



**UNIVERSIDADE FEDERAL DA GRANDE DOURADOS**  
**FACULDADE DE ENGENHARIA - FAEN**  
**ENGENHARIA MECÂNICA**



Murilo Pacheco Magalhães

**ANÁLISE DA FORMAÇÃO DE BAND GAPS EM ESTRUTURAS  
PERIÓDICAS UTILIZANDO O MÉTODO DO ELEMENTO ESPECTRAL**

**Dourados – MS**

**2023**

**MURILO PACHECO MAGALHÃES**

**ANÁLISE DA FORMAÇÃO DE BAND GAPS EM ESTRUTURAS  
PERIÓDICAS UTILIZANDO O MÉTODO DO ELEMENTO ESPECTRAL**

Trabalho de conclusão de curso apresentado a Faculdade de Engenharia da Universidade Federal da Grande Dourados - UFGD, como requisito para a obtenção do título de Bacharel em Engenharia Mecânica.

Orientador: Prof. Dr. Rodrigo Borges Santos

Área de concentração: Mecânica dos Sólidos

**Dourados – MS  
2023**



MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO  
FUNDAÇÃO UNIVERSIDADE FEDERAL DA GRANDE DOURADOS

---

## ANEXO D - AVALIAÇÃO FINAL DO TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO

Aluno: **MURILO PACHECO MAGALHÃES**

Título do trabalho e subtítulo (se houver): **ANÁLISE DA FORMAÇÃO DE BAND GAPS EM ESTRUTURAS PERIÓDICAS UTILIZANDO O MÉTODO DO ELEMENTO ESPECTRAL**

### BANCA EXAMINADORA

1. **Presidente (orientador):**

Prof. Dr. RODRIGO BORGES SANTOS, Universidade Federal da Grande Dourados - UFGD

2. **Membro:**

Prof. Dr. RAFAEL FERREIRA GREGOLIN, Universidade Federal da Grande Dourados - UFGD

3. **Membro:**

Prof. Dr. SANDERSON MANOEL DA CONCEIÇÃO, Universidade Federal da Grande Dourados - UFGD

De acordo com o grau final obtido pelo aluno, nós da banca examinadora, declaramos **APROVADO** o aluno acima identificado, na componente curricular Trabalho de Conclusão de Curso (TCC-II) de Graduação no Curso de Engenharia Mecânica da Universidade Federal da Grande Dourados.

Dourados, 19 de abril de 2023.

Prof. Dr. Rodrigo Borges Santos

Prof. Dr. Rafael Ferreira Gregolin

Prof. Dr. Sanderson Manoel da Conceição

## RESUMO

A redução da vibração utilizando estruturas periódicas tem sido, atualmente, um tópico muito importante estudado na engenharia. Esta ideia tem sido aplicada nos projetos de painéis de satélites, fuselagem e asas de aeronaves, estruturas treliçadas, dutos, trilhos de trem, entre outros. Projetos de estruturas periódicas podem ser empregados para alterar a propagação das ondas que passam através das estruturas, introduzindo um efeito de um filtro. As ondas podem se propagar ao longo da estrutura apenas dentro das faixas de frequência específicas conhecidas como Band Pass, sendo bloqueadas nas faixas de frequências chamadas de Band Gap. Neste contexto, o presente trabalho tem como objetivo analisar a formação de Band Gap em estruturas periódicas com diferentes tipos de periodicidade (material, geométrica e mista). Para realizar esta análise, a estrutura é modelada via método do elemento espectral, o qual difere do método dos elementos finitos na discretização da estrutura, o que diminui os erros e os custos de computação, gerando resultados mais precisos.

**Palavras chave:** Band Gaps. Estruturas periódicas. Método do elemento espectral

## **ABSTRACT**

The Vibration reduction using periodic structures has been, nowadays, a very important topic in engineering. This idea has been applied in the projects of satellite panels, aircraft fuselage and wings, lattice structures, ducts, train tracks, among others. Periodic bar designs can be employed to alter the propagation of waves passing through structures, introducing a filter-like effect. Waves can propagate along the structure only within specific frequency bands known as the "pass band", being blocked in the frequency bands called "stop bands". In this context, the present work aims to analyze the frequency bands using the spectral element method, which differs from the finite element method in the discretization of the structure, which reduces errors and computation costs, generating a more accurate result.

**Keywords:** Band Gaps. Periodic structures. Spectral Element Method

## 1. INTRODUÇÃO

A redução da vibração utilizando estruturas periódicas tem sido, atualmente, um tópico muito importante na engenharia. Esta ideia tem sido aplicada nos projetos de painéis de satélites, fuselagem e asas de aeronaves, estruturas treliçadas, dutos, trilhos de trem, entre outros (NARISSETTI, 2010; MEAD, 1996). Estas estruturas podem ser empregadas para alterar a propagação das ondas que passam através das estruturas, introduzindo um efeito semelhante ao de um filtro.

Nos últimos anos, estruturas periódicas têm gerado interesse entre os pesquisadores por suas propriedades físicas e potenciais aplicações em isolamento e mitigação de vibrações acústicas e elásticas. Estas estruturas possuem uma propriedade dinâmica única de zonas de atenuação em que as ondas em certas bandas de frequências não podem se propagar.

Quando encontrada uma descontinuidade na estrutura periódica, as várias ondas que se propagam refletem e interagem entre si. O processo de propagação de ondas leva a um abundante comportamento dinâmico. Por causa deste comportamento dinâmico, estas estruturas são amplamente empregadas nos domínios da indústria, como aeronáutica, engenharia civil, ciência dos materiais e biomecânica.

Devido ao grande potencial da inserção de periodicidade em estruturas, nos últimos anos, equipes de pesquisa têm investido muito na investigação deste tipo de estrutura e o número de publicações aumentou consideravelmente. Foi dada maior importância a esse tipo de estrutura devido a algumas propriedades interessantes como dispersão de ondas acústicas, vibrações em meios sólidos ou mesmo ondas eletromagnéticas (BANERJEE, 2011).

Na figura 1, mostra um teste realizado em um helicóptero para determinar a vibração do motor para a cabine com e sem uma estrutura periódica.

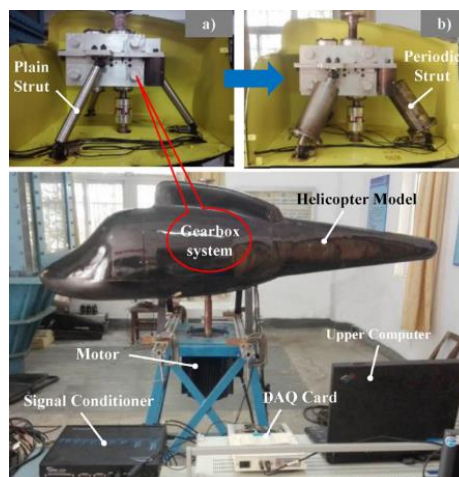


Figura 1: Representação de um teste em um helicóptero com e sem uma estrutura periódica em sua cabine. Fonte: Wang F. (2019)

Na indústria automotiva, veículos podem usar materiais visco elásticos periódicos para minimizar a transmissão de vibração de seus motores para o chassi. Este tipo de estrutura mantém o conforto em níveis de rotação mais elevados em comparação com projetos convencionais (ASIRI, 2007; JUNG ET AL., 2010).

Na área de eletromagnetismo, as estruturas periódicas têm desempenhado um papel fundamental aplicado em diferentes contextos, como superfícies seletivas de frequência, cristais fotônicos ou conjunto de antenas. Estas estruturas possuem aplicações nos sistemas de comunicações, em fibras ópticas, em antenas inteligentes, e no desenvolvimento de filtros que operam como radomes, estrutura de proteção, ou que podem ser aplicados como papel de parede em construções, objetivando confinar sinais dentro ou fora de um cômodo (AZEVEDO, 2013).

