação investigados para as estruturas periódicas são vistos no setor automotivo (ASIRI, 2007), aeronáutico (ASIRI; BAZ; PINES, 2005) e mais recentemente no isolamento sísmico. Neste último as avaliações teóricas e experimentais, conduzidas por diferentes autores mostraram que as estruturas periódicas tem a capacidade de atenuação tanto de eventos sísmicos quanto de vibrações ambiente (ZHAO et al., 2021; XIANG et al., 2012; JAIN; PUJARI; LASKAR, 2021; WITARTO et al., 2018; LIU; REN; SONG, 2021; HUANG et al., 2021).

Seguindo a linha de isolamento sísmico é proposto neste trabalho avaliar estruturas periódicas visando o isolamento de vibrações devidas as excitações pela base. Eventos sísmicos normalmente ocorrem com frequências na faixa de 2 a 40 Hz, estimulando a estrutura por meio de ondas longitudinais e flexionais. Portanto, a EP deve ter um desempenho satisfatório principalmente para esses dois tipos de ondas. A representação do modelo em estudo (fundação periódica - estrutura flexível) é dada pela Figura 1.

Figura 1 – Representação esquemática do modelo em estudo - fundação periódica - estrutura flexível.



Fonte: Elaborado pelo autor.

A modelagem da EP e da estrutura flexível (EF) é desenvolvida por meio do método dos elementos espectrais (SEM, do inglês “*Spectral Element Method*”).

A formação do *Band Gap* é estudada durante as avaliações numéricas para diferentes tipos de descontinuidades (geométrica, material e mista). Ainda dentro das avaliações numéricas, um estudo de caso para aplicação de uma EP em um sistema de isolamento de base é desenvolvido de forma comparativa as soluções existentes no mercado.

A validação da metodologia utilizada é dada na seção de resultados experimentais, onde são apresentadas curvas de transmissibilidade e de Função de Resposta em Frequência

(FRF) para três configurações diferentes de ensaios.

1.1 OBJETIVOS

Constituem os objetivos deste trabalho:

- Modelagem de uma estrutura periódica e de uma estrutura flexível acopladas via Método dos Elementos Espectrais.
- Realizar análise numérica da formação do *Band Gap* considerando alterações físicas e geométricas da EP (isto é, para periodicidade do tipo geométrica, de material e mista).
- Desenvolver um estudo de caso para aplicação de uma EP em isolamento de base.
- Validar a metodologia utilizada por meio de testes experimentais.

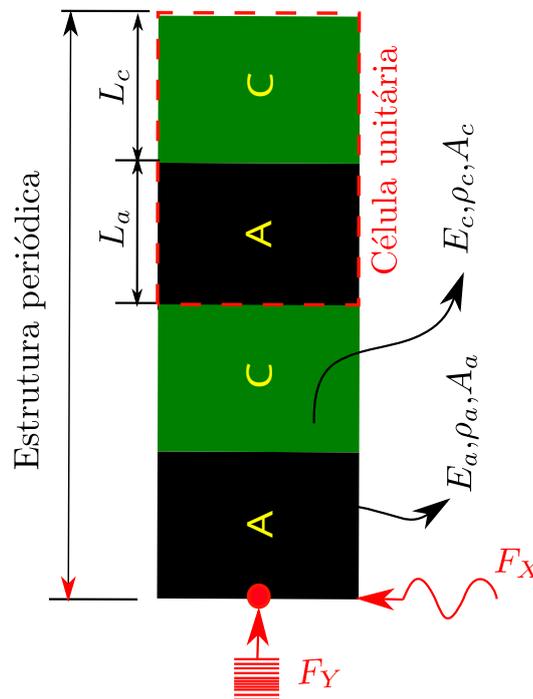
2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Nesta seção é apresentada a fundamentação teórica que permite modelar e avaliar as estruturas periódicas. De maneira cronológica, em um primeiro momento são definidos os parâmetros construtivos de uma EP e os tipos de ondas considerados. Na sequência, são apresentadas as zonas de atenuação e de passagem da EP. Por fim, é desenvolvido o método dos elementos espectrais que servirá como base para obter a relação para a transmissão de vibração em uma EP para as ondas do tipo longitudinais e flexurais.

2.1 CONCEITO GERAL DE UMA ESTRUTURA PERIÓDICA

Uma estrutura periódica unidimensional pode ser representada conforme mostra a Figura 2.

Figura 2 – Estrutura periódica genérica.



Fonte: Elaborado pelo autor.

A célula unitária é formada por meio de duas partes (A e C), e, a variável N_{cell} representa o número de células que compõem a EP. Cada parte da célula assume suas propriedades físicas e geométricas de maneira individual. Nesse sentido, as variáveis E , ρ , A e L representam, respectivamente, o módulo de elasticidade (Pa), a densidade (kg/m^3), a área de seção transversal (m^2) e o comprimento (m). Os subscritos a e c indicam as partes

A e C da célula, respectivamente. As variáveis F_X e F_Y representam, nesta sequência, a entrada de ondas flexionais e longitudinais na estrutura.

Como será visto nas análises numéricas, razões entre as propriedades físicas e geométricas são definidas para uma célula unitária. Nesse sentido, as variáveis E_{ca} , ρ_{ca} , A_{ca} e L_{ca} são, respectivamente, as razões de módulo de elasticidade, de densidade, de área e de comprimento. Essas razões são calculadas por meio de $E_{ca} = E_c/E_a$, $\rho_{ca} = \rho_c/\rho_a$, $A_{ca} = A_c/A_a$ e $L_{ca} = L_c/L_a$.

2.2 FORMAÇÃO DO *BAND GAP*

Estruturas periódicas tem a capacidade de formar regiões atenuativas que limitam ou até mesmo impedem a transmissão de vibrações. Tais regiões são conhecidas como *Band Gap*.

O *Band Gap* é desenvolvido através das interações entre as ondas incidentes e refletidas dentro de uma célula periódica (SANTOS, 2018; CARNEIRO Jr; SANTOS; BUENO, 2019; CARNEIRO Jr et al., 2021). Nesse sentido, a presença de descontinuidades, sejam elas causadas por propriedades físicas ou geométricas tem o potencial de modificar a propagação de ondas em uma estrutura periódica.

Por meio das propriedades físicas entende-se que formar uma célula com materiais diferentes promove uma razão de elasticidades (E_{ca}) e densidade (ρ_{ca}). Logo, a onda incidente tem suas características de propagação modificadas quando atravessa essa região. Da mesma forma, alterar a razão de áreas (A_{ca}) e a razão de comprimentos (L_{ca}) também tem o potencial de causar esse efeito.

Uma das formas de analisar a formação dos *Band Gaps* é por meio do conceito de transmissibilidade. Este parâmetro consiste em avaliar os deslocamentos na entrada e na saída da célula. Nesse sentido, define-se a transmissibilidade de ondas longitudinais ($T_{longitudinal}$) como

$$T_{longitudinal} = \frac{U_S}{U_E} \quad (2.1)$$

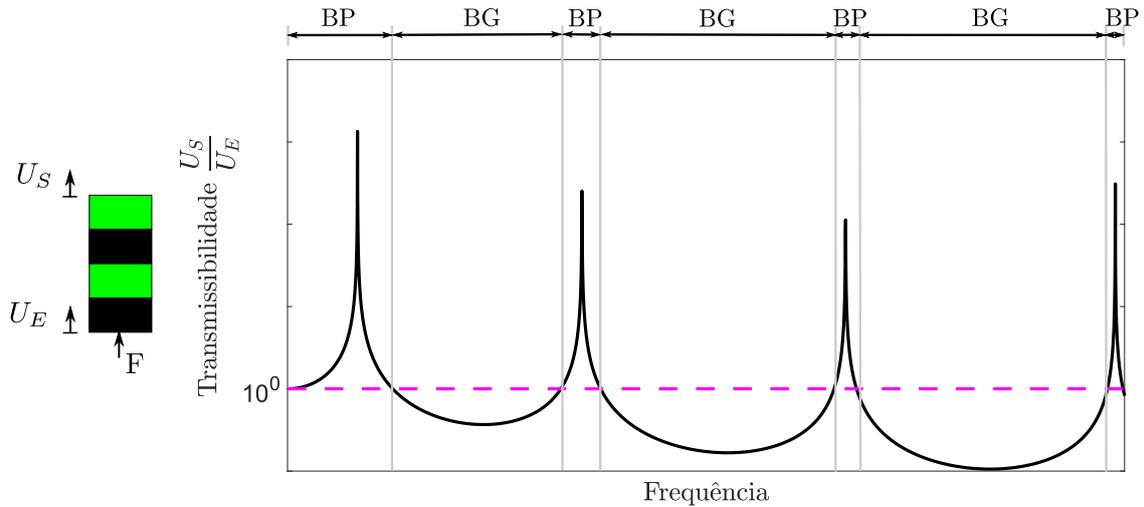
sendo U_S e U_E os deslocamentos axiais na saída e na entrada da EP, respectivamente. Por meio da mesma lógica, a transmissibilidade de ondas flexionais ($T_{flexional}$) é dada por

$$T_{flexional} = \frac{W_S}{W_E} \quad (2.2)$$

sendo W_S e W_E os deslocamentos transversais na saída e na entrada da EP, respectivamente. Portanto, quando a transmissibilidade é menor que a unidade entende-se que a EP está atenuando os deslocamentos.

A Figura 3 destaca as regiões das bandas de passagem (BP) e dos *Band Gaps* em um gráfico de transmissibilidade *versus* frequência.

Figura 3 – Regiões de bandas de passagem e dos *band gaps*.



Fonte: Elaborado pelo autor.

2.3 MÉTODO DOS ELEMENTOS ESPECTRAIS

A modelagem matemática para prever a resposta dinâmica de uma EP envolve um conjunto de equações diferenciais. A depender do método utilizado, a solução para tais equações pode ser proposta no domínio do tempo ou no domínio da frequência. No SEM, as equações diferenciais são resolvidas no domínio da frequência através da aplicação da transformada de Fourier.

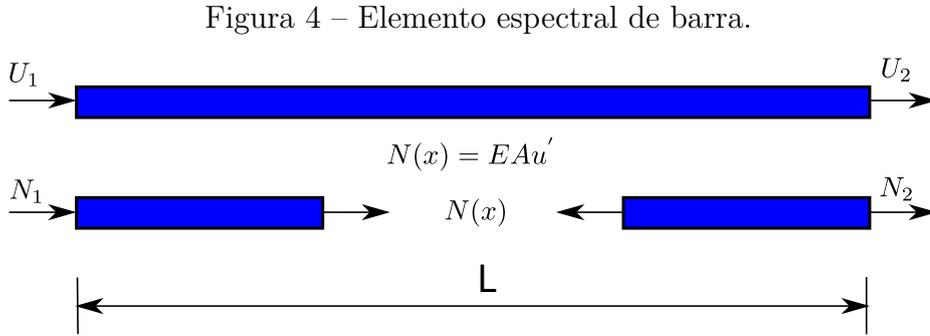
O conceito de discretização de uma estrutura, como é visto nos método dos elementos finitos, também é aplicado ao SEM. A diferença básica é que por ser um método que trabalha com as matrizes de rigidez exatas, o SEM requer uma mínima quantidade de elementos. De acordo com Lee (2009), um único elemento é necessário para representar uma estrutura regular, ou seja, sem mudança nas suas propriedades geométricas e de material ao longo do seu comprimento.

Da mesma forma que o método de elementos finitos, o elemento discreto para ondas longitudinais é denominado elemento de barra. Por outro lado, o elemento espectral que contempla a modelagem das ondas de flexão é conhecido como elemento de viga.

Sintetizando os conceitos descritos, conclui-se que cada parte de uma célula unitária forma um elemento espectral. Cada elemento, por sua vez, é composto de duas modelagens, a de barra e viga, formando a matriz espectral do elemento. Quando dois ou mais elementos são unidos passa-se então a existir a matriz espectral global. Cada conceito supracitado é definido com mais detalhes nas subseções seguintes.

2.3.1 Elemento Espectral de Barra

Na modelagem espectral os elementos de barra são utilizados para contemplar os movimentos axiais. A Figura 4 ilustra este elemento com seus parâmetros de interesse e convenção de sinais adotados.



Conforme a Figura 4, o elemento de barra apresenta um grau de liberdade em cada extremidade. Os vetores U_i e N_i denotam, respectivamente o deslocamento axial e a força axial para o i -ésimo nó, com i variando de 1 até 2. Por fim, o termo L refere-se ao comprimento do elemento utilizado.

Por meio do método de força-deslocamento, os elementos espectrais são desenvolvidos com base na equação que descreve o movimento das ondas longitudinais. A equação diferencial parcial típica para este movimento é encontrada na literatura sendo escrita da seguinte forma (FAHY; GARDONIO, 2007; LEE, 2009).

$$EAu'' - \rho A\ddot{u} = 0 \quad (2.3)$$

onde $u(x, t)$ é o deslocamento longitudinal, E é o módulo de elasticidade do material (Pa), A é área de seção transversal (m^2), enquanto que ρ é a densidade da barra (kg/m^3). Sob a linguagem matemática, a linha (') indica que o parâmetro em questão tem uma derivada em relação ao espaço, enquanto que os pontos (·) indicam que a derivada é em relação ao tempo.

