UNIVERSIDADE FEDERAL DA GRANDE DOURADOS -
UFGD
FACULDADE DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLOGIA -
FACET

MYRIAN PASTORE DA SILVA

UMA EXTENSÃO PARA O COEFICIENTE BINOMIAL:
O Coeficiente Trinomial

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA

DOURADOS - MS
FEVEREIRO – 2016

MYRIAN PASTORE DA SILVA

UMA EXTENSÃO PARA O COEFICIENTE BINOMIAL:

O Coeficiente Trinomial

ORIENTADORA: PROF.ª DRA. IRENE MAGALHÃES CRAVEIRO

Dissertação apresentada ao final do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT da Universidade Federal da Grande Dourados – UFGD como exigência parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

DOURADOS - MS
FEVEREIRO – 2016

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP).

S586e Silva, Myrian Pastore da.
Uma extensão para o coeficiente binomial: o coeficiente trinomial. / Myrian Pastore da Silva. – Dourados, MS: UFGD, 2016.
48f.

Orientadora: Profa. Dra. Irene Magalhães Craveiro.
Dissertação (Mestrado em Matemática) – Universidade Federal da Grande Dourados.

1. Coeficientes trinomiais. 2. Polinômio. 3. Teorema binomial. I. Título.

CDD – 511.6

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca Central – UFGD.

©Todos os direitos reservados. Permitido a publicação parcial desde que citada a fonte.

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
FUNDAÇÃO UNIVERSIDADE FEDERAL DA GRANDE DOURADOS
FACULDADE DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLOGIA
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL - PROFMAT

Termo de Aprovação

Após a apresentação, arguição e apreciação pela banca examinadora, foi emitido o parecer APROVADO, para a dissertação intitulada: "**UMA EXTENSÃO PARA O COEFICIENTE BINOMIAL: O Coeficiente Trinomial**", de autoria de **Myrian Pastore da Silva**, apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática da Universidade Federal da Grande Dourados.

IMCraveiro

Profª Dra. Irene Magalhães Craveiro (Orientadora-UFGD)
Presidente da Banca Examinadora

Ana Cláudia M.M. Chagas

Profa. Dra. Ana Cláudia Machado Mendonça Chagas
Membro Examinador (UFGD)

Vando Narciso

Prof. Dr. Vando Narciso
Membro Examinador (UEMS)

Dourados/MS, 24 de fevereiro de 2016

DEDICATÓRIA

Dedico este trabalho a meu saudoso pai que sempre acreditou em mim. Aos meus filhos Lucas e Jessé e a meu amado esposo Flávio.

AGRADECIMENTOS

Agradeço, primeiramente a Deus, sempre presente em todos os momentos e que me deu inteligência para que eu pudesse concluir este trabalho.

Agradeço a meu esposo e companheiro Flávio, que sempre me incentivou nos estudos, me dando apoio em todas as atividades e que foi minha fonte de inspiração nos momentos difíceis.

Agradeço a meus filhos Lucas e Jessé, por compreenderem minha ausência durante esta etapa de nossas vidas.

Agradeço aos meus colegas mestrandos, Marisane, Marinéia, Marcos e Marcus Vinícius pelo apoio, compartilhamento e incentivo nas longas tardes de estudos para preparação para as provas.

Obrigada a meu irmão Itacir e sua família que me receberam e acolheram, sempre com disposição e alegria, em sua residência durante o período do curso.

Agradeço a toda equipe do PROFMAT-UFGD, especialmente aos professores que compartilharam conosco o conhecimento que nos proporcionou sucesso.

À Prof.ª Dr.ª Irene, meu muito obrigada. Seu apoio, incentivo e orientação foram primordiais no desenvolvimento deste trabalho.

Obrigada à CAPES pelo incentivo financeiro.

Enfim, obrigada a todos que, de uma forma ou de outra, colaboraram comigo neste trabalho. Sem o apoio, a compreensão e a dedicação de todos eu não teria forças para prosseguir na caminhada.

Muito obrigada!

LISTA DE TABELAS E FIGURAS

LISTA DE NOTAÇÕES

$\mathbb{N}$: .... Conjunto dos números naturais.

$\mathbb{R}$: .... Conjunto dos números reais.

$\binom{n}{k}$: .... Combinação/Coeficiente binomial.

$\binom{n}{h}_2$: .... Coeficiente trinomial.

$\left[\begin{matrix} 2n \\ h+n \end{matrix}\right]$: .... Combinação de duplas.

$x!$: .... Fatorial de um número natural x.

$\sum$: .... Somatório.

$|x|$: .... Módulo de um número.

$\forall$: .... Para todo/Para qualquer que seja.

RESUMO

O foco principal deste trabalho é apresentar uma extensão do coeficiente binomial denominada coeficiente trinomial, pois o mesmo descreve características similares ao coeficiente binomial. Além disso, iremos retratar uma técnica de contagem que possibilita desenvolver o conteúdo de polinômio juntamente com Análise combinatória. Esta técnica de contagem, denominada função geradora, originou-se por meio dos trabalhos de Moivre e Euler cujo objetivo pretendido era resolver sucessões recorrentes e problemas relacionados a partições de um inteiro.

.

Palavras-chave: Coeficientes trinomiais. Polinômio. Teorema binomial.

