



**ASPECTOS DO RACIOCÍNIO PROPORCIONAL DE ALUNOS DO 7.º
ANO DO ENSINO FUNDAMENTAL: UM FOCO NAS RESOLUÇÕES
ESCRITAS DE UMA TAREFA EXPLORATÓRIA**

MARIA EDUARDA VALENÇA DE FRANÇA

DOURADOS – MS

2024

**ASPECTOS DO RACIOCÍNIO PROPORCIONAL DE ALUNOS DO 7.º
ANO DO ENSINO FUNDAMENTAL: UM FOCO NAS RESOLUÇÕES
ESCRITAS DE UMA TAREFA EXPLORATÓRIA**

Maria Eduarda Valença de França

Trabalho de Conclusão de Curso
apresentado à Universidade Federal da
Grande Dourados, como parte dos
requisitos para obtenção do título de
Licenciada em Matemática.

Orientadora: Prof^ª. Dra. Renata Viviane
Raffa Rodrigues.

Dourados
Mato Grosso do Sul
2024

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP).

F815a Franca, Maria Eduarda Valenca De

Aspectos do Raciocínio Proporcional de Alunos do 7.º Ano do Ensino Fundamental: Um Foco nas Resoluções Escritas de uma Tarefa Exploratória [recurso eletrônico] / Maria Eduarda Valenca De Franca. -- 2025.

Arquivo em formato pdf.

Orientadora: Renata Viviane Raffa Rodrigues.

TCC (Graduação em Matemática)-Universidade Federal da Grande Dourados, 2024.

Disponível no Repositório Institucional da UFGD em:

<https://portal.ufgd.edu.br/setor/biblioteca/repositorio>

1. Raciocínio Proporcional. 2. Ensino Exploratório. 3. Ensino Fundamental. I. Rodrigues, Renata Viviane Raffa. II. Título.

Ficha catalográfica elaborada automaticamente de acordo com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).

©Direitos reservados. Permitido a reprodução parcial desde que citada a fonte.

FRANÇA, Maria Eduarda Valença de. **Aspectos do raciocínio proporcional de alunos do 7.º ano do ensino fundamental: um foco nas resoluções escritas de uma tarefa exploratória.** Trabalho de Conclusão de Curso (Curso de Matemática – Licenciatura). Faculdade de Ciências Exatas e Tecnologia, Universidade Federal da Grande Dourados, Dourados, 2024.

RESUMO

Este estudo teve como objetivo compreender aspectos referentes ao raciocínio proporcional de oito grupos de alunos do 7º ano do Ensino Fundamental, a partir da análise das produções escritas por eles no desenvolvimento de uma tarefa exploratória em formato digital. Trata-se de uma pesquisa qualitativa em que os dados foram coletados por meio da produção escrita de alunos no processo de resolução de uma tarefa exploratória. A tarefa foi desenvolvida na plataforma digital *Genially*, em que foram utilizados elementos lúdicos a partir da história de “Alice no País das Maravilhas” e “Alice através do espelho”, com o intuito de promover o engajamento dos alunos com a atividade. A partir da análise das resoluções escritas de cada um dos grupos, foi possível identificar dificuldades, processos e capacidades específicas relacionadas ao raciocínio proporcional dos alunos. Embora alguns tenham apresentado dificuldades de descrever os modos pelos quais se configurava a covariação entre as grandezas, a partir da constante de proporcionalidade, destaca-se que a maioria dos alunos conseguiu fazer comparações, identificando e estabelecendo relações de natureza multiplicativa entre as quantidades. Esses resultados evidenciam o potencial de tarefas exploratórias em sala de aula, especialmente com o uso de tecnologias digitais, para favorecer a mobilização de aspectos fundamentais ao raciocínio proporcional dos alunos.

Palavras-chaves: Raciocínio Proporcional, Tarefa Exploratória, Ensino Fundamental.

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO	1
2 REFERENCIAL TEÓRICO	2
2.1 Raciocínio Proporcional	2
2.2 Tarefas Matemáticas	4
3 PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS	5
4 ANÁLISES E RESULTADOS	10
5 CONCLUSÃO	15
7 REFERÊNCIAS	17

1 INTRODUÇÃO

Seja para seguir uma receita de bolo, em que é preciso uma determinada quantidade de farinha em relação ao total da receita, ou para calcular o tempo estimado para completar uma viagem com base na velocidade de deslocamento, o cotidiano está repleto de situações que requerem a mobilização de capacidades de raciocínio proporcional para resolvê-las. Haja visto que, essas e outras situações demandam a comparação de diferentes quantidades para fazer previsões e inferências (Lesh; Post; Behr, 1988). De acordo com Lamon (2012), o raciocínio proporcional está ligado à capacidade de pensar, seja de maneira progressiva ou regressiva e fornecer justificativas para situações envolvendo proporções simples, diretas ou inversas.

No entanto, devido às abordagens mecanizadas que se restringem ao uso de algoritmos prontos, tal como a regra de três, apesar de envolver capacidades importantes de serem mobilizadas em situações cotidianas, o desenvolvimento do raciocínio proporcional não tem sido articulado aos objetivos de ensino no âmbito escolar (Lamon, 2012). Para a autora, o desenvolvimento de capacidades de raciocínio proporcional envolve a proposição de situações que favoreçam a construção de um processo mental que requer a análise das relações entre as grandezas.

Considerando que, a noção de proporcionalidade está presente em diferentes temas como Álgebra, Geometria, Medida, Análise de dados e até Probabilidade, diversos pesquisadores têm se dedicado aos estudos sobre o desenvolvimento do raciocínio proporcional dos alunos. (NCTM, 2007; Shield & Dole, 2002). Outrossim, a compreensão desse tipo de raciocínio ultrapassa a visão conteudista do ensino de matemática e da matemática como ciência absoluta, dado que se relaciona também com diversos conceitos como densidade, velocidade e concentração (Abrantes, Serrazina & Oliveira, 1999; Akatugba & Wallace, 1999; Harel, Behr, Post & Lesh, 1992; Karplus, Pulos & Stage, 1983; Moore, Dixon & Haines, 1991; Sophian & Wood, 1997).