Os esforços internos atuante no elemento de barra podem ser modelados pela seguinte equação (LEE, 2009)

$$N_t(x, t) = EAu'(x, t) \quad (2.4)$$

com os parâmetros anteriormente definidos. A solução da Eq. 2.3 na forma espectral é dada por (LEE, 2009)

$$u(x, t) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} U_n(x; \omega_n) e^{i\omega_n t} \quad (2.5)$$

A substituição da Eq. 2.5 na Eq. 2.3 seguida por uma manipulação algébrica permite obter o problema de autovalor para uma frequência (ω) como

$$EAU'' + \omega^2 \rho AU = 0 \quad (2.6)$$

A solução geral para a Equação 2.6 pode ser da forma

$$U(x) = ae^{-ik(\omega)x} \quad (2.7)$$

Substituir a equação 2.7 na Eq. 2.6 desenvolve uma relação de dispersão do tipo

$$k^2 - k_L^2 = 0 \quad (2.8)$$

O número de onda para a vibração longitudinal pura é definido por (LEE, 2009)

$$k_L = \omega \sqrt{\frac{\rho A}{EA}} \quad (2.9)$$

Assim a Eq. 2.8 assume duas raízes reais na forma

$$k_1 = -k_2 = k_L \quad (2.10)$$

Portanto, para uma barra de comprimento finito L a equação 2.6 assume uma solução do tipo

$$U(x) = a_1 e^{-ik_L x} + a_2 e^{ik_L x} \quad (2.11)$$

A equação 2.11 pode ser organizada em forma matricial de modo que

$$U(x) = e(x; \omega) a \quad (2.12)$$

$$e(x; \omega) = [e^{-ik_L x} \quad e^{ik_L x}] \quad (2.13)$$

$$a = \{a_1 \quad a_2\}^T$$

Assim, $U(x)$ tem a capacidade de representar os deslocamento axiais espectrais do elemento de barra, que são relacionados ao campo de deslocamento por meio das seguintes matrizes

$$d_R = \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} U(0) \\ U(L) \end{Bmatrix} \quad (2.14)$$

O desenvolvimento da Eq. 2.14 permite uma nova organização matricial que é dada pela seguinte expressão

$$d_R = \begin{bmatrix} e(0; \omega) \\ e(L; \omega) \end{bmatrix} a = H_R(\omega) a \quad (2.15)$$

onde

$$H_R(\omega) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ e^{-ik_L L} & e^{ik_L L} \end{bmatrix} \quad (2.16)$$

Através da Eq. 2.15 é possível eliminar o vetor de constante a da Eq. 2.12. Dessa maneira, o campo de deslocamentos pode ser reescrito da seguinte forma (LEE, 2009)

$$U(x) = N_R(x; \omega) d_R \quad (2.17)$$

onde

$$N_R(x; \omega) = e(x; \omega) H_R^{-1}(\omega) = [N_{R1} \quad N_{R2}] \quad (2.18)$$

$$N_{R1}(x; \omega) = \operatorname{cosec}(k_L L) \operatorname{sen}(k_L(L - x)) \quad (2.19)$$

$$N_{R2}(x; \omega) = \operatorname{cosec}(k_L L) \operatorname{sen}(k_L x) \quad (2.20)$$

As forças espectrais nodais são calculadas por (LEE, 2009)

$$N(x) = EA U'(x) \quad (2.21)$$

Por analogia aos deslocamentos, é possível correlacionar as forças espectrais com as forças vistas pela resistência dos materiais, conforme as instruções seguintes

$$f_R(\omega) = \begin{Bmatrix} N_1 \\ N_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -N(0) \\ N(L) \end{Bmatrix} \quad (2.22)$$

Por fim, substituindo a Eq. 2.17 e Eq. 2.21 na Eq. 2.22 resulta em,

$$S_R(\omega) d_R(\omega) = f_R(\omega) \quad (2.23)$$

Uma das formas para se determinar os termos da matriz espectral do elemento de barra (S_R) é desenvolvida no apêndice A. Por outro lado, estes termos também podem ser encontrados resumidamente no livro de Lee (2009), conforme abaixo.

$$S_R(\omega) = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} s_{R11} & s_{R12} \\ s_{R12} & s_{R22} \end{bmatrix} = S_R(\omega)^T \quad (2.24)$$

$$s_{R11} = s_{R22} = (k_L L) \cotan(k_L L) \quad (2.25)$$

$$s_{R12} = -(k_L L) \operatorname{cosec}(k_L L) \quad (2.26)$$

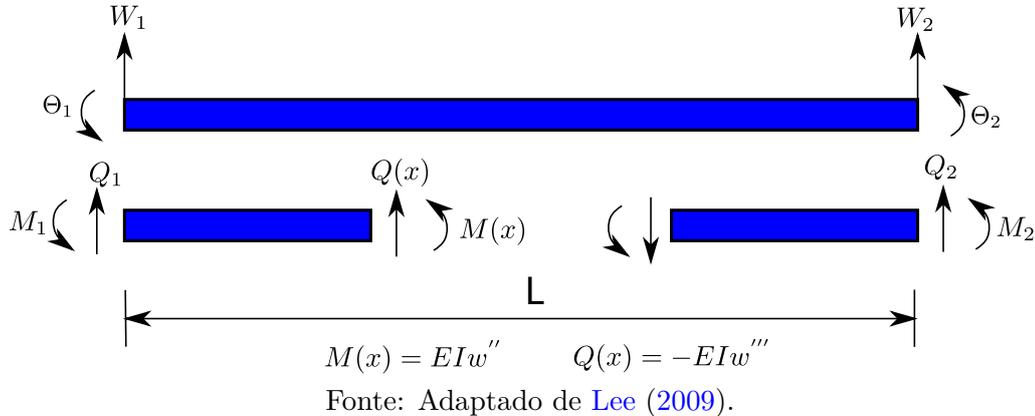
A partir da Eq. 2.23 é possível calcular a função de resposta em frequência para o elemento de barra (FRF_R) como

$$FRF_R = \frac{d_R}{f_R} = [S_R(\omega)]^{-1} \quad (2.27)$$

2.3.2 Elemento Espectral de Viga

No movimento flexional, a equação governante do sistema é dada a partir da modelagem de Euler-Bernoulli. Da mesma forma que o caso anterior, o desenvolvimento da matriz espectral é feito por meio do princípio de força e deslocamento. Na Figura 5 é detalhado o elemento espectral de viga para facilitar a localização dos parâmetros utilizados durante a modelagem.

Figura 5 – Elemento espectral de viga.



Conforme a Figura 5, o elemento de viga apresenta quatro graus de liberdade (GDL), distribuídos igualmente nas duas extremidades. Os parâmetros W_i e Θ_i denotam, respectivamente o deslocamento e a rotação para o i -ésimo nó, com i variando de 1 até 2. Os termos M_i e Q_i representam, nesta ordem, o momento fletor e a força de cisalhamento aplicada no i -ésimo nó do elemento.

A equação diferencial parcial governante do movimento de flexão pode ser encontrada na literatura na seguinte forma (FAHY; GARDONIO, 2007; LEE, 2009).

$$EIw'''' + \rho A \ddot{w} = 0 \quad (2.28)$$

onde

- $w(x, t)$ é o deslocamento transversal;
- E é o módulo de Young (Pa);
- ρ é a densidade (kg/m^3);
- A é a área de seção transversal (m^2);
- I é o momento de inércia (m^4).

O momento e a força de cisalhamento são relacionadas com a curva de deformação $w(x, t)$ de acordo com as seguintes expressões (LEE, 2009).

$$M(x, t) = EIw''(x, t) \quad (2.29)$$

$$Q(x, t) = -EIw'''(x, t) \quad (2.30)$$

A solução na forma espectral da Eq. 2.28 é dada por (LEE, 2009).

$$w(x, t) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} W_n(x; \omega_n) e^{i\omega_n t} \quad (2.31)$$

A substituição da Eq. 2.31 na Eq. 2.28 resulta em um problema de autovalor para uma frequência específica (ω) na forma

$$EIW'''' - \omega^2 \rho AW = 0 \quad (2.32)$$

assumindo uma solução geral na forma

$$W(x) = ae^{-ik(\omega)x} \quad (2.33)$$

A substituição da Eq. 2.33 na Eq. 2.32 resulta em um relação de dispersão do tipo

$$k^4 - k_F^4 = 0 \quad (2.34)$$

A variável k_F representa então o número de onda para flexão pura e pode ser calculado conforme a equação abaixo (LEE, 2009; FAHY; GARDONIO, 2007).

$$k_F = \sqrt{\omega} \left(\frac{\rho A}{EI} \right)^{1/4} \quad (2.35)$$

A resolução da Eq. 2.34 fornece quatro raízes, sendo duas reais puras e duas imaginárias puras, de acordo com o detalhamento abaixo.

$$k_1 = k_F \quad -k_2 = k_F \quad k_3 = ik_F \quad -k_4 = ik_F \quad (2.36)$$

Com base nisso, pode-se dizer então que a solução geral da Eq. 2.32 para um elemento de viga de comprimento L é obtida de acordo com

$$W(x; \omega) = a_1 e^{-ik_F x} + a_2 e^{-k_F x} + a_3 e^{ik_F x} + a_4 e^{k_F x} \quad (2.37)$$

que matricialmente pode ser organizada como

$$\begin{aligned} W(x; \omega) &= e(x; \omega) a \\ e(x, \omega) &= [e^{-ik_F x} \quad e^{-k_F x} \quad e^{ik_F x} \quad e^{k_F x}] \\ a &= (a_1 \quad a_2 \quad a_3 \quad a_4)^T \end{aligned} \quad (2.38)$$

A equação 2.37 representa então o campo de deslocamentos para o elemento da Figura 5. De acordo com (LEE, 2009), este campo de deslocamento pode ser relacionado com os deslocamentos nodais e as rotações nodais, como mostra a Eq. 2.39

$$d_B = \begin{bmatrix} W_1 \\ \theta_1 \\ W_2 \\ \theta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W(0) \\ W'(0) \\ W(L) \\ W'(L) \end{bmatrix} \quad (2.39)$$

Aplicando a Eq. 2.37 na Eq. 2.39 são obtidos os seguintes resultados,

$$d_B = \begin{bmatrix} e(0; \omega) \\ e'(0; \omega) \\ e(L; \omega) \\ e'(L; \omega) \end{bmatrix} = H_B(\omega) a \quad (2.40)$$

onde

$$H_B(\omega) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -ik_F & -k_F & ik_F & k_F \\ e^{-ik_F L} & e^{-k_F L} & e^{ik_F L} & e^{k_F L} \\ -ik_F e^{-ik_F L} & -k_F e^{-k_F L} & ik_F e^{ik_F L} & k_F e^{k_F L} \end{bmatrix} \quad (2.41)$$

As componentes espectrais de momento fletor e cisalhamento são relacionadas a $W(x)$ de acordo com a Eq. 2.29 e a Eq. 2.30, respectivamente, gerando as seguintes expressões (LEE, 2009)

$$M(x, t) = EIW''(x) \quad Q(x, t) = -EIW'''(x) \quad (2.42)$$

As forças e momento nodais do elemento espectral apresentado na Figura 5 são relacionados as esforços da resistência dos materiais, gerando a organização matricial apresentada pela Eq. 2.43.

$$f_B = \begin{Bmatrix} Q_1 \\ M_1 \\ Q_2 \\ M_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -Q(0) \\ -M(0) \\ Q(L) \\ M(L) \end{Bmatrix} \quad (2.43)$$

Por fim, a matriz espectral do elemento de viga (S_B) é então desenvolvida de acordo com as seguintes equações

$$S_B(\omega)d_B(\omega) = f_B(\omega) \quad (2.44)$$

Uma das formas para se determinar os termos de S_B é desenvolvida no apêndice B este trabalho. Por outro lado, estes termos também podem ser encontrados resumidamente no livro de Lee (2009), conforme abaixo

$$S_B(\omega) = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} s_{B11} & s_{B12} & s_{B13} & s_{B14} \\ s_{B12} & s_{B22} & s_{B23} & s_{B24} \\ s_{B13} & s_{B23} & s_{B33} & s_{B34} \\ s_{B14} & s_{B24} & s_{B34} & s_{B44} \end{bmatrix} = S_B(\omega)^T \quad (2.45)$$

$$s_{B11} = s_{B33} = \Delta_B \bar{L}^3 (\cos \bar{L} \sinh \bar{L} + \sin \bar{L} \cosh \bar{L}) \quad (2.46)$$

$$s_{B22} = s_{B44} = \Delta_B \bar{L}^3 k_F^{-2} (-\cos \bar{L} \sinh \bar{L} + \sin \bar{L} \cosh \bar{L}) \quad (2.47)$$

$$s_{B12} = -s_{B34} = \Delta_B \bar{L}^3 k_F^{-1} \sin \bar{L} \sinh \bar{L} \quad (2.48)$$

$$s_{B13} = -\Delta_B \bar{L}^3 (\sin \bar{L} + \sinh \bar{L}) \quad (2.49)$$

$$s_{B14} = -s_{B23} = \Delta_B \bar{L}^3 k_F^{-1} (-\cos \bar{L} + \cosh \bar{L}) \quad (2.50)$$

$$s_{B24} = \Delta_B \bar{L}^3 k_F^{-2} (-\sin \bar{L} + \sinh \bar{L}) \quad (2.51)$$

$$\Delta_B = \frac{1}{1 - \cos \bar{L} \cosh \bar{L}} \quad (2.52)$$

$$\bar{L} = k_F L \quad (2.53)$$

onde os termos \sinh e \cosh representam, respectivamente as funções de seno hiperbólico e cosseno hiperbólico.

A partir da Eq. 2.44 é possível calcular a função de resposta em frequência para o elemento de viga (FRF_B) como

$$FRF_B = \frac{d_B}{f_B} = [S_B(\omega)]^{-1} \quad (2.54)$$

2.3.3 Elemento Espectral de Barra e Viga

As subseções anteriores apresentaram com detalhes o desenvolvimento das matrizes espectrais para um elemento submetido a ondas longitudinais e para um elemento sob ondas de flexão. Lee (2009) propõe uma metodologia para unir ambos os estudos em um único modelo, dessa forma, cada elemento espectral passa a ter seis graus de liberdade. Essa configuração é dada por meio da Figura 6.

Figura 6 – Modelo de barra e viga acoplado.



Fonte: Adaptado de Lee (2009).