Na área de construção civil, a ideia de empregar estruturas periódicas para mitigar danos sísmicos em edifícios atraiu considerável atenção por mais de duas décadas. Essa ideia se baseia no conceito de *Band Gap*. Pesquisas recentes em fundações periódicas localmente ressonantes (LRPF) focaram principalmente no desenvolvimento de células compostas para sistemas de isolamento e evidências numéricas e experimentais de suas propriedades de filtragem em ondas sísmicas. A LRPF é uma fundação de isolamento recentemente proposta para proteção de edifícios com base em componentes de filtragem de frequência geradas devido a movimentos do solo (SUN F. ET AL, 2019).

As viabilidades de fundações periódicas bidimensionais e tridimensionais foram comprovadas por testes de campo em escala. Os resultados dos testes mostraram que as respostas das estruturas foram reduzidas sob excitações com as principais frequências dos componentes em *Band Gaps*. Um teste de mesa de agitação com uma estrutura em uma base periódica em camadas foi realizado e a atenuação da resposta da estrutura foi encontrada quando as frequências de excitação caem no *Band Gap* (SUN F. ET AL, 2019).

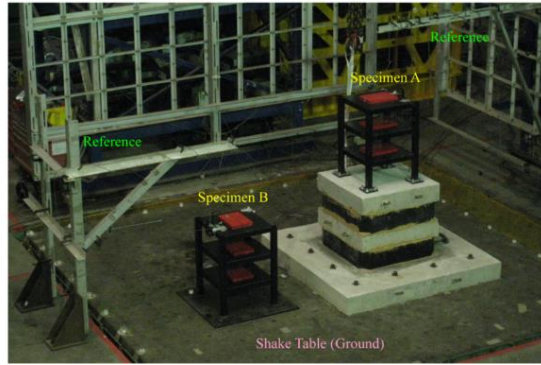


Figura 2: Representação de um teste em uma mesa de agitação com uma estrutura em uma base periódica e a outra estrutura não.

## 1.1 Objetivos

Os objetivos deste trabalho são:

- Analisar a formação de *Band Gap* de uma estrutura periódica, considerando alterações das propriedades físicas e geométricas, ou seja, estruturas periódicas com diferentes tipos de periodicidade (material, geométrica e mista).
- Realizar modelagem e simulações computacionais utilizando o método de elemento espectral.
- Analisar a formação de *Band Gap* de uma estrutura periódica considerando diferentes números de células, diferentes razões de comprimentos dos elementos da célula periódica

## 2. FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

### 2.1. Estruturas periódicas

Uma estrutura periódica consiste em subestruturas idênticas ou elementos, também chamados de células unitárias. Essas células unitárias são partes repetidas usadas para descrever a subestrutura (JENSEN, 2003). A estrutura periódica age como um filtro de onda, sejam elas eletromagnéticas, acústicas, de flexão, ou outra qualquer (ROY e PLUNKETT, 1986). Desta maneira, podendo ser usada em diversas áreas de engenharia aeroespacial, mecânica, civil, entre outras.

Estas estruturas podem consistir em barras, vigas, placas planas com diferentes condições de contorno de suporte. As estruturas mais simples transmitem energia vibracional por apenas um tipo onda, enquanto em outros guias de onda, a energia pode ser transportada por ondas combinadas e quando encontra uma descontinuidade na estrutura periódica, as várias ondas de propagação refletem e interagem entre si.

A Figura 3 mostra uma estrutura periódica inserida entre duas barras. Sendo que  $A_i$  representa as amplitudes ondas incidentes e,  $A_r$  e  $A_t$  as amplitudes de ondas refletidas e transmitidas, respectivamente.

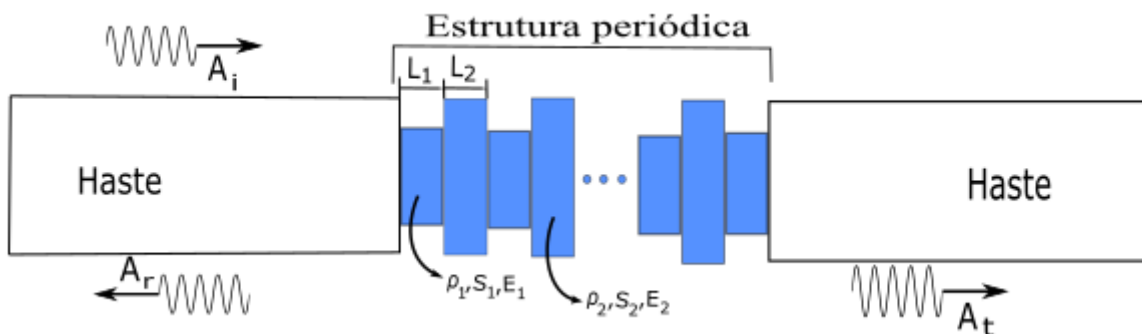


Figura 3 - Representação de uma estrutura periódica entre duas barras. <Autoria própria>

Onde as variáveis  $E$ ,  $\rho$ ,  $A$  e  $L$  representam, respectivamente, o módulo de elasticidade ( $Pa$ ), a densidade ( $kg/m^3$ ), a área de seção transversal ( $m^2$ ) e o comprimento ( $m$ ).

A Figura 4 mostra um exemplo de célula unitária, ou seja, a unidade básica de uma estrutura periódica. A célula unitária é formada por meio de duas partes (1 e 2) e cada parte da célula assume suas propriedades físicas e geométricas de maneira individual.

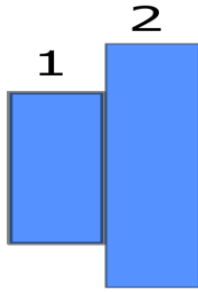


Figura 4 – Célula unitária de uma estrutura periódica. <Autoria própria>

## 2.2 Propriedade de filtragem

As estruturas periódicas podem ser usadas para gerar faixas de frequência nas quais as ondas não se propagam ou são altamente atenuadas através da estrutura. Devido a estas características, este sistema atua como filtro mecânico. As ondas podem se propagar ao longo da estrutura apenas dentro das faixas de frequência específicas conhecidas como *Band Pass*, sendo bloqueadas nas faixas de frequências chamadas de *Band Gap*.

As propriedades de filtragem exibidas por estes sistemas, bem como o posicionamento das faixas de frequência dentro de uma faixa particular, dependem da concepção estrutural e do arranjo das células periódicas. Este efeito de atenuação é gerado devido à reflexão interna das ondas causadas pelas variações da impedância (diferença de propriedades do material ou descontinuidades geométricas). A figura 5 mostra a região de *Band Gap* (BG) e *Band Pass* (BP).

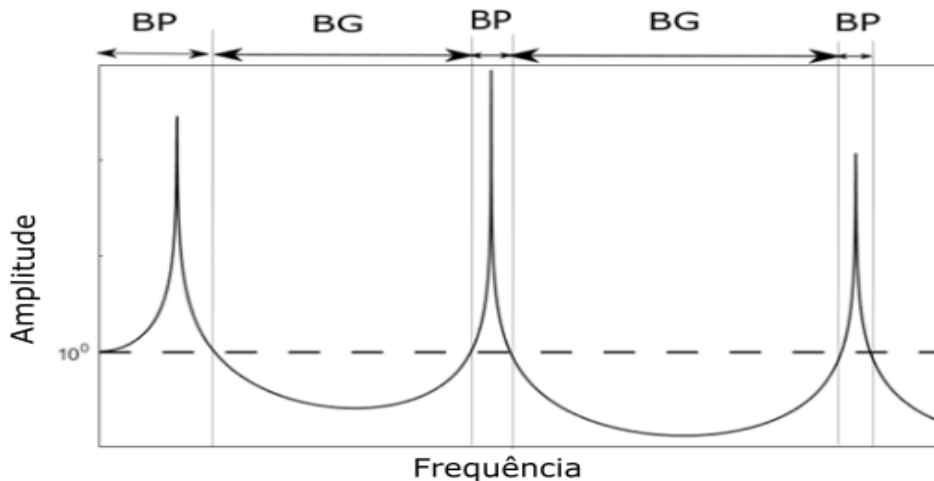


Figura 5 – Regiões de *Band Pass* e de *Band Gap*. <Autoria Própria>

## 2.3. Método do elemento espectral

A modelagem matemática para prever a resposta dinâmica de uma estrutura periódica envolve um conjunto de equações diferenciais. A solução para tais equações pode ser proposta no domínio do tempo ou no domínio da frequência. No Método do Elemento Espectral (SEM), as equações diferenciais são resolvidas no domínio da frequência através da aplicação da transformada de Fourier. O conceito de discretização de uma estrutura, como é visto no método dos elementos finitos, também é aplicado ao SEM.