Como consequência, investigações sobre essa temática também têm ganhado espaço nas pesquisas sobre a formação de professores que ensinam matemática. Os estudos sugerem que um processo de formação continuada, focado no desenvolvimento profissional dos professores de Matemática, especialmente na resignificação do conhecimento do conteúdo ensinado, pode ser uma alternativa aos cursos ou treinamentos tradicionais. Este processo deve proporcionar oportunidades de aprendizado por meio de interações sociais baseadas em respeito, confiança e compromisso mútuo entre os participantes, como observado na Comunidade de Prática de Professores que Aprendem e Ensinam Matemática - CoP-PAEM. (Oliveira, 2014)

A pesquisa de Ball (1990) identificou que na formação inicial de professores, quase a totalidade dos futuros professores usavam algoritmos de produto cruzado, e uma minoria abordava outros meios de resolução. Por outro

lado, Kenney, Lindquist e Heffernan (2002) e Khoury (2002) destacaram a importância de professores se concentrarem em apoiar os alunos para a criação de estratégias matemáticas que favoreçam capacidades de raciocínio proporcional dos alunos. Entretanto, as pesquisas também evidenciaram que não há uma única abordagem viável para todas as etapas escolares — ainda que Moseley (2005) tenha afirmado que quanto mais cedo os alunos tiverem experiências com múltiplas representações, maior será o conhecimento sobre elas, em especial quando e como usá-las — o exemplo de Kenney (2002) revela que para crianças do 4º ano, o uso de imagens e tabelas trouxe maior eficácia para o desenvolvimento do raciocínio proporcional.

De modo particular, neste estudo pretendemos compreender aspectos referentes ao raciocínio proporcional de oito grupos de alunos do 7º ano do Ensino Fundamental, a partir da análise das produções escritas por eles no desenvolvimento de uma tarefa exploratória em formato digital. Primeiro, apresentamos uma fundamentação teórica sobre o raciocínio proporcional e acerca das tarefas matemática, articulada ao seu potencial no ensino da matemática. Em seguida, descrevemos a metodologia utilizada com a turma do sétimo ano, nessa etapa discorreu-se sobre a abordagem qualitativa utilizada e o desenvolvimento de uma tarefa exploratória utilizando a plataforma *Genially*. Posteriormente, realizamos uma análise dos resultados obtidos e algumas conclusões e considerações finais.

2 REFERENCIAL TEÓRICO

2.1 Raciocínio Proporcional

O raciocínio proporcional é fundamental para os estudantes compreenderem não apenas eventos do cotidiano, mas também para a aprendizagem de diferentes campos da matemática e de outras ciências (Silvestre; Ponte, 2012). Contudo, o professor precisa estar atento aos seguintes aspectos que, segundo Silvestre e Ponte (2012), caracterizaram o raciocínio proporcional: a) diferenciar situações que envolvem relações de proporcionalidade direta das que não têm; b) compreender a natureza multiplicativa das relações proporcionais; e c) Conseguir utilizar o raciocínio proporcional em diferentes situações.

O reconhecimento de situações de proporcionalidade demanda a comparação prévia entre duas quantidades, de tal modo a descrever o que elas representam. Essa comparação compreende, muitas vezes, um julgamento qualitativo dependendo do contexto analisado. Em sua maioria, os alunos recorrem às estratégias de natureza multiplicativa para resolver problemas desse tipo (Silvestre, 2012).

Uma relação de natureza multiplicativa é compreendida como aquela na qual os valores indicados nas razões podem ser alterados, mas a relação multiplicativa entre eles permanece constante. Além da operação de

multiplicação, essas relações incluem a divisão por números diferentes de zero (Cebola; Brocardo, 2019).

Segundo Lamon (2012) o processo de multiplicação está relacionado aos casos em que se tem a ampliação, encolhimento, duplicação, exponenciação e partição em quantidades iguais. Dessa forma, a natureza multiplicativa começa a ser identificada pelos alunos no momento em que estes analisam situações que se configuram por relações entre as quantidades e percebem a razão pela qual as estratégias aditivas não se aplicam às resoluções desses tipos de problemas.

Além desses aspectos, o raciocínio proporcional compreende uma estrutura de pensamento matemático que inclui o entendimento da covariação, utilizada para comparar duas variáveis e verificar como elas se relacionam, bem como, a capacidade de realizar múltiplas compilações e análises de conjunto de dados (Lesh; Post; Behr, 1988). Em especial, perceber a covariação significa entender que ao passo que uma quantidade varia a outra também varia, e existe uma terceira quantidade que se mantém invariante chamada de constante de proporcionalidade (Lamon, 2012).

Maranhão e Machado (2011) também destacam que os alunos recorrem a estratégias particulares para resolver problemas dessa natureza, tais como a realização de operações como multiplicação e divisão, a comparação numérica e não numérica e a compreensão da covariação entre duas grandezas, são processos essenciais no raciocínio proporcional. Um exemplo pode ser visto na pesquisa conduzida por Spinillo (2002), em que a estratégia de utilizar a "metade" como referência apoiou o raciocínio proporcional dos alunos. Esse processo baseou-se em utilizar a metade como ponto de referência, fazendo julgamentos proporcionais com base em "mais que a metade", "menos que a metade" ou "igual à metade". Essa estratégia ajudava as crianças a realizar julgamentos proporcionais de forma mais precisa. Nesse estudo, a autora visava promover a compreensão do conceito de proporção pelos alunos, enfatizando a capacidade de estabelecer relações parte-parte (razão) em vez de parte-todo (fração).

Além do reconhecimento dos processos necessários para a mobilização do raciocínio proporcional, também é importante identificar as dificuldades enfrentadas pelos alunos. Segundo Maranhão e Machado (2011), uma delas consiste em distinguir situações proporcionais das que não são proporcionais. Essa distinção não ocorre de maneira intuitiva, mas sim por meio de um processo de inferências e deduções. Portanto, é relevante que o professor apoie o aluno a compreender os contextos dos problemas propostos em sala de aula, uma vez que é por meio dessa compreensão que os alunos podem classificar as situações diretamente ou inversamente proporcionais ou não proporcionais (Maranhão; Machado, 2011).

Os estudos de Costa e Ponte (2008) revelaram que embora os alunos conseguissem perceber as relações numéricas, eles tiveram dificuldade em explicar o raciocínio utilizado. Inicialmente, os alunos recorreram a estratégias aditivas antes de utilizarem estratégias multiplicativas. Além disso, a falta de familiaridade com os contextos dos problemas pode ter influenciado na

interpretação das questões. Ademais, quando pressionados a concluir uma atividade em um tempo determinado, alguns alunos recorreram a estratégias formais, como a regra de três.