Dessa forma, as matrizes espectrais do elementos (S_R e S_B) fornecidas pelas Eq. 2.24 e 2.45 são unidas, resultando em uma matriz espectral global (S_g) na equação 2.55.

$$S_g(\omega) = \begin{bmatrix} S_{11}^R & 0 & 0 & S_{12}^R & 0 & 0 \\ 0 & S_{11}^B & S_{12}^B & 0 & S_{13}^B & S_{14}^B \\ 0 & S_{21}^B & S_{22}^B & 0 & S_{23}^B & S_{24}^B \\ S_{21}^R & 0 & 0 & S_{22}^R & 0 & 0 \\ 0 & S_{31}^B & S_{32}^B & 0 & S_{33}^B & S_{34}^B \\ 0 & S_{41}^B & S_{42}^B & 0 & S_{43}^B & S_{44}^B \end{bmatrix} \quad (2.55)$$

Por analogia, o campo de deslocamento (d_g) e o vetor de força (f_g) são acoplados com base na organização da matriz espectral global, resultando nas matrizes fornecidas pela Eq. 2.56.

$$d_g(\omega) = \begin{Bmatrix} U_1 \\ W_1 \\ \Theta_1 \\ U_2 \\ W_2 \\ \Theta_2 \end{Bmatrix} \quad f_g(\omega) = \begin{Bmatrix} N_1 \\ Q_1 \\ M_1 \\ N_2 \\ Q_2 \\ M_2 \end{Bmatrix} \quad (2.56)$$

Mesmo com união do elemento de barra e do elemento de viga em um único modelo, a relação espectral global segue a mesma forma construtiva visualizada nos elementos individuais, como mostra a Eq. 2.57.

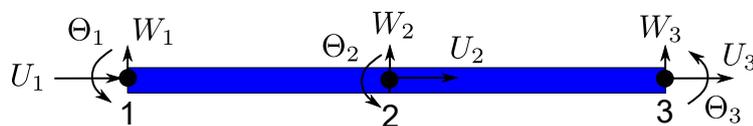
$$S_g(\omega)d_g(\omega) = f_g(\omega) \quad (2.57)$$

De forma similar ao método dos elementos finitos, a união dos elementos discretos para formar a representação de uma estrutura é dada por meio do acoplamento das matrizes nos graus de liberdade correspondentes.

De acordo com Lee (2009), no SEM, a discretização só é necessária quando ao longo do comprimento existem mudanças de seção transversal, material ou é preciso contemplar o efeito da aplicação de uma força em um ponto específico. Portanto, em comparação com outras metodologia que utilizam discretização, a quantidade de elementos é bastante reduzida, permitindo maior velocidade de processamento (menor esforço computacional) durante as simulações.

Na Figura 7, é apresentada uma estrutura com dois elementos espectrais, de forma a exemplificar o conceito de acoplamento supracitado.

Figura 7 – Modelo espectral com dois elementos.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Portando, como o modelo acoplado tem 9 graus de liberdade, a matriz espectral global dessa estrutura passa a ter dimensões de 9x9. Por outro lado, as matrizes de força e deslocamento passam a ter dimensões de 9x1.

3 RESULTADOS NUMÉRICOS

Nessa seção desenvolve-se uma análise numérica quanto a formação dos *Band Gaps* da EP sob ondas axiais e flexionais. A modelagem adotada é baseada no SEM admitindo condições de contorno livre-livre para a estrutura.

Ao final desta seção é estabelecido um estudo de caso sobre a implementação de uma EP em um sistema de isolamento de base. As análises são comparadas com soluções convencionais existentes no mercado.

3.1 ANÁLISE PARA DIFERENTES TIPOS DE PERIODICIDADE

A combinação de descontinuidades utilizadas em uma EP, permite classificar a periodicidade em três formas. Quando são utilizados os mesmos materiais entre as partes e modifica-se as razões A_{ca} e L_{ca} a periodicidade é classificada em **Geométrica**. Já quando são utilizados materiais diferentes entre as partes e as razões A_{ca} e L_{ca} são iguais a unidade, a periodicidade passa a ser do tipo **Material**. Por fim, quando são consideradas as periodicidades do tipo geométrica e de material em uma mesma célula tem-se a periodicidade do tipo **Mista**.

Assumindo os parâmetros da parte A em $E_a = 5$ MPa, $\rho_a = 950$ kg/m³, $A_a = 0,0177$ m² e $L_a = 0,3$ m e variando os parâmetros da parte C, conforme Tabela 1, torna-se possível investigar a formação do *Band Gap* de acordo com o tipo de periodicidade. Em todos os casos a seção transversal da EP é circular e a quantidade de células é de $N_{cell} = 1$. Os resultados obtidos são apresentados na Figura 8.

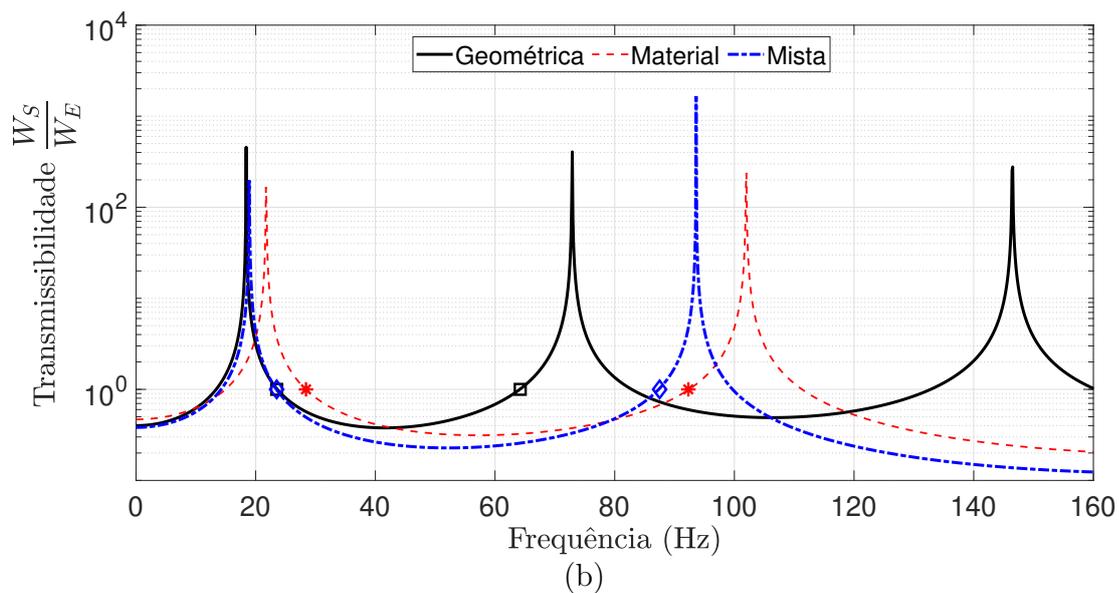
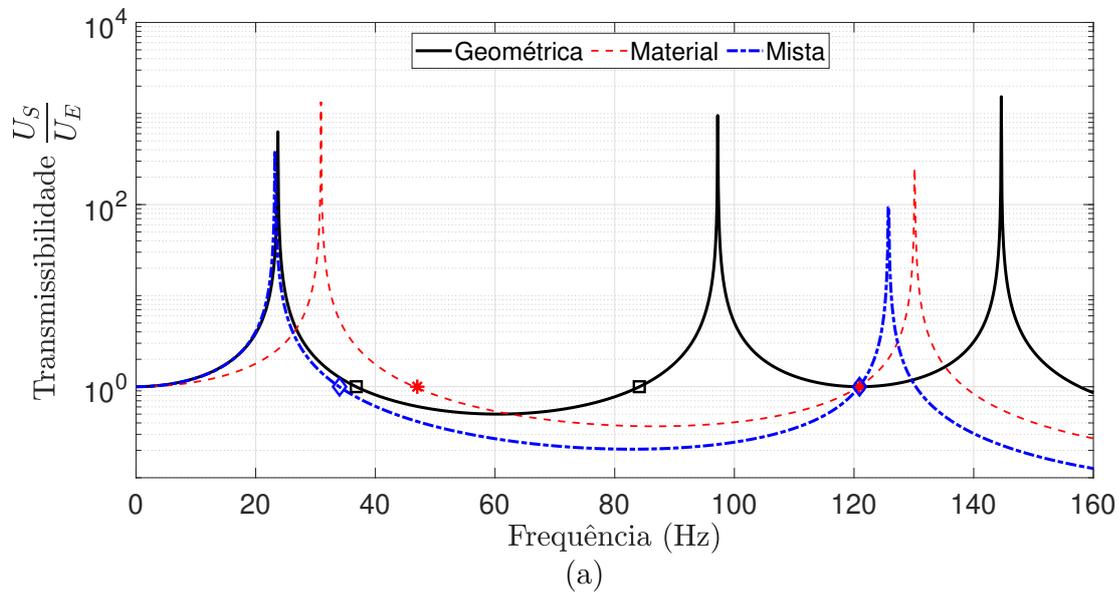
O ponto de início e término dos *Band Gaps* é destacado por meio de marcadores nas curvas e os resultados mostram que o tipo de periodicidade tem um impacto significativo na formação das regiões de atenuação tanto para ondas longitudinais quanto para ondas flexionais.

Tabela 1 – Razões de propriedades entre as partes da célula.

Propriedade	Tipo de periodicidade		
	Geométrica	Material	Mista
E_{ca}	1	600	600
ρ_{ca}	1	1,2	1,2
A_{ca}	2	1	2
L_{ca}	1	1	1

Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 8 – Influência dos tipos de periodicidade na formação do *Band Gap*: (a) sob ondas longitudinais, (b) sob ondas flexionais.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Para ondas longitudinais, as larguras de banda dos *Band Gaps* são de 47,3 Hz, 73,9 Hz e 86,9 Hz para periodicidade do tipo geométrica, de material e mista, respectivamente. Tomando a periodicidade geométrica como referência, são observados aumentos de 56,2 % e 83,7% em largura de banda para os outros dois tipos de periodicidade.

Para ondas flexionais, periodicidade do tipo geométrica, de material e mista, formam bandas de atenuação com larguras iguais a 40,7 Hz, 63,9 Hz e 64 Hz, respectivamente. Novamente, tomando o a periodicidade geométrica como referência nota-se um aumento percentual de 57% e 57,2% em largura de banda.

Este resultado permite concluir que o tipo de periodicidade influencia diretamente na largura de banda, tendo um impacto mais notável nas ondas longitudinais. Como resultado complementar, também é visto que a transmissibilidade tende a diminuir quando uma maior descontinuidade é implantada em um célula.

3.2 ANÁLISE PARA DIFERENTES TIPOS DE MATERIAIS

Com base no estudo anterior, a célula mista teve um melhor desempenho em comparação com as outras configurações. Neste sentido, essa análise busca investigar o efeito da combinação de diferentes materiais na formação de *Band Gaps* para célula mista.

As propriedades geométricas da parte A, L_{ca} e S_{ca} , são mantidas idênticas ao caso “misto” fornecido na Tabela 1. O número de células é mantido em $N_{cell} = 1$.

As razões E_{ca} e ρ_{ca} são apresentadas na Tabela 2 e foram modificadas para formar combinações como Borracha Macia-Borracha Dura (BM-BD), Borracha Macia-Concreto (BM-CT) e Borracha Macia-Aço (BM-AC). As propriedades dos materiais são encontradas em [Fahy e Gardonio \(2007\)](#). Os resultados da obtidos são apresentados na Figura 9.

Tabela 2 – Propriedades assumidas para combinações de materiais.

Propriedade	Combinação		
	BM-BD	BM-CT	BM-AC
E_{ca}	10	5200	40000
ρ_{ca}	1,16	2,42	8,21

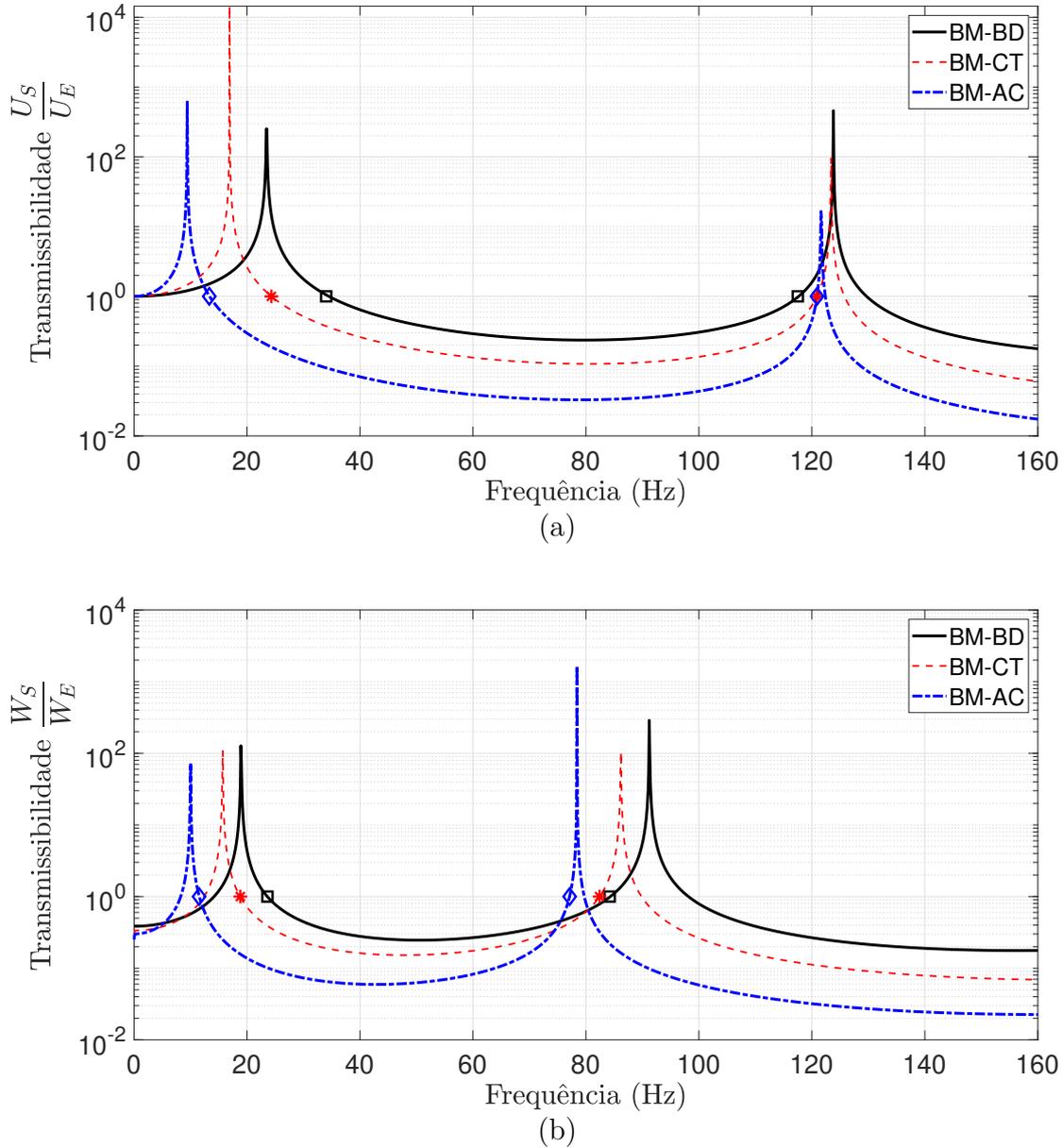
Fonte: Elaborado pelo autor.