Para formular o modelo de elemento espectral para uma estrutura sujeita a forças de excitação, normalmente é seguido um procedimento semelhante ao usado no método convencional de elementos finitos (FEM). Em primeiro lugar, a estrutura é dividida em um número de elementos finitos e, em seguida, é definido os graus de liberdade (DOFs) e forças em cada nó dos elementos finitos.

Deriva-se então as funções de forma dinâmica dependentes da frequência resolvendo as equações diferenciais governantes, que são transformados no domínio da frequência usando a teoria da transformada discreta de Fourier (DFT). No SEM, o modelo de elemento finito formulado é chamado de modelo de elemento espectral e, conseqüentemente, a matriz de rigidez dinâmica exata é chamada de matriz de elementos espectrais.

Como a matriz de rigidez exata é usada no SEM, é possível obter soluções exatas para um membro da estrutura sem a necessidade de dividir a estrutura em muitos elementos finitos. Em outras palavras, ao contrário do convencional FEM, a modelagem de um elemento é possível para um membro da estrutura inteira, independentemente de seu comprimento, desde que não contenha nenhuma descontinuidade geométrica ou material dentro.



Devido ao uso mínimo de elementos finitos, o número total de DOFs será significativamente reduzido. No devido tempo, isso reduzirá drasticamente os custos de computação, juntamente reduzindo os erros de cálculo e os erros de discretização do FEM como subprodutos.

Da mesma forma que o método de elementos finitos, o elemento discreto para ondas longitudinais é denominado elemento de barra. Por outro lado, o elemento espectral que contempla a modelagem das ondas de flexão é conhecido como elemento de viga. Na modelagem de uma estrutura periódica, cada parte de uma célula unitária forma um elemento espectral e cada elemento, por sua vez, é composto de duas modelagens, a de barra e viga, formando a matriz espectral do elemento. Quando dois ou mais elementos são unidos passa-se então a existir a matriz espectral global (LEE, 2009).

### 2.3.1 Elemento espectral de barra

Na modelagem espectral os elementos de barra são utilizados para contemplar os movimentos axiais. A Figura 6 ilustra este elemento com seus parâmetros de interesse e convenção de sinais adotados.

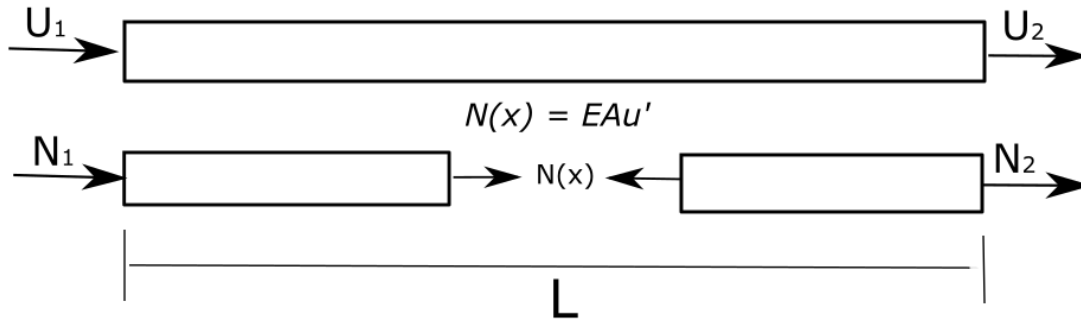


Figura 6 – Elemento espectral de barra. Adaptado de Lee (2009).

Conforme mostra a Figura 4, o elemento de barra apresenta um grau de liberdade em cada extremidade. Os vetores  $U_i$  e  $N_i$  ( $i = 1, 2$ ) denotam, respectivamente o deslocamento axial e a força axial. O termo  $L$  refere-se ao comprimento do elemento utilizado. Por meio do método de força-deslocamento, os elementos espectrais são desenvolvidos com base na equação que descreve o movimento das ondas longitudinais, esse movimento pode ser descrito através da somatória de forças, no qual seria a força axial aplicada na barra e a reação da barra que pode ser descrita pela Lei de Hooke. Desta forma, a equação para a vibração longitudinal em uma barra uniforme é representada por (FAHY; GARDONIO, 2007; LEE, 2009),

$$EAu'' - \rho A\ddot{u} = 0 \quad (1)$$

onde  $u(x, t)$  é o deslocamento longitudinal,  $E$  é o módulo de elasticidade do material ( $Pa$ ),  $A$  é área de seção transversal ( $m^2$ ), enquanto que  $\rho$  é a densidade da barra ( $kg/m^3$ ). A linha (') indica que a variável é uma derivada em relação ao espaço e os pontos (') indicam que a derivada é em relação ao tempo.

A solução da Eq. 1 na forma espectral é dada por (LEE, 2009),

$$u(x, t) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} U_n(x; \omega_n) e^{i\omega_n t} \quad (2)$$

A substituição da Eq. 2 na Eq. 1 seguida por uma manipulação algébrica permite obter o problema de autovalor para uma frequência ( $\omega$ ) como

$$EAU'' - \omega^2 \rho AU = 0 \quad (3)$$

A solução geral para a Eq. 3 pode ser da forma

$$U(x) = ae^{-ik(\omega)x} \quad (4)$$

Substituir a Eq. 4 na Eq. 3 desenvolve uma relação de dispersão do tipo

$$k^2 - k_L^2 = 0 \quad (5)$$

Onde  $k_L$  representa o número de ondas por unidade de distância, ou seja, o número de vezes que uma onda atinge a mesma fase em uma determinada distância de propagação, este número para vibração longitudinal pura é definido por (LEE, 2009)

$$k_L = \omega \sqrt{\frac{\rho A}{EA}} \quad (6)$$

Portanto, para uma barra de comprimento finito L a Eq. 3 assume uma solução do tipo

$$U(x) = a_1 e^{-ik_L x} + a_2 e^{-ik_L x} \quad (7)$$

A Eq. 7 pode ser organizada em forma matricial de modo que

$$U(x) = e(x; \omega) a \quad (8)$$

onde:

$$e(x; \omega) = [e^{-ik_L x} \quad e^{-ik_L x}] \quad (9)$$

$$a = \{a_1 \quad a_2\}^T \quad (10)$$

Assim,  $U(x)$  tem a capacidade de representar os deslocamentos axiais espectrais do elemento de barra, que são relacionados ao campo de deslocamento por meio das seguintes matrizes

$$d_R = \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} U(0) \\ U(L) \end{Bmatrix} \quad (11)$$

O desenvolvimento da Eq. 11 permite uma nova organização matricial que é dada pela seguinte expressão

$$d_R = \begin{bmatrix} e(0; \omega) \\ e(L; \omega) \end{bmatrix} a = H_R(\omega) a \quad (12)$$

onde:

$$H_R(\omega) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ e^{-ik_L L} & e^{-ik_L L} \end{bmatrix} \quad (13)$$

Através da Eq. 12 é possível eliminar o vetor de constante  $a$  da Eq. 8. Dessa maneira, o campo de deslocamentos pode ser reescrito da seguinte forma (LEE, 2009)

$$U(x) = N_R(x; \omega) d_R \quad (14)$$

onde:

$$N_R(x; \omega) = e(x; \omega) H_R^{-1}(\omega) = [N_{R1} \quad N_{R2}] \quad (15)$$

$$N_{R1}(x; \omega) = \text{cosec}(k_L L) \text{sen}(k_L(L - x)) \quad (16)$$

$$N_{R2}(x; \omega) = \text{cosec}(k_L L) \text{sen}(k_L x) \quad (17)$$

As forças espectrais nodais são calculadas por (LEE, 2009)

$$N(x) = EAU'(x) \quad (18)$$

Por analogia aos deslocamentos, é possível correlacionar as forças espectrais com as forças vistas pela resistência dos materiais, conforme as instruções seguintes

$$f_R(\omega) = \begin{Bmatrix} N_1 \\ N_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -N(0) \\ N(L) \end{Bmatrix} \quad (19)$$