Segundo o estudo de Spinill (2002), que investigou a construção da noção intuitiva de proporção em crianças, foi analisado que os alunos alcançaram uma compreensão mais elaborada de proporção. De tal forma que conseguiram superar a dificuldade em reconhecer a equivalência entre recipientes grandes ou pequenos cheios até a metade.

Para Silvestre e Ponte (2012), a dificuldade inicial dos alunos está em diferenciar as situações de proporcionalidade direta daquelas não proporcionais. Essa dificuldade se acentua quando tentam mecanizar algoritmos de resolução de problemas de proporcionalidade, sem uma construção anterior dos significados matemáticos que eles envolvem, o que acarreta problemas em seu uso. Ademais, o distanciamento entre situações cotidianas envolvendo proporcionalidade e os problemas propostos na escola também é um fator que dificulta uma compreensão mais profunda da natureza multiplicativa das situações proporcionais, não sabendo distinguir entre adição e multiplicação e quando utilizar cada operação. Com isso, os autores associam a falta de flexibilidade no raciocínio proporcional dos alunos à pouca diversificação das tarefas matemáticas que lhes são propostas em sala de aula. Dessa forma, as tarefas se destacam como especialmente relevantes para promover a mobilização de capacidades de raciocínio proporcional dos alunos.

2.2 Tarefas Matemáticas

Ponte (2005) destaca que a aprendizagem resulta, principalmente, da realização de uma atividade e da reflexão sobre ela, esclarecendo que o envolvimento em uma atividade requer a realização de uma tarefa que se constitua como objetivo da atividade. Nessa linha, o autor argumenta que para promover a atividade matemática dos alunos é necessário produzir, propor e conduzir a realização de tarefas de maneira adequada, considerando que há diversos tipos de tarefas que podem variar quanto ao “grau de desafio matemático e o grau de estrutura” (p. 7).

O grau de desafio matemático se refere ao nível de dificuldade, que pode ser elevado ou reduzido. Já a estrutura da tarefa se caracteriza pelo nível de abertura, ou seja, constitui-se como uma tarefa fechada aquela cujo os dados e os objetivos são claros, enquanto as tarefas abertas apresentam um grau de indeterminação considerável no que é proposto ou solicitado (Ponte, 2005).

Em especial, as tarefas de exploração ou tarefas exploratórias diferenciam-se das investigações quanto ao nível de desafio, ou seja, procura-se oferecer nelas possibilidades de o aluno iniciar a resolução, a partir de suas experiências de aprendizagem. Por outro lado, uma tarefa exploratória também requer um elemento de desafio, de dificuldade moderada, que instigue e envolva os alunos na resolução da tarefa (Ponte *et al*, 2013).

Ademais, as tarefas exploratórias se caracterizam por demandar um elevado nível de exigência cognitiva, tal qual promova a exploração, a reflexão e o raciocínio sobre ideias e conceitos matemáticos de modo significativo. Assim, essas tarefas devem ser pensadas com base nos conhecimentos dos estudantes e adequadas ao conjunto de alunos a quem se destina, a fim de que se sintam motivados e sejam capazes de se envolverem nesse espaço cognitivamente desafiador (Stein; Smith, 2009).

Ainda, segundo Ponte *et al* (2013) as tarefas exploratórias conduzem os estudantes a atividades exploratórias que estimulam a interpretação matemática das situações, o raciocínio indutivo, a formulação de hipóteses e de generalizações, podendo ser trabalhadas tanto para desenvolver novos conceitos quanto para esclarecer ou fazer conexões entre as noções matemáticas já estudadas. Desse modo, para esses autores a tarefa pode ser estruturada a partir de enunciados aparentemente simples, que requerem a interpretação e discriminação de casos, ou enunciados complexos, que se organiza por meio da estruturação de questões.

Todavia, Ponte *et al* (2013) observaram que, frequentemente, tem-se a combinações de questões mais simples com questões mais complexas, onde primeiro há a introdução de questões mais objetivas e, posteriormente, o grau de complexidade vai aumentando gradativamente até chegar a questões que demandam significativas reflexões. Ainda, ponderam que as tarefas devem ser envolventes, oferecer recursos à construção de noções matemáticas de forma significativa, requerendo, desta forma, um elemento desafiador não demasiadamente difícil.

Para se tornarem mais envolventes as tarefas exploratórias também podem contar com o apoio de mídias digitais, tendo em conta que a incorporação eficiente desses recursos pode despertar o interesse e propicia “um ambiente educacional mais dinâmico, interativo e significativo para os estudantes” (Meroto *et al*, 2023). Nessa perspectiva, a plataforma digital Genially apresenta potencialidades para suportar tais processos, dado que ela permite criar, gratuitamente, conteúdos interativos tais como animações, apresentações, jogos, entre outras. Todavia, é importante que a tarefa e os recursos utilizados estejam articulados a uma metodologia de ensino em que, neste estudo, aporta-se do Ensino Exploratório (Canavarro; Oliveira; Menezes, 2012).

3 PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

Este estudo faz parte de uma pesquisa mais ampla que envolve a investigação de processos de resolução e de elaboração de tarefas pelos alunos de um 7º ano do Ensino Fundamental, associados às experiências dialógicas em aulas na perspectiva do Ensino Exploratório, para a mobilização de aspectos do raciocínio proporcional.

Nesse contexto de investigação adotamos a abordagem qualitativa, dado o alinhamento da natureza da pesquisa à perspectiva de Chizzotti (2006), cujo objetivo incide sobre a compreensão dos sentidos e significados

atribuídos, pelos sujeitos investigados às suas próprias ações, representações e conceitos, bem como consideram o objeto repleto de significados e relações estabelecidas pelos sujeitos por meio de suas ações.

A pesquisa foi realizada com uma turma do 7º ano do Ensino Fundamental de uma escola da Rede Estadual de Ensino de Mato Grosso do Sul e contou com a participação de 33 alunos na faixa etária de 11 a 14 anos. Para a produção dos dados, as aulas foram cedidas pela professora responsável pela turma, a qual esteve presente durante o desenvolvimento das atividades em sala de aula. Assim, foi possível a uma das integrantes da pesquisa assumir o papel de professora e pesquisadora, com o intuito de propor a realização de uma tarefa exploratória pelos alunos. A aula foi conduzida pela perspectiva do Ensino Exploratório que se organiza em quatro fases, sendo estas: a apresentação e proposição da tarefa; o desenvolvimento da tarefa; a discussão coletiva e a sistematização das aprendizagens (Canavarro; Oliveira; Menezes, 2012).

Neste estudo, os dados analisados decorrem dos registros escritos de oito grupos de alunos durante a fase de desenvolvimento da tarefa. Nessa fase, os alunos resolvem a tarefa em pequenos grupos e o professor procura fornecer orientações sem influenciar na autonomia dos alunos. A partir da análise dessas resoluções escritas, buscamos compreender as dificuldades, processos ou capacidades, relativas ao raciocínio proporcional dos alunos.

Além das características que exigem a elaboração de uma tarefa exploratória (Ponte *et al.*, 2013), neste trabalho, considerou-se também o lúdico e a interatividade possibilitada por meio da plataforma digital Genially. Quanto ao lúdico, optou-se por introduzir a tarefa por meio de uma história animada contendo elementos adaptados dos filmes Alice no País das Maravilhas (2010) e Alice Através do Espelho (2016). Na história narrada, a família do Chapeleiro havia sido aprisionada pela Rainha vermelha e obrigada a tomar o líquido do encolhimento tendo, assim, as alturas reduzidas e sendo necessário comer o bolo do crescimento para retornar aos seus tamanhos reais (figuras 1 e 2).

Figura 1: Contexto da tarefa



Fonte: Acervo da Pesquisa

A intenção desta tarefa é que a atividade produzida pelos alunos propiciasse a eles identificar a quantidade de gramas do bolo do crescimento que cada familiar do Chapeleiro precisaria comer para voltar ao seu tamanho normal. Contudo, tendo como propósito mobilizar aspectos do raciocínio proporcional dos alunos, na tarefa foram elaboradas questões (figuras 3, 4, 5, 6) que mobilizassem a percepção das relações multiplicativas entre as grandezas, assim como a covariação (Lamon, 2013).

Figura 2: Altura normal dos familiares



Fonte: Acervo da Pesquisa

Figura 3: Questões 1, 2, 3, 4

The screenshot shows a mobile application interface with a purple header bar containing a 'MENU' button. Below the header is a table with four columns: 'Familiar', 'John', 'Timothy', and 'Anne'. The first row of the table lists the family members, and the second row lists their current heights in centimeters. To the left of the text area are three small icons: a family of four, a blue and orange backpack, and a white bag labeled 'EatMe'. The text area contains four numbered questions. A red 'NEXT' button is located at the bottom right. A 'genially' logo is visible in the bottom left corner.

Familiar	John	Timothy	Anne
Altura atual	28 cm	24 cm	20 cm

1 - Considerando a altura atual dos familiares do Chapeleiro, quantos centímetros cada um precisa crescer para atingir seu tamanho normal? Explique seu raciocínio.

2 - Se cada um comer 5 gramas de bolo, eles conseguirão alcançar a altura normal? E se comer 6 gramas? Explique seu raciocínio.

3 - Para crescer o tamanho necessário para atingir seu tamanho normal, quantas gramas de bolo cada familiar do Chapeleiro precisa comer? Explique seu raciocínio.

4 - Se aumentarmos o consumo de bolo, o que acontecerá com a altura? Explique seu raciocínio.

NEXT →

Fonte: Acervo da Pesquisa

Figura 4: Questões 5, 6

The screenshot shows a mobile application interface with a purple header bar containing a 'MENU' button. The background is a textured, parchment-like surface. To the left of the text area are three small icons: a family of four, a blue and orange backpack, and a white bag labeled 'EatMe'. The text area contains two numbered questions. A red 'BACK' button is located at the bottom left, and a red 'NEXT' button is at the bottom right. A 'genially' logo is visible in the bottom left corner.

5 - Após exagerar no consumo do bolo do crescimento, John, atingiu a altura de 316 cm. Quantos mililitros do líquido do encolhimento ele precisa ingerir para chegar à sua altura normal? Explique seu raciocínio.

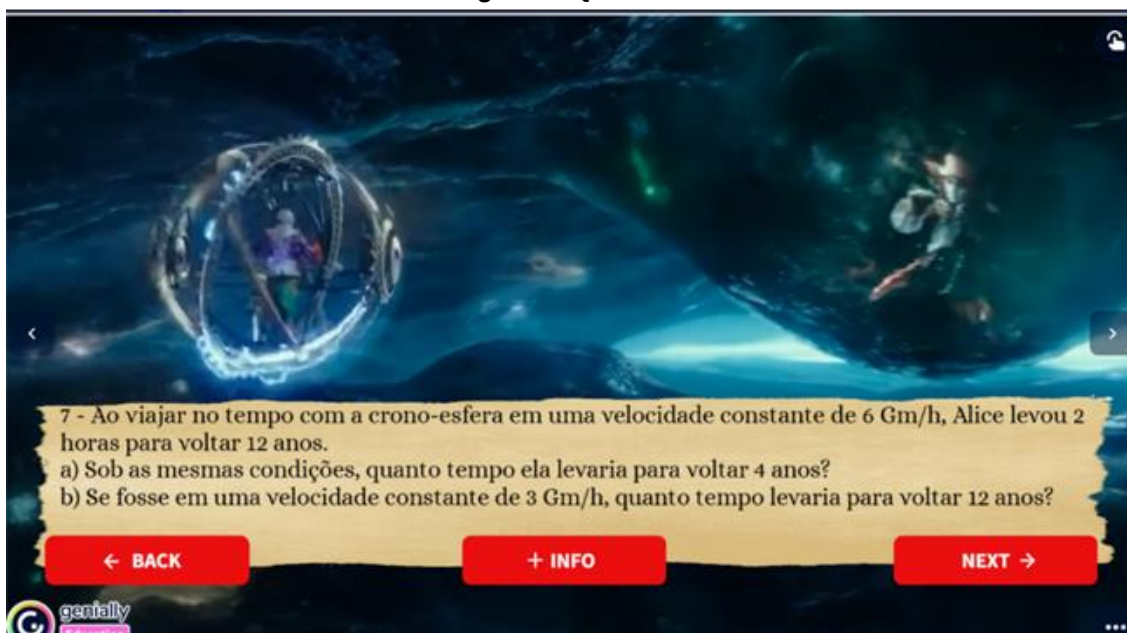
6 - Se aumentarmos o consumo do líquido do encolhimento, o que acontecerá com a altura? Explique seu raciocínio.

← BACK

NEXT →

Fonte: Acervo da Pesquisa

Figura 6: Questão 7



Fonte: Acervo da Pesquisa

No que se refere às intenções relativas a cada questão da tarefa, a questão 1 foi proposta com o intuito de que os alunos percebessem que a altura de cada familiar não parte do zero, sendo necessário crescer apenas a parte da altura perdida ao tomar o líquido do encolhimento. A questão 2 tinha por objetivo levar os alunos a refletirem sobre a relação multiplicativa entre as grandezas envolvidas, bem como identificar a constante de proporcionalidade. Já a questão 3, além de abarcar os aspectos explorados na questão 2, demandava a percepção da operação de divisão dentro das relações de proporcionalidade. Ainda, a questão 4 foi elaborada com o propósito de promover a reflexão quanto à relação diretamente proporcional entre a quantidade de gramas de bolo e a quantidade de centímetros aumentados. A questão 5 fundamenta-se nos mesmos objetivos das questões 2 e 3, mas envolvendo uma nova grandeza, já a questão 6 objetiva a reflexão entre a relação diretamente proporcional entre quantidade de mililitros do líquido do encolhimento e a quantidade de centímetros reduzidos, haja visto que, embora a altura das personagens venha a diminuir, a parte reduzida aumenta se a quantidade de mililitros ingeridos aumenta. Por último, a questão 7 foi elaborada para conduzir os alunos a percepção de que nem sempre duas grandezas se relacionam de forma diretamente proporcional, existindo também grandezas inversamente proporcionais.

Em virtude da necessidade de recortes, na próxima seção analisamos as resoluções dos alunos, referentes às questões 2, 3, 4, 5 e 6 da tarefa, buscando identificar e compreender os aspectos do raciocínio proporcional mobilizados e evidenciados em suas produções escritas.

4 ANÁLISES E RESULTADOS

A construção do quadro apresentado nesta seção ocorreu devido à necessidade de reorganizar os dados de acordo com os aspectos do raciocínio proporcional mais recorrentes identificados nas produções dos alunos. O primeiro deles, trata-se da comparação de quantidades, que, segundo Silvestre (2012), pode ser numérica ou não, e estar articulada ao contexto analisado. O segundo se refere à comparação de natureza multiplicativa, efetuada de diversas formas. O terceiro, ainda incipiente, está ligado ao reconhecimento da covariação entre as grandezas identificadas.

Ademais, utilizou-se de siglas para facilitar a organização em tabela da relação entre os grupos e as questões que apresentam determinado aspecto do raciocínio proporcional. As siglas G1 a G8 indicam os grupos de 1 a 8, simplificando a referência aos diferentes grupos de alunos. De maneira semelhante, as siglas Q2 a Q6 indicam as questões de 2 a 6, simplificando a referência às questões da tarefa desenvolvida em sala de aula.

Quadro 1: Aspectos do raciocínio proporcional e questões relacionadas

Grupos	G1	G2	G3	G4	G5	G6	G7	G8
Comparação de quantidades	Q2	Q2	Q2	Q2	Q2		Q2	Q2
Comparação de natureza multiplicativa	Q3, Q5	Q3, Q5	Q3, Q5	Q3, Q5	Q3, Q5		Q3, Q5	Q3, Q5
Covariação	Q4, Q6	Q4, Q6	Q4, Q6	Q4, Q6	Q4, Q6		Q4, Q6	Q4, Q6

Fonte: Elaborado pelas pesquisadoras

Conforme o quadro, a comparação de quantidades predominou na questão 2 da tarefa, enquanto a comparação propriamente de natureza multiplicativa emergiu de modo mais evidente nas questões 3 e 5. A covariação, por sua vez, esteve presente nas questões 4 e 6. Observa-se que, por se tratar das mesmas questões, os grupos apresentaram a mobilização do mesmo aspecto do raciocínio proporcional em destaque em suas resoluções. Esse resultado evidencia que a natureza da questão está diretamente relacionada ao aspecto do raciocínio proporcional a ser desenvolvido pelos alunos em suas estratégias. O grupo 6, no entanto, não apresentou justificativas que possibilitassem a identificação de aspectos do raciocínio proporcional, fato que está relacionado tanto à falta de habitualidade dos alunos com metodologias que demandem a descrição das estratégias empregadas para a resolução quanto à dificuldade enfrentada na interpretação e compreensão das questões em termos matemáticos.

Lesh, Post e Behr (1988) salientam que o raciocínio proporcional envolve múltiplas comparações, enquanto Lamon (2012) indica que as

grandezas podem ser comparadas por dois tipos de razão, sendo elas a comparação parte-todo e a comparação parte-parte. A comparação parte-todo diz respeito a comparação de uma parte da grandeza com o conjunto total dessa grandeza, ou seja, partes de um total de partes. Já a comparação parte-parte refere-se à comparação entre as grandezas que representam, cada uma, partes do conjunto. Nesse sentido, consideramos que ao fazer a comparação entre as grandezas, antes de tudo estamos fazendo uma comparação entre as quantidades. De acordo com o quadro, observamos que a comparação entre quantidades foi um dos aspectos do raciocínio proporcional mobilizado por sete dos grupos investigados.

Para explicitar o processo pelo qual esse aspecto se evidencia, selecionamos a resolução desenvolvida na questão 2 (Se cada um comer 5 gramas de bolo, eles conseguirão alcançar a altura normal? E se comer 6 gramas? Explique seu raciocínio) pelo grupo 7 (figura 1). Na qual os alunos obtiveram as quantidades de centímetros aumentados (20 e 24 cm) de acordo com cada uma das quantidades de grama de bolo consumidas (5 e 6 g). Posteriormente, as quantidades de centímetros obtidas foram somadas às medidas das alturas reduzidas, respectivamente de John, Timothy e Anne (28, 24 e 20 cm). A partir desses valores, os alunos concluíram que, apenas essas quantidades de bolo não seriam suficientes para atingir a altura normal das personagens.

Figura 7: Questão 2 - grupo 7

28	24	20
+ 20	+ 20	+ 20
48	44	40
JOHN	TIMOTHY	ANNE

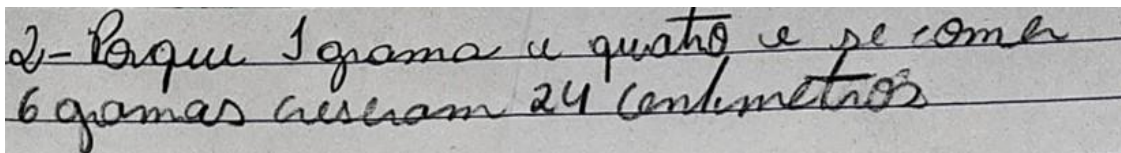
R. Não. É pra fazer 4 vezes 5 que dá 20 e 4 vezes 6 que dá 24, se fazendo mais cada um da altura atual não dá a altura certa.

Fonte: Acervo da Pesquisa

O encaminhamento das operações realizadas e as conclusões que tiveram (figura 7) revelam que os alunos fizeram diferentes comparações, primeiro entre a quantidade de centímetros obtida consumindo as quantidades de gramas indicadas na questão, bem como em relação à quantidade de centímetros correspondentes a altura que os personagens deveriam atingir para retornar aos seus tamanhos normais. Além disso, o grupo somou à altura atual apenas os centímetros equivalentes a 5 gramas de bolo e concluíram que 6 gramas de bolo também não seriam suficientes para que as personagens alcançassem suas alturas normais, indicando que houve uma comparação entre as quantidades de bolo e as quantidades centímetros correspondentes a cada uma.

Do mesmo modo, podemos observar na justificativa apresentada na resolução pelo grupo 8 (figura 8), o estabelecimento de uma relação para comparar a quantidade de gramas de bolo e a quantidade de centímetros correspondente a ela.

Figura 8: Questão 2 – grupo 8



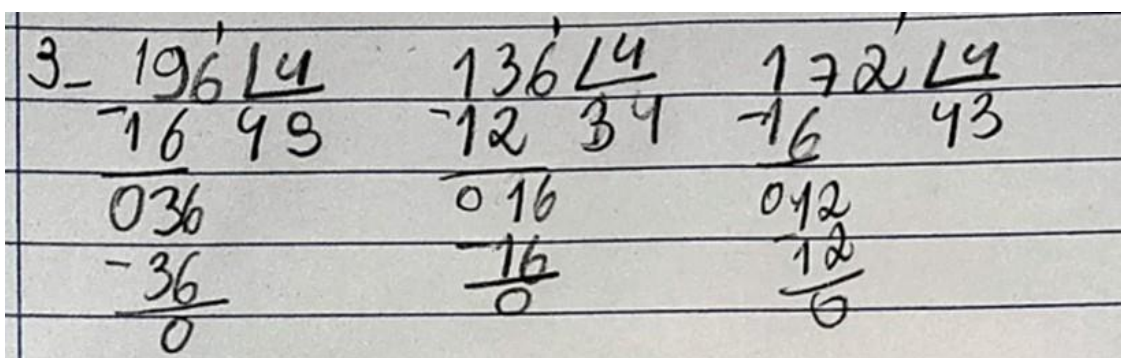
2- Porque 1 grama e quanto e se comer 6 gramas cresceram 24 centímetros

Fonte: Acervo da Pesquisa

Observa-se que há uma comparação entre a relação dada no enunciado da tarefa, de que cada grama possibilita o crescimento de 4 cm, e da relação dada pelo consumo de 6 gramas de bolo e a quantidade de centímetros que se crescerá a partir dela.

Na sequência (figura 9), ao resolver a questão 3 (Para crescer o tamanho necessário para atingir seu tamanho normal, quantas gramas de bolo cada familiar do Chapeleiro precisa comer? Explique seu raciocínio), o grupo 8 explorou a natureza multiplicativa da situação, dado que realizou a partição das quantidades de centímetros em partes iguais de 4 centímetros. Segundo Lamon (2012), ao comparar as quantidades e reconhecer que as estratégias aditivas não se aplicam, os alunos começam a observar a natureza multiplicativa presente nos casos em que se tem a ampliação, encolhimento, duplicação, exponenciação e partição em quantidades iguais.

Figura 9: Questão 3 - Grupo 8



Three long division problems are shown, all with a divisor of 4:

- 196 ÷ 4 = 49 (with a remainder of 0)
- 136 ÷ 4 = 34 (with a remainder of 0)
- 172 ÷ 4 = 43 (with a remainder of 0)

Fonte: acervo da pesquisa

De modo semelhante, o grupo 4, ao resolver a questão 5 (Após exagerar no consumo do bolo do crescimento, John, atingiu a altura de 316 cm. Quantos mililitros do líquido do encolhimento ele precisa ingerir para chegar à sua altura normal? Explique seu raciocínio), fez a divisão da quantidade excedente ao tamanho normal de John por 2, ou seja, a partição da quantidade de

centímetros em partes iguais de 2 centímetros para verificar o total de líquido que deveria ser tomado.

Figura 10: questão 5 - grupo 4

5) De acordo com o cálculo da pergunta, ele deveria tomar 46 mililitros.

$$\begin{array}{r} 316 \\ \times 8 \\ \hline 2528 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 9212 \\ \times 5 \\ \hline 46060 \end{array}$$

Fonte: acervo da pesquisa

Dessa forma, analisando as resoluções dessas duas questões, observamos indícios da mobilização da percepção da natureza multiplicativa, como mostram as figuras 9 e 10, em que os grupos optam pela operação de divisão das quantidades centímetros, em vez de buscarem estratégias aditivas.

No entanto, conforme analisado na figura 11, também houve casos em que a natureza multiplicativa foi observada pelos alunos, mas não compreendida em termos de comparação e relação entre as grandezas envolvidas.

Figura 11: Questão 3 – grupo 7

3-28	24	20
$\times 8$	$\times 7$	$\times 10$
224	168	200
Jo. HN	- 8	- 8
	160	192
	timothy	anne

Fonte: Acervo da Pesquisa

O grupo 7 parece ter interpretado que a quantidade de gramas de bolo aumentava a altura atual dos personagens. Porém, com dificuldades de identificar as grandezas e o tipo de relação entre elas. Tal processo também pode ser observado na resolução da questão 5.

Figura 12: Questão 5 - grupo 7

$$\begin{array}{r} 376 \\ - 40 \\ \hline 276 \\ - 52 \\ \hline 224 \end{array}$$
$$\begin{array}{r} 20 \\ \times 2 \\ \hline 40 \end{array} \quad \begin{array}{r} 37 \\ \times 2 \\ \hline 74 \end{array}$$

R: Para voltar ao normal ele deve ingerir 57 milímetros para voltar ao normal.

Fonte: acervo da pesquisa

Novamente, o grupo 7 apresentou indícios da percepção da natureza multiplicativa, porém, teve dificuldades ao efetuar as operações de multiplicação, mesmo com a identificação do valor constante dado pela relação entre as quantidades envolvidas na questão.

No que concerne ao reconhecimento da covariação entre as quantidades de gramas de bolo e os centímetros aumentados, com ou sem a descrição da constante de proporcionalidade, identificamos indícios mais recorrentes desse aspecto nas respostas à questão 4 (Se aumentarmos o consumo de bolo, o que acontecerá com a altura? Explique seu raciocínio) e à questão 6 (Se aumentarmos o consumo de líquido do encolhimento, o que acontecerá com a altura? Explique seu raciocínio). Um exemplo, é a resposta escrita pelo grupo 5.

Figura 13: resolução da questão 4 - grupo 5

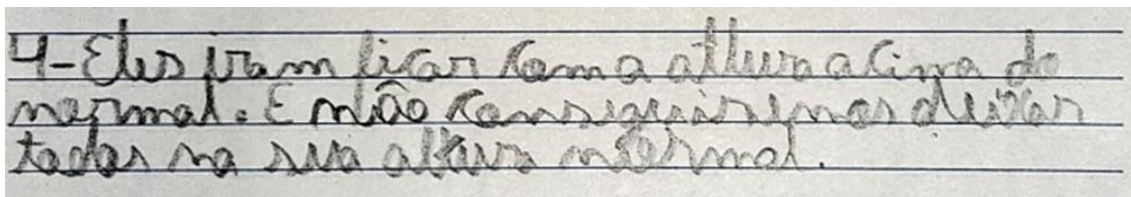
4- Eles cresceram mais 4 cm por pedaço de bolo

Fonte: acervo da pesquisa

Conforme apresentado pelos alunos (figura 13), observa-se que eles reconheceram que o aumento de uma grama de bolo influenciava em um aumento/crescimento de mais 4 cm de altura.

A seguir, na resposta à questão 4 apresentada pelo grupo 2 (figura 14), também podemos observar que os alunos perceberam a relação de covariação entre as grandezas (gramas de bolo e altura), embora não tenham descrito como ela ocorre de acordo com a constante de proporcionalidade.

Figura 14: Resolução da questão 4 – grupo 2

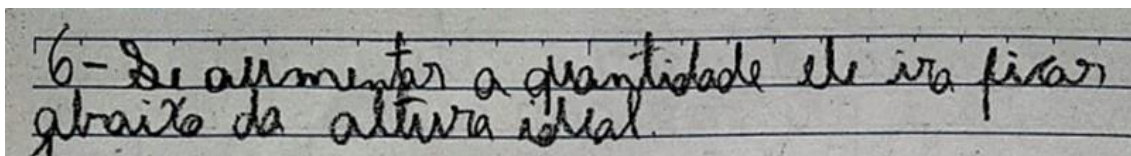


4- Eles vão ficar com a altura a cima do normal. E não conseguirão mais alcançar todos na sua altura normal.

Fonte: Acervo da Pesquisa

Na figura 15, a resposta apresentada à questão 6, novamente, o grupo 2 conseguiu descrever que há uma covariação entre a altura e a quantidade de bolo consumida. Os alunos explicam que as personagens ultrapassariam a altura normal, caso houvesse um maior consumo de gramas de bolo. Todavia, não explicitam se essa covariação representa uma relação diretamente proporcional.

Figura 15: Resolução da questão 6 – grupo 2



6- Se aumentar a quantidade ele irá ficar abaixo da altura ideal.

Fonte: acervo da pesquisa

Na maior parte dos grupos as respostas seguiram o mesmo raciocínio, indicando que eles cresceriam mais que o necessário, se aumentasse o consumo de bolo, e diminuiriam mais que o necessário, se aumentassem a ingestão do líquido. Entretanto, em que medida essa covariação se daria, não foi referido pelos alunos.

6 CONCLUSÃO

Assim como no estudo de Costa e Ponte (2008), a partir das análises das resoluções da tarefa exploratória apresentadas pelos alunos, observou-se que a maior parte dos grupos foi capaz de criar procedimentos sem a apresentação prévia deles. Tais procedimentos basearam-se nos seguintes aspectos ligados ao raciocínio proporcional: comparar grandezas; estabelecer comparações de natureza multiplicativa; e reconhecer características de uma covariação entre as grandezas.

Por um lado, os alunos recorreram a estratégias intuitivas, sem que procedimentos mecanizados fossem aplicados. Todavia, algumas resoluções continham apenas os resultados finais, sem justificativas matemáticas ou explicações referentes aos métodos empregados para a obtenção das respostas, o que evidenciou a dificuldade dos alunos de expressarem o seu raciocínio e, como consequência, refletirem sobre os procedimentos adotados.

A falta de argumentação, em algumas questões, ocasionou certa complexidade nas análises, como é o caso das questões 4 e 6, em que as respostas apresentadas não permitiram identificar com clareza os aspectos mobilizados, assim como o alcance dos objetivos das questões, os quais estavam relacionados à percepção da relação diretamente proporcional entre as grandezas.

Entretanto, em nossas análises, observamos indícios que apontam para uma possível mobilização do aspecto de covariação, isto porque os alunos perceberam que a mudança das quantidades de uma grandeza implica na mudança das quantidades da outra grandeza, mas não explicitaram que essa mudança ocorre de acordo com uma quantidade invariável chamada constante de proporcionalidade, como descreve Lamon (2012).

Ainda assim, as demais resoluções forneceram detalhes que possibilitaram identificar a mobilização dos aspectos referentes à comparação entre quantidades, na questão 2, e à comparação de natureza multiplicativa, nas questões 3 e 5. O primeiro aspecto mencionado foi evidenciado tanto nas comparações entre quantidades diferentes de uma mesma grandeza, quanto em comparações entre quantidades de diferentes grandezas.

Já as comparações de natureza multiplicativa foram identificadas quando os estudantes optaram por particionar as quantidades por meio da operação de divisão, que se trata da operação inversa da multiplicação. Contudo, nem todos os grupos conseguiram avançar com essa estratégia, tendo em vista que alguns perceberam a existência da natureza multiplicativa entre as quantidades, mas não compreenderam como a relação multiplicativa poderia ser estruturada.

Ademais, o fato de os grupos não optarem por estratégias aditivas acena a emergência de processos do raciocínio proporcional, visto que Silvestre e Ponte (2012) elencam a compreensão da natureza multiplicativa nas relações de proporcionalidade como um dos principais aspectos do raciocínio proporcional.

Esses resultados evidenciam o potencial de tarefas exploratórias em sala de aula, especialmente com o uso de tecnologias digitais, articulado a uma narrativa familiar, baseada nas histórias de "Alice no País das Maravilhas", para envolver os alunos no desenvolvimento da atividade e favorecer a mobilização de aspectos fundamentais ao raciocínio proporcional.

7 REFERÊNCIAS

- ADJIAGE, R.; PLUVINAGE, F. **An experiment in teaching ratio and proportion**. Educational Studies in Mathematics, Dordrecht, v. 65, p. 149-175, 2007.
- BALL, D. L. **The mathematical understanding that preservice teachers bring to teacher education**. Elementary School Journal, Chicago, v. 90, p. 449-466, 1990.
- CANAVARRO, A. P.; OLIVEIRA, H.; MENEZES, L. **Práticas de ensino exploratório da matemática: o caso de Célia**. In: SANTOS, L (Ed.). Investigação em Educação Matemática 2012: Práticas de ensino da Matemática. Portalegre: SPIEM, 2012. p. 255-266.
- CEBOLA, G.; BROCARD, J. **Estratégias, Representações e Flexibilidade na Resolução de Tarefas de Comparação Multiplicativa**. Bolema: Boletim de Educação Matemática, v. 33, n. 64, p. 568–590, maio 2019.
- KENNEY, P. A.; LINDQUIST, M. M.; HEFFERNAN, C. L. **Butterflies and caterpillars: Multiplicative and proportional reasoning in the early grades**. In: LITWILLER, B. (Ed.). Making sense of fractions, ratios, and proportions. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics, 2002. p. 87-99.
- KHOURY, H. A. **Exploring proportional reasoning: Mr. Tall/Mr. Short**. In: LITWILLER, B.; BRIGHT, G. (Eds.). Making Sense of Fractions, Ratios, and Proportions: 2002 Yearbook. Reston, VA: The National Council of Teachers of Mathematics, Inc., 2002. p. 100-102.
- LAMON, S. J. **Teaching fractions and ratios for understanding: Essential content knowledge and instructional strategies for teachers**. 3th ed. New York: Routledge, 2012.
- LESH, R.; POST, T.; BEHR, M. **Proportional reasoning**. In: HIEBERT, J.; BEHR, M. (Eds.). Number Concepts and Operations in the Middle Grades. Reston, VA: Lawrence Erlbaum & National Council of Teachers of Mathematics, 1988. p. 93-118. Tradução: Ana Isabel Silvestre, Escola EB 2,3 de Fernão Lopes. Revisão da tradução: Fátima Álvares, Escola EB 2,3 de Fernão Lopes.
- MARANHÃO, C.; MACHADO, S.. **Uma meta-análise de pesquisas sobre o pensamento proporcional**. Educar em Revista, n. se1, p. 141–156, 2011.
- MEROTO, M. B. N.; SALES, G. R. F.; OLIVEIRA, J. P.; ANDRADE, S. G. S. **Explorando o potencial das mídias digitais e linguagem visual na educação**. Revista Ilustração, Cruz Alta, v. 4, n. 5, p. 107-115, 2023.
- MOSELEY, B. **Students' early mathematical representation knowledge: The effects of emphasizing single or multiple perspectives of the rational number domain in problem solving**. Educational Studies in Mathematics, Dordrecht, v. 60, p. 37-69, 2005.

OLIVEIRA, Laís Maria Costa Pires de. **Aprendizagens no Empreendimento Estudo do Raciocínio Proporcional**. 2014. 206f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2014.

PONTE, J. P. Gestão Curricular em matemática. In: GTI (Ed.). **O professor e o desenvolvimento curricular**. Lisboa: Associação de Professores de Matemática, 2005. p. 11-34.

PONTE, J. P.; MATA-PEREIRA, J.; HENRIQUES, A. C.; QUARESMA, M. **Designing and using exploratory tasks**. In: MARGOLINAS, C. (Ed.). Task Design in Mathematics Education: Proceedings of ICMI Study 22. Oxford: ICMI, 2013.

SILVESTRE, A. I.; PONTE, J. P. **Proporcionalidade directa no 6.º ano de escolaridade: uma abordagem exploratória**. Interacções, n. 20, p. 70-97, 2012.

SILVESTRE, A. I.; PONTE, J. P. **Tarefas de investigação e novas tecnologias no ensino da proporcionalidade**. Educação e Cultura Contemporânea, v. 5, n. 10, p. 61-89, 2008.

SPINILLO, A. G.. **O papel de intervenções específicas na compreensão da criança sobre proporção**. Psicologia: Reflexão e Crítica, v. 15, n. 3, p. 475–487, 2002.

STEIN, M. K.; SMITH, M. S. **Tarefas matemáticas como quadro para a reflexão: Da investigação à prática**. Tradução de Alunos de mestrado em Educação Matemática da FCUL. (Artigo original publicado em 1998). Educação e Matemática, n. 105, p. 22-28, 2009. Tradução de: Mathematical tasks as a framework for reflection: From research to practice.

YETKINER, Z. E.; CAPRARO, M. M. **Research summary: Teaching fractions in middle grades mathematics**. Disponível em: <http://www.nmsa.org/Research/ResearchSummaries/TeachingFractions/tabid/1866/Default.aspx>. Acesso em: 19 jun. 2024.