UNIVERSIDADE FEDERAL DA GRANDE DOURADOS – UFGD
FACULDADE DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLÓGICAS – FACET

MARCOS SAVITRAZ

DETERMINANTE DE ALGUMAS MATRIZES ESPECIAIS

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA

DOURADOS – MS
OUTUBRO -2015

MARCOS SAVITRAZ

DETERMINANTE DE ALGUMAS MATRIZES ESPECIAIS

ORIENTADOR: PROFESSOR Dr. ROBERT JESÚS RODRÍGUEZ REYES

Dissertação apresentada ao final do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT da Universidade Federal da Grande Dourados (UFGD) como exigência parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática

DOURADOS – MS

OUTUBRO - 2015

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP).

S263d Savitraz, Marcos.
Determinante de algumas matrizes especiais. / Marcos Savitraz. – Dourados, MS : UFGD, 2015.
76f.

Orientador: Prof. Dr. Robert Jesús Rodrigues Reyes.
Dissertação (Mestrado em Matemática) – Universidade Federal da Grande Dourados.

1. Vandermonde. 2. Cauchy. 3. Determinante. I. Título.

CDD – 512.5

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca Central – UFGD.

©Todos os direitos reservados. Permitido a publicação parcial desde que citada a fonte.

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
FUNDAÇÃO UNIVERSIDADE FEDERAL DA GRANDE DOURADOS
FACULDADE DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLOGIA
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL - PROFMAT

Termo de Aprovação

Após a apresentação, arguição e apreciação pela banca examinadora foi emitido o parecer APROVADO, para a dissertação intitulada: **"Determinante de Algumas Matrizes Especiais"**, de autoria de **Marcos Savitraz**, apresentada ao Programa de Mestrado em Matemática da Universidade Federal da Grande Dourados.

Prof. Dr. Robert Jesús Rodriguez Reyes (Orientador-UFGD)
Presidente da Banca Examinadora

Profª. Drª. Irene Magalhães Craveiro
Membro Examinador (UFGD)

Vando Narciso

Prof. Dr. Vando Narciso
Membro Examinador (UEMS)

Dourados/MS, 7 de outubro de 2015

DEDICATÓRIA

Aos meus pais, irmãs, minha esposa, meu filho e a toda minha família que, com muito carinho, apoio e capacidade de acreditar e investir em mim, não mediram esforços para a conclusão de mais uma etapa em minha vida. Mãe, seu cuidado e dedicação foi que deram em alguns momentos, a esperança para seguir. Pai, sua presença significou segurança e certeza de que não estava sozinho nessa caminhada.

Aos amigos e colegas, pelo incentivo e apoio constante.

AGRADECIMENTOS

Antes de tudo, agradeço a Deus pela oportunidade que tive de cursar este mestrado, e também por ter abençoado toda a caminhada.

Agradeço a minha família por estar sempre ao meu lado, compreendendo os momentos de minha ausência e me dando forças nos momentos mais difíceis.

Agradeço a todos os Professores deste mestrado por compartilharem seus conhecimentos, e assim, proporcionar meu crescimento pessoal e profissional.

Agradeço ao Professor Dr. Robert Jesús Rodríguez Reyes pelo tempo disponibilizado na orientação e, pelas contribuições feitas neste trabalho.

Agradeço a todos os colegas de mestrado, mesmo aqueles que ficaram pelo caminho, com os quais trocamos conhecimentos e experiências.

Agradeço a todos que direta ou indiretamente colaboraram para a concretização deste trabalho.

RESUMO

O presente trabalho nos traz um contexto introdutório sobre determinantes de matrizes especiais, mais concretamente a matriz de Vandermonde, Cauchy e Hilbert. Uma fórmula algébrica compacta é deduzida para o determinante de cada matriz. Esta fórmula nos proporciona facilidade no processo de cálculo do determinante para esta classe de matrizes. Aplicações são consideradas na resolução de sistemas lineares como também na interpolação polinomial. Finalmente, apresentamos uma proposta de aula onde abordamos conceitos citados na resolução de uma situação problema, para ser trabalhada com alunos do Ensino Médio.

Palavras-chave: Vandermonde, Cauchy, Determinante.

ABSTRACT

This work brings an introductory context on determinants of special matrices, specifically the Vandermonde matrix, Cauchy and Hilbert. A compact algebraic formula is deduced for the determinant of each matrix. This formula provides ease in determining in the calculation process for this class of matrices. Applications are considered in the resolution of linear systems as well as in polynomial interpolation. Finally, we propose a class where we discuss concepts cited in the resolution of a problem situation, to be worked with high school students.

Keywords: Vandermonde, Cauchy, Determinant.

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

Muitos problemas importantes em ciências aplicadas, matemática e engenharia podem ser reduzidos a sistemas de equações.

Nesse contexto, as matrizes são peças fundamentais para representar os mais variados sistemas de equações, permitindo compactá-los de modo a exibir suas características, as quais seriam difíceis de serem evidenciadas em outra forma.

Além disso, várias aplicações, frequentemente, introduzem uma estrutura em a matriz de coeficientes do sistema, de modo que, suas entradas se concentram de forma especial. Exemplos clássicos destes tipos de matrizes são os seguintes:

1. **A matriz de Vandermonde.** Uma matriz quadrada com forma geral

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{bmatrix} \quad \text{(I)}$$

onde $x_1, x_2, \dots, x_n$ são números reais, é chamada de matriz de Vendermonde, cujo nome faz referência ao matemático francês Alexandre Theophile Vandermonde (1785-1796). Essa matriz, composta por linhas que são potências de números fixos, surge, por exemplo, em problemas de interpolação polinomial, em processamento de sinais e em problemas de códigos de correção de erros. O determinante da matriz (I) é conhecido como determinante de Vandermonde, apesar do fato de que o determinante não aparece explicitamente em os trabalhos de Vandermonde.

2. A matriz de Cauchy. Uma matriz quadrada

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{x_1+y_1} & \frac{1}{x_1+y_2} & \cdots & \frac{1}{x_1+y_n} \\ \frac{1}{x_2+y_1} & \frac{1}{x_2+y_2} & \cdots & \frac{1}{x_2+y_n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{1}{x_n+y_1} & \frac{1}{x_n+y_2} & \cdots & \frac{1}{x_n+y_n} \end{bmatrix} \quad \text{(II)}$$

onde x_i e y_j são números reais tais que $x_i + y_j \neq 0$ para $1 \leq i, j \leq n$, é chamada de matriz de Cauchy em homenagem ao matemático francês Augustin Louis Cauchy (1789-1857). A matriz (II) é utilizada, por exemplo, em aplicações tais como interpolação racional, na teoria de códigos e em equações integrais entre outras. O problema do cálculo do determinante de (II) foi resolvido por Cauchy em [CAUCHY] e desde então o determinante é conhecido na literatura como determinante de Cauchy.

3. A matriz de Hilbert. Se tomarmos $x_i = i$ e $y_j = j - 1$ em (II), obtemos a matriz

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{1+1-1} & \frac{1}{1+2-1} & \cdots & \frac{1}{1+n-1} \\ \frac{1}{2+1-1} & \frac{1}{2+2-1} & \cdots & \frac{1}{2+n-1} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \frac{1}{n+1-1} & \frac{1}{n+2-1} & \cdots & \frac{1}{n+n-1} \end{bmatrix} \qquad (\mathrm{III})$$

essa matriz foi introduzida pelo matemático alemão David Hilbert (1862-1943) e, por esse motivo, é chamada de matriz de Hilbert. Em seus estudos sobre a teoria de aproximação, Hilbert em [HILBERT], deduziu uma fórmula para o determinante da matriz (III).

Alguns autores como [ZHANG], [HOM] e [LAX] classificam as matrizes (I), (II) e (III) como “matrizes especiais” devido às características especiais de suas entradas. Adotaremos neste trabalho a mesma terminologia.

Matrizes e o seu determinante fazem parte do conteúdo previsto para o segundo ano do Ensino Médio. No entanto, o estudo de algumas matrizes especiais não é abordado nas bibliografias do Ensino Médio: [YOUSSEF], [DANTE], [SOUZA], [PAIVA], [IEZZI] e [LEONARDO].

O objetivo deste trabalho é apresentar aos estudantes e professores do Ensino Médio o cálculo do determinante das matrizes especiais de Vandermonde, Cauchy e Hilbert, assim como, uma proposta de trabalho com as mesmas matrizes especiais e suas aplicações em temas comuns ao currículo de Matemática.

Este trabalho é dividido em cinco capítulos, que se distribuem como segue:

- No capitulo 1, introduzimos algumas terminologias básicas, bem como definições e exemplos sobre matrizes e sistemas lineares.
- No capitulo 2, apresentamos a teoria básica de determinantes. Tratamos suas propriedades mais importantes de forma elementar e exibimos muitos exemplos. Discutimos um dos principais métodos de resolução de sistemas lineares, a saber: a regra de Cramer. Neste capitulo, os teoremas são abordados sem se preocupar com a sua demonstração.
- Os capítulos 3 e 4 são o foco principal do trabalho, tais capítulos abordam o estudo das matrizes especiais de Vandermonde e Cauchy respectivamente. Inicialmente, definimos a matriz especial. Em seguida, é deduzida uma fórmula compacta para o seu determinante, que, pode ser usado no ensino médio sem maiores problemas. Finalmente, exibimos algumas aplicações para cada uma das matrizes especiais. Quanto às demonstrações dos teoremas nestes capítulos, embora acessíveis, elas foram incluídas para o entendimento do professor.
- Finalmente, no capítulo 5, apresentamos uma sugestão de aula, onde utilizamos conceitos e definições citados durante o trabalho.

CAPÍTULO 1: NOÇÕES PRELIMINARES

O propósito deste capítulo é apresentar algumas definições e notações básicas sobre matrizes. Assim, este conteúdo facilitará o entendimento dos capítulos posteriores.

1.1. A definição de matrizes

Definição 1.1. Matriz

Dados m e n em $\mathbb{N}$, define-se uma matriz real de ordem m por n ou simplesmente uma matriz m por n (escreve-se $m \times n$), como uma tabela formada por elementos de $\mathbb{R}$ distribuídos em m linhas e n colunas. Estes elementos de $\mathbb{R}$ são chamados entradas da matriz.

Exemplo 1.1. A matriz $[-5]$ é uma matriz 1×1, ao passo que

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

é uma matriz 2×3. As entradas da primeira linha da matriz são dadas pelos números reais $1, 2$ e 3, e as entradas da segunda linha da matriz são dadas pelos números reais $4, 5$ e 6.

Exemplo 1.2. Se $x_1, x_2, x_3,$ e x_4 são números reais, a matriz

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & x_4^2 \\ x_1^3 & x_2^3 & x_3^3 & x_4^3 \end{bmatrix}$$

é uma matriz 4×4.

É usual indicar as entradas de uma matriz arbitrária $\boldsymbol{A}$ pelos símbolos $\boldsymbol{A}_{ij}$, ou ainda a_{ij}, onde os índices indicam, nessa ordem, a linha e a coluna onde o elemento se encontra. Assim, uma matriz $m \times n$ é usualmente representada por

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix},$$

ou por $\boldsymbol{A} = [a_{ij}]_{m\times n}$, ou simplesmente por $\boldsymbol{A} = [a_{ij}]$, quando a ordem da matriz estiver sub entendida.

Definição 1.2. Matriz linha e matriz coluna.

Toda matriz $1 \times n$ é chamada de uma matriz linha e toda matriz $m \times 1$ é chamada de uma matriz coluna.

Exemplo 1.3. A matriz,

$$\begin{bmatrix} 5 & 4 & -1 & 7 & 8 \end{bmatrix}$$

é uma matriz linha de ordem 1×5 e a matriz,

$$\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 8 \end{bmatrix}$$

é uma matriz coluna de ordem 3×1.

Definição1. 3. Matriz quadrada

Uma matriz $n \times n$ é chamada de matriz quadrada de ordem n.

Exemplo 1.4. As matrizes

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \text{ e } \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0{,}1 & 0{,}3 & 0{,}7 \\ 0{,}01 & 0{,}09 & 0{,}49 \end{bmatrix}$$

são matrizes quadradas de ordem 2 e 3 respectivamente.

Em uma matriz quadrada $\boldsymbol{A} = [a_{ij}]$ de ordem n, as entradas a_{ii} com $1 \leq i \leq n$, formam a diagonal principal de $\boldsymbol{A}$.

Exemplo 1.5. A diagonal principal da última matriz do Exemplo 1.4 está dada pelas entradas $1;\ 0{,}3$ e $0{,}49$.

Definição 1.4. Matriz diagonal

Uma matriz diagonal de ordem n é uma matriz quadrada de ordem n, em que os elementos que não pertencem à diagonal principal são iguais à zero:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

Definição 1.5. Matriz identidade

A matriz diagonal de ordem n cujas entradas da diagonal principal são iguais ao número real 1,

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix},$$

é chamada matriz identidade de ordem n e denotada usualmente por $\boldsymbol{I}_n$.

Definição 1.6. Matrizes triangulares.

Uma matriz quadrada, na qual, todas as entradas acima da diagonal principal são iguais à zero é chamada triangular inferior e, uma matriz quadrada, na qual todas as entradas abaixo da diagonal principal são iguais à zero é chamada triangular superior. Uma matriz que é triangular inferior ou triangular superior é chamado triangular.

Exemplo 1.6. A matriz

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 5 & 8 & -2 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}$$

é uma matriz triangular superior e a matriz

$$B = \begin{bmatrix} -5 & 0 & 0 \\ 10 & 1 & 0 \\ 7 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

é uma matriz triangular inferior.

Definição 1.7. Matriz nula.