Por fim, substituindo a Eq. 14 e Eq. 18 na Eq. 19 resulta em,

$$S_R(\omega)d_R(\omega) = f_R(\omega) \quad (20)$$

Uma das formas para se determinar os termos da matriz espectral do elemento de barra ( $S_R$ ) é desenvolvida no livro de LEE (2009), conforme abaixo

$$S_R(\omega) = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} S_{R11} & S_{R12} \\ S_{R12} & S_{R22} \end{bmatrix} = S_R(\omega)^T \quad (21)$$

onde:

$$S_{R11} = S_{R22} = (k_L L) \cotan(k_L L) \quad (22)$$

$$S_{R12} = -(k_L L) \operatorname{cosec}(k_L L) \quad (23)$$

### 2.3.2 Elemento espectral de viga

No movimento flexional, a equação governante do sistema é dada a partir da modelagem de Euler-Bernoulli. Da mesma forma que o caso anterior, o desenvolvimento da matriz espectral é feito por meio do princípio de força e deslocamento. Na Figura 7 é detalhado o elemento espectral de viga para facilitar a localização dos parâmetros utilizados durante a modelagem.

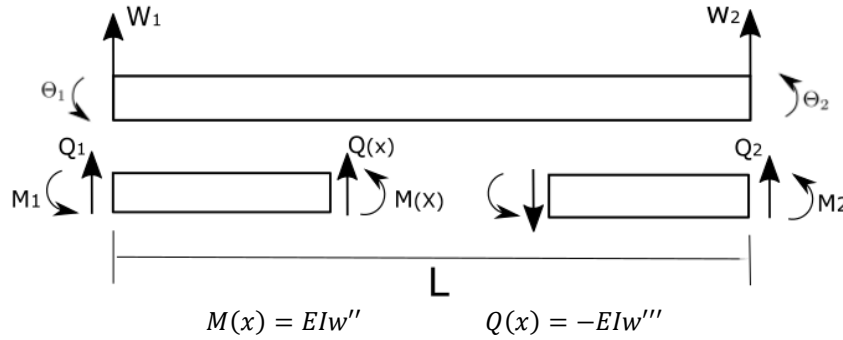


Figura 7 – Elemento espectral de viga. Adaptado de Lee (2009).

O elemento de viga apresenta quatro graus de liberdade (GDL), distribuídos igualmente nas duas extremidades. Os parâmetros  $W_i$  e  $\theta_i$  ( $i = 1, 2$ ) denotam, respectivamente o deslocamento e a rotação. Os termos  $M_i$  e  $Q_i$  representam, nesta ordem, o momento fletor e a força de cisalhamento.

Para descrever o movimento de flexão é considerado a força aplicada no eixo transversal e a reação da barra, esta força aplicada gera uma deflexão na barra e a equação diferencial parcial governante do movimento de flexão pode ser encontrada na literatura na seguinte forma (FAHY; GARDONIO, 2007; LEE, 2009),

$$EIw'''' + \rho A \dot{w} = 0 \quad (25)$$

Onde  $w(x, t)$  é o deslocamento transversal,  $E$  é o módulo de Young ( $Pa$ ),  $\rho$  é a densidade ( $kg/m^3$ ),  $A$  é a área da seção transversal ( $m^2$ ) e  $I$  é o momento de inércia ( $m^4$ ).

O momento e a força de cisalhamento são relacionados com a curva de deformação  $w(x, t)$  de acordo com as seguintes expressões (LEE, 2009).

$$M(x, t) = EIw''(x, t) \quad (26)$$

$$Q(x, t) = -EIw'''(x, t) \quad (27)$$

A solução na forma espectral da Eq. 25 é dada por (LEE, 2009).

$$w(x, t) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} W_n(x; \omega_n) e^{i\omega_n t} \quad (28)$$

A substituição da Eq. 28 na Eq. 25 resulta em um problema de autovalor para uma frequência específica ( $\omega$ ) na forma

$$EIW'''' - \omega^2 \rho A W = 0 \quad (29)$$

assumindo uma solução geral na forma

$$W(x) = ae^{-ik(\omega)x} \quad (30)$$

A substituição da Eq. 30 na Eq. 29 resulta em uma relação de dispersão do tipo

$$k^4 - k_F^4 = 0 \quad (31)$$

A variável  $k_F$ , representa o número de ondas por unidade de distância, ou seja, o número de vezes que uma onda atinge a mesma fase em uma determinada distância de propagação e o número de onda para flexão pura pode ser calculado conforme a equação abaixo (LEE, 2009; FAHY; GARDONIO, 2007).

$$k_F = \sqrt{\omega} \left( \frac{\rho A}{EI} \right)^{\frac{1}{4}} \quad (32)$$

Com base nisso, pode-se dizer então que a solução geral da Eq. 29 para um elemento de viga de comprimento  $L$  é obtida de acordo com

$$W(x; \omega) = a_1 e^{-ik_F x} + a_2 e^{-k_F x} + a_3 e^{ik_F x} + a_4 e^{k_F x} \quad (33)$$

A equação 33 representa então o campo de deslocamentos para o elemento da Figura 5. De acordo com (LEE, 2009), este campo de deslocamento pode ser relacionado com os deslocamentos nodais e as rotações nodais, como mostra a Eq. 34.

$$d_B = \begin{bmatrix} W_1 \\ \theta_1 \\ W_2 \\ \theta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W(0) \\ W'(0) \\ W(L) \\ W'(L) \end{bmatrix} \quad (34)$$

Aplicando a Eq. 33 na Eq. 34 são obtidos os seguintes resultados,

$$d_B = \begin{bmatrix} e(0; \omega) \\ e'(0; \omega) \\ e(L; \omega) \\ e'(L; \omega) \end{bmatrix} = H_B(\omega) a \quad (35)$$

onde

$$H_B(\omega) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -ik_F & k_F & ik_F & k_F \\ e^{-ik_F L} & e^{-k_F L} & e^{ik_F L} & e^{k_F L} \\ -ik_F e^{-ik_F L} & -k_F e^{-k_F L} & ik_F e^{ik_F L} & k_F e^{k_F L} \end{bmatrix} = H_B(\omega) a \quad (36)$$

As componentes espectrais de momento fletor e cisalhamento são relacionadas a  $W(x)$  de acordo com a Eq. 26 e a Eq. 27, respectivamente, gerando as seguintes expressões (LEE, 2009)

$$M(x, t) = EI W''(x) \quad Q(x, t) = -EI W'''(x) \quad (37)$$

As forças e momentos nodais do elemento espectral apresentado na Figura 5 são relacionados aos esforços da resistência dos materiais, gerando a organização matricial apresentada pela Eq. 38.

$$f_b = \begin{Bmatrix} Q_1 \\ M_1 \\ Q_2 \\ M_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -Q(0) \\ -M(0) \\ Q(L) \\ M(L) \end{Bmatrix} \quad (38)$$