Com base nos marcadores inseridos na Figura 9 (a), a combinação de materiais com propriedades cada vez mais distintas permitiu iniciar o *Band Gap* em uma frequência menor, enquanto que o término dessa região apresenta valores bem próximos. Desse modo, a largura de banda aumenta, de tal forma que nas combinações BM-BD, BM-CT, BM-AC formam-se regiões com largura de 83,5 Hz, 96,6 Hz e 107,6 Hz, respectivamente.

Já no caso de ondas flexionais, a antecipação na formação do *Band Gap* também é observada, mas a largura de banda tem pouca modificação. Para as combinações BM-BD, BM-CT, BM-AC, o *Band Gap* tem largura iguais a 60,6 Hz, 63,6 Hz e 65,6 Hz, respectivamente.

Os resultados da Figura 9 também permitem observar que tanto para as ondas longitudinais quanto para as ondas flexionais uma redução na transmissibilidade pode ser alcançada quando maior for a diferença entre as propriedades físicas dos materiais.

Figura 9 – Influência de diferentes tipos de materiais na formação do *Band Gap* em uma célula mista: (a) sob ondas longitudinais, (b) sob ondas flexionais.



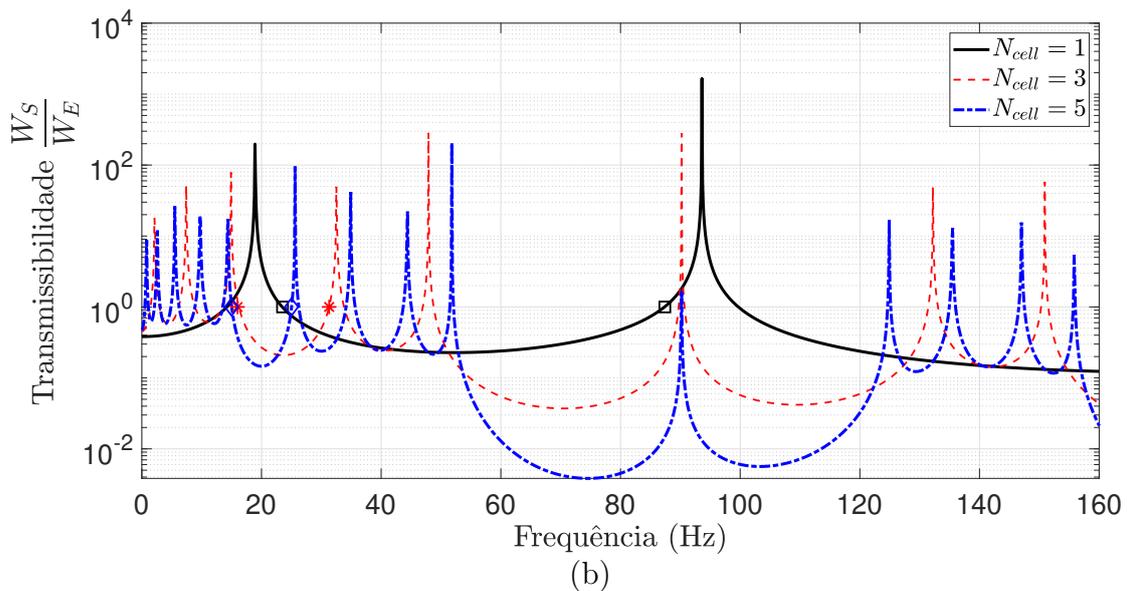
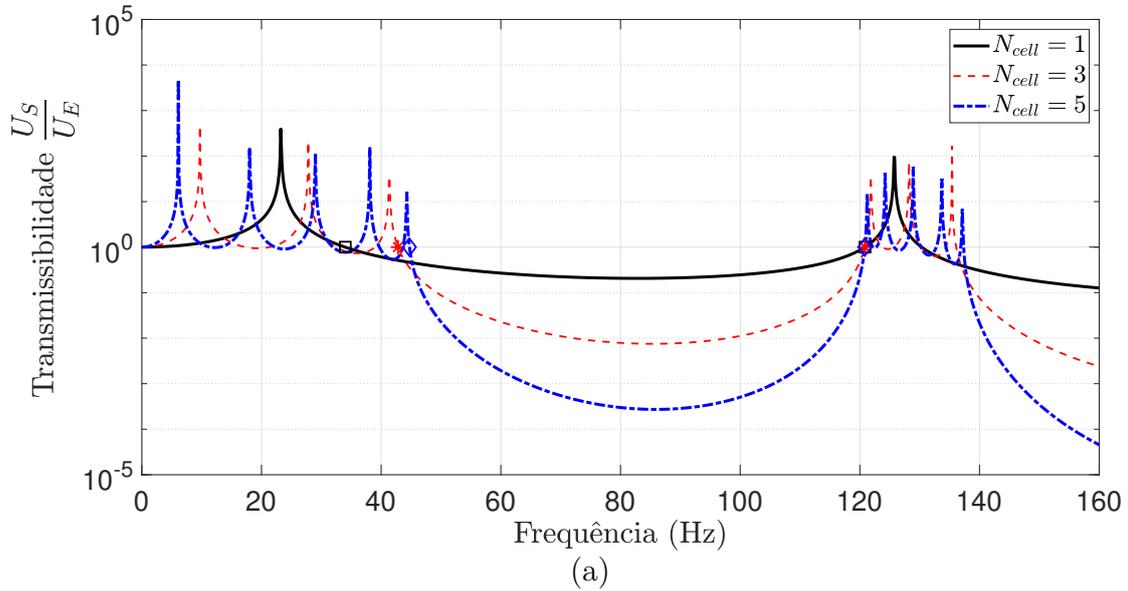
Fonte: Elaborado pelo autor.

3.3 ANÁLISE PARA DIFERENTES NÚMEROS DE CÉLULAS

O número de células (N_{cell}) tem influência importante na amplitude da transmissibilidade de vibração. Nesse sentido, essa análise busca verificar o desempenho de uma EP quando a variável N_{cell} assume valores de 1, 3 e 5.

As propriedades físicas da parte A e as razões L_{ca} , A_{ca} , ρ_{ca} e E_{ca} são mantidas conforme o caso “Misto” fornecido pela Tabela 1. As análises compreendem tanto as ondas longitudinais quanto as ondas flexionais e os resultados são apresentados com base em curvas de transmissibilidade na Figura 10.

Figura 10 – Influência do número de células (N_{cell}) na formação do *Band Gap*: (a) sob ondas longitudinais, (b) sob ondas flexionais.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Conforme mostra a Figura 10 (a), o acréscimo de células sob ondas longitudinais faz com que a frequência inicial do *Band Gap* seja deslocada para um valor mais alto, enquanto que o término dessa região tende a permanecer na mesma frequência. Esse comportamento estreita a largura de banda, de tal forma que para $N_{cell} = 1, 3$ e 5 sejam encontradas larguras de bandas iguais a $86,9$ Hz, $78,0$ Hz, $76,1$ Hz, respectivamente.

Além disso, é observado que a transmissibilidade dentro de um *Band Gap* tende a ser bruscamente reduzida quando o número de células aumenta. Para $N_{cell} = 3$, por exemplo, a mínima transmissão é de $7,5 \cdot 10^{-3}$ em $85,5$ Hz, enquanto que para $N_{cell} = 5$,

este valor alcança $2,7 \cdot 10^{-4}$ na mesma frequência, representando um queda de 27 vezes.

Para ondas flexionais, Figura 10 (b), o acréscimo do número de células promove uma perturbação nas curvas de transmissibilidade. De maneira preliminar, é possível dizer que o número de *Band Gaps* formados tem uma relação com o número de células. Este fenômeno pode ser visualizado com maior facilidade na faixa de 15 Hz a 90 Hz, onde são formados três *gaps* quando $N_{cell} = 3$ e cinco *gaps* quando $N_{cell} = 5$.

Além disso, é visto que existe uma redução na transmissibilidade enquanto que a frequência inicial do primeiro *Band Gap* tende a assumir um valor menor com o aumento de N_{cell} . A relação do número de *Band Gaps* com o número de células necessita um estudo mais aprofundado para afirmar com clareza que este comportamento se repete em outras configurações de EP.

3.4 ANÁLISE PARA DIFERENTES RAZÕES DE ÁREA DA SECÇÃO TRANSVERSAL

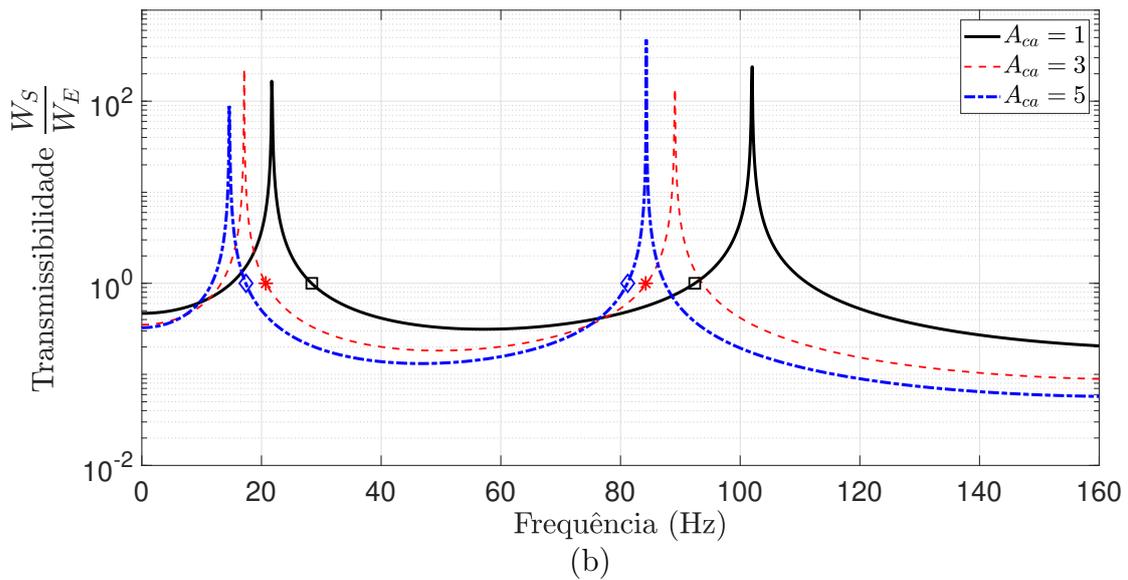
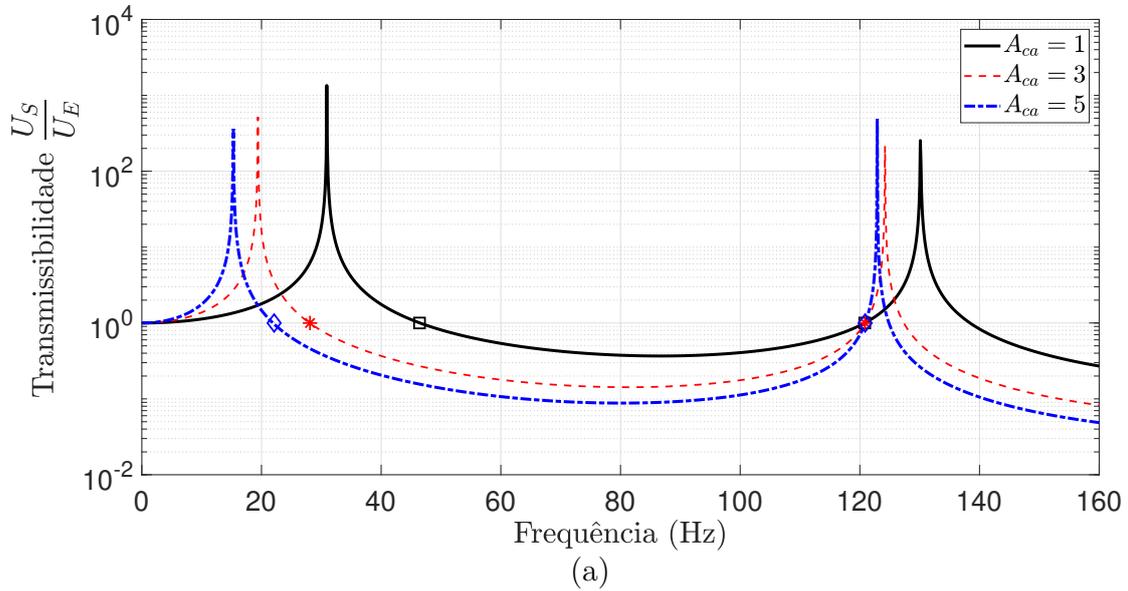
As descontinuidades geométricas dentro de uma estrutura periódica desenvolvem modificações na formação do *Band Gap*. Nesse sentido, a análise dessa seção tem o objetivo de verificar a influência da razão de área A_{ca} em um *gap*, quando esta razão tem ordem crescente de valores.