Uma matriz $m \times n$ cujas entradas são todas iguais a zero é chamada de uma matriz nula.

Exemplo 1.7. A matriz

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

é uma matriz nula de ordem 2×3.

1.2. Algumas operações com matrizes

A seguir apresentam-se algumas operações básicas com matrizes.

Definição 1.8. Igualdade de matrizes.

Dizemos que duas matrizes são definidas como sendo iguais se tem a mesma ordem e suas entradas correspondentes são iguais.

Em notação matricial, se $\boldsymbol{A} = [a_{ij}]$ e $\boldsymbol{B} = [b_{ij}]$ de mesma ordem, são iguais, escrevendo $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{B}$, quando $a_{ij} = b_{ij}$ para todo $1 \leq i \leq m$ e para todo$1 \leq j \leq n$.

Exemplo 1.8. Considere as matrizes

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 4 & 7 \\ -2 & x \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 4 & 7 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \text{ e } \boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}.$$

Se $x = 1$, então $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{B}$, mas para todos os outros valores de x as matrizes $\boldsymbol{A}$ e $\boldsymbol{B}$ não são iguais, pois nem todas suas entradas coincidem. Não existe valor de x tal que $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{C}$, pois $\boldsymbol{A}$ e $\boldsymbol{C}$ têm ordens diferentes.

Definição 1.9. Adição de matrizes.

Se $\boldsymbol{A} = [a_{ij}]$ e $\boldsymbol{B} = [b_{ij}]$ são duas matrizes de mesma ordem $m \times n$, a soma de $\boldsymbol{A}$ e $\boldsymbol{B}$**,** denotada por $\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}$, é a matriz $\boldsymbol{C} = [c_{ij}]$ de ordem $m \times n$, tal que $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ para todo $1 \leq i \leq m$ e para todo $1 \leq j \leq n$.

Exemplo 1.9.

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 & -3 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Definição 1.10. Matriz oposta.

Dada uma matriz $\boldsymbol{A} = [a_{ij}]$, define-se a matriz oposta de $\boldsymbol{A}$, como a matriz $-\boldsymbol{A} = [-a_{ij}]$.

A adição de matrizes tem propriedades semelhantes à adição nos números reais, como mostra o teorema a seguir.

Teorema 1.1. Se $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ e $\boldsymbol{C}$ são matrizes de mesma ordem $m \times n$, então:

(i) $\boldsymbol{A} + (\boldsymbol{B} + \boldsymbol{C}) = (\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}) + \boldsymbol{C}$, associatividade da adição;

(ii) $\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B} = \boldsymbol{B} + \boldsymbol{A}$, comutatividade da adição;

(iii) $\boldsymbol{A} + \boldsymbol{0} = \boldsymbol{A}$, onde $\boldsymbol{0}$ denota a matriz nula $m \times n$ (elemento neutro);

(iv) $\boldsymbol{A} + (-\boldsymbol{A}) = \boldsymbol{0}$.

Outra operação importante com matrizes é a multiplicação por escalar.

Definição 1.11. Multiplicação por um escalar.

Dada a matriz $\boldsymbol{A} = [a_{ij}]_{m\times n}$, defini-se o produto de $\boldsymbol{A}$ pelo número real k, como $k.\boldsymbol{A} = [k.a_{ij}]_{m\times n}$.

Exemplo 1.10. Para as matrizes

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 \\ -2 & 3 & 7 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 \\ 1/2 & 1/3 & 1/4 \\ 1/3 & 1/4 & 1/5 \end{bmatrix}$$

tem-se que

$$-3\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} -3 & 0 & -15 \\ 6 & -9 & -21 \end{bmatrix}, \quad 6\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 6 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 3/2 \\ 2 & 3/2 & 6/5 \end{bmatrix}.$$

Tendo definido as operações de adição e multiplicação por escalar, define-se operação de subtração de matrizes como segue.

Definição 1.12. Subtração de matrizes.

Se $\boldsymbol{A}$ e $\boldsymbol{B}$ são duas matrizes de mesma ordem $m \times n$, define-se a subtração de $\boldsymbol{A}$ e $\boldsymbol{B}$ como

$$\boldsymbol{A} - \boldsymbol{B} = \boldsymbol{A} + (-\boldsymbol{B}).$$

Exemplo 1.11.

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 6 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -4 \end{bmatrix}.$$

No seguinte Teorema apresentam-se algumas propriedades da multiplicação por escalar.

Teorema 1.2. Sejam $\boldsymbol{A}$ e $\boldsymbol{B}$ duas matrizes de mesma ordem, $m \times n$ e α, β em $\mathbb{R}$. Então:

(i) $\alpha(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}) = \alpha\boldsymbol{A} + \alpha\boldsymbol{B}$;

(ii) $(\alpha + \beta)\boldsymbol{A} = \alpha\boldsymbol{A} + \beta\boldsymbol{A}$;

(iii) $\alpha(\beta\boldsymbol{A}) = \alpha\beta\boldsymbol{A}$;

(iv) $1\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}$.

Definição 1.13. Multiplicação de matrizes

Sejam $\boldsymbol{A} = [a_{ij}]_{m \times n}$ e $\boldsymbol{B} = [b_{ij}]_{n \times p}$ duas matrizes. O produto de $\boldsymbol{A}$ por $\boldsymbol{B}$, denotado por $\boldsymbol{AB}$, é definido como a matriz $\boldsymbol{C} = [c_{ij}]_{m \times p}$ tal que

$$c_{ij} = a_{i1}.b_{1j} + \cdots + a_{in}.b_{nj}$$

para todo $1 \leq i \leq m$ e para todo $1 \leq j \leq p$.

Vamos explicar esta fórmula para obter o elemento da matriz $\boldsymbol{AB}$ que se encontra na $i - ésima$ linha e $j - ésima$ coluna:

"Na matriz $\boldsymbol{A}$, destaque a $i - ésima$ linha, e na matriz $\boldsymbol{B}$, destaque a $j - ésima$ coluna. Feito isso, multiplique ordenadamente o primeiro elemento da linha com o primeiro elemento da coluna, o segundo elemento da linha com o segundo elemento da coluna, etc., o último elemento da linha com o último elemento da coluna e finalmente some todos esses números".

Exemplo 1.12. Considere as matrizes

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \quad e \quad \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Como $\boldsymbol{A}$ possui duas colunas e $\boldsymbol{B}$ duas linhas o produto está bem definido. Além disso, sabe-se que $\boldsymbol{AB}$ será de ordem 3×2.

Portanto, o produto $\boldsymbol{AB}$ é dado por

$$\boldsymbol{AB} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.(-1) + 0.1 & 1.1 + 0.(-1) \\ 0.(-1) + (-1).1 & 0.1 + (-1).(-1) \\ 2.(-1) + 4.1 & 2.1 + 4.(-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}.$$

No seguinte Teorema apresentam-se algumas propriedades da multiplicação de matrizes.

Teorema 1.3. Desde que as operações sejam possíveis, tem-se:

(i) $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{B} + \boldsymbol{C}) = \boldsymbol{AB} + \boldsymbol{AC}$

(ii) $(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B})\boldsymbol{C} = \boldsymbol{AC} + \boldsymbol{BC}$

(iii) $(\boldsymbol{AB})\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A}(\boldsymbol{BC})$

(iv) $\boldsymbol{AI} = \boldsymbol{IA} = \boldsymbol{I}$.

Definição 1.14. Transposta de uma matriz.

Dada uma matriz $\boldsymbol{A} = [a_{ij}]_{m \times n}$, chama-se transposta de $\boldsymbol{A}$, e denota-se por $\boldsymbol{A}^t$, a matriz $[b_{ij}]_{n \times m}$, onde

$$a_{ij} = b_{ij}$$

para todo $1 \leq i \leq n$ e para todo $1 \leq j \leq m$.

Exemplo 1.13. Algumas matrizes e suas transpostas.

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 6 & 1 \\ 1 & 4 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{A^t} = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 6 \\ 3 & 7 \\ 4 & 8 \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{B^t} = \begin{bmatrix} 6 & 1 & 3 \\ 1 & 4 & 5 \end{bmatrix}.$$

No caso especial em que a matriz $\boldsymbol{A}$ é uma matriz quadrada, a transposta de $\boldsymbol{A}$ pode ser obtida pela permutação das entradas posicionadas simetricamente em relação a diagonal principal.

Exemplo 1.14. Para a matriz quadrada:

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -8 & 4 & 9 \\ 7 & 6 & 10 \end{bmatrix},$$

sua transposta $\boldsymbol{A^t}$ é obtida “refletindo” $\boldsymbol{A}$ em torno de sua diagonal principal

$$\boldsymbol{A^t} = \begin{bmatrix} 1 & -8 & 7 \\ 1 & 4 & 6 \\ 0 & 9 & 10 \end{bmatrix}.$$

1.3. Sistemas lineares e matrizes

A seguir, mostra-se como as matrizes aparecem de maneira natural no contexto de sistemas de equações lineares.

Definição 1.15. Sistema de equações lineares

Um sistema de equações lineares com m equações e n incógnitas é uma expressão da forma

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \quad \vdots \qquad\quad \vdots \qquad\qquad\quad \vdots \qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \qquad (\boldsymbol{I})$$

onde os $a_{ij}'s$ e os $b_i's$, para $1 \leq i \leq m$ e $1 \leq j \leq n$, são números reais dados.

Utilizando a definição de igualdade de matrizes (Definição 1.8) e multiplicação de matrizes (Definição 1.13), decorre que o sistema $(\boldsymbol{I})$ pode ser escrito como uma simples equação matricial:

$$\boldsymbol{AX} = \boldsymbol{B}$$

onde,

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{X} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \;\; e \;\; \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}.$$

As matrizes $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{X}$ e $\boldsymbol{B}$ são chamadas, respectivamente, de matriz dos coeficientes do sistema, matriz das incógnitas e matriz dos termos independentes.

Uma sequência de números $s_1, s_2, \ldots, s_n$ é chamada uma solução do sistema se $x_1 = s_1$, $x_2 = s_2$,..., $x_n = s_n$ é uma solução de cada equação do sistema.

Um sistema linear que não possui soluções é chamado de inconsistente; se existir pelo menos uma solução do sistema, diz-se que ele é consistente.

Exemplo 1.14. O conjunto de equações

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + 2x_3 &= 9 \\ 2x_1 + 4x_2 - 3x_3 &= 1 \\ 3x_1 + 6x_2 - 5x_3 &= 0 \end{aligned}$$

é um sistema de equações lineares e pode ser escrito como

$$\boldsymbol{AX} = \boldsymbol{B}$$

onde,

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & -3 \\ 3 & 6 & -5 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{X} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \quad e \quad \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 9 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Além disso, o sistema tem solução $x_1 = 1$, $x_2 = 2$ e $x_3 = 3$, pois estes valores satisfazem as três equações.

Exemplo 1.15. Considere a, b e c números reais não nulos e distintos. O sistema de equações

$$\begin{aligned} x + ay + a^2z &= a^3 \\ x + by + b^2z &= b^3 \\ x + cy + c^2z &= c^3 \end{aligned}$$

é um sistema de equações lineares e pode ser escrito como

$$\boldsymbol{AX} = \boldsymbol{B},$$

onde,

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{X} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \quad e \quad \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} a^3 \\ b^3 \\ c^3 \end{bmatrix}.$$

Uma solução para este sistema será discutido no capítulo 3.

CAPÍTULO 2: DETERMINANTES

Neste capítulo, serão abordadas algumas definições, teoremas e propriedades básicas dos determinantes. As demonstrações dos teoremas listados estão fora do escopo do presente trabalho; porém, podem ser vistos com detalhes em [Antom], [Lay] e [Abramo].

2.1. Determinante de uma matriz

A definição de determinante de uma matriz quadrada $\boldsymbol{A}$, denotada por $det(\boldsymbol{A})$ ou $|\boldsymbol{A}|$, pode ser dada de diversas maneiras. Neste trabalho, adota-se a definição recursiva de determinante. Esta definição permite calcular o determinante através de determinante de matrizes de menor ordem.

Se $\boldsymbol{A} = [a]$ é uma matriz 1×1, então $det(\boldsymbol{A}) = a$; se $\boldsymbol{A}$ é uma matriz 2×2

$$det(\boldsymbol{A}) = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix},$$

então,

$$det(\boldsymbol{A}) = a_{11}.a_{22} - a_{12}.a_{21} \qquad (\boldsymbol{I})$$

Para definir o determinante para matrizes 3×3, usa-se a definição de determinantes 2×2. Assim, se $\boldsymbol{A}$ é uma matriz 3×3

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix},$$

então,

$$det(\boldsymbol{A}) = a_{11}.\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}.\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}.\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

De forma resumida, pode-se escrever:

$$det(\boldsymbol{A}) = a_{11}.|A_{11}| - a_{12}.|A_{12}| + a_{13}.|A_{13}| \qquad (\boldsymbol{II})$$

onde, A_{11}, A_{12} e A_{13} são obtidas de $\boldsymbol{A}$ eliminando a primeira linha e uma das três colunas.

Observação 2.1. A expressão do determinante em $(\boldsymbol{I})$ é muito fácil de lembrar. Basta tomar o produto dos elementos da diagonal principal da matriz $\boldsymbol{A}$ e dele subtrair o produto dos elementos da outra diagonal.