Por fim, a matriz espectral do elemento de viga ( $S_B$ ) é então desenvolvida de acordo com as seguintes equações:

$$S_B(\omega) d_B(\omega) = f_B(\omega) \quad (39)$$

Estes termos também podem ser encontrados em LEE (2009), conforme abaixo:

$$S_B(\omega) = \frac{EA}{L^3} \begin{bmatrix} S_{B11} & S_{B12} & S_{B13} & S_{B14} \\ S_{B12} & S_{B22} & S_{B23} & S_{B24} \\ S_{B13} & S_{B23} & S_{B33} & S_{B34} \\ S_{B14} & S_{B24} & S_{B34} & S_{B44} \end{bmatrix} = S_B(\omega)^T \quad (40)$$

$$s_{B11} = s_{B33} = \Delta_B \bar{L}^3 (\cos \bar{L} \sinh \bar{L} + \sin \bar{L} \cosh \bar{L}) \quad (41)$$

$$s_{B22} = s_{B44} = \Delta_B \bar{L}^3 k_F^{-2} (-\cos \bar{L} \sinh \bar{L} + \sin \bar{L} \cosh \bar{L}) \quad (42)$$

$$s_{B12} = -s_{B34} = \Delta_B \bar{L}^3 k_F^{-1} \sin \bar{L} \sinh \bar{L} \quad (43)$$

$$s_{B13} = -\Delta_B \bar{L}^3 (\sin \bar{L} + \sinh \bar{L}) \quad (44)$$

$$s_{B14} = -s_{B23} = \Delta_B \bar{L}^3 k_F^{-1} (-\cos \bar{L} + \cosh \bar{L}) \quad (45)$$

$$s_{B24} = \Delta_B \bar{L}^3 k_F^{-2} (-\sin \bar{L} + \sinh \bar{L}) \quad (46)$$

$$\Delta_B = \frac{1}{1 - \cos \bar{L} \cosh \bar{L}} \quad (47)$$

$$\bar{L} = k_F L \quad (48)$$

onde os termos  $\sinh$  e  $\cosh$  representam, respectivamente as funções de seno hiperbólico e cosseno hiperbólico.

### 2.3.4 Elemento de Barra e Viga

Considerando os conceitos dos elementos apresentados anteriormente, LEE (2009) propõe uma metodologia para unir ambos os estudos em um único modelo, desta forma, cada elemento espectral passa a ter seis graus de liberdade.

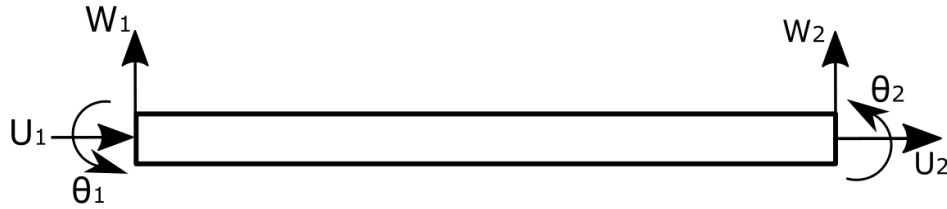


Figura 8: Modelo de barra e viga acoplado. Adaptado de Lee (2009).

Dessa forma, as matrizes espectrais dos elementos ( $S_R$  e  $S_B$ ) fornecidas pelas Eq. 24 e 40 são unidas, resultando em uma matriz espectral global ( $S_g$ ) na equação 50:

$$S_g(\omega) = \begin{bmatrix} S_{11}^R & 0 & 0 & S_{12}^R & 0 & 0 \\ 0 & S_{11}^B & S_{12}^B & 0 & S_{13}^R & S_{14}^B \\ 0 & S_{21}^B & S_{22}^B & 0 & S_{21}^B & S_{24}^B \\ S_{21}^R & 0 & 0 & S_{22}^R & 0 & 0 \\ 0 & S_{31}^B & S_{32}^B & 0 & S_{33}^B & S_{34}^B \\ 0 & S_{41}^B & S_{42}^B & 0 & S_{43}^B & S_{44}^B \end{bmatrix} \quad (50)$$

Por analogia, o campo de deslocamento ( $d_g$ ) e o vetor de força ( $f_g$ ) são acoplados com base na organização da matriz espectral global, resultando nas matrizes fornecidas pela Eq. 51.

$$d_g(\omega) = \begin{Bmatrix} U_1 \\ W_1 \\ \theta_1 \\ U_2 \\ W_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} \quad f_g(\omega) = \begin{Bmatrix} N_1 \\ Q_1 \\ M_1 \\ N_2 \\ Q_2 \\ M_2 \end{Bmatrix} \quad (51)$$

Mesmo com união do elemento de barra e do elemento de viga em um único modelo, a relação espectral global segue a mesma forma construtiva visualizada nos elementos individuais, como mostra a Eq. 52.

$$S_G(\omega) d_G(\omega) = f_G(\omega) \quad (52)$$

De forma similar ao método dos elementos finitos, a união dos elementos discretos para formar a representação de uma estrutura é dada por meio do acoplamento das matrizes nos graus de liberdade correspondentes. De acordo com Lee (2009), no SEM, a discretização só é necessária quando ao longo do comprimento existem mudanças de seção transversal, material ou é preciso contemplar o efeito da aplicação de uma força em um ponto específico. Portanto, em comparação com outras metodologias que utilizam discretização, a quantidade de elementos é bastante reduzida, permitindo maior velocidade de processamento (menor esforço computacional) durante as simulações.

Na Figura 9, é apresentada uma estrutura com dois elementos espectrais, de forma a exemplificar o conceito de acoplamento supracitado.

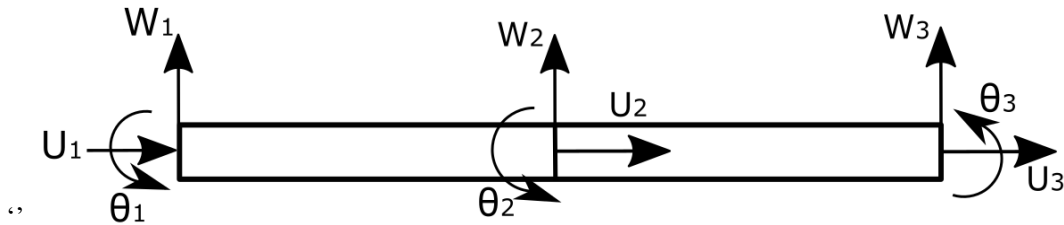


Figura 9: Modelo espectral com dois elementos. Adaptado de Lee (2009).

Portanto, como o modelo acoplado tem 9 graus de liberdade, a matriz espectral global dessa estrutura passa a ter dimensões de  $9 \times 9$ . Por outro lado, as matrizes de força e deslocamento passam a ter dimensões de  $9 \times 1$ .

### 3. RESULTADOS NUMÉRICOS

#### 3.1 Análise de transmissibilidade da onda para diferentes tipos de periodicidade

Uma estrutura periódica tem suas propriedades afetadas por duas características principais: o material e a geometria da célula. Desta forma é possível classificar a periodicidade da célula de três formas diferentes. A primeira forma ocorre quando a célula possui uma diferença de material entre seus elementos, isto acaba gerando uma descontinuidade na célula e devido a esta descontinuidade é formada a periodicidade material dela.

A segunda forma seria devido a geometria da célula, se os elementos dela possuem o mesmo material e uma geometria diferente, esta diferença geométrica acaba gerando a periodicidade da célula. Por último, seria a periodicidade mista que é gerada devido a diferença de material e de geometria da célula, esta combinação gera resultados diferentes e acaba potencializando a atenuação de vibração. Na figura 10 é apresentado os diferentes tipos de periodicidade que ocorre na célula unitária.

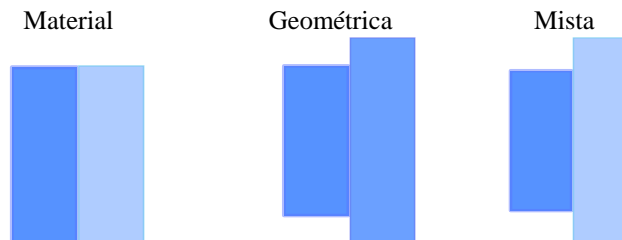


Figura 10: Célula unitária com periodicidade material, geométrica e mista. <Autoria própria>

A figura 11, mostra o resultado de uma análise numérica (via simulação em *software* computacional), considerando uma célula unitária com dois elementos. Os parâmetros do primeiro elemento da célula, como sendo  $E_1 = 3 \text{ GPa}$ ,  $\rho_1 = 1140 \text{ kg/m}^3$ ,  $A_1 = 0,017 \text{ m}^2$ ,  $L_1 = 0,3 \text{ m}$  e do segundo elemento da célula, como sendo  $E_2 = 70 \text{ GPa}$ ,  $\rho_2 = 2700 \text{ kg/m}^3$ ,  $A_2 = 0,034 \text{ m}^2$ ,  $L_2 = 0,3 \text{ m}$ . A Tabela 1 mostra a variação dos parâmetros da célula periódica de acordo com as razões das propriedades físicas e/ou geométricas entre a segunda e a primeira parte da célula. Desta forma é possível analisar a formação do *Band Gap* e *Band Pass* de acordo com o tipo de periodicidade.