As propriedades físicas e geométricas tanto da parte A quanto da parte C são dadas a partir da Tabela 1, conforme o caso “Misto”. O estudo se desenvolve a partir de razões de área iguais a 1, 3 e 5, em uma estrutura periódica de apenas 1 célula. As análises levam em consideração ondas longitudinais e flexionais, sendo os resultados apresentados por meio da Figura 11.

De acordo com a Figura 11 os ganhos obtidos por meio do acréscimo de A_{ca} são particulares a cada tipo de onda. Para ondas longitudinais, aumentar essa razão favorece a redução da transmissibilidade e permite iniciar o *Band Gap* em uma menor frequência sem modificar o seu ponto de término. A largura de banda, portanto, tem um crescimento, passando de 74,4 Hz para 92,7 Hz e alcançando 98,8 Hz com A_{ca} de 1 a 5.

Para ondas flexionais, o *Band gap* é transladado para a região de menor frequência, enquanto que a largura assume valores de 64,0 Hz, 63,6 Hz e 63,8 Hz para A_{ca} variando em 1, 3 e 5, respectivamente. Além disso, é visto que dentro do primeiro *Band Gap* a transmissibilidade mostra uma tendência de assumir valores menores no início da região de atenuação.

Figura 11 – Influência da razão de área (A_{ca}) na formação do *Band Gap*: (a) sob ondas longitudinais, (b) sob ondas flexionais.



Fonte: Elaborado pelo autor.

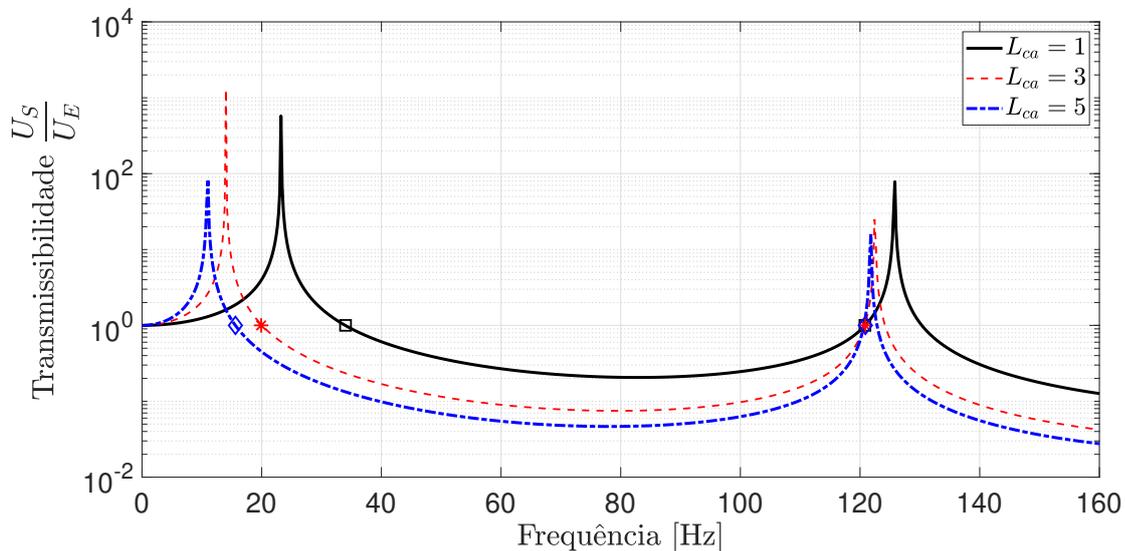
3.5 ANÁLISE PARA DIFERENTES RAZÕES DE COMPRIMENTO

Nesse estudo é investigado o efeito da razão de comprimentos (L_{ca}) na formação do *Band Gap*. As propriedades físicas da parte A e as razões A_{ca} , ρ_{ca} e E_{ca} são mantidas conforme o caso “Misto” fornecido pela Tabela 1. Portanto, assume-se uma variação L_{ca} de 1, 3 e 5, mantendo a configuração de apenas uma única célula unitária.

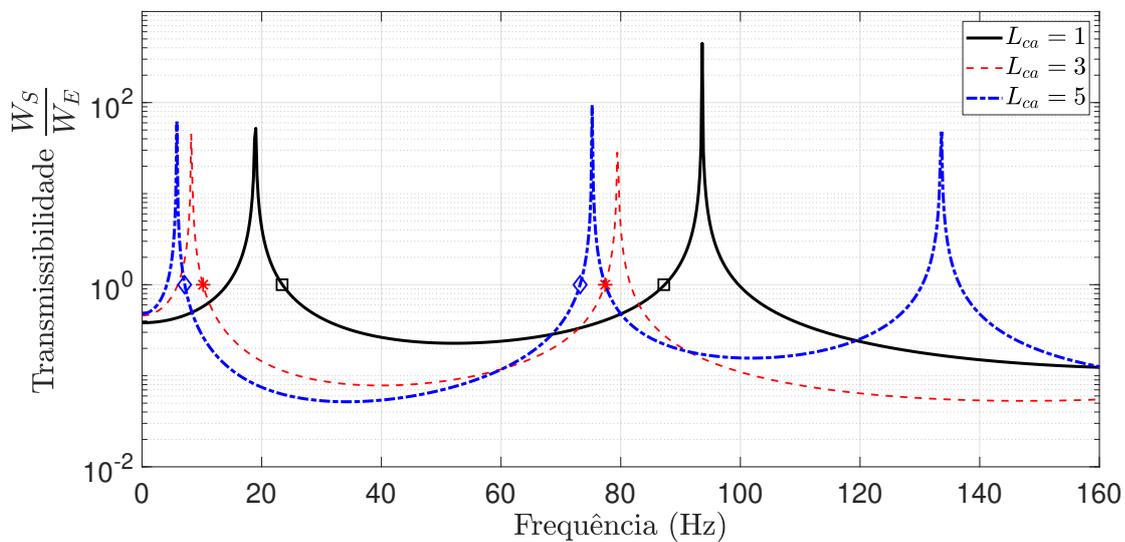
As análises desenvolvidas compreendem tanto as ondas longitudinais quanto as ondas flexionais e os resultados são apresentados com base em curvas de transmissibilidade

dadas pela Figura 12.

Figura 12 – Influência da razão de comprimentos L_{ca} na formação do *Band Gap*: (a) sob ondas longitudinais, (b) sob ondas flexionais.



(a)



(b)

Fonte: Elaborado pelo autor.

Por meio da Figura 12 (a) é visto que o aumento de L_{ca} tem um efeito de alargar o *Band Gap*, fazendo com que a frequência inicial seja menor, enquanto que a frequência final permanece constante. A transmissibilidade, por sua vez, tende a diminuir com o aumento de L_{ca} . Portanto, os ganhos provenientes com o aumento dessa razão são similares aos fornecidos por meio do aumento de A_{ca} sob ondas longitudinais.

Já a Figura 12 (b) mostra que a modificação de L_{ca} tem um impacto significativo nas curvas de transmissão quando uma EP está submetida a ondas flexionais. Em um

primeiro momento, é visto uma redução considerável na frequência inicial do *Band Gap* quando a razão de comprimentos passa de 1 para 3, tornando-se mais suave quando L_{ca} assume valores maiores que 3. Além disso, nota-se que a transmissibilidade é reduzida e o ponto de de mínima transmissão tende a se concentrar na metade inicial do *Band Gap* conforme o aumento de L_{ca} .

Ainda com base na Figura 12 (b), nota-se que o *Band Gap* é transladado para uma região de menor frequência, apresentando um aumento na largura de banda em 3,4 Hz quando L_{ca} passa de 1 para 3 e uma diminuição de 1,1 Hz quando L_{ca} assume uma razão igual a cinco.

3.6 SÍNTESE DAS ANÁLISES REALIZADAS

De maneira geral as análises permitiram compreender como a variação de propriedades físicas e geométricas impactam na formação da banda de atenuação de uma estrutura periódica.

A análise numérica foi desenvolvida por meio de cinco situações com a curva de transmissibilidade apresentando comportamentos característicos de cada caso. A utilização de uma EP para a atenuação de eventos sísmico depende da sua capacidade de funcionar em baixa frequência. Nesse sentido, a Tabela 3 apresenta uma síntese da influência dos parâmetros físicos e geométricos quanto ao potencial de formar o *Band Gap* para essa condição.

Tabela 3 – Síntese do potencial de formação de *Band Gap* em baixa frequência.

Parâmetro	Tipo de onda	
	Flexão	Longitudinal
Tipo de Periodicidade	Mista	Mista
Aumento de E_{ca}/ρ_{ca}	Aumenta	Aumenta
Aumento de N_{cell}	Aumenta	Diminui
Aumento de A_{ca}	Aumenta	Aumenta
Aumento de L_{ca}	Aumenta	Aumenta

Fonte: Elaborado pelo autor.

Conforme a Tabela 3, uma estrutura com maior descontinuidade (geométrica ou de propriedades físicas/mecânicas) tem maior potencial de formar regiões de atenuação em baixa frequência, de maneira independente ao tipo de onda.

Já o número de células promove um comportamento diferente e, está relacionado ao tipo de onda que a EP esta submetida. As análises mostraram que o aumento dessa variável tem o potencial de dividir o *gap* inicial em diversos *gaps* menores para ondas de flexão, enquanto que para ondas longitudinais o *Band Gap* tende a ser transladado para

uma região de maior frequência. Portanto, o tipo de onda a ser atenuada é importante para definição da configuração construtiva de uma estrutura periódica.

3.7 ESTUDO DE CASO

Atualmente, uma forma de se constituir um isolamento de base é dada por meio da aplicação de dispositivos elastoméricos (similares a “coxins”) entre a fundação e a estrutura flexível. Dessa maneira, a capacidade de se ter um colapso estrutural é reduzida, visto que o sistema consegue diminuir os movimentos do solo que atingem a estrutura.

Alguns tipos de coxins são fabricados com uma geometria circular, composta por camadas alternadas de borracha natural e finas camadas de aço (desprezadas nesse estudo). As dimensões variam conforme a necessidade de atenuação e podem alcançar 1500 mm de diâmetro e 695 mm de altura (BRIDGESTONE, 2017). A Figura 13 destaca pontos de aplicação deste sistema na construção civil.

Figura 13 – Isolamento de base: soluções comerciais.



Fonte: (a) Extraído de EMKE (2022a) (b) Extraído de EMKE (2022b).

A ausência de estudos relacionados a periodicidade nestes coxins abrem uma oportunidade de investigação para possível aumento de desempenho. Nesse sentido, é avaliado se uma EP tem potencial de formar uma solução alternativa ou apresentar um ganho de atenuação neste sistema.

Para estabelecer um comparativo de desempenho é modelado um coxim comercial através do método dos elementos espectrais. Como o material predominante é dado por borracha, assume-se um único elemento espectral com módulo de elasticidade igual a 5 MPa e densidade de 950 kg/m³. Além disso, uma geometria circular com diâmetro de 1500 mm e altura de 695 mm é adotada para este elemento.

Por outro lado, o então “Coxim periódico” é desenvolvido com borracha ($E_a = 5$ MPa e $\rho_a = 950$ kg/m³) e concreto ($E_c = 26$ GPa e $\rho_c = 2300$ kg/m³) de modo que se tenha

duas camadas por célula. Três configurações de EP com $N_{cell} = 1$ são escolhidas para esta avaliação e as propriedades geométricas são mostradas na Tab. 4.

Tabela 4 – Configurações da EP escolhidas para o estudo de caso.

Parâmetro	Modelos Avaliados		
	Caso 01	Caso 02	Caso 03
L_a	347,5 mm	1250 mm	650 mm
L_c	347,5 mm	1250 mm	1850 mm
D_a	1500 mm	1500 mm	1224,7 mm
D_c	1500 mm	1500 mm	1500 mm

Fonte: Elaborado pelo autor.

Por meio da Tabela 4, nota-se que o caso 01 é uma estrutura periódica com a mesma altura e diâmetro da solução convencional (coxim comercial). Dessa forma, serve como um comparativo imediato de desempenho. Já o caso 02, fornece uma célula periódica mais longa, mas ainda com o mesmo diâmetro da solução convencional. O tipo de periodicidade formado tanto para o caso 01 quanto para o caso 02 é a de Material. Por fim, o caso 03 fornece uma solução utilizando periodicidade mista. Com base na Tabela 4, as razões L_{ca} e A_{ca} são 2,85 e 1,5, respectivamente.

A análise desenvolvida fornece resultados com base em transmissibilidade, avaliando o comportamento da EP sob ondas longitudinais e de flexão. As condições de contorno admitidas são do modo livre-livre.

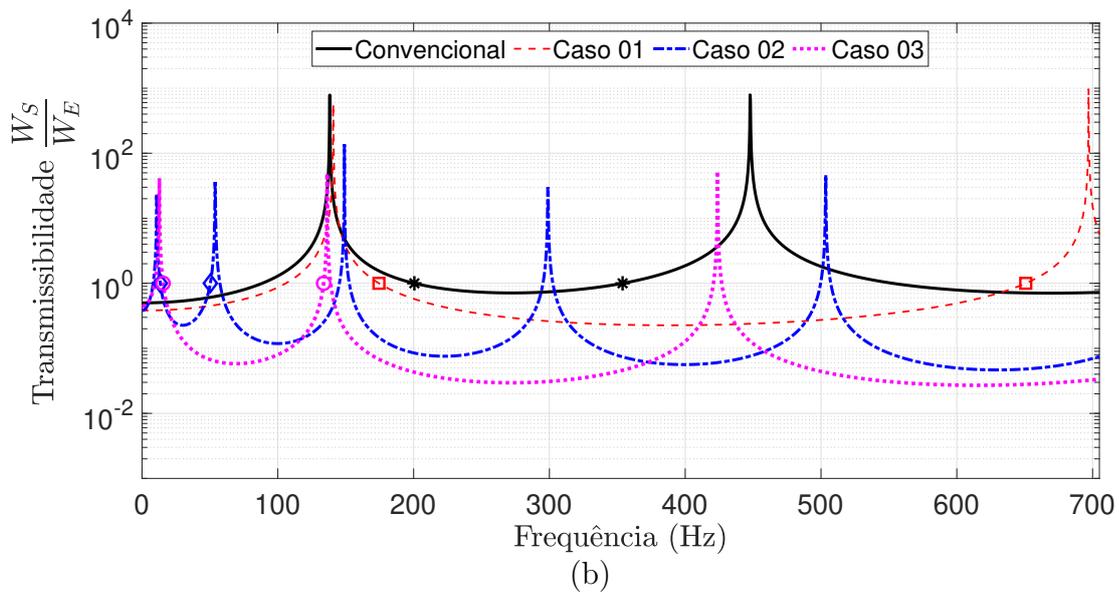
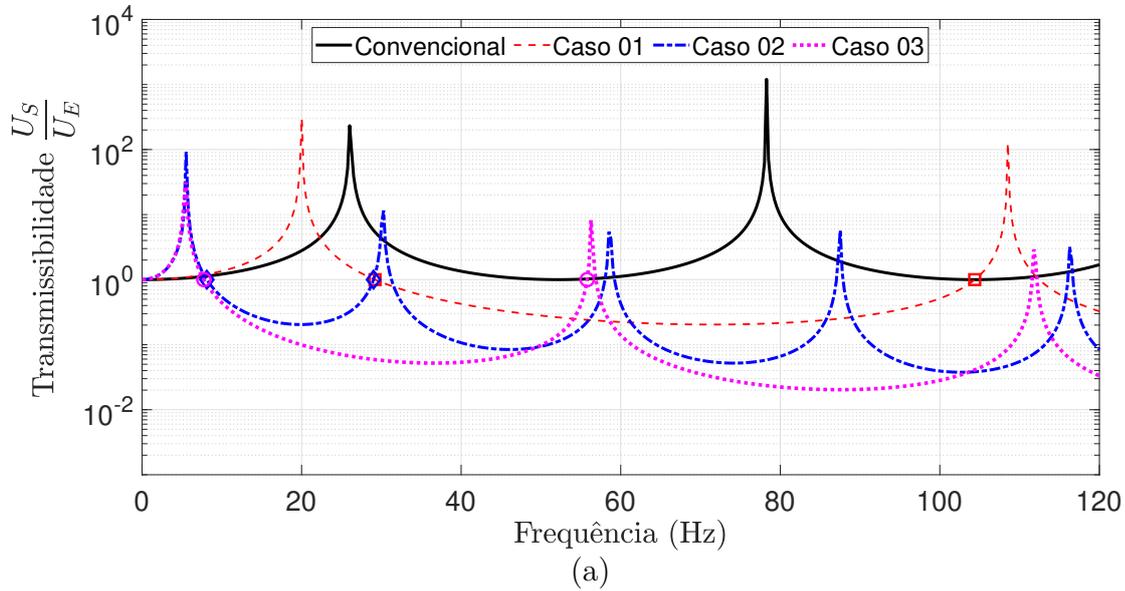
Os resultados deste estudo são apresentados na Figura 14 e mostram que o coxim convencional tem capacidade de formar um *Band Gap* em uma faixa de 200,5-353,9 Hz para ondas flexionais. Por outro lado, nenhuma redução de transmissibilidade é vista quando a estrutura está submetida a ondas longitudinais.

Para ondas longitudinais, a EP mostra um melhor desempenho, de maneira que para o caso 01 é formado um *Band Gap* de 29,2-104,4 Hz, ou seja, com uma largura de banda igual a 75,2 Hz. Já o caso 02, forma um *Band Gap* de 8,1-29 Hz, logo tem uma largura de banda igual a 20,9 Hz. Por último, o caso 03 desenvolve um *Band Gap* de 7,8-55,8 Hz, ou seja, com uma largura de banda igual a 48 Hz.

Para ondas flexionais, o caso 01 tem um *Band Gap* de 174,5-650,8 Hz, formando uma largura de banda igual a 476,3 Hz. O caso 02, por sua vez, tem o seu primeiro *Band Gap* na faixa de 13,5-50,3 Hz, isso representa uma largura de banda igual a 36,8 Hz. Já o caso 03, forma um *Band Gap* de 15,5-133,7 Hz, ou seja com uma largura de 118,2 Hz.

Em conclusão, destaca-se que o caso 03 teve um melhor desempenho em comparação com os outros avaliados, formando um *Band Gap* com maior potencial de atender a faixa de frequência considerada para eventos sísmicos (2 - 40 Hz). Portanto, com base nos resultados

Figura 14 – Transmissibilidade coxim convencional *versus* coxim periódico: (a) Ondas longitudinais e (b) Ondas flexionais.



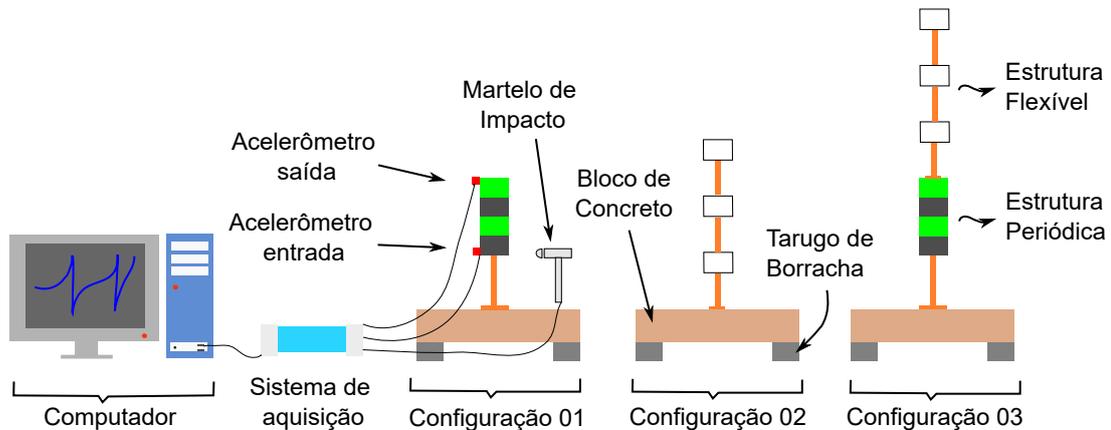
Fonte: Elaborado pelo autor.

encontrados e também na possibilidade de atenuar ondas longitudinais, conclui-se que a EP tem potencial de formar uma solução alternativa para um sistema de isolamento de base.

4 *SETUP* EXPERIMENTAL

As avaliações experimentais são desenvolvidas com base em três configurações, sendo a primeira somente com a estrutura periódica, a segunda apenas com a estrutura flexível e a última com o modelo acoplado (EP + estrutura flexível). As três configurações são visualizadas na Figura 15.

Figura 15 – Configurações experimentais.



Fonte: Elaborado pelo autor.

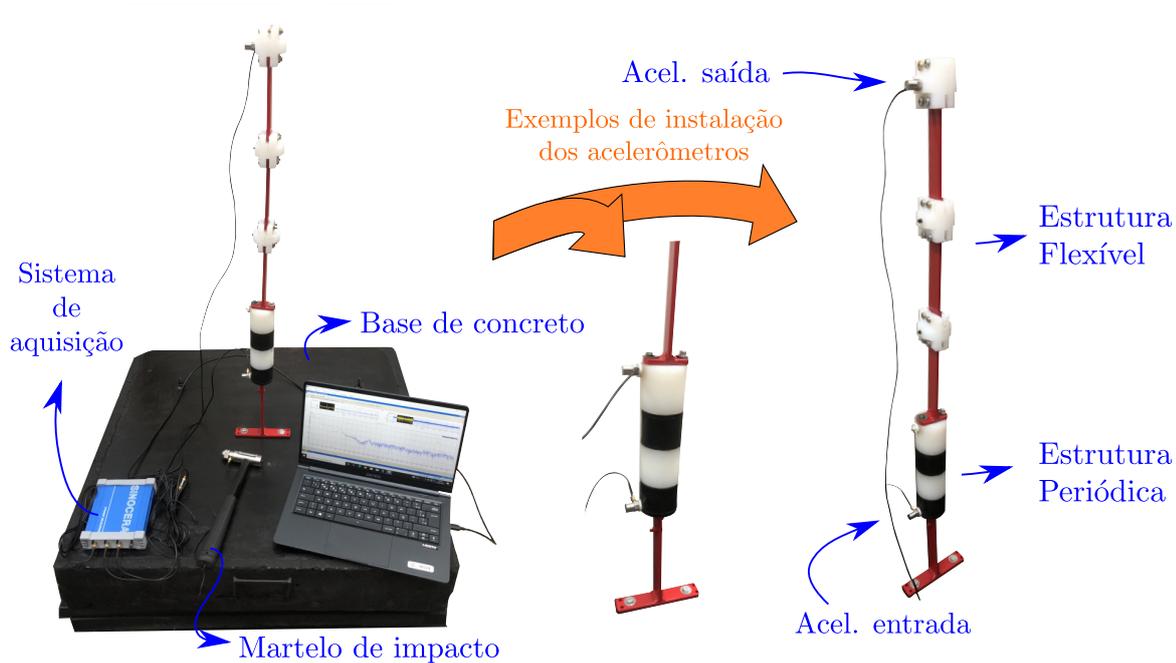
O modelo é fixado em uma superfície antivibratória a base de concreto e borracha. A estrutura é excitada por um martelo de impacto (SINOCERA-LC-02A), de modo a formar ondas de flexão. As vibrações são lidas através de dois acelerômetros (CA-YD-181) e um sistema de aquisição (SINOCERA-YE6231). Os dados coletados são então transferidos para um notebook para posterior processamento. A Figura 16 mostra o experimento real montado para ensaios.

A EP do ensaio contém duas células cilíndricas, que são fabricadas com borracha (coxim modelo R-326) e nylon. A união entre as partes da célula é feita por meio de rosqueamento, visto que o coxim apresenta parafusos nas duas extremidades. O elemento de engaste, que faz a ligação Base-EP, é fabricado com uma barra chata de aço.

A EF é fabricada com três cilindros de nylon e três barras chatas de aço. Cada item é fixado através de parafusos, permitindo que cada parte da estrutura tenha movimentos independentes.

Todas as configurações experimentais são modeladas via Método dos Elementos Espectrais. A discretização do modelo ocorre a cada mudança de seção ou material. Logo, existem 5, 6 e 11 elementos para as configurações 01, 02 e 03, respectivamente. Fixadores, porcas e arruelas são desconsiderados durante as análises.

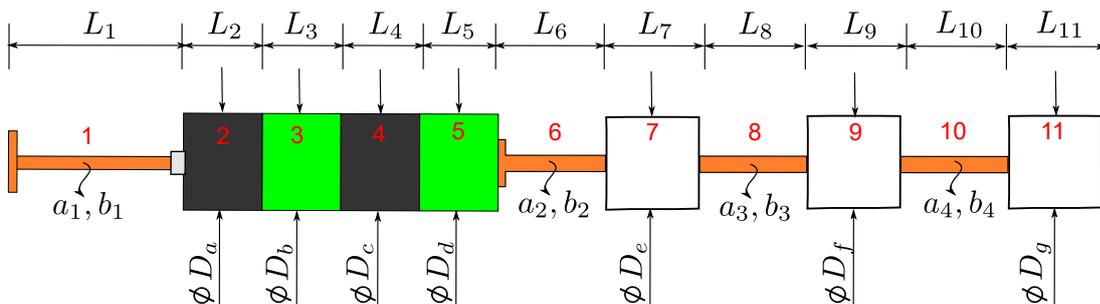
Figura 16 – Montagem experimental.



Fonte: Elaborado pelo autor.

As dimensões da estrutura após um ajuste de modelo são dadas a partir da Figura 17, enquanto que as cotas medidas podem ser consultadas no apêndice C.

Figura 17 – Cotas do modelo.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Um formato circular é assumido para os elementos 2, 3, 4, 5, 7, 9, 11, desse modo, a área e o momento de inércia passam a ser calculados como $A_i = \frac{\pi d_i^2}{4}$ e $I_i = \frac{\pi d_i^4}{64}$, respectivamente. As variáveis A_i , I_i e d_i representam, nesta sequência, a área de seção transversal (m^2), o momento de inércia (m^4) e o diâmetro (m), de acordo com o i -ésimo elemento.

Para os elementos 1, 6, 8, 10 é considerada uma seção transversal retangular. Logo, a área e o momento de inércia passam a ser calculados por $A_i = a_i \cdot b_i$ e $I_i = \frac{1}{12} \cdot b_i \cdot a_i^3$. As variáveis, a_i , b_i representam a espessura e a largura do i -ésimo elemento. Além disso,

Tabela 5 – Propriedades utilizadas durante avaliações teóricas.

Propriedade	Número do Elemento										
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
E (GPa)	200	0,005	3	0,005	3	200	3	200	3	200	3
ρ (kg/m ³)	7800	950	1130	950	1130	7800	1130	7800	1130	7800	1130
L (mm)	163	38	47,2	53,6	60	160	20	135	30	130	40
D (mm)	-	49,6	50,14	49,58	50,24	-	60	-	75	-	55
a (mm)	4,8	-	-	-	-	4,8	-	7	-	4,8	-
b (mm)	25,4	-	-	-	-	25,4	-	25,5	-	25,5	-

Fonte: Elaborado pelo autor.

as variáveis A_i e I_i seguem conforme definidas anteriormente.

5 RESULTADOS EXPERIMENTAIS

Nesta seção são apresentados os resultados experimentais dos ensaios para as configurações 01, 02 e 03. Os resultados são apresentados por meio de curvas de função de resposta em frequência e transmissibilidade. Em todas as análises as curvas experimentais são comparadas com as previsões teóricas.

5.1 FUNÇÃO DE RESPOSTA EM FREQUÊNCIA

O ponto de análise da FRF para as configurações 01 e 03 é na entrada da estrutura periódica. Já na configuração 02, a FRF é avaliada na primeira massa do modelo.

Os dados aquistados fornecem a curva de FRF em aceleração, pois dados de aceleração foram coletados depois da aplicação de uma força. Por outro lado, através do SEM, é calculada uma curva de FRF em receptância, uma vez que deslocamentos são utilizadas para realizar este cálculo. Para tornar as análises equivalentes, a função de resposta em frequência em receptância (FRF_r) é convertida para aceleração (FRF_a) aplicando a derivada 2 vezes no domínio da frequência (multiplicando por $(j\omega)^2$), ou seja,

$$FRF_a(\omega) = (j\omega)^2 FRF_r(\omega) \quad (5.1)$$

onde j representa unidade imaginária ($\sqrt{-1}$) e ω a frequência. A Figura 18 mostra os resultados obtidos.

Na Figura 18 (a), os picos ressonantes estão localizados em 13,75 Hz, 63,74 Hz e 137,47 Hz. A curva teórica foi ajustada por meio do módulo de elasticidade complexo $E(1 + \beta j)$, onde β assume valores de 0,01 para aço, 0,2 para a borracha e 0,06 para o nylon.

Na Figura 18 (b) os picos ressonantes são 14 Hz, 90 Hz e 225,85 Hz. A curva teórica foi ajustada utilizando coeficientes de amortecimento complexo iguais a 0,05, em todos os materiais.

Na Figura 18 (c) os picos ressonantes assumem valores iguais a 21,56 Hz, 59,15 Hz, 98,32 Hz e 180,81 Hz. A curva teórica segue os ajuste anteriores, ou seja, são mantidas as mesmas propriedades escolhidas para o caso (a) e (b).

Com base nos resultados, constata-se que o modelo espectral teve grande capacidade de prever o comportamento dinâmico de todas as configurações em baixa frequência. Os ajustes do modelo para as configurações 01 e 02 permitiram aproximar a curva teórica com os resultados experimentais além de fornecer um ajuste de qualidade para a terceira

configuração.

5.2 CURVAS DE TRANSMISSIBILIDADE

A aquisição de dados através de dois acelerômetros permite mostrar as curvas de transmissibilidade. Dessa forma, é possível explorar o modelo com base em três casos diferentes, que são a transmissibilidade da EP de acordo com a configuração 01 (Caso 01); a transmissibilidade EP por meio da configuração 03 (Caso 02) e a transmissibilidade da base da EP até a última massa da estrutura flexível (Caso 03). Os resultados obtidos são então comparados com as previsões teóricas e apresentados na Figura 19. As propriedades do modelo permanecem iguais ao estudo anterior.

A curva experimental apresentada na Fig 19 (a) mostra o início da formação do *Band Gap* em 136 Hz com uma redução na transmissibilidade conforme aumenta frequência. O elevado grau de amortecimento do sistema e também a dificuldade de excitar a estrutura com o martelo de impacto fazem com que o resultado seja previsto pela análise teórica até a faixa de 200 Hz.

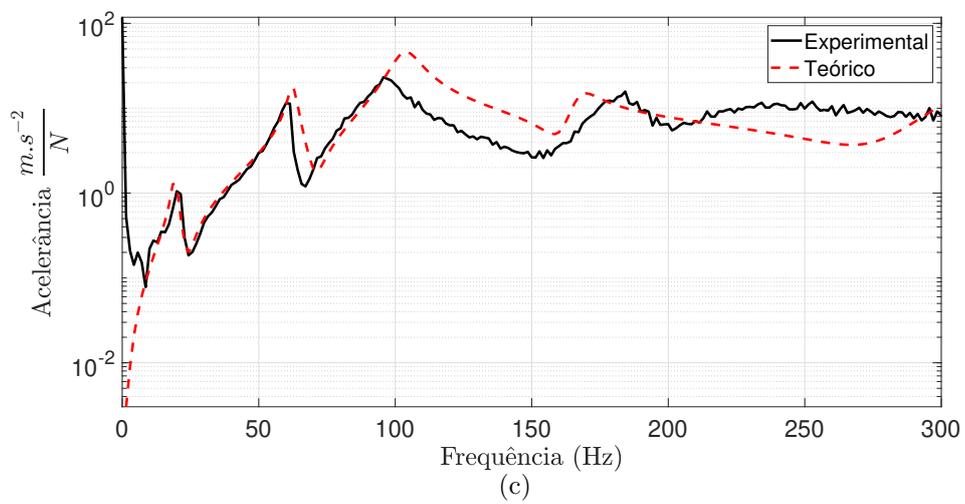
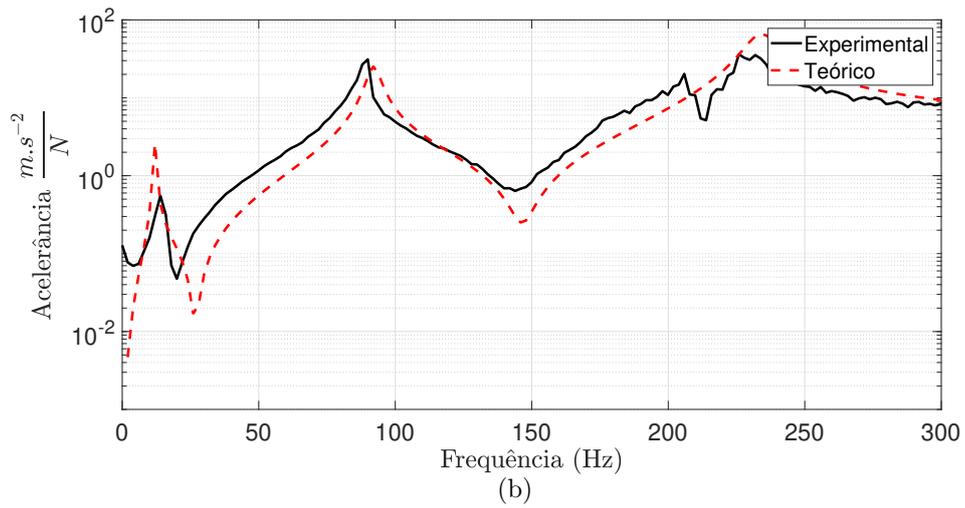
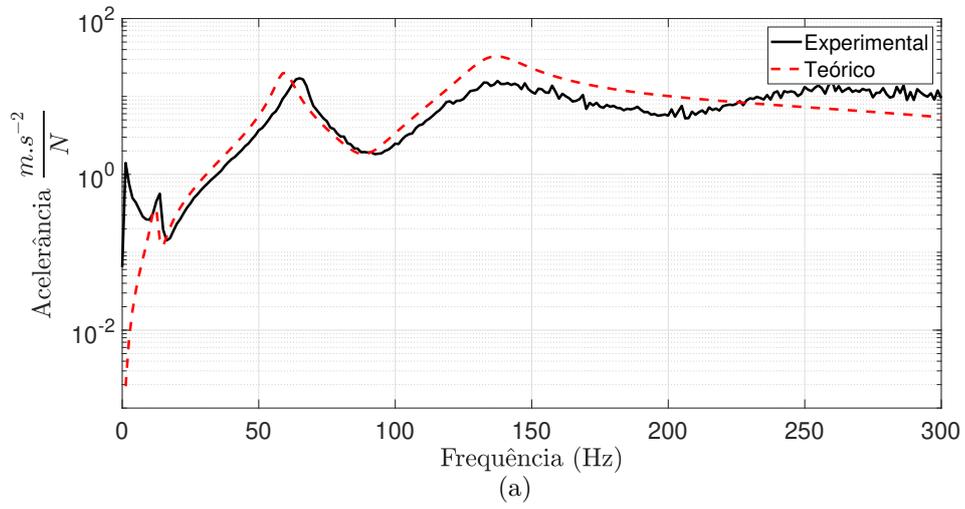
Já na Figura 19 (b), nota-se que a curva de transmissibilidade é bastante afetada, pois ocorre uma interação entre a dinâmica da EP e da EF. Nesta configuração as faixas atenuativas estão entre 35,7-62,8 Hz, 72,84-147,1 Hz e de 158,5 Hz em diante. Os resultados teóricos até a faixa de 200 Hz mostraram-se adequados para fornecer uma previsão do comportamento da estrutura.

Na Figura 19 (c), é apresentada a curva de transmissibilidade da base da EP até a última massa da estrutura flexível. Nestes resultados observa-se que a interação do movimento ondulatório com todas as descontinuidades do modelo favorece a formação dos *Band Gap* no intervalo de 75-154,14 Hz. Além disso, nota-se uma tendência de redução na transmissibilidade em torno de 50 Hz.

Como observações gerais, conclui-se que a baixa diferença de descontinuidade entre as partes da células da estrutura periódica favorece a formação do *Band Gap* em uma maior frequência. Por outro lado, a interação da estrutura flexível com a EP mostrou uma grande influência nas curvas de transmissibilidade, com uma tendência de gerar regiões atenuativas em baixa frequência.

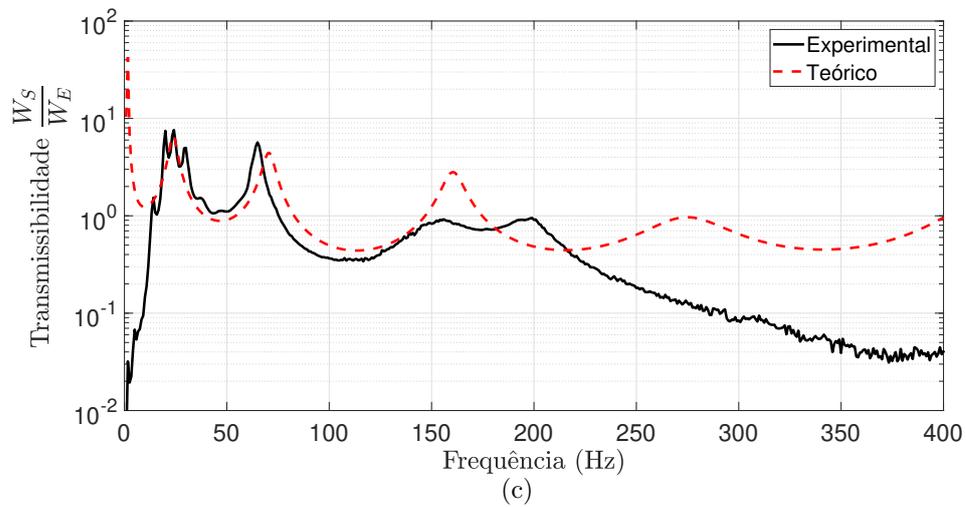
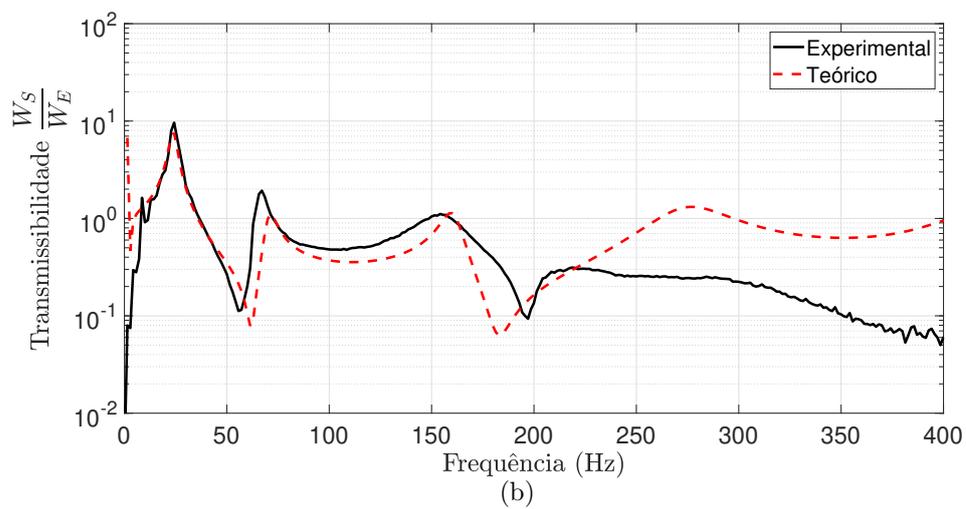
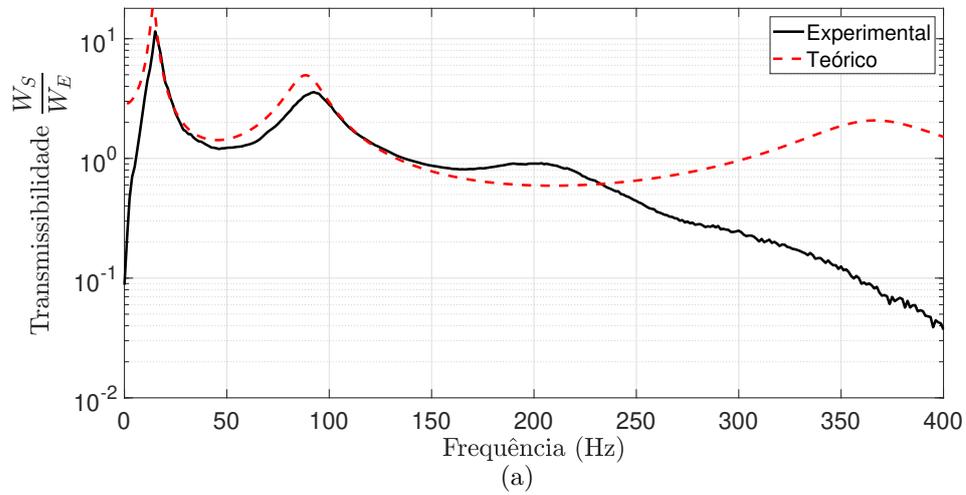
O comparativo das curvas teóricas e experimentais mostraram que a metodologia forneceu uma boa previsibilidade do comportamento de todas as configurações até 200 Hz. O elevado grau de amortecimento da borracha necessita a utilização de outros sistemas de excitação, como um shaker eletrodinâmico com sinais do tipo randômicos, *sweep* ou *chirp*, para avaliar maiores frequências.

Figura 18 – Função de Resposta em Frequência: (a) config. 01: Estrutura periódica, (b) config. 02: Estrutura flexível e (c) config. 03: Estrutura completa (EP+EF).



Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 19 – Curvas de transmissibilidade: (a) Caso 01, (b) Caso 02, (c) Caso 03.



Fonte: Elaborado pelo autor.

6 CONCLUSÃO

Eventos sísmicos ocorrem em diversas regiões do mundo e muitas vezes provocam perdas incalculáveis. Logo, a busca e o desenvolvimento de novas soluções com capacidade de redução dos danos são facilmente justificadas.

Neste trabalho, uma avaliação preliminar sobre o potencial uso de uma EP em um sistema de isolamento de base foi desenvolvida. Os estudos apresentados através das Figuras 8, 9, 11, 12 permitiram concluir que quanto maior a descontinuidade provocada em uma célula unitária, seja ela dada por propriedades físicas ou geométricas, maior é a capacidade de atenuar as ondas em baixa frequência.

A análise teórica também mostrou que aumentar o número de células aumenta a capacidade de atenuação para ondas longitudinais, porém diminui a largura de banda. Para ondas de flexão, o aumento de N_{cell} favorece a atenuação de ondas flexionais em baixa frequência. Este resultado é visto na Figura 10, sendo fundamental para nortear o projeto de uma estrutura periódica.

Um estudo de caso com o objetivo de avaliar a aplicação de uma EP em um sistema de isolamento de base também foi desenvolvido. Os resultados da Figura 14 mostraram que este conceito tem a capacidade de gerar ganhos significativos em atenuação. Além disso, também foi visto que a EP tem potencial de evitar a propagação de ondas longitudinais, enquanto que a solução convencional não apresentou essa capacidade.

A validação da metodologia foi realizada desenvolvendo ensaios experimentais. As Figuras 18 e 19 afirmaram que o método dos elementos espectrais, baseado na modelagem de barra e viga Euler-Bernoulli, teve a capacidade de representar a dinâmica da estrutura periódica, estrutura flexível e também da estrutura completa (EP+EF) em baixa frequência.

Ainda com base no estudo experimental, é visto que o acoplamento de uma estrutura flexível promove alterações nas respostas dinâmicas da estrutura. Nesse sentido, foram observadas o surgimento de novas regiões atenuativas em baixa frequência para ondas de flexão.

Por outro lado, o alto grau de amortecimento da borracha limitou a faixa de frequência amostrada durante os ensaios. Nesse sentido, conclui-se que a utilização de outros sistemas de excitação, como um shaker eletrodinâmico com sinais do tipo randômicos, *sweep* ou *chirp*, tem capacidade para avaliar maiores frequências.

Por fim, este estudo preliminar mostrou que as estruturas periódicas tem potencial para serem utilizadas na atenuação de ondas longitudinais e flexionais em um sistema de isolamento de base.

7 SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS

Com base nas análises desenvolvidas neste trabalho, sugere-se alguns pontos de investigação em trabalhos futuros:

- Investigar de forma mais aprofundada a influência na formação dos *Band Gaps* de uma EP sob diferentes condições de contorno.
- Investigar a resistência mecânica de uma estrutura periódica para aplicações diversas, como isolamento de grandes estruturas, pontes e linhas de transmissão.
- Investigar os métodos de união entre as camadas de uma estrutura periódica, por exemplo, união por colagem, soldagem ou fixadores, e os efeitos gerados nas curvas de transmissibilidade.

REFERÊNCIAS

- ASIRI, S. Vibration attenuation of automotive vehicle engine using periodic mounts. *International Journal of Vehicle Noise and Vibration*, v. 3, n. 3, p. 302–315, 2007.
- ASIRI, S.; BAZ, A.; PINES, D. Periodic struts for gearbox support system. *Journal of Vibration and Control*, v. 11, n. 6, p. 709–721, 2005.
- BENEVELI, S. M. A. *Controle híbrido para atenuação de vibrações em edifícios*. Tese (Doutorado) — Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2002.
- BRIDGESTONE. *Seismic Isolation Product Line-up*. 2017. Disponível em: <https://www.bridgestone.com/products/diversified/antiseismic_rubber/pdf/catalog_201710.pdf>. Acessado em: 13 de set. de 2022.
- CARNEIRO Jr, J. et al. On the attenuation of vibration using a finite periodic array of rods comprised of either symmetric or asymmetric cells. *Journal of Sound and Vibration*, v. 511, p. 116217, 2021.
- CARNEIRO Jr, J. P.; SANTOS, R. B.; BUENO, D. D. Analysis of suppression of longitudinal vibrations in rods with material periodicity. In: *25 th ABCM International Congress of Mechanical Engineering*. Uberlândia, Brasil: ABCM, 2019.
- CARNEIRO, R. B. *Controle semi-ativo de vibrações em estruturas utilizando amortecedor magnetorreológico*. Tese (Doutorado) — Universidade de Brasília, Distrito Federal, 2009.
- CUNHA, L. R. et al. Estrutura periódica unidimensional contendo atuadores piezelétricos para controle de vibrações. Simpósio do Programa de Pós - Graduação em Engenharia Mecânica (POSMEC), Uberlândia, 2014.
- EMKE. *LEAD RUBBER BEARINGS (LRB)| EMKE Seismic Isolation*. 2022. Disponível em: <<https://emke.com.tr/en/urunlerimiz/lead-rubber-bearings-lrb/>>. Acessado em: 24 de set. 2022.
- EMKE. *NATURAL RUBBER BEARING (NRB)| EMKE Seismic Isolation*. 2022. Disponível em: <<https://emke.com.tr/en/urunlerimiz/natural-rubber-bearing-nrb/>>. Acessado em: 24 de set. 2022.
- FAHY, F.; GARDONIO, P. *Sound and structural vibration: radiation, transmission and response*. 2. ed. [S.l]: Elsevier, 2007.
- HUANG, T. T. et al. Based on auxetic foam: A novel type of seismic metamaterial for lamb waves. *Engineering Structures*, v. 246, p. 112976, 2021.
- JAIN, S.; PUJARI, S.; LASKAR, A. Investigation of one dimensional multi-layer periodic unit cell for structural base isolation. *Structures*, v. 34, p. 2151–2163, 2021.
- LEE, U. *Spectral element method in structural dynamics*. 1. ed. Singapore: Wiley, 2009.
- LIU, X.; REN, Y.; SONG, X. Combined attenuation zones of combined layered periodic foundations. *Applied Sciences*, v. 11, n. 15, 2021.

MEAD, D. Wave propagation in continuous periodic structures: research contributions from southampton. *Journal of Sound and Vibration*, v. 190, n. 3, p. 495–524, 1996.

RAO, S. S. *Vibrações Mecânicas*. 4. ed. São Paulo: Pearson, 2008.

SANTOS, R. B. *Controle ativo de vibrações em estruturas flexíveis utilizando desigualdades matriciais lineares (LMIs)*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Estadual Paulista, São Paulo, 2008.

SANTOS, R. B. *An alternative approach to design periodic rods*. Tese (Doutorado) — Universidade Estadual Paulista, São Paulo, 2018.

WITARTO, W. et al. Seismic isolation of small modular reactors using metamaterials. *AIP Advances*, v. 8, n. 4, p. 045307, 2018.

XIANG, H. J. et al. Periodic materials-based vibration attenuation in layered foundations: experimental validation. *Smart Materials and Structures*, v. 21, n. 11, p. 112003, 2012.

ZHAO, C. et al. Isolation performance of a small modular reactor using 1d periodic foundation. *Engineering Structures*, v. 244, p. 112825, 2021.

APÊNDICE A - Matriz espectral para o elemento de barra.

A determinação dos termos que compõem a matriz espectral do elemento de barra pode ser feita de forma algébrica, relacionando as matrizes de deslocamento e força já conhecidas.

A relação espectral é dada do seguinte modo:

$$S_R(\omega)d_R = f_R(\omega) \quad (7.1)$$

$$(7.2)$$

A matriz d_R pode ser reescrita na forma da Eq. 2.15. Por outro lado, a matriz f_R também pode ser trabalhada algebricamente para facilitar as operações matemáticas.

Sabendo que $f_R(\omega)$ é dado por

$$f_R(\omega) = \begin{Bmatrix} -EAU'(0) \\ EAU'(L) \end{Bmatrix} \quad (7.3)$$

e que

$$U'(x) = a_1(-ik_L)e^{-ik_Lx} + a_2(ik_L)e^{ik_Lx} \quad (7.4)$$

pode-se reescrever $f(\omega)$ da seguinte forma

$$f_R(\omega) = EA \begin{bmatrix} ik_L & -ik_L \\ -ik_L e^{-ik_LL} & ik_L e^{ik_LL} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} \quad (7.5)$$

ou

$$f_R(\omega) = F_R(\omega).a \quad (7.6)$$

Desse modo, aplicando a Eq. 2.15 e a Eq. 7.6 na Eq. 7.2 é possível escrever uma expressão de forma que o vetor de constantes a seja eliminado, como mostram os cálculos abaixo

$$S_R(\omega).H_R(\omega)a = F_R(\omega)a \quad (7.7)$$

$$S_R(\omega) = F_R(\omega)H_R^{-1}(\omega) \quad (7.8)$$

Portanto, a Eq. 7.8 ilustra uma forma alternativa para se calcular os termos da matriz espectral do elemento de barra.

APÊNDICE B - Matriz espectral para o elemento de viga.

O desenvolvimento dos termos que compõem a matriz espectral do elemento de viga (S_B) pode ser feito relacionando as matrizes já conhecidas.

A relação espectral é dada do seguinte modo:

$$S_B(\omega)d_B = f_B(\omega) \quad (7.9)$$

A matriz d_B pode ser reescrita na forma da Eq. 2.40. Seguindo a mesma lógica, a matriz F também pode ser reorganizada de forma a apresentar somente os termos de interesse.

Sabendo que $f_B(\omega)$ é dada por

$$f_B = \begin{Bmatrix} -Q(0) \\ -M(0) \\ Q(L) \\ M(L) \end{Bmatrix} \quad (7.10)$$

e que

$$W(x; \omega) = a_1 e^{-ik_F x} + a_2 e^{-k_F x} + a_3 e^{ik_F x} + a_4 e^{k_F x} \quad (7.11)$$

$$W'(x; \omega) = a_1 (-ik_F) e^{-ik_F x} + a_2 (-k_F) e^{-k_F x} + a_3 (ik_F) e^{ik_F x} + a_4 (k_F) e^{k_F x} \quad (7.12)$$

$$W''(x; \omega) = a_1 (-k_F^2) e^{-ik_F x} + a_2 (k_F^2) e^{-k_F x} + a_3 (-k_F^2) e^{ik_F x} + a_4 (k_F^2) e^{k_F x} \quad (7.13)$$

$$W'''(x; \omega) = a_1 (ik_F^3) e^{-ik_F x} + a_2 (-k_F^3) e^{-k_F x} + a_3 (-ik_F^3) e^{ik_F x} + a_4 (k_F^3) e^{k_F x} \quad (7.14)$$

pode-se reescrever $f(\omega)$ da seguinte forma

$$f_B(\omega) = EI \begin{bmatrix} -ik_F^3 & k_F^3 & ik_F^3 & -k_F^3 \\ k_F^2 & -k_F^2 & k_F^2 & -k_F^2 \\ ik_F^3 e^{-ik_F L} & -k_F^3 e^{-k_F L} & -ik_F^3 e^{ik_F L} & k_F^3 e^{k_F L} \\ -k_F^2 e^{-ik_F L} & k_F^2 e^{-k_F L} & -k_F^2 e^{ik_F L} & k_F^2 e^{k_F L} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{bmatrix} \quad (7.15)$$

ou

$$f_B(\omega) = F_B(\omega).a \quad (7.16)$$

Desse modo, aplicando a Eq. 2.40 e a Eq. 7.16 na Eq. 7.9 é possível escrever uma expressão de forma que o vetor de constantes a seja eliminado, como mostram os cálculos abaixo

$$S_B(\omega).H_B(\omega)a = F_B(\omega)a \quad (7.17)$$

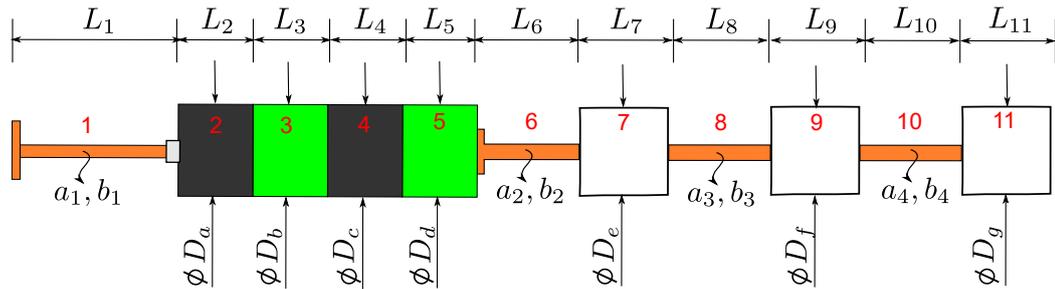
$$S_B(\omega) = F_B(\omega)H_R^{-1} \quad (7.18)$$

Portanto, a Eq. 7.18 ilustra uma forma alternativa para se calcular os termos da matriz espectral do elemento de barra.

APÊNDICE C - Informações geométricas do modelo real

As dimensões reais do modelo são dadas a partir da Tabela 6. Por conveniência, a Figura 17 é novamente apresentada.

Figura 20 – Cotas do modelo.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Tabela 6 – Dimensões reais.

Propriedade	Nº do Elemento										
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
L (mm)	169,8	44	50,5	43,6	50,5	132,9	50	105,5	50,3	103,2	50,4
D (mm)	-	50	50,2	50	51,1	-	50,35	-	50,3	-	50,5
a (mm)	6,35	-	-	-	-	6,35	-	6,35	-	6,35	-
b (mm)	25,4	-	-	-	-	25,4	-	25,4	-	25,4	-

Fonte: Elaborado pelo autor.