Observação 2.2. A expressão do determinante em $(\boldsymbol{II})$ também pode ser reescrita como

$$det(\boldsymbol{A}) = a_{11}.a_{22}.a_{33} + a_{12}.a_{23}.a_{31} + a_{13}.a_{21}.a_{32}$$
$$-a_{12}.a_{21}.a_{33} - a_{11}.a_{23}.a_{32} - a_{13}.a_{22}.a_{31}$$

Esta última expressão pode ser recuperada a partir da Regra de Sarrus [YOUSSEF V2], [DANTE], [SOUZA], [PAIVA], [IEZZI] e [LEONARDO], muito utilizada no Ensino Médio.

$$\begin{array}{ccc|cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{array}$$
$$- \quad - \quad - \qquad\qquad + \quad + \quad +$$

Exemplo 2.1. Para calcular o determinante da matriz

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 10 \\ 1 & 0 & 5 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix},$$

do esquema

$$
\begin{array}{ccccc}
1 & -1 & 10 & 1 & -1 \\
1 & 0 & 5 & 1 & 0 \\
1 & 3 & 2 & 1 & 3 \\
- \quad - \quad - & & & + \quad + & +
\end{array}
$$

obtém-se

$$det(\boldsymbol{A}) = 0 - 5 + 30 - 0 - 15 + 2 = 12.$$

Agora, pode-se obter uma definição recursiva para o determinante. Quando $n = 3$, $det(\boldsymbol{A})$ é definido usando os determinantes das matrizes 2×2, A_{1j}, como em $(\boldsymbol{II})$ acima. Quando $n = 4$, $det(\boldsymbol{A})$ faz uso dos determinantes das matrizes 3×3, A_{1j}. De modo geral, um determinante $n \times n$ é definido através de determinantes de matrizes $(n-1) \times (n-1)$.

Definição 2.1. Determinante de uma matriz de ordem $\boldsymbol{n}$

Para $n \geq 2$, o determinante da matriz $\boldsymbol{A} = [a_{ij}]_{n \times n}$ é definida pela expressão:

$$det(\boldsymbol{A}) = a_{11}.det\,(A_{11}) - a_{12}.det\,(A_{12}) + \cdots + (-1)^{1+n}.a_{1n}.det\,(A_{1n})$$

onde, os elementos $a_{11}, a_{12}, a_{13}, \dots, a_{1n}$ são da primeira linha de $\boldsymbol{A}$ e A_{1j}, $j \in \{1, 2, \dots, n\}$, representa a matriz obtida eliminando, em $\boldsymbol{A}$ a primeira linha e a $j-ésima$ coluna.

Exemplo 2.2. Para calcular o determinante da matriz

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 10 & 1 \\ 1 & 5 & 0 \\ 1 & 2 & 9 \end{bmatrix},$$

Segue-se pela Definição 2.1

$$det(\boldsymbol{A}) = a_{11}.|A_{11}| - a_{12}.|A_{12}| + a_{13}.|A_{13}|$$

$$= 1.|A_{11}| - 10.|A_{12}| + 1.|A_{13}|$$

$$= 1.\begin{vmatrix} 5 & 0 \\ 2 & 9 \end{vmatrix} - 10.\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 9 \end{vmatrix} + 1.\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= 1.(45 - 0) - 10.(9 - 0) + 1.(2 - 5)$$

$$= -48.$$

2.2. Expansão em cofatores.

Para enunciar o próximo teorema, seria conveniente escrever a Definição 2.1 de uma forma ligeiramente diferente. Dada a $\boldsymbol{A} = [a_{ij}]$, o cofator (i, j) de $\boldsymbol{A}$ é o número c_{ij} dado por

$$c_{ij} = (-1)^{i+j}.det(A_{ij}). \qquad (\boldsymbol{III})$$

Então,

$$det(\boldsymbol{A}) = a_{11}.c_{11} + a_{12}.c_{12} + \cdots + a_{1n}.c_{1n}.$$

Essa fórmula é chamada de expansão de cofator com respeito à primeira linha de $\boldsymbol{A}$**.**

Teorema 2.1. Expansão em cofatores.

O determinante da uma matriz $\boldsymbol{A} = [a_{ij}]_{n\times n}$, pode ser calculado pela expansão do cofator com respeito a qualquer linha ou coluna. A expansão com respeito à $i - ésima$ linha, usando os cofatores em $(\boldsymbol{III})$, é dada por

$$det(\boldsymbol{A}) = a_{i1}.c_{i1} + a_{i2}.c_{i2} + \cdots + a_{in}.c_{in}.$$

A expansão do cofator em respeito à $j - ésima$ coluna é dada por

$$det(\boldsymbol{A}) = a_{1j}.c_{1j} + a_{2j}.c_{2j} + \cdots + a_{nj}.c_{nj}.$$

Exemplo 2.3. O Teorema 2.1 nos permite escrever o determinante da matriz

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 10 & -1 & 1 \\ 5 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 9 \end{bmatrix}$$

como

$$det(\boldsymbol{A}) = a_{21}.c_{21} + a_{22}.c_{22} + \cdots + a_{23}.c_{23}$$

$$= (-1)^{2+1}.a_{21}.|A_{21}| + (-1)^{2+2}.a_{22}.|A_{22}| + (-1)^{2+3}.a_{23}.|A_{23}|$$

$$= -5.\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 3 & 9 \end{vmatrix} + 0.\begin{vmatrix} 10 & 1 \\ 2 & 9 \end{vmatrix} + (-1).0.\begin{vmatrix} 10 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= -5.(-9-3) + 0 + 0 = 60.$$

Observação 2.3. Em geral, a melhor estratégia para calcular o determinante usando o Teorema 2.1 é expandindo ao longo da linha ou coluna que apresenta o maior número de zeros.

Exemplo 2.4. Calcular $det(\boldsymbol{A})$, onde:

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 3 & -7 & 8 & 9 & -6 \\ 0 & 2 & -5 & 7 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \end{bmatrix}.$$

A expansão do cofator ao longo da primeira coluna de $\boldsymbol{A}$ tem todos os termos iguais à zero, exceto o primeiro. Assim,

$$det(\boldsymbol{A}) = 3.\begin{vmatrix} 2 & -5 & 7 & 3 \\ 0 & 1 & 5 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \end{vmatrix}$$

Em seguida, expande-se esse determinante 4×4 com respeito à primeira coluna, de modo a tirar vantagem dos zeros contidos nessa coluna. Tem-se:

$$det(\boldsymbol{A}) = 3.2.\begin{vmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 2 & 4 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \end{vmatrix}$$

Agora, expande-se esse determinante 3×3 com respeito à terceira linha,

$$det(\boldsymbol{A}) = 3.2.(-1).(-2).\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}$$

Calculando-se o determinante 2×2, acima, obtém:

$$det(\boldsymbol{A}) = -12.$$

A matriz do Exemplo 2.4 era "*quase triangular*". O método usado nesse exemplo pode ser facilmente adaptado de modo que se tem o seguinte teorema.

Teorema 2.2. Determinante de matrizes triangulares

Se $\boldsymbol{A}$ é uma matriz triangular de ordem $n \times n$, então $det(\boldsymbol{A})$ é igual ao produto dos elementos da diagonal principal de $\boldsymbol{A}$**.**

Este teorema torna fácil calcular o determinante de uma matriz triangular, independente de sua ordem.

Exemplo 2.5. Pelo Teorema 2.2, o determinante da matriz:

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 5 & -1 \\ 0 & 1 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

está dado por:

$$det(\boldsymbol{A}) = 3.1.2.2 = 12.$$

2.3. Propriedades dos determinantes

A seguir, serão enunciadas algumas das conhecidas propriedades elementares dos determinantes.

Teorema 2.3. Operações de linhas

Seja uma matriz $\boldsymbol{A} = [a_{ij}]_{n\times n}$.

(i) Se um múltiplo de uma linha de $\boldsymbol{A}$ for somada à outra linha formando uma matriz $\boldsymbol{B}$, então $det(\boldsymbol{A}) = det(\boldsymbol{B})$.

(ii) Se duas linhas de $\boldsymbol{A}$ forem trocadas entre si formando a matriz $\boldsymbol{B}$, então $det\ (\boldsymbol{B})\ = -det\ (\boldsymbol{A})$.

(iii) Se uma linha de $\boldsymbol{A}$ for multiplicada por um escalar k formando uma matriz $\boldsymbol{B}$, então $det(\boldsymbol{B}) = k.det(\boldsymbol{A})$.

O próximo exemplo mostra como se aplica o Teorema 2.3 para calcular determinantes de uma forma eficiente.

Exemplo 2.6. Calcule $det(\boldsymbol{A})$, onde

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 9 \end{bmatrix}.$$

Uma das possíveis estratégias é transformar a matriz $\boldsymbol{A}$ em uma matriz triangular superior e aplicar o Teorema 2.2. Assim, têm-se os seguintes passos:

Passo 1: Soma-se à linha 2 a linha 1 multiplicada por -1:

$$\det(\boldsymbol{A}) = \begin{vmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 9 \end{vmatrix}$$

Passo 2: Soma-se à linha 3 a linha 1 multiplicada por -1:

$$det(\boldsymbol{A}) = \begin{vmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 8 \end{vmatrix}$$

Passo 3: Soma-se à linha 3 a linha 2 multiplicada por -2:

$$det(\boldsymbol{A}) = \begin{vmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{vmatrix}$$

Passo 4: Finalmente, do Teorema 2.2, tem-se:

$$det(\boldsymbol{A}) = 1.2.8 = 16.$$

A expansão em cofatores (Teorema 2.1) e as propriedades dos determinantes (Teorema 2.3) podem, às vezes, serem usados em conjunto para fornecer um meio efetivo de calcular determinantes. Os cálculos do próximo exemplo ilustram esta ideia.

Exemplo 2.7. Calcular $det(\boldsymbol{A})$, onde:

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} -3 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 9 \end{bmatrix}.$$

Têm-se os seguintes passos:

Passo 1. Soma-se à linha 2 a linha 3,

$$det(\boldsymbol{A}) = \begin{vmatrix} -3 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -3 & -1 & 1 \\ 0 & 4 & 10 \\ 1 & 3 & 9 \end{vmatrix}$$

Passo 2. Soma-se à linha 1 a linha 3 multiplicada por 3,

$$det(\boldsymbol{A}) = \begin{vmatrix} 0 & 8 & 28 \\ 0 & 4 & 10 \\ 1 & 3 & 9 \end{vmatrix}$$

Passo 3. Expansão do cofator ao longo da primeira coluna:

$$det(\boldsymbol{A}) = \begin{vmatrix} 8 & 28 \\ 4 & 10 \end{vmatrix} = -32.$$

Exemplo 2.8. Sejam a, b e c números reais não nulos e distintos. Calcular $det(\boldsymbol{A})$, onde:

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & a^3 & a^2 \\ 1 & b^3 & b^2 \\ 1 & c^3 & c^2 \end{bmatrix}$$

Se somar -1 vez a primeira linha à segunda e terceira linha obtém:

$$det(\boldsymbol{A}) = \begin{bmatrix} 1 & a^3 & a^2 \\ 0 & b^3 - a^3 & b^2 - a^2 \\ 0 & c^3 - a^3 & c^2 - a^2 \end{bmatrix}$$

Fazendo a expansão em cofatores ao longo da primeira coluna,

$$det(\boldsymbol{A}) = \begin{vmatrix} b^3 - a^3 & b^2 - a^2 \\ c^3 - a^3 & c^2 - a^2 \end{vmatrix}$$

Finalmente, e depois de algumas manipulações algébricas:

$$det(\boldsymbol{A}) = (b - a)(c - a)(b - c)(ac + ab + bc).$$

O Teorema 2.3 nos permite realizar operações com linhas de uma matriz. O próximo teorema mostra que se podem realizar operações análogas com as colunas de uma matriz.

Teorema 2.4. Operações com colunas

Se $\boldsymbol{A}$ é uma matriz $n \times n$, então $det(\boldsymbol{A^t}) = det(\boldsymbol{A})$.

Portanto, por causa do Teorema 2.4, cada afirmação do Teorema 2.3 é verdadeira se substituir a palavra “linha” por “coluna”.

Exemplo 2.9. Determinar $det(\boldsymbol{A})$, onde:

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -3 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

Soma-se à coluna 2 a coluna 1, obtém-se:

$$det(\boldsymbol{A}) = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -3 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 4 & 1 \end{vmatrix}$$

Seguidamente, soma-se à coluna 3 a coluna 1 multiplicada por 3,

$$det(\boldsymbol{A}) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 4 & 4 \end{vmatrix}$$

Utilizando a expansão em cofatores ao longo da linha 1, finalmente obtém-se,

$$det(\boldsymbol{A}) = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 4 \end{vmatrix} = 0.$$

Exemplo 2.10. Calcular $det(\boldsymbol{A})$ para a matriz:

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{bmatrix}$$

Onde, a, b e c são números reais não nulos e distintos.

Quando soma-se -1 vez a primeira coluna à segunda e terceira colunas, obtém-se:

$$det(\boldsymbol{A}) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & b-a & c-a \\ a^3 & b^3-a^3 & c^3-a^3 \end{vmatrix}$$

Utilizando-se da expansão em cofatores ao longo da linha 1, obtém-se:

$$det(\boldsymbol{A}) = \begin{vmatrix} b-a & c-a \\ b^3-a^3 & c^3-a^3 \end{vmatrix}$$

Finalmente, e depois de manipulações algébricas, obtém-se:

$$det(\boldsymbol{A}) = (b-a)(c-a)(c-b)(a+b+c).$$

2.4. A regra de Cramer

O próximo Teorema fornece uma fórmula para a solução de certos sistemas de equações lineares. Esta fórmula é conhecida como a regra de Cramer.

Teorema 2.5. Regra de Cramer

Seja $\boldsymbol{AX} = \boldsymbol{B}$ um sistema $n \times n$. Se $det(\boldsymbol{A}) \neq 0$, então o sistema tem uma única solução dada por:

$$x_j = \frac{det(\boldsymbol{A}_j)}{det(\boldsymbol{A})}, \qquad j = 1, 2, \dots, n,$$

onde, $\boldsymbol{A}_j$ denota a matriz obtida de $\boldsymbol{A}$ substituindo a sua $j - ésima$ coluna pela única coluna de $\boldsymbol{B}$.