ABSTRACT

The main focus of this paper is to present an extension of the binomial coefficient called trinomial coefficient, because it describes characteristics similar to the binomial coefficient. In addition, we will portray a counting technique that enables you to develop the polynomial content along with combinatorial analysis. This counting technique, called generating function, originated through the work Moivre and Euler whose intended purpose was to solve recurrent problems related to the partitions of an entire.

Keywords: Trinomial coeficiente. Polynomials. Binomial theorem

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

Os jogos de azar, tais como lançamentos de dados, jogos de cartas, loterias, entre outros contribuíram para o desenvolvimento da Análise Combinatória. A necessidade de calcular o número de possibilidades nos jogos gerou o estudo dos métodos de contagem. Essa tendência levou Euler e D'Alembert a escrever problemas referentes a loterias, sendo que um deles Euler publicou no ano de 1765.

> [...] Suponha que n bilhetes são numerados consecutivamente de 1 a n e que três bilhetes são tirados ao acaso. Então a probabilidade de que três números consecutivos sejam tirados é $\frac{2.3}{n(n-1)}$ (BOYER, 2010, p.314).

Questões de contagem aparecem com frequência em Estatística, Física, Química, Biologia, Informática e em várias outras áreas do conhecimento. Já os Parâmetros Curriculares Nacionais trazem a necessidade do estudo da Análise Combinatória desde as séries iniciais do ensino fundamental. Segundo este documento, no Ensino Médio, deve-se ter em mente que as técnicas de contagem estudadas em Matemática devem estar relacionadas entre as várias ciências.

> […] aplicar as ideias de probabilidade e combinatória a fenômenos naturais e do cotidiano são aplicações da Matemática em questões do mundo real que tiveram um crescimento muito grande e se tornaram bastante complexas. Técnicas e raciocínios estatísticos e probabilísticos são, sem dúvida, instrumentos tanto das ciências da Natureza quanto das Ciências Humanas. Isto mostra como será importante uma cuidadosa abordagem dos conteúdos de contagem, estatística e probabilidades no Ensino Médio, ampliando a interface entre o aprendizado da Matemática e das demais ciências e áreas (MEC, 2000, p.44).

A ideia básica da combinatória enumerativa é desenvolver técnicas para quantificar objetos de um dado conjunto finito sem a necessidade de listar todos os seus elementos.

Algumas dessas técnicas consistem em dividir um problema maior em pequenos problemas similares.

Nos problemas de combinatória trabalhados no Ensino Médio os métodos mais utilizados são o Principio Multiplicativo, o Princípio Aditivo, os Arranjos e as Combinações. No entanto, quanto mais se impõe restrições ao problema mais difícil será chegar a sua solução. Diferentes técnicas podem ser aplicadas a um mesmo problema. Sendo assim, quanto mais o aluno tiver conhecimentos destas, mais opções terá para aplicá-las, e uma gama muito maior de problemas poderão ser resolvidos.

Ferramentas como Funções Geradoras e o Coeficiente Binomial, entre outros, são muito importante para o entendimento e resolução dos problemas de contagem, tanto para o ensino Médio como para o Superior. Estes instrumentos são pouco utilizados e, até mesmo, desconhecidos pelos educadores no ensino básico.

O conceito de Função Geradora originou-se a partir dos trabalhos de A. Moivre (1667-1754), e Euler (1707-1783), que aplicaram essa técnica em problemas de teoria aditiva de números, especialmente na teoria de partições[1]. Laplace (1749−1827) introduziu esta técnica no estudo de probabilidade, e Nicolaus Bernoulli (1687−1759) no estudo de permutações caóticas[2].

> [...] Abraham De Moivre (1667-1754), Daniel Bernoulli (1700-1782) e Jacques Phillipc Marie Binet (1786-1 856) mostraram como achar diretamente os números de Fibonacci sem ser necessário calcular todos eles, até o que desejamos. Para isso, De Moivre utilizou pela primeira vez uma técnica extremamente poderosa, a das funções geradoras. Esta técnica, muito útil para estudar sucessões recorrentes, foi bastante desenvolvida por Euler (1707-1783), em seu livro clássico *Introductio in Analysin Infinitorum*, onde ele utiliza para atacar o problema das partições de um inteiro. O interesse de Euler por este problema surgiu devido a uma pergunta que lhe foi feita pelo matemático francês Phillipe Naudé, que trabalhava em Berlim, em

[1] Uma partição de um inteiro positivo k é uma sequência de números inteiros positivos que somados resultam k.

[2] Uma permutação de $a_1,\ a_2, a_3, \dots, a_n$, é chamada caótica quando nenhum dos $a_i\,'s$ se encontra na posição original, isto é, na i-ésima posição.

> uma carta, na qual, entre outras coisas, perguntava de quantas maneiras o número pode ser escrito como soma de inteiros positivos e distintos (MORGADO, 1991 p.4).

Chamamos de *binômio* a qualquer expressão da forma $(x + y)$. No desenvolvimento de potências de binômios obtemos coeficientes/números naturais que relacionam seus termos, os quais são chamados de *coeficientes binomiais*, ou, *números binomiais*. Estudos sobre o desenvolvimento de binômios já aparece em *Os Elementos* de Euclides.

> O desenvolvimento do binômio $(1 + x)^n$ está entre os primeiros problemas estudados ligados à Análise Combinatória. O caso n = 2 já pode ser encontrado nos *Elementos* de Euclides, em torno de 300 a.C. (MORGADO