Tabela 1 – Razões das propriedades físicas e/ou geométricas das partes da célula.

Propriedade	Tipo de periodicidade		
	Geométrica	Material	Mista
$E_{21}$	1	23,33	23,33
$\rho_{21}$	1	2,37	2,37
$A_{21}$	2	1	2
$L_{21}$	1	1	1

A figura 11 (a) mostra os resultados para ondas longitudinais e a figura 8 (b) para ondas flexionais. O ponto de início e término dos *Band Gaps* está destacado com marcadores nas curvas, desta forma é possível fazer uma comparação dos *Band Gaps* gerados.

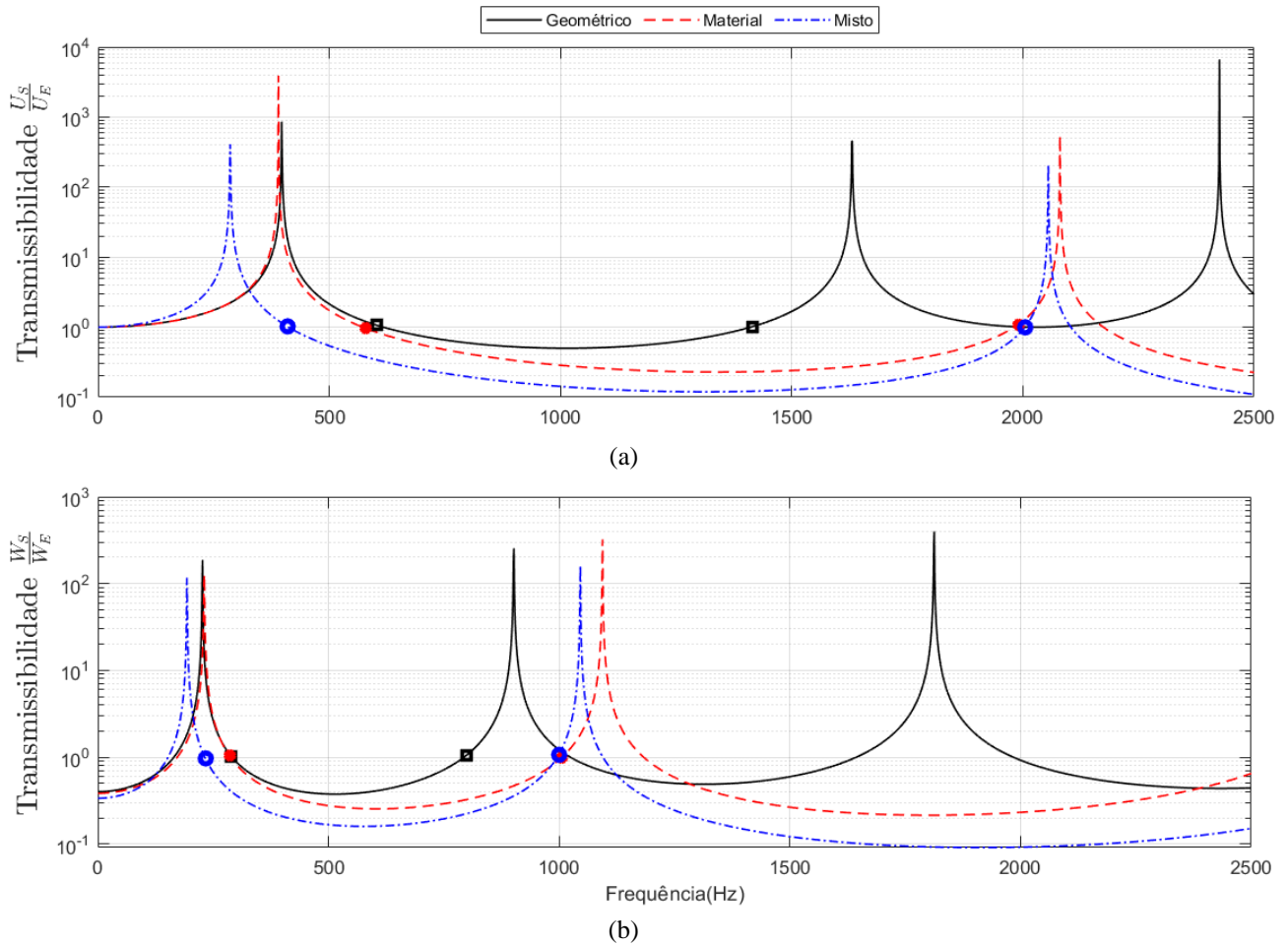


Figura 11: resultados para a transmissibilidade para diferentes tipos de periodicidade. (a) sob ondas longitudinais (b) sob ondas flexionais. Fonte: <Autoria própria>

Para a transmissibilidade longitudinal, figura 11 (a), a periodicidade geométrica apresentou um leve *Band Gap* na faixa entre 650 Hz e 1430 Hz e teve a menor atenuação e largura de *Band Gap*, já a periodicidade material, apresentou resultados melhores, com uma faixa de *Band Gap* entre 640 Hz e 2000 Hz e com uma profundidade maior, o que significa que o material interferiu mais na transmissibilidade do que a geometria.

Por último a periodicidade mista apresentou resultados melhores que a material, este resultado é uma junção do geométrico com o material, desta forma gerou uma largura de *Band Gap* e uma atenuação maior, chegando a quase  $10^{-1}$ . A faixa de *Band Gap* está entre 400 Hz e 2000 Hz.

Para a transmissibilidade flexional, figura 11 (b), os resultados foram parecidos em um contexto geral, os *Band Gaps* da periodicidade geométrica foram menores e com a menor atenuação e o *Band Gap* ficou entre 280 Hz e 780 Hz, a periodicidade material teve seu primeiro *Band Gap* uma largura bem menor que o segundo, porém manteve a atenuação e o primeiro *Band Gap* ficou entre 280 Hz e 1000 Hz.

Por último a periodicidade mista apresentou resultados melhores, a junção do geométrico e do material gerou uma largura de *Band Gap* e uma atenuação maior, chegando a quase  $10^{-1}$ . A faixa do primeiro *Band Gap* está entre 250 Hz e 1000 Hz, também é possível notar que o segundo *Band Gap* obteve uma maior atenuação e uma maior largura.

Este resultado permite concluir que as periodicidades materiais e geométricas influenciam no resultado e neste caso a periodicidade material teve uma maior influência.

### 3.2 Análise da Transmissibilidade para N quantidade de células

Como vimos até aqui a célula unitária tem forte influência na propagação da onda, sendo assim, será feito uma análise de como a quantidade de células influencia nesta passagem e o que acontece com a transmissibilidade. Neste experimento foi considerada uma célula mista igual a do tópico 3.1 e uma quantidade de 1, 5 e 10 células para a análise.

Na figura 12, mostra a transmissibilidade x frequência de acordo com a quantidade de células. Na figura 12 (a) é feita a análise de transmissibilidade no eixo axial e na figura (b) é feita a análise de transmissibilidade no eixo transversal. Através do gráfico é possível ver como as células interferem na transmissibilidade, seus *Band Gaps* e *Band Pass*.

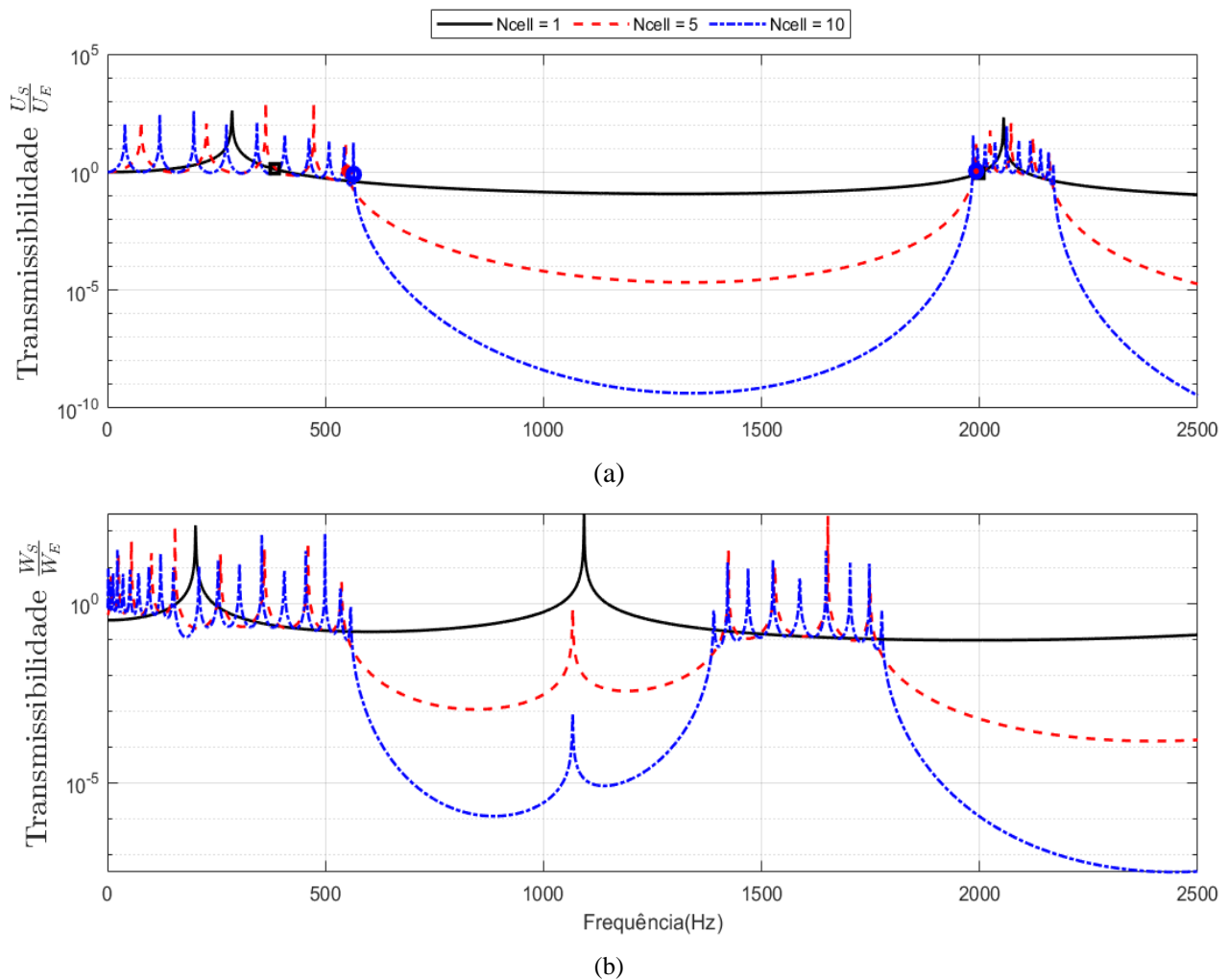


Figura 12: Transmissibilidade em uma estrutura periódica com 1, 5 e 10 células periódicas. (a) Transmissibilidade longitudinal (a) Transmissibilidade flexional. Fonte: <Autoria própria.>

Conforme mostra a Figura 12 (a), na transmissibilidade longitudinal é possível ver que a profundidade do *Band Gap* aumentou consideravelmente conforme o aumento do número de células, porém houve um aumento no número de *Band Gaps* e *Band Pass* e a largura do *Band Gap* diminuiu. O teste com 1 célula apresentou uma atenuação entre 400 Hz e 2000 Hz, com 5 células entre 560 Hz e 1970 Hz e com 10 células entre 570 Hz e 1970 Hz, aproximadamente.

Analisando a Figura 12 (b), a transmissibilidade flexional gerou resultados similares, o aumento de células causou um aumento de *Band Gaps* e *Band Pass* e houve um aumento na atenuação da transmissibilidade em pontos específicos com a largura de *Band Gap* sendo reduzida gradualmente. O teste com 1 célula apresentou uma atenuação entre 250 Hz e 1050 Hz, com 5 células entre 540 Hz e 1400 Hz e com 10 células entre 540 Hz e 1400 Hz, aproximadamente. No geral, o aumento de células não gerou um resultado tão bom quanto na figura 12 (a).

### 3.3 Análise de transmissibilidade para diferentes razões de comprimento dos elementos da célula unitária

Após feito os testes acima, agora será feita uma análise da interferência do comprimento dos elementos da célula unitária na transmissibilidade. Considerando uma célula com dois elementos, diferentes materiais e diferentes áreas transversais para ambos os elementos e a razão desses dois comprimentos variando de 1, 5 e 10. Na figura 13 mostra como ocorre essa mudança na célula.



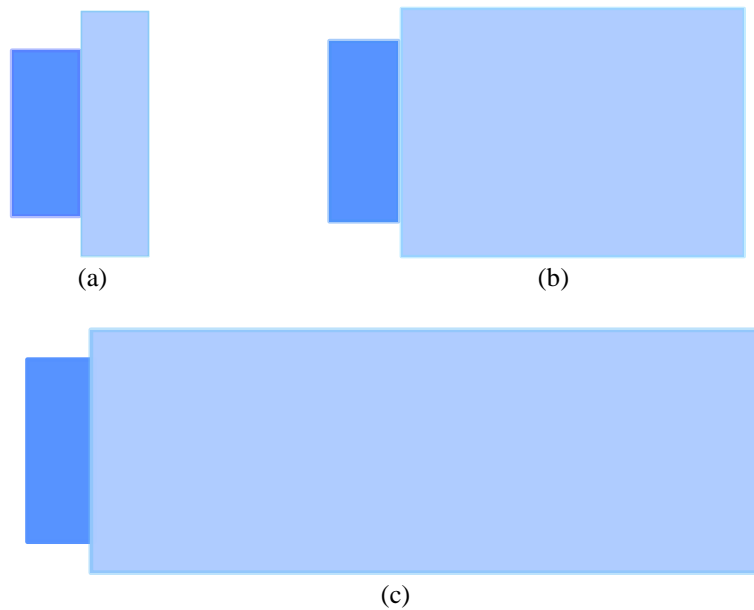


Figura 13: Representação da célula unitária com variação das razões de comprimento dos elementos da célula. (a) Razão de comprimento de 1:1, (b) Razão de comprimento de 5:1, (c) razão de comprimento de 10:1. Fonte: <Autoria própria>

Na figura 14, mostra a transmissibilidade x frequência, de acordo com as razões de comprimento dos elementos da célula unitária. Na figura 14 (a) mostra o resultado para transmissibilidade axial e na figura (b) o resultado para a transmissibilidade flexional. Os pontos em destaques seriam o início e o fim do *Band Gap*.

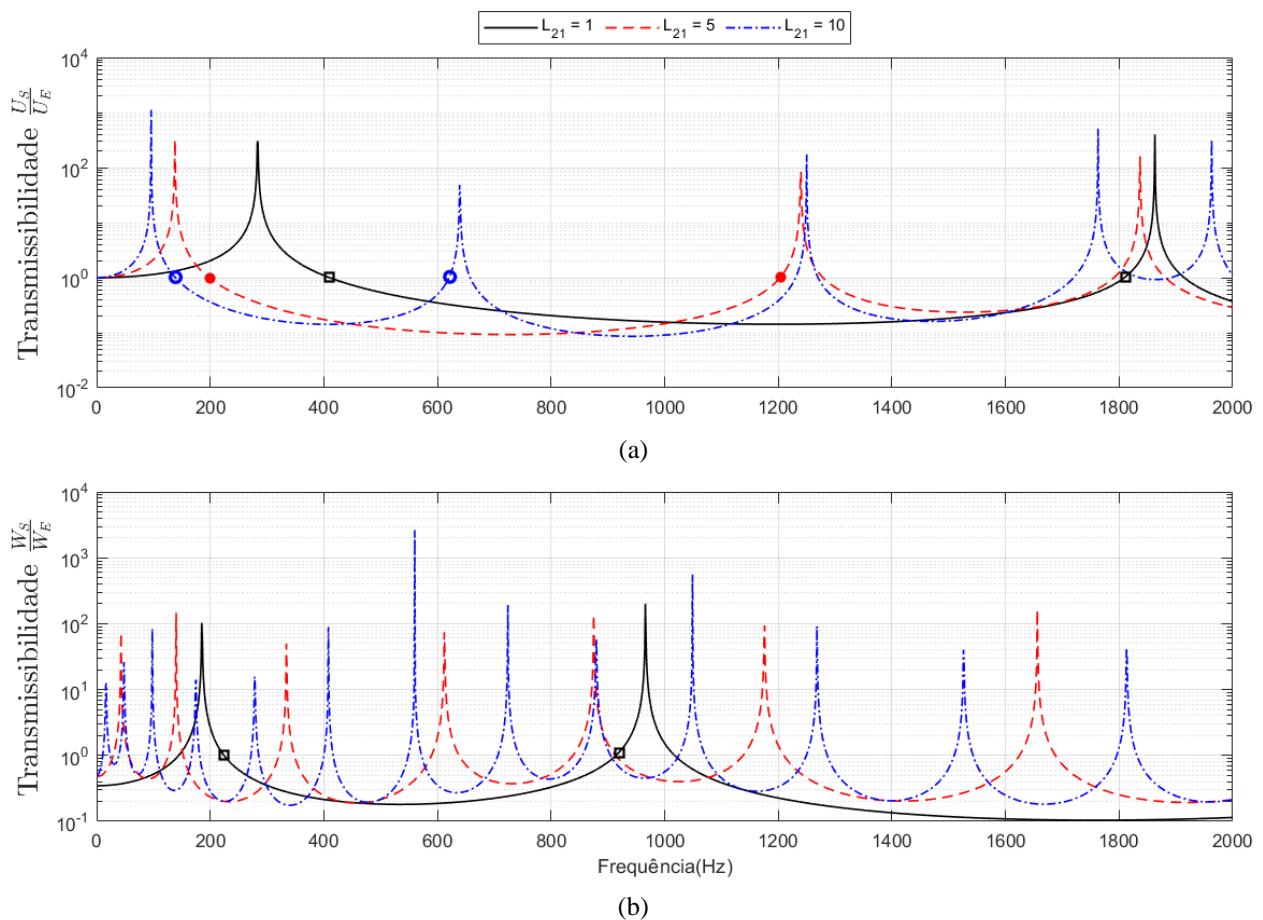


Figura 14: Transmissibilidade em uma célula unitária com diferentes razões de comprimento entre o primeiro e segundo elemento. Fonte: <Autoria própria>

Conforme mostra a Figura 14 (a), na transmissibilidade longitudinal é possível ver que a profundidade do *Band Gap* teve um pequeno aumento conforme o aumento da razão dos comprimentos dos elementos da célula, porém este aumento

não se manteve e o número de *Band Gaps* e *Band Pass* aumentou. A largura do primeiro *Band Gap* para  $L_{21} = 1$ , ficou entre 400 Hz e 1800 Hz, para  $L_{21} = 5$  entre 200 Hz e 1200 Hz e para  $L_{21} = 10$  entre 150 Hz e 620 Hz, aproximadamente.

Analisando Figura 14 (b), na transmissibilidade flexional os resultados gerados foram parecidos, o aumento de células causou um aumento maior no número de *Band Gaps* e *Band Pass*, porém não aumentou a atenuação da transmissibilidade, neste caso o teste com  $L_{21} = 1$  apresentou o melhor resultado, com os *Band Gaps* bem maiores e a atenuação um pouco maior no segundo *Band Gap*. No geral, o aumento da razão de comprimento influenciou mais na quantidade de *Band Gaps* e *Band Pass*.

#### 4. CONCLUSÃO

Neste trabalho foi feita uma análise da propagação da onda em uma estrutura periódica utilizando o método do elemento espectral por meio de simulações realizadas em *software* computacional. A onda foi submetida a uma análise em diferentes tipos de estruturas como com N número de células, periodicidade geométrica, periodicidade material, periodicidade mista e variando o comprimento dos elementos da célula unitária.

Os resultados gerados foram interessantes. No geral é possível ver que a análise geométrica gerou influência na transmissibilidade, conseqüentemente, houve formação de *Band Gap*, porém esta influência foi maior na análise da mudança de material. Em uma comparação entre os dois testes, a diferença de material causou uma melhor formação de *Band Gap* do que a diferença geométrica de duas vezes a área do primeiro.

No quesito número de células o resultado gerado na figura 9 (a) foi positivo e gerou um aumento considerável na profundidade do *Band Gap*, porém causou uma diminuição na largura de *Band Gap*, apesar disso manteve uma largura considerável que foi entre 580 Hz a 1280 Hz. Na figura 9 (b), o aumento no número de células aumentou consideravelmente o número de *Band Gap* e *Band Pass* e aumentou a atenuação em pontos específicos e com a largura de *Band Gap* bastante reduzida.

Analisando a diferença de comprimento dos elementos da célula, na transmissibilidade longitudinal o aumento da razão de comprimento aumentou a quantidade de *Band Gaps* e *Band Pass* consideravelmente e interferiu pouco na atenuação do *Band Gap* e com um limite o que causou uma atenuação similar para  $L_{21} = 5$  e  $L_{21} = 10$ . Já na transmissibilidade flexional este aumento na razão de comprimento causou um aumento no número de *Band Gaps* e *Band Pass* e uma leve diminuição na atenuação o que não é interessante.

#### 5. REFERÊNCIAS

AZEVEDO, A. P. Análise e medidas de propagação e espalhamento em estruturas periódicas. Universidade Federal de Brasília, 2013.

BANNERJEE, T. A., FOIST, B. L., Exact dynamic stiffness matrix for composite Timoshenko beams with applications, Journal of Sound and Vibration, Vol.194, Issue 4, 1996.

FAHY, F.; GARDONIO, P. Sound and structural vibration: radiation, transmission and response. 2nd. ed. [S.l.]: Elsevier, 2007.

FAHY, F.; AND WALKER, J. Advanced applications in acoustics, noise and vibration, 2004.

WANG, F. Vibration and noise attenuation performance of compounded periodic struts for helicopter gearbox system, Journal of Sound and Vibration, 2019.

JENSEN, J.S., "Phononic band gaps and vibrations in one- and two-dimensional mass-spring structures", J. Sound Vib., 266 (2003), pp. 1053-1078.

LEE, U. Spectral element method in structural dynamics. 1. ed. Singapore: Wiley, 2009.+

MEAD D. J., "Wave Propagation in Continuous Periodic Structures: Research Contributions from Southampton," Journal of Sound and Vibration, Vol. 190, No. 3, 1996, pp. 495-524.

NARISSETTI, R. K. Wave propagation in non linear periodic structures. Thesis (PhD) — Institute of Technology, School of Aerospace Engineering, Georgia, 2010.

ROY, A., AND PLUNKETT, R., Wave Attenuation in Periodic Structures, J. Sound Vib., 1986, 114, pp. 395-411

#### 6. RESPONSABILIDADE PELAS INFORMAÇÕES

Os autores são os únicos responsáveis pelas informações incluídas neste trabalho.