Exemplo 2.11. Usando a regra de Cramer para resolver o sistema linear:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 87 \\ x_1 + x_3 = 123 \\ x_2 + x_3 = 66 \end{cases}.$$

Do sistema, tem-se:

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{A_1} = \begin{bmatrix} 87 & 1 & 0 \\ 123 & 0 & 1 \\ 66 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{A_2} = \begin{bmatrix} 1 & 87 & 0 \\ 1 & 123 & 1 \\ 0 & 66 & 1 \end{bmatrix} \text{ e } \boldsymbol{A_3} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 87 \\ 1 & 0 & 123 \\ 0 & 1 & 66 \end{bmatrix}$$

Como $det(\boldsymbol{A}) = -2 \neq 0$, pela regra de Cramer:

$$x_1 = \frac{det(\boldsymbol{A}_1)}{det(\boldsymbol{A})} = \frac{-144}{-2} = 72$$

$$x_2 = \frac{det(\boldsymbol{A}_2)}{det(\boldsymbol{A})} = \frac{-30}{-2} = 15$$

$$x_3 = \frac{det(\boldsymbol{A}_3)}{det(\boldsymbol{A})} = \frac{-102}{-2} = 51.$$

Observação 2.4. Embora a regra de Cramer forneça uma fórmula explicita das soluções de um sistema, ela é ineficiente para cálculos manuais, com exceção do caso de matrizes 2×2, ou, tal vez, 3×3. Isto, porque o número de equações que ela envolve é muito grande, quando se trabalha com muitas equações.

CAPÍTULO 3: MATRIZ DE VANDERMONDE

Apresenta-se, neste capítulo, a primeira matriz especial chamada matriz de Vandermonde. Deduz-se uma fórmula compacta para seu determinante e discute-se algumas aplicações.

3.1. Definição

Uma matriz de Vandermonde é uma matriz quadrada de ordem $n \geq 2$ cujas colunas estão em progressão geométrica e as entradas da primeira linha são iguais ao número real 1. Isto é, sejam $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ escalares reais, então $\boldsymbol{V}(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$ é a matriz:

$$\boldsymbol{V}(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{bmatrix}.$$

Por exemplo, as matrizes:

$$\boldsymbol{V}(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ x_1 & x_2 \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{V}(x_1, x_2, x_3) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 \end{bmatrix}$$

são matrizes de Vandermonde de ordens $n = 2, n = 3,$ respectivamente.

Observação 3.1. Em alguns casos, por simplicidade, usaremos as seguintes notações:

$$\boldsymbol{V}(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \boldsymbol{V}_n \quad ou \quad \boldsymbol{V}(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \boldsymbol{V}$$

No exemplo que segue, e, através de simples manipulações, pode-se verificar sem dificuldades que as matrizes dadas são matrizes de Vandermonde.

Exemplo 3.1.

a. $\boldsymbol{V} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 9 & 16 \\ 1 & 8 & 27 & 64 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1^2 & 2^2 & 3^2 & 4^2 \\ 1^3 & 2^3 & 3^3 & 4^3 \end{bmatrix}$

b. $\boldsymbol{V} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ \log 5000 & \log 500 & \log 50 & \log 5 \\ \log^2 5000 & \log^2 500 & \log^2 50 & \log^2 5 \\ \log^3 5000 & \log^3 500 & \log^3 50 & \log^3 5 \end{bmatrix}$

c. Considerando a, b e c números reais não nulos, tem-se também a seguinte matriz de Vandermonde

$$\boldsymbol{V} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \dfrac{c}{a} & \dfrac{a}{b} & \dfrac{b}{c} \\ \left(\dfrac{c}{a}\right)^2 & \left(\dfrac{a}{b}\right)^2 & \left(\dfrac{b}{c}\right)^2 \end{bmatrix}$$

3.2. Determinante de Vandermonde

O próximo teorema estabelece uma fórmula algébrica para o cálculo do determinante de uma matriz de Vandermonde. Este determinante é, muitas vezes, chamado de determinante de Vandermonde. A expressão:

$$\prod_{1 \le i < j \le n} (x_j - x_i)$$

usada no teorema significa o produto de todos os termos $x_j - x_i$ onde $1 \le i < j \le n$. Por exemplo:

$$\prod_{1 \le i < j \le 3} (x_j - x_i) = (x_3 - x_1).(x_3 - x_2).(x_2 - x_1).$$

Teorema 3.1. Dada a matriz de Vandermonde $\boldsymbol{V}(x_1, x_2 \cdot, \cdots, x_n)$, então o seu determinante é dado por:

$$\prod_{1 \le i < j \le n} (x_j - x_i) \text{ , para todo } n \ge 2.$$

Demonstração: A demonstração será feita por indução sobre n.

Então, para $n = 2$ tem-se:

$$det(\boldsymbol{V_2}) = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ x_1 & x_2 \end{vmatrix} = x_2 - x_1 = \prod_{1 \le i < j \le 2} (x_j - x_i),$$

pois é um determinante de uma matriz de ordem $n = 2$.

Agora, suponha-se que a expressão:

$$det(\boldsymbol{V}_n) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \le i < j \le n} (x_j - x_i)$$

seja verdadeira para certo $n > 2$. Deseja-se mostrar que:

$$\det(\boldsymbol{V}_{n+1}) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_{n+1} \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_{n+1}^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^n & x_2^n & \cdots & x_{n+1}^n \end{vmatrix} = \prod_{1 \le i < j \le (n+1)} (x_j - x_i).$$

Para isso, considere o determinante:

$$\det(\boldsymbol{V}_{n+1}) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_{n+1} \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_{n+1}^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_{n+1}^{n-1} \\ x_1^n & x_2^n & \cdots & x_{n+1}^n \end{vmatrix}$$

O objetivo agora é zerar todas as entradas abaixo de 1 na primeira coluna. Por exemplo, somando-se $-x_1$ vezes a $n - ésima$ linha à $(n+1) - ésima$ linha, obtém-se do Teorema 2.3:

$$\det(\boldsymbol{V}_{n+1}) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_{n+1} \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & \cdots & x_{n+1}^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_1^{n-2} & x_2^{n-2} & x_3^{n-2} & \cdots & x_{n+1}^{n-2} \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & x_3^{n-1} & \cdots & x_{n+1}^{n-1} \\ 0 & x_2^n - x_1 x_2^{n-1} & x_3^n - x_1 x_2^{n-1} & \cdots & x_{n+1}^n - x_1 x_{n+1}^{n-1} \end{vmatrix}$$

Novamente, somando-se $-x_1$ vezes a $(n-1) - ésima$ linha à $(n) - ésima$ linha, obtém-se do Teorema 2.3:

$$\det(\boldsymbol{V}_{n+1}) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_{n+1} \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & \cdots & x_{n+1}^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_1^{n-2} & x_2^{n-2} & x_3^{n-2} & \cdots & x_{n+1}^{n-2} \\ 0 & x_2^{n-1} - x_1 x_2^{n-2} & x_3^{n-1} - x_1 x_3^{n-2} & \cdots & x_{n+1}^{n-1} - x_1 x_{n+1}^{n-2} \\ 0 & x_2^n - x_1 x_2^{n-1} & x_3^n - x_1 x_2^{n-1} & & x_{n+1}^n - x_1 x_{n+1}^{n-1} \end{vmatrix}$$

Dessa forma, continuando com o procedimento anterior, obtém-se o determinante:

$$\det(\boldsymbol{V}_{n+1}) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & x_2 - x_1 & x_3 - x_1 & \cdots & x_{n+1} - x_1 \\ 0 & x_2^2 - x_1x_2 & x_3^2 - x_1x_3 & \cdots & x_{n+1}^2 - x_1x_{n+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & x_2^{n-2} - x_1x_2^{n-3} & x_3^{n-2} - x_1x_3^{n-3} & \cdots & x_{n+1}^{n-2} - x_1x_{n+1}^{n-3} \\ 0 & x_2^{n-1} - x_1x_2^{n-2} & x_3^{n-1} - x_1x_3^{n-2} & \cdots & x_{n+1}^{n-1} - x_1x_{n+1}^{n-2} \\ 0 & x_2^{n} - x_1x_2^{n-1} & x_3^{n} - x_1x_3^{n-1} & \cdots & x_{n+1}^{n} - x_1x_{n+1}^{n-1} \end{vmatrix}$$

Expandindo em cofatores ao longo da primeira coluna, chega-se à expressão (Teorema 2.1):

$$\det(\boldsymbol{V}_{n+1}) = \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & x_3 - x_1 & \cdots & x_{n+1} - x_1 \\ x_2(x_2 - x_1) & x_3(x_3 - x_1) & \cdots & x_{n+1}(x_{n+1} - x_1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_2^{n-2}(x_2 - x_1) & x_3^{n-2}(x_3 - x_1) & \cdots & x_{n+1}^{n-2}(x_{n+1} - x_1) \\ x_2^{n-1}(x_2 - x_1) & x_3^{n-1}(x_3 - x_1) & \cdots & x_{n+1}^{n-1}(x_{n+1} - x_1) \end{vmatrix}$$

Colocando em evidência fatores comuns em cada coluna, obtém-se do Teorema 2.4:

$$\det(\boldsymbol{V}_{n+1}) = (x_2 - x_1).(x_3 - x_1).\cdots.(x_{n+1} - x_1) \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_2 & x_3 & \cdots & x_{n+1} \\ x_2^2 & x_3^2 & \cdots & x_{n+1}^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_2^{n-2} & x_3^{n-2} & \cdots & x_{n+1}^{n-2} \\ x_2^{n-1} & x_3^{n-1} & \cdots & x_{n+1}^{n-1} \end{vmatrix}$$

Usando a hipótese, chega-se à expressão:

$$det(\boldsymbol{V}_{n+1}) = (x_2 - x_1).(x_3 - x_1).\cdots.(x_{n+1} - x_1).\prod_{2 \le i < j \le (n+1)} (x_j - x_i)$$

$$= \prod_{1 \le i < j \le (n+1)} (x_j - x_i).$$

Assim, pelo princípio da indução,

$$det\ (\boldsymbol{V}_n) = \prod_{1\leq i<j\leq n} \left(x_j - x_i\right), \text{ para todo } n \geq 2.$$

Com isto, encerra-se a demonstração do Teorema.

Observação 3.2. Resulta, imediatamente, do teorema que $det\ (\boldsymbol{V}_n) \neq 0$, se somente se, $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ são distintos. Muitas das aplicações do determinante de Vandermonde estão relacionadas a este fato.

Os exemplos apresentados a seguir, mostram a relativa facilidade em calcular o determinante de Vandermonde usando o Teorema 3.1.

Exemplo 3.2. Desde que todas as matrizes do Exemplo 3.1 são matrizes de Vandermonde, se tem do Teorema 3.1 os seguintes determinantes.

a)

$$det(\boldsymbol{V}) = (4-3).(4-2).(4-1).(3-2).(3-1).(2-1) = 12$$

b)

$$det(\boldsymbol{V}) = (\log 5 - \log 50).(\log 5 - \log 500).(\log 5 - \log 5000).(\log 50 - \log 500)$$

$$.(\log 50 - \log 5000).(\log 500 - \log 5000)$$

Das propriedades operatórias dos logaritmos, tem-se:

$$det\ (\boldsymbol{V}) = (-1).(-2).(-3).(-1).(-2).(-1) = 12$$

c)

$$det(\boldsymbol{V}) = \left(\frac{b}{c} - \frac{a}{b}\right).\left(\frac{b}{c} - \frac{c}{a}\right).\left(\frac{a}{b} - \frac{c}{a}\right) = -\frac{(b^2 - ac).(c^2 - ab).(a^2 - bc)}{a^2 b^2 c^2}.$$

Os próximos exemplos mostram como aplicar a expansão em cofator (Teorema 2.1) ou as propriedades dos determinantes (Teorema 2.3 e 2.4) para obter um determinante de Vandermonde e, consequentemente usar o Teorema 3.1.

Exemplo 3.3. Calcular o determinante das seguintes matrizes:

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 9 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 9 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{bmatrix}.$$

Do Teorema 2.4, obtém-se:

$$det(\boldsymbol{A}) = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 3 \\ (-1)^2 & (0)^2 & (3)^2 \end{vmatrix}.$$

$$det(\boldsymbol{B}) = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \\ (-1)^2 & (1)^2 & (3)^2 \end{vmatrix}.$$

$$det(\boldsymbol{C}) = \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}.$$

Reconhecendo esses determinantes como determinantes de Vandermonde. Logo pelo Teorema 3.1:

$$det(\boldsymbol{A}) = (3-0).[3-(-1)].[0-(-1)] = 3.4.1 = 12.$$

$$det(\boldsymbol{B}) = (3-1).[3-(-1)].[1-(-1)] = 2.4.2 = 16.$$

$$det(\boldsymbol{C}) = (c-b).(c-a).(b-a).$$

Exemplo 3.4. Calcule $det(\boldsymbol{A})$**,** onde:

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{bmatrix}.$$

Do Teorema 2.3 e Teorema 2.4, consegue-se:

$$det(\boldsymbol{A}) = \begin{vmatrix} a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix} = abc \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}.$$

Assim, decorre do Teorema 3.1,

$$det(\boldsymbol{A}) = abc.(c-b).(c-a).(b-a).$$

Exemplo 3.5. Calcular o determinante das seguintes matrizes:

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2^2 & 3^2 & 4^2 \\ 0 & 2^3 & 3^3 & 4^3 \end{bmatrix}, \ \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 3^2 & 4^2 \\ 1 & 0 & 3^3 & 4^3 \end{bmatrix}.$$

Expandindo em cofatores ao longo da primeira coluna de $\boldsymbol{A}$,

$$|\boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2^2 & 3^2 & 4^2 \\ 0 & 2^3 & 3^3 & 4^3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 2^2 & 3^2 & 4^2 \\ 2^3 & 3^3 & 4^3 \end{vmatrix}.$$

Analogamente, expandindo em cofatores ao longo da segunda coluna de $\boldsymbol{B}$,

$$|\boldsymbol{B}| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 3^2 & 4^2 \\ 1 & 0 & 3^3 & 4^3 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 1 & 3^2 & 4^2 \\ 1 & 3^3 & 4^3 \end{vmatrix}.$$

Finalmente, aplicando o Exemplo 3.4, obtém-se:

$$|\boldsymbol{A}| = 2.3.4(4-3).(4-2).(3-2) = 24.1.2.1 = 48.$$

$$|\boldsymbol{B}| = -1.3.4.(4-3)(4-1).(3-1) = -12.1.3.2 = -72.$$

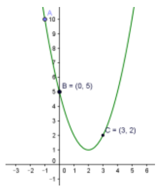
3.3. Aplicações

A seguir mostram-se algumas aplicações elementares envolvendo o determinante de Vandermonde.

3.3.1. Interpolação polinomial

Um problema importante em matemática é encontrar um polinômio cujo gráfico passe por uma coleção de pontos especificados no plano; tal polinômio é dito polinômio interpolador de pontos. Neste contexto, a utilidade do determinante de Vandermonde baseia-se na Observação 3.2 do Teorema 3.1. Ilustra-se este fato com alguns exemplos a seguir.

Exemplo 3.6. A partir da figura



parece que pode-se encontrar uma parábola que intercepta os pontos A, B e C.

Se a equação da parábola procurada é dada por:

$$p(x) = c + bx + ax^2$$

ao substituir os pontos A, B e C em $p(x)$, obtém-se o sistema de equações:

$$\begin{cases} c.1 + b.(-1) + a.(-1)^2 = 10 \\ c.1 + b.(0) + a.(0)^2 = 5 \\ c.1 + b.(3) + a.(3)^2 = 2 \end{cases} . \quad (\boldsymbol{I})$$

Da regra de Cramer (Teorema 2.5), pode-se afirmar que este sistema tem sempre solução única, pois o determinante da matriz de coeficientes (determinante de Vandermonde):

$$|\boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & (-1)^2 \\ 1 & 0 & 0^2 \\ 1 & 3 & 3^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 3 \\ (-1)^2 & 0^2 & 3^2 \end{vmatrix},$$

é não nulo pela Observação 3.2. Assim, pode-se então concluir o seguinte: existe um, e somente um, terno de números a, b e c tais que a função

$$p(x) = c + bx + ax^2$$

passa pelos pontos $A, B\ e\ C$.

A seguir, determinam-se as constantes $a, b\ e\ c$. Para isso, do sistema ($\boldsymbol{I}$), tem-se:

$$\boldsymbol{A}_1 = \begin{bmatrix} 10 & -1 & 1 \\ 5 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 9 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{A}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 10 & 1 \\ 1 & 5 & 0 \\ 1 & 2 & 9 \end{bmatrix} \text{ e } \boldsymbol{A}_3 = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 10 \\ 1 & 0 & 5 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}.$$

Portanto, dos Exemplos 2.1, 2.2, 2.3, 3.3 e, pela regra de Cramer, obtém-se:

$$c = \frac{|\boldsymbol{A}_1|}{|\boldsymbol{A}|} = \frac{60}{12} = 5.$$

$$b = \frac{|\boldsymbol{A}_2|}{|\boldsymbol{A}|} = \frac{-48}{12} = -4.$$

$$a = \frac{|\boldsymbol{A}_3|}{|\boldsymbol{A}|} = \frac{12}{12} = 1.$$

Decorre que o polinômio interpolante é dado por:

$$p(x) = 5 - 4x + x^2.$$

Exemplo 3.7. Encontrar um polinômio interpolante que passe pelos pontos $A(-1,-3),\ B(1,-1)\ e\ C(3,1)$.

Como tem-se três condições a satisfazer, a intuição sugere que o polinômio procurado seja da forma

$$p(x) = c + bx + ax^2,$$

já que tem-se três coeficientes a, b e c a satisfazer as três condições.

Substituindo os pontos $A, B\ e\ C$ em $p(x)$, obtém-se:

$$\begin{cases} c + b.(-1) + a.(-1)^2 = -3 \\ c + b.(1) + a.(1)^2 = -1 \\ c + b.(3) + a.(3)^2 = 1 \end{cases} . \qquad (\boldsymbol{II})$$

Desde que o determinante da matriz de coeficientes:

$$|\boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 9 \end{vmatrix},$$

é não nulo (Observação 3.2), segue da regra de Cramer (Teorema 2.5) que o sistema $(\boldsymbol{II})$ tem solução única. Essa solução é dada pelas expressões

$$c = \frac{|\boldsymbol{A}_1|}{|\boldsymbol{A}|}, \quad b = \frac{|\boldsymbol{A}_2|}{|\boldsymbol{A}|} \quad \text{e} \quad a = \frac{|\boldsymbol{A}_3|}{|\boldsymbol{A}|},$$

onde,

$$\boldsymbol{A}_1 = \begin{bmatrix} -3 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 9 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{A_2} = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 9 \end{bmatrix} \text{ e } \boldsymbol{A_3} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -3 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

Segue dos Exemplos 2.6, 2.7, 2.9 e do Exemplo 3.3,

$$c = \frac{|\boldsymbol{A}_1|}{|\boldsymbol{A}|} = \frac{-32}{16} = -2.$$

$$b = \frac{|\boldsymbol{A_2}|}{|\boldsymbol{A}|} = \frac{16}{16} = 1.$$

$$a = \frac{|\boldsymbol{A_3}|}{|\boldsymbol{A}|} = \frac{0}{16} = 0.$$

Assim, o polinômio interpolante é dado por:

$$p(x) = -2 + x.$$

Observação 3.3. Nos Exemplos 3.6 e 3.7 pode se ver que o grau do polinômio interpolante pode ser menor ou igual a dois.

Os Exemplos 3.6 e 3.7 são casos particulares do problema mais geral de encontrar um polinômio, cujo gráfico passe pelos três pontos de coordenadas x distintas:

$$(x_0, y_0), (x_1, y_1)\ e\ (x_2, y_2)$$

Desde que se tenha três condições a satisfazer, o polinômio interpolante procurado é da forma:

$$p(x) = c + bx + ax^2.$$

Segue, que os coeficientes desse polinômio satisfazem:

$$\begin{cases} c + bx_0 + ax_0^2 = y_0 \\ c + bx_1 + ax_1^2 = y_1 \\ c + bx_2 + ax_2^2 = y_2 \end{cases} \qquad (\boldsymbol{III})$$

O determinante da matriz de coeficientes do sistema (Determinante de Vandermonde) é dado por:

$$|\boldsymbol{V}| = \begin{vmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 \\ 1 & x_1 & x_1^2 \\ 1 & x_2 & x_2^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_0 & x_1 & x_2 \\ x_0^2 & x_1^2 & x_2^2 \end{vmatrix}.$$

Desde que $x_0, x_1\ e\ x_2$ são distintos, tem-se que $|\boldsymbol{V}| \neq 0$ (Observação 3.2). Assim, pela regra de Cramer (Teorema 2.5), o sistema ($\boldsymbol{III}$) tem uma solução única e portanto o polinômio é único.

Resumindo, se tem o importante teorema a seguir.

Teorema 3.2. Dados quaisquer três pontos no plano XY que têm abscissas distintas, existe um único polinômio de grau dois ou inferior, cujo gráfico passa por esses pontos.

3.3.2. Sistemas lineares

O conhecimento da estrutura especial de uma matriz, como é o caso de uma matriz de Vandermonde, permite resolver rapidamente alguns sistemas de equações lineares que tem como matriz de coeficientes uma matriz de Vandermonde. A seguir mostram-se alguns exemplos.

Exemplo 3.8. Sejam $a, b\ e\ c$ números reais não nulos e distintos. Deseja-se resolver o sistema:

$$\begin{cases} ax + by + cz = k \\ a^2x + b^2y + c^2z = k^2. \\ a^3x + b^3y + c^3z = k^3 \end{cases}$$

A matriz de coeficientes do sistema é dada pela matriz de Vandermonde:

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{bmatrix},$$

e do Exemplo 3.4, sabe-se que o seu determinante é:

$$|\boldsymbol{A}| = abc(c-b)(c-a)(b-a).$$

Usando a regra de Cramer e o Exemplo 3.4, tem-se que:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} k & b & c \\ k^2 & b^2 & c^2 \\ k^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix}}{|\boldsymbol{A}|} = \frac{kbc\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ k & b & c \\ k^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}}{abc(c-b)(c-a)(b-a)} = \frac{kbc(c-b)(c-k)(b-k)}{abc(c-b)(c-a)(b-a)}$$

$$= \frac{k(c-k)(b-k)}{a(c-a)(b-a)}.$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} a & k & c \\ a^2 & k^2 & c^2 \\ a^3 & k^3 & c^3 \end{vmatrix}}{|\boldsymbol{A}|} = \frac{akc\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & k & c \\ a^2 & k^2 & c^2 \end{vmatrix}}{abc(c-b)(c-a)(b-a)} = \frac{k(c-k)(c-a)(k-a)}{b(c-b)(c-a)(b-a)}$$

$$= \frac{k(c-k)(k-a)}{b(b-a)}.$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} a & b & k \\ a^2 & b^2 & k^2 \\ a^3 & b^3 & k^3 \end{vmatrix}}{|\boldsymbol{A}|} = \frac{abk\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & k \\ a^2 & b^2 & k^2 \end{vmatrix}}{abc(c-b)(c-a)(b-a)} = \frac{abk(k-b)(k-a)(b-a)}{abc(c-b)(c-a)(b-a)}$$

$$= \frac{k(k-b)(k-a)}{c(c-b)(c-a)}.$$

Exemplo 3.9. Sejam a, b e c números reais não nulos e distintos. Resolver o sistema:

$$\begin{cases} x + ay + a^2z = a^3 \\ x + by + b^2z = b^3 \\ x + cy + c^2z = c^3 \end{cases}.$$

Tem-se que, a matriz de coeficientes do sistema é:

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{bmatrix}.$$

Do Exemplo 3.3, tem-se:

$$det(\boldsymbol{A}) = (c-b)(c-a)(b-a) \neq 0,$$

pois $a, b\ e\ c$ são distintos e não nulos. Portanto, pode-se usar a regra de Cramer. Então:

$$x = \frac{|\boldsymbol{A}_1|}{|\boldsymbol{A}|}, \quad y = \frac{|\boldsymbol{A}_2|}{|\boldsymbol{A}|} \quad \text{e} \quad z = \frac{|\boldsymbol{A}_3|}{|\boldsymbol{A}|},$$

onde:

$$\boldsymbol{A}_1 = \begin{bmatrix} a^3 & a & a^2 \\ b^3 & b & b^2 \\ c^3 & c & c^2 \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{A}_2 = \begin{vmatrix} 1 & a^3 & a^2 \\ 1 & b^3 & b^2 \\ 1 & c^3 & c^2 \end{vmatrix} \text{ e } \boldsymbol{A}_3 = \begin{vmatrix} 1 & a & a^3 \\ 1 & b & b^3 \\ 1 & c & c^3 \end{vmatrix}.$$

Calculando os determinantes $|\boldsymbol{A}_1|, |\boldsymbol{A}_2|$ e $|\boldsymbol{A}_3|$:

- Do Teorema 2.3 e 2.4, tem-se:

$$det(\boldsymbol{A_1}) = \begin{vmatrix} a^3 & a & a^2 \\ b^3 & b & b^2 \\ c^3 & c & c^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & a^2 & a^3 \\ b & b^2 & b^3 \\ c & c^2 & c^3 \end{vmatrix}.$$

Logo, do Exemplo 3.4, consegue-se:

$$det(\boldsymbol{A_1}) = abc.(c-b).(c-a).(b-a).$$

- No Exemplo 2.8 foi calculado que

$$det(\boldsymbol{A_2}) = (a-b)(c-a)(c-b)(ac+ab+bc).$$

- Do Exemplo 2.10 :

$$det(\boldsymbol{A_3}) = (b-a)(c-a)(c-b)(a+b+c).$$

Assim, finalmente tem-se:

$$x = \frac{abc(c-b)(c-a)(b-a)}{(c-b)(c-a)(b-a)} = abc.$$

$$y = \frac{-(b-a)(c-a)(c-b)(ac+ab+bc)}{(c-b)(c-a)(b-a)} = -(ac+ab+bc).$$

$$z = \frac{(b-a)(c-a)(c-b)(a+b+c)}{(c-b)(c-a)(b-a)} = a+b+c.$$

Exemplo 3.10. Dado o sistema:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 0 \\ x_1 + 2^2x_2 + 3^2x_3 + 4^2x_4 = 0 \\ x_1 + 2^3x_2 + 3^3x_3 + 4^3x_4 = 0 \end{cases}.$$

Sabe-se que a matriz de coeficientes é dada pela matriz de Vandermonde:

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2^2 & 3^2 & 4^2 \\ 1 & 2^3 & 3^3 & 4^3 \end{bmatrix}$$

O Exemplo 3.2, fornece o determinante:

$$det(\boldsymbol{A}) = 12 \neq 0.$$

Logo, da regra de Cramer, obtém-se:

$$x_1 = \frac{|\boldsymbol{A}_1|}{|\boldsymbol{A}|}, \quad x_2 = \frac{|\boldsymbol{A}_2|}{|\boldsymbol{A}|}, \quad x_3 = \frac{|\boldsymbol{A}_3|}{|\boldsymbol{A}|} \text{ e } x_4 = \frac{|\boldsymbol{A}_4|}{|\boldsymbol{A}|},$$

onde

$$\boldsymbol{A_1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2^2 & 3^2 & 4^2 \\ 0 & 2^3 & 3^3 & 4^3 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{A_2} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 3^2 & 4^2 \\ 1 & 0 & 3^3 & 4^3 \end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{A}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 4 \\ 1 & 2^2 & 0 & 4^2 \\ 1 & 2^3 & 0 & 4^3 \end{bmatrix} \text{ e } \boldsymbol{A}_4 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 2^2 & 3^2 & 0 \\ 1 & 2^3 & 3^3 & 0 \end{bmatrix}.$$

A seguir calculam-se os determinantes $|\boldsymbol{A}_1|, |\boldsymbol{A}_2|, |\boldsymbol{A}_3|$ e $|\boldsymbol{A}_4|$:

- Viu-se no Exemplo 2.5 que:

$$|\boldsymbol{A}_1| = 48 \quad \text{e} \quad |\boldsymbol{A}_2| = -72.$$

- Seguindo o mesmo procedimento que o Exemplo 3.5, tem-se:

$$|\boldsymbol{A}_3| = 48 \quad \text{e} \quad |\boldsymbol{A}_4| = -12.$$

Portanto,

$$x_1 = \frac{48}{12} = 4, \qquad\qquad x_2 = \frac{-72}{12} = -6,$$

$$x_3 = \frac{48}{12} = 4 \qquad \text{e} \qquad x_4 = \frac{-12}{12} = -1.$$

CAPÍTULO 4: MATRIZ DE CAUCHY

Neste capítulo, apresenta-se outra matriz especial, um tanto desconhecida, pois a mesma não é retratada nos livros didáticos do Ensino Médio [YOUSSEF], [DANTE], [SOUZA], [PAIVA], [IEZZI] e [LEONARDO]. Esta matriz é conhecida como matriz de Cauchy. Deduz-se uma fórmula para o cálculo do seu determinante e discute-se algumas aplicações na resolução de sistemas lineares.

4.1. Definição

Uma matriz de Cauchy de ordem n é uma matriz $\boldsymbol{C} = [a_{ij}]$, cujo elemento a_{ij} é dado por:

$$a_{ij} = \frac{1}{x_i + y_j}$$

onde $x_1, x_2, \dots, x_n$ e $y_1, y_2, \dots, y_n$ são números reais tal que $x_i + y_j \neq 0$ para $1 \leq i, j \leq n$. Isto é, a matriz $\boldsymbol{C} = [a_{ij}]$ é a matriz:

$$\boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} \frac{1}{x_1 + y_1} & \frac{1}{x_1 + y_2} & \cdots & \frac{1}{x_1 + y_n} \\ \frac{1}{x_2 + y_1} & \frac{1}{x_2 + y_2} & \cdots & \frac{1}{x_2 + y_n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \frac{1}{x_n + y_1} & \frac{1}{x_n + y_2} & \cdots & \frac{1}{x_n + y_n} \end{bmatrix}.$$

No exemplo a seguir, pode se verificar sem dificuldades que as matrizes dadas, são matrizes de Cauchy.

Exemplo 4.1:

a) $\boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} \frac{1}{1+5} & \frac{1}{1+7} \\ \frac{1}{2+5} & \frac{1}{2+7} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{8} \\ \frac{1}{7} & \frac{1}{9} \end{bmatrix}$

b) $\boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} \frac{1}{1+1} & \frac{1}{1+2} & \frac{1}{1+3} \\ \frac{1}{2+1} & \frac{1}{2+2} & \frac{1}{2+3} \\ \frac{1}{3+1} & \frac{1}{3+2} & \frac{1}{3+3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \frac{1}{6} \end{bmatrix}$

c) Para um número real $a \neq 0$, tem a matriz de Cauchy:

$$\boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} \frac{1}{1+a} & \frac{1}{1+2a} & \frac{1}{1+3a} \\ \frac{1}{2+a} & \frac{1}{2+2a} & \frac{1}{2+3a} \\ \frac{1}{3+a} & \frac{1}{3+2a} & \frac{1}{3+3a} \end{bmatrix}$$

Particularizando a Definição 4.1 para o caso em que:

$$a_{ij} = \frac{1}{i+j-1},$$

Obtém-se a chamada matriz de Hilbert, $\boldsymbol{H} = [a_{ij}]$.

Exemplo 4.2. Escrevendo por extenso as matrizes de Hilbert $\boldsymbol{H_2}$, $\boldsymbol{H_3}$ e $\boldsymbol{H}_4$.

$$\boldsymbol{H_2} = \begin{bmatrix} \frac{1}{1+1-1} & \frac{1}{1+2-1} \\ \frac{1}{2+1-1} & \frac{1}{2+2-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{H_3} = \begin{bmatrix} \frac{1}{1+1-1} & \frac{1}{1+2-1} & \frac{1}{1+3-1} \\ \frac{1}{2+1-1} & \frac{1}{2+2-1} & \frac{1}{2+3-1} \\ \frac{1}{3+1-1} & \frac{1}{3+2-1} & \frac{1}{3+3-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{H_4} = \begin{bmatrix} \frac{1}{1+1-1} & \frac{1}{1+2-1} & \frac{1}{1+3-1} & \frac{1}{1+4-1} \\ \frac{1}{2+1-1} & \frac{1}{2+2-1} & \frac{1}{2+3-1} & \frac{1}{2+4-1} \\ \frac{1}{3+1-1} & \frac{1}{3+2-1} & \frac{1}{3+3-1} & \frac{1}{3+4-1} \\ \frac{1}{4+1-1} & \frac{1}{4+2-1} & \frac{1}{4+3-1} & \frac{1}{4+4-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{1} & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \frac{1}{6} & \frac{1}{7} \end{bmatrix}.$$

4.2. Determinante de uma matriz de Cauchy

O próximo teorema mostra como calcular o determinante de uma matriz de Cauchy ou simplesmente determinante de Cauchy. A demonstração será feita por indução sobre n.

Teorema 4.1. Determinante de Cauchy

Seja a matriz de Cauchy $\boldsymbol{C} = \left[a_{ij}\right]_{n\times n}$, onde:

$$a_{ij} = \frac{1}{x_i + x_j},$$

então,

$$det(\boldsymbol{C}) = \frac{\prod_{1\leq j<i\leq n}(x_i - x_j)(y_i - y_j)}{\prod_{i,j=1}^{n}(x_i + y_j)}.$$

Demonstração. Para $n = 2$, resulta que:

$$det(\boldsymbol{C}) = \begin{vmatrix} \frac{1}{x_1 + y_1} & \frac{1}{x_1 + y_2} \\ \frac{1}{x_2 + y_1} & \frac{1}{x_2 + y_2} \end{vmatrix} = \frac{(x_2 - x_1)(y_2 - y_1)}{(x_1 + y_1)(x_1 + y_2)(x_2 + y_1)(x_2 + y_2)} =$$

$$= \frac{\prod_{1 \le j < i \le 2} (x_i - x_j)(y_i - y_j)}{\prod_{i,j=1}^{2} (x_i + y_j)}.$$

Hipótese: Suponha-se que a expressão:

$$det(\boldsymbol{C}) = \begin{vmatrix} \frac{1}{x_1 + y_1} & \frac{1}{x_1 + y_2} & \cdots & \frac{1}{x_1 + y_{n-1}} & \frac{1}{x_1 + y_n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \frac{1}{x_i + y_1} & \frac{1}{x_i + y_2} & \cdots & \frac{1}{x_i + y_{n-1}} & \frac{1}{x_i + y_n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \frac{1}{x_n + y_1} & \frac{1}{x_n + y_2} & \cdots & \frac{1}{x_n + y_{n-1}} & \frac{1}{x_n + y_n} \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{\prod_{1 \le j < i \le n} (x_i - x_j)(y_i - y_j)}{\prod_{i,j=1}^{n} (x_i + y_j)}$$

seja verdadeira para um certo $n > 2$.

Tese: Deve-se mostrar que o determinante da matriz $\boldsymbol{C}_{(n+1)\times(n+1)}$, é dado pela expressão:

$$det(\boldsymbol{C}) = \begin{vmatrix} \frac{1}{x_1 + y_1} & \frac{1}{x_1 + y_2} & \cdots & \frac{1}{x_1 + y_n} & \frac{1}{x_1 + y_{n+1}} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \frac{1}{x_i + y_1} & \frac{1}{x_i + y_2} & \cdots & \frac{1}{x_i + y_n} & \frac{1}{x_i + y_{n+1}} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \frac{1}{x_n + y_1} & \frac{1}{x_n + y_2} & \cdots & \frac{1}{x_n + y_n} & \frac{1}{x_n + y_{n+1}} \\ \frac{1}{x_{n+1} + y_1} & \frac{1}{x_{n+1} + y_2} & \cdots & \frac{1}{x_{n+1} + y_n} & \frac{1}{x_{n+1} + y_{n+1}} \end{vmatrix}$$

$$= \frac{\prod_{1 \le j < i \le n+1} (x_i - x_j)(y_i - y_j)}{\prod_{i,j=1}^{n+1} (x_i + y_j)}.$$

Com efeito, considere o determinante:

$$det(\boldsymbol{C}) = \begin{vmatrix} \frac{1}{x_1 + y_1} & \frac{1}{x_1 + y_2} & \cdots & \frac{1}{x_1 + y_n} & \frac{1}{x_1 + y_{n+1}} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \frac{1}{x_i + y_1} & \frac{1}{x_i + y_2} & \cdots & \frac{1}{x_i + y_n} & \frac{1}{x_i + y_{n+1}} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \frac{1}{x_n + y_1} & \frac{1}{x_n + y_2} & \cdots & \frac{1}{x_n + y_n} & \frac{1}{x_n + y_{n+1}} \\ \frac{1}{x_{n+1} + y_1} & \frac{1}{x_{n+1} + y_2} & \cdots & \frac{1}{x_{n+1} + y_n} & \frac{1}{x_{n+1} + y_{n+1}} \end{vmatrix}$$

Subtraindo a $(n + 1) - ésima$ coluna das outras colunas obtém-se dos Teoremas 2.3 e 2.4:

$$|\boldsymbol{C}| = \begin{vmatrix} \frac{1}{x_1 + y_1} - \frac{1}{x_1 + y_{n+1}} & \cdots & \frac{1}{x_1 + y_n} - \frac{1}{x_1 + y_{n+1}} & \frac{1}{x_1 + y_{n+1}} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ \frac{1}{x_i + y_1} - \frac{1}{x_i + y_{n+1}} & \cdots & \frac{1}{x_i + y_n} - \frac{1}{x_i + y_{n+1}} & \frac{1}{x_i + y_{n+1}} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ \frac{1}{x_n + y_1} - \frac{1}{x_n + y_{n+1}} & \cdots & \frac{1}{x_n + y_n} - \frac{1}{x_n + y_{n+1}} & \frac{1}{x_n + y_{n+1}} \\ \frac{1}{x_{n+1} + y_1} - \frac{1}{x_{n+1} + y_{n+1}} & \cdots & \frac{1}{x_{n+1} + y_n} - \frac{1}{x_{n+1} + y_{n+1}} & \frac{1}{x_{n+1} + y_{n+1}} \end{vmatrix}$$

Utilizando-se da seguinte identidade:

$$\frac{1}{x_i + y_j} - \frac{1}{x_i + y_{n+1}} = \frac{y_{n+1} - y_j}{\left(x_i + y_j\right)(x_i + y_{n+1})}$$

para $j < n + 1$, tem-se que:

$$|\boldsymbol{C}| = \begin{vmatrix} \frac{y_{n+1}-y_1}{(x_1+y_1)(x_1+y_{n+1})} & \cdots & \frac{y_{n+1}-y_n}{(x_1+y_1)(x_1+y_{n+1})} & \frac{1}{x_1+y_{n+1}} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ \frac{y_{n+1}-y_1}{(x_i+y_1)(x_i+y_{n+1})} & \cdots & \frac{y_{n+1}-y_n}{(x_i+y_n)(x_i+y_{n+1})} & \frac{1}{x_i+y_{n+1}} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ \frac{y_{n+1}-y_1}{(x_n+y_1)(x_n+y_{n+1})} & \cdots & \frac{y_{n+1}-y_n}{(x_n+y_n)(x_n+y_{n+1})} & \frac{1}{x_n+y_{n+1}} \\ \frac{y_{n+1}-y_1}{(x_{n+1}+y_1)(x_{n+1}+y_{n+1})} & \cdots & \frac{y_{n+1}-y_n}{(x_{n+1}+y_n)(x_{n+1}+y_{n+1})} & \frac{1}{x_{n+1}+y_{n+1}} \end{vmatrix}$$

Colocando em evidência os termos $y_{n+1} - y_j$ nas colunas e os termos $\frac{1}{x_i+y_{n+1}}$, nas linhas, decorre dos Teoremas 2.3 e 2.4:

$$|\boldsymbol{C}| = \frac{\prod_{j=1}^{n}(y_{n+1}-y_j)}{\prod_{i=1}^{n+1}(x_i+y_{n+1})} \begin{vmatrix} \frac{1}{x_1+y_1} & \cdots & \frac{1}{x_1+y_n} & 1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ \frac{1}{x_i+y_1} & \cdots & \frac{1}{x_i+y_n} & 1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ \frac{1}{x_n+y_1} & \cdots & \frac{1}{x_n+y_n} & 1 \\ \frac{1}{x_{n+1}+y_1} & \cdots & \frac{1}{x_{n+1}+y_n} & 1 \end{vmatrix}.$$

Subtraindo a $(n+1) - ésima$ linha das outras linhas, decorre novamente dos Teoremas 2.3 e 2.4:

$$|\boldsymbol{C}| = \frac{\prod_{j=1}^{n}(y_{n+1}-y_j)}{\prod_{i=1}^{n+1}(x_i+y_{n+1})} \begin{vmatrix} \frac{1}{x_1+y_1} - \frac{1}{x_{n+1}+y_1} & \cdots & \frac{1}{x_1+y_n} - \frac{1}{x_{n+1}+y_n} & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ \frac{1}{x_i+y_1} - \frac{1}{x_{n+1}+y_1} & \cdots & \frac{1}{x_i+y_n} - \frac{1}{x_{n+1}+y_n} & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ \frac{1}{x_n+y_1} - \frac{1}{x_{n+1}+y_1} & \cdots & \frac{1}{x_n+y_n} - \frac{1}{x_{n+1}+y_n} & 0 \\ \frac{1}{x_{n+1}+y_1} & \cdots & \frac{1}{x_{n+1}+y_n} & 1 \end{vmatrix}.$$

Pela expansão em cofatores em relação à $(n+1)-ésima$ coluna, obtém-se do Teorema 2.1:

$$|\boldsymbol{C}|=\frac{\prod_{j=1}^{n}(y_{n+1}-y_j)}{\prod_{i=1}^{n+1}(x_i+y_{n+1})}\cdot\begin{vmatrix}\frac{1}{x_1+y_1}-\frac{1}{x_{n+1}+y_1} & \cdots & \frac{1}{x_1+y_n}-\frac{1}{x_{n+1}+y_n}\\ \vdots & & \vdots\\ \frac{1}{x_i+y_1}-\frac{1}{x_{n+1}+y_1} & \cdots & \frac{1}{x_i+y_n}-\frac{1}{x_{n+1}+y_n}\\ \vdots & & \vdots\\ \frac{1}{x_n+y_1}-\frac{1}{x_{n+1}+y_1} & \cdots & \frac{1}{x_n+y_n}-\frac{1}{x_{n+1}+y_n}\end{vmatrix}.$$

Utilizando a identidade

$$\frac{1}{x_i+y_j}-\frac{1}{x_{n+1}+y_j}=\frac{x_{n+1}-x_i}{(x_i+y_j)(x_{n+1}+y_j)}$$

para $j<n+1$, tem-se que:

$$|\boldsymbol{C}|=\frac{\prod_{j=1}^{n}(y_{n+1}-y_j)}{\prod_{i=1}^{n+1}(x_i+y_{n+1})}\cdot\begin{vmatrix}\frac{x_{n+1}-x_1}{(x_1+y_1)(x_{n+1}+y_1)} & \cdots & \frac{x_{n+1}-x_1}{(x_1+y_n)(x_{n+1}+y_n)}\\ \vdots & & \vdots\\ \frac{x_{n+1}-x_i}{(x_i+y_1)(x_{n+1}+y_1)} & \cdots & \frac{x_{n+1}-x_i}{(x_i+y_n)(x_{n+1}+y_n)}\\ \vdots & & \vdots\\ \frac{x_{n+1}-x_{n-1}}{(x_{n-1}+y_1)(x_{n+1}+y_1)} & \cdots & \frac{x_{n+1}-x_{n-1}}{(x_{n-1}+y_n)(x_{n+1}+y_n)}\\ \frac{x_{n+1}-x_n}{(x_n+y_1)(x_{n+1}+y_1)} & \cdots & \frac{x_{n+1}-x_n}{(x_n+y_n)(x_{n+1}+y_n)}\end{vmatrix}.$$

Em seguida, colocam-se em evidência os termos $x_{n+1}-x_i$ nas linhas e os termos $\frac{1}{x_{n+1}+y_j}$ nas colunas, obtendo dos Teoremas 2.3 e 2.4:

$$|\boldsymbol{C}| = \frac{\prod_{j=1}^{n}(y_{n+1} - y_j)\prod_{i=1}^{n}(x_{n+1} - x_i)}{\prod_{i=1}^{n+1}(x_i + y_{n+1})\prod_{j=1}^{n}(x_{n+1} + y_j)} \begin{vmatrix} \frac{1}{x_1 + y_1} & \frac{1}{x_1 + y_2} & \cdots & \frac{1}{x_1 + y_n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{1}{x_i + y_1} & \frac{1}{x_i + y_2} & \cdots & \frac{1}{x_i + y_n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{1}{x_{n-1} + y_1} & \frac{1}{x_{n-1} + y_2} & \cdots & \frac{1}{x_{n-1} + y_n} \\ \frac{1}{x_n + y_1} & \frac{1}{x_n + y_2} & \cdots & \frac{1}{x_n + y_n} \end{vmatrix}.$$

Pela hipótese indutiva, tem-se que:

$$|\boldsymbol{C}| = \frac{\prod_{j=1}^{n}(y_{n+1} - y_j)\prod_{i=1}^{n}(x_{n+1} - x_i)}{\prod_{i=1}^{n+1}(x_i + y_{n+1})\prod_{j=1}^{n}(x_{n+1} + y_j)} \cdot \frac{\prod_{1 \le j < i \le n}(x_i - x_j)(y_i - y_j)}{\prod_{i,j=1}^{n}(x_i + y_j)} =$$

$$= \frac{\prod_{1 \le j < i \le n+1}(x_i - x_j)(y_i - y_j)}{\prod_{i,j=1}^{n+1}(x_i + y_j)},$$

completando assim a demonstração.

Particularizando o Teorema 4.1 para o caso de uma matriz de Hilbert onde $\boldsymbol{H} = \left[\frac{1}{i+j-1}\right]_{nxn}$, decorre que o seu determinante é dado pela expressão:

$$|\boldsymbol{H}| = \frac{\prod_{1 \le j < i \le n}(x_i - x_j)(y_i - y_j)}{\prod_{i,j=1}^{n}(x_i + y_j)} = \frac{\prod_{1 \le j < i \le n}(i - j)^2}{\prod_{i,j=1}^{n}(i + j - 1)}. \qquad (\boldsymbol{I})$$

Exemplo 4.3. Vamos calcular o determinante das matrizes dos itens b) e c) do Exemplo 4.1.

Para a matriz do item b), tem-se do Teorema 4.1:

$$|\boldsymbol{C}| = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \frac{1}{6} \end{vmatrix} = \frac{(3-2)(3-1)(2-1)(3-2)(3-1)(2-1)}{(1+1)(1+2)(1+3)(2+1)(2+2)(2+3)(3+1)(3+2)(3+3)}$$

$$= \frac{1}{2^6.3^3.5^2}.$$

Para a matriz do item c), do Teorema 4.1 chega-se ao resultado:

$$|\boldsymbol{C}| = \begin{vmatrix} \frac{1}{1+a} & \frac{1}{1+2a} & \frac{1}{1+3a} \\ \frac{1}{2+a} & \frac{1}{2+2a} & \frac{1}{2+3a} \\ \frac{1}{3+a} & \frac{1}{3+2a} & \frac{1}{3+3a} \end{vmatrix}$$

$$= \frac{(3-2)(3-1)(2-1)(3a-2a)(3a-a)(2a-a)}{(1+a)(1+2a)(1+3a)(2+a)(2+2a)(2+3a)(3+a)(3+2a)(3+3a)} =$$

$$= \frac{2a^3}{3(1+a)^3(1+2a)(1+3a)(2+a)(2+3a)(3+a)(3+2a)}.$$

Exemplo 4.4: Para o caso particular da matriz de Hilbert $\boldsymbol{H}_3$, temos de ($\boldsymbol{I}$) que o determinante é dado por:

$$|\boldsymbol{H}_3| = \begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \end{vmatrix} = \frac{(3-1)^2(3-2)^2(2-1)^2}{(2+1)(1+1)(1)(2+2)(1+2)(2)(2+3)(1+3)(3)} = \frac{1}{2160}$$

4.3. Aplicações

Na seção precedente, derivou-se uma fórmula especifica para o determinante de Cauchy. Nesta seção, usa-se essa fórmula para resolver certos tipos de sistemas lineares elementares, cujas matrizes de coeficientes são matrizes de Cauchy. A seguir, alguns exemplos.

Exemplo 4.5. A matriz de coeficientes do sistema linear:

$$\begin{cases} \frac{x}{2}+\frac{y}{3}+\frac{z}{4}=1 \\ \frac{x}{3}+\frac{y}{4}+\frac{z}{5}=0 \\ \frac{x}{4}+\frac{y}{5}+\frac{z}{6}=0 \end{cases}$$

é a matriz de Cauchy:

$$\boldsymbol{C}=\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \frac{1}{6} \end{bmatrix}$$

com determinante de Cauchy (Exemplo 4.3):

$$|\boldsymbol{C}|=\frac{1}{2^6.3^3.5^2}.$$

Portanto, podemos usar a regra de Cramer (Teorema 2.5). Então:

$$x=\frac{\begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \\ 0 & \frac{1}{5} & \frac{1}{6} \end{vmatrix}}{|\mathbf{C}|}=\frac{\begin{vmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{6} \end{vmatrix}}{|\mathbf{C}|}=72.$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix}\frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{4}\\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{5}\\ \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{6}\end{vmatrix}}{|\mathbf{C}|}=\frac{-\begin{vmatrix}\frac{1}{3} & \frac{1}{5}\\ \frac{1}{4} & \frac{1}{6}\end{vmatrix}}{|\mathbf{C}|}=-240.$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{3} & 1\\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & 0\\ \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & 0\end{vmatrix}}{|\mathbf{C}|}=\frac{\begin{vmatrix}\frac{1}{3} & \frac{1}{4}\\ \frac{1}{4} & \frac{1}{5}\end{vmatrix}}{|\mathbf{C}|}=180.$$

Exemplo 4.6. A matriz de coeficientes do sistema linear:

$$\begin{cases} x+\frac{y}{2}+\frac{z}{3}=1\\ \frac{x}{2}+\frac{y}{3}+\frac{z}{4}=0\\ \frac{x}{3}+\frac{y}{4}+\frac{z}{5}=0 \end{cases}$$

é a matriz de Hilbert:

$$\boldsymbol{H}_3=\begin{bmatrix}1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3}\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4}\\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5}\end{bmatrix}$$

cujo determinante é:

$$|\boldsymbol{H}_3|=\frac{1}{2160}.$$

Portanto, pela regra de Cramer (Teorema 2.5),

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \end{vmatrix}}{|\boldsymbol{H}_3|} = \frac{\begin{vmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \end{vmatrix}}{|\boldsymbol{H}_3|} = 9.$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{5} \end{vmatrix}}{|\boldsymbol{H}_3|} = \frac{-\begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{5} \end{vmatrix}}{|\boldsymbol{H}_3|} = -36.$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & 0 \end{vmatrix}}{|\boldsymbol{H}_3|} = \frac{\begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \end{vmatrix}}{|\boldsymbol{H}_3|} = 30.$$

Os Exemplos 4.5 e 4.6 acima são casos particulares do problema mais geral dado no exemplo a seguir.

Exemplo 4.7. Considere $a_1, a_2 \cdot, \cdots, a_{n,}, b_1, b_2 \cdot, \cdots, b_n$ números reais distintos tal que $a_i + b_j \neq 0$ para $1 \leq i, j \leq n$. O sistema de equações seguinte:

$$\begin{cases} \dfrac{x_1}{a_1 + b_1} + \dfrac{x_2}{a_1 + b_2} + \cdots + \dfrac{x_n}{a_1 + b_n} = y_1 \\ \dfrac{x_1}{a_2 + b_1} + \dfrac{x_2}{a_2 + b_2} + \cdots + \dfrac{x_n}{a_2 + b_n} = y_2 \\ \quad \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad\quad \vdots \qquad\quad \vdots \\ \dfrac{x_1}{a_n + b_1} + \dfrac{x_2}{a_n + b_2} + \cdots + \dfrac{x_n}{a_n + b_n} = y_n \end{cases}$$

tem como matriz de coeficientes, a matriz de Cauchy

$$\boldsymbol{C} = \left[\frac{1}{a_i + b_j}\right].$$

Pelo Teorema 4.1 e as considerações acima, decorre que o determinante:

$$|\boldsymbol{C}| = \frac{\prod_{1 \leq j < i \leq n}(a_i - a_j)(b_i - b_j)}{\prod_{i,j=1}^{n}(a_i + a_j)}$$

é não nulo. Logo, da regra de Cramer (Teorema 2.5), tem-se que:

$$x_j = \frac{|\boldsymbol{C}_j|}{|\boldsymbol{C}|}, \qquad j = 1, 2, \dots, n$$

onde $\boldsymbol{C}_j$ denota a matriz obtida de $\boldsymbol{C}$ substituindo a sua $j - ésima$ coluna pela matriz coluna $\boldsymbol{Y}$, onde

$$\boldsymbol{Y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}.$$

CAPÍTULO 5. SUGESTÃO DE AULA

Neste capítulo, propomos uma sugestão de aula onde utilizam-se os conceitos, definições e determinantes das matrizes especiais citadas durante este trabalho. Nesta proposta, destinada para os estudantes do Ensino Médio, destacam-se a utilidade e facilidade no cálculo do determinante das matrizes especiais, facilitando a compreensão do mecanismo de resolução de sistemas de equações lineares.

5.1. Proposta de aula

1ª Aula

O professor pode iniciar a aula apresentando o sistema de equações abaixo, onde, os coeficientes numéricos são números fracionários, em seguida o professor deve solicitar aos alunos que escrevam sob a forma de equação matricial, para que apliquem a regra de Cramer (Teorema 2.5).

$$\begin{cases} \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}y + \frac{1}{4}z = 1 \\ \frac{1}{3}x + \frac{1}{4}y + \frac{1}{5}z = 1. \\ \frac{1}{4}x + \frac{1}{5}y + \frac{1}{6}z = 1 \end{cases}$$

Logo após a separação da matriz de coeficientes, matriz $\boldsymbol{C}$, o professor poderá explicar a definição de matriz de Cauchy (Definição 4.1), sugerimos reescrever a matriz $\boldsymbol{C}$ da seguinte forma:

$$\boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} \frac{1}{1+1} & \frac{1}{1+2} & \frac{1}{1+3} \\ \frac{1}{2+1} & \frac{1}{2+2} & \frac{1}{2+3} \\ \frac{1}{3+1} & \frac{1}{3+2} & \frac{1}{3+3} \end{bmatrix}.$$

E, então o professor deve relacionar, junto aos alunos, a matriz $\boldsymbol{C}$ com a definição apresentada, mostrando que a mesma é uma matriz de Cauchy, onde, tem-se que:

$$x_1 = 1;\ x_2 = 2;\ x_3 = 3;\ y_1 = 1;\ y_2 = 2;\ y_3 = 3.$$

Seguindo no desenvolvimento das atividades, o professor apresentará a fórmula do determinante de Cauchy (Teorema 4.1), logo desenvolverá a resolução de $det(\boldsymbol{C})$ na lousa, mostrando passo a passo a aplicação do Teorema 4.1. Aqui, é importante que o professor enfatize o fato que $det(\boldsymbol{C}) \neq 0$, (este calculado no Exemplo 4.3), portanto, o sistema admite solução e esta é única. Decorrente da regra Cramer, deduz-se:

$$\boldsymbol{A}_1 = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ 1 & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \\ 1 & \frac{1}{5} & \frac{1}{6} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{A_2} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & 1 & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{4} & 1 & \frac{1}{6} \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \boldsymbol{A_3} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & 1 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & 1 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & 1 \end{bmatrix}$$

Neste momento, sugerimos que os alunos façam uso da expansão em cofatores, Teorema 2.1, que poderão ajudá-los a encontrar os seguintes determinantes:

$$|\boldsymbol{A}_1| = \frac{1}{3600}, \qquad |\boldsymbol{A}_2| = -\frac{1}{720} \quad \text{e} \quad |\boldsymbol{A}_3| = \frac{1}{720}$$

De posse dos determinantes e lembrando a regra de Cramer (Teorema 2.5), o professor deve conduzir os alunos a concluírem que:

$$x = \frac{|\boldsymbol{A_1}|}{|\boldsymbol{C}|} = \frac{\frac{1}{3600}}{\frac{1}{43200}} = 12, \quad y = \frac{|\boldsymbol{A}_2|}{|\boldsymbol{C}|} = \frac{-\frac{1}{720}}{\frac{1}{43200}} = -60 \text{ e } z = \frac{|\boldsymbol{A_3}|}{|\boldsymbol{C}|} = \frac{\frac{1}{720}}{\frac{1}{43200}} = 60.$$

Assim, finaliza-se esta aula.

Observação 5.1. Para tornar a aula, mas dinâmica, sugerimos que o professor disponha de um projetor multimídia conectado a um computador para projeção da Definição 4.1 e Teorema 4.1, assim como os mesmos poderão ser impressos e, entregues aos alunos.

2ª Aula

Nesta aula, o professor apresentará uma atividade investigativa, composta por uma situação-problema, em que os alunos terão que mobilizar conhecimentos já adquiridos e estratégias para resolver o problema proposto.

Para essa aula, os alunos do 2° Ano do Ensino Médio podem trabalhar em grupos de cinco alunos. Além disso, o professor deve dispor de um projetor multimídia conectado a um computador, para a projeção do seguinte problema.

Situação problema sugerida:

Em uma competição esportiva a distribuição das medalhas de ouro prata e bronze, entre os três primeiros colocados se deram da seguinte forma:

- O terceiro colocado obteve um terço das medalhas de ouro do primeiro colocado, um quinto do total de medalhas de prata e um sexto do total de medalhas de bronze, totalizando 42 medalhas.

- O segundo colocado obteve um meio das medalhas de ouro do primeiro colocado, um quarto do total de medalhas de prata e um quinto do total de medalhas de bronze, totalizando 54 medalhas.

- O primeiro colocado obteve certo número de medalhas de ouro, um terço do total de medalhas de prata e um quarto do total de medalhas de bronze, totalizando 80 medalhas.

Nessas condições, determine o número de medalhas de ouro, prata e bronze obtidas por cada um.

A partir da leitura do problema, o professor deve propor que os alunos equacionem o problema chegando a um sistema de equações. Na sequência, os alunos deverão encontrar a solução do mesmo seguindo como exemplo a resolução anterior.

3ª Aula

Para finalizar, será feito a correção da atividade na lousa para que os alunos confiram a resposta encontrada, sanem as dúvidas.

Resolução da situação problema:

Medalhas de ouro: x Medalhas de prata: y Medalhas de bronze: z

Assim têm-se as equações:

1° colocado: $x + \frac{y}{3} + \frac{z}{4} = 80$

2° colocado: $\frac{x}{2} + \frac{y}{4} + \frac{z}{5} = 54$

3° colocado: $\frac{x}{3} + \frac{y}{5} + \frac{z}{6} = 42$

Logo, tem-se o sistema:

$$\begin{cases} x + \dfrac{y}{3} + \dfrac{z}{4} = 80 \\ \dfrac{x}{2} + \dfrac{y}{4} + \dfrac{z}{5} = 54 \\ \dfrac{x}{3} + \dfrac{y}{5} + \dfrac{z}{6} = 42 \end{cases}$$

Reescrevendo o sistema sob a forma de equação matricial tem-se:

$$\begin{bmatrix} 1 & \dfrac{1}{3} & \dfrac{1}{4} \\ \dfrac{1}{2} & \dfrac{1}{4} & \dfrac{1}{5} \\ \dfrac{1}{3} & \dfrac{1}{5} & \dfrac{1}{6} \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 80 \\ 54 \\ 42 \end{bmatrix}$$

Sobre a matriz de coeficientes tem-se:

$$\boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{2-1} & \dfrac{1}{2+1} & \dfrac{1}{2+2} \\ \dfrac{1}{3-1} & \dfrac{1}{3+1} & \dfrac{1}{3+2} \\ \dfrac{1}{4-1} & \dfrac{1}{4+1} & \dfrac{1}{4+2} \end{bmatrix}$$

Nota-se então, que, é uma matriz de Cauchy de ordem três, onde:

$$x_1 = 2;\ x_2 = 3;\ x_3 = 4;\ y_1 = -1;\ y_2 = 1;\ y_3 = 2.$$

Calculando seu determinante, tem-se:

$$|\boldsymbol{C}| = \frac{\prod_{1 \leq j, i \leq 3} (x_i - x_j)(y_i - y_j)}{\prod_{1 \leq i, j \leq 3} (x_i + y_j)}$$

$$|\boldsymbol{C}| = \frac{(x_3 - x_2)(x_3 - x_1)(x_2 - x_1)(y_3 - y_2)(y_3 - y_1)(y_2 - y_1)}{(x_1 + y_1)(x_1 + y_2)(x_1 + y_3)(x_2 + y_1)(x_2 + y_2)(x_2 + y_3)(x_3 + y_1)(x_3 + y_2)(x_3 + y_3)} =$$

$$|\boldsymbol{C}| = \frac{(4 - 3)(4 - 2)(3 - 2)(2 - 1)(2 + 1)(1 + 1)}{(2 - 1)(2 + 1)(2 + 2)(3 - 1)(3 + 1)(3 + 2)(4 - 1)(4 + 1)(4 + 2)} =$$

$$= \frac{1.2.1.1.3.2}{1.3.4.2.4.5.3.5.6} = \frac{1}{2^4.3^2.5^2} = \frac{1}{3600}.$$

Portanto, tem-se que $|\boldsymbol{C}| \neq 0$, então o sistema apresenta solução e esta é única.

Aplicando a regra de Cramer, obtém-se:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 80 & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ 54 & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \\ 42 & \frac{1}{5} & \frac{1}{6} \end{vmatrix}}{|\boldsymbol{C}|} = \frac{\frac{1}{60.60}\begin{vmatrix} 80 & 20 & 15 \\ 54 & 15 & 12 \\ 42 & 12 & 10 \end{vmatrix}}{|\boldsymbol{C}|} = \frac{\frac{5.3.2}{60.60}\begin{vmatrix} 16 & 4 & 3 \\ 18 & 5 & 4 \\ 21 & 6 & 5 \end{vmatrix}}{|\boldsymbol{C}|} =$$

$$= \frac{\frac{1}{120}(400 + 336 + 324 - 315 - 384 - 360)}{|\boldsymbol{C}|} = \frac{\frac{1}{120}}{\frac{1}{3600}} = \frac{3600}{120} = 30.$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 80 & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & 54 & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{3} & 42 & \frac{1}{6} \end{vmatrix}}{|\boldsymbol{C}|} = \frac{\frac{1}{6.60}\begin{vmatrix} 6 & 80 & 15 \\ 3 & 54 & 12 \\ 2 & 42 & 10 \end{vmatrix}}{|\boldsymbol{C}|} = \frac{\frac{2}{6.60}\begin{vmatrix} 6 & 40 & 15 \\ 3 & 27 & 12 \\ 2 & 21 & 10 \end{vmatrix}}{|\boldsymbol{C}|} =$$

$$= \frac{\frac{1}{180}(1620 + 960 + 945 - 810 - 1512 - 1200)}{|\boldsymbol{C}|} = \frac{\frac{3}{180}}{\frac{1}{3600}} = 60.$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{3} & 80 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 54 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{5} & 42 \end{vmatrix}}{|\boldsymbol{C}|} = \frac{\frac{1}{6.60}\begin{vmatrix} 6 & 20 & 80 \\ 3 & 15 & 54 \\ 2 & 12 & 42 \end{vmatrix}}{|\boldsymbol{C}|} = \frac{\frac{2.3.2}{6.60}\begin{vmatrix} 3 & 10 & 40 \\ 1 & 5 & 18 \\ 1 & 6 & 21 \end{vmatrix}}{|\boldsymbol{C}|} =$$

$$= \frac{\frac{1}{30}(315 + 180 + 240 - 200 - 324 - 210)}{|\boldsymbol{C}|} = \frac{\frac{1}{30}}{\frac{1}{3600}} = 120.$$

Portanto:

O 1º colocado ganhou 30 medalhas de ouro, 20 de prata e 30 de bronze.

O 2º colocado ganhou 15 medalhas de ouro, 15 de prata e 24 de bronze.

O 3º colocado ganhou 10 medalhas de ouro, 12 de prata e 20 de bronze.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste trabalho, apresentou-se as matrizes especiais de Vandermonde, Cauchy e Hilbert. Foram obtidas fórmulas compactas para o determinante dessas matrizes. Observou-se que uma vantagem dessas fórmulas compactas é a relativa facilidade em calcular determinantes. Decorrente disto apresentou-se aplicações ligadas à interpolação polinomial e à resolução de sistemas lineares.

Apesar da aula proposta não ter sido aplicada em sala de aula gostaríamos de enfatizar que este conteúdo pode ser inserido no Ensino Médio.

REFERÊNCIAS

ANTON, Howard, **BUSBY**, Robert C., Álgebra Linear Contemporânea. Porto Alegre: Bookman, 2007.

ANTON, Howard, **RORRES** Chris, Álgebra Linear com Aplicações – 10ª edição. Porto Alegre: Bookman, 2012.

BOLDRINI, José Luiz, Álgebra Linear – 3ª edição. São Paulo: Harbra, 1980.

CAUCHY, Agustin Louis, Exercises d'analise et de phys.math. 2, (second edition). Bachelier: Paris.

DANTE, Luiz Roberto, Matemática: Contexto e Aplicações - 2ª Edição. São Paulo: Ática, 2013.

HEFEZ, Abramo, **FERNANDEZ**, Cecília S. – Coleção Profmat. SBM, 2012.

HILBERT, David, Ein Beitrag zur Theorie des Legendre'schen Polynoms, Acta Math. 18(1894), 155-159.

HOM, Roger A., **JOHNSON**, Charles R., Matrix Analysis. Edição 2. Cambridge University Press, 2012.

IEZZI, Gelson, **DOLCE**, Osvaldo, **DEGENSZAJN**, David, **PÉRIGO**, Roberto, **DE ALMEIDA**, Nilze, Matemática: Ciência e Aplicações – 7ª Edição. São Paulo: Saraiva, 2013.

LAX, Peter D., Linear Algebra and its Applications Second edition. John Wiley and Sons, 2007.

LAY, David C., Álgebra Linear e suas Aplicações – 4ª edição. LTC, 2013.

LEONARDO, Fabio Martins, Conexões com a Matemática, – 2ª Edição. São Paulo: Moderna, 2013.

PAIVA, Manoel, Matemática Paiva – 2ª Edição. São Paulo: Moderna, 2013.

SEDMS, Referencial Curricular da Rede Estadual de Ensino de Mato Grosso do Sul – Ensino Médio. Campo Grande - MS, 2012.

SOUZA, Joamir, Matemática: Novo Olhar – 2ª Edição. São Paulo: FTD, 2013.

ZHANG, Fuzhen, Matrix Theory. Springer New York 1999.

YOUSSEF, Antonio Nicolau, Matemática: Conceitos e Fundamentos – Volume 2. São Paulo: Scipione, 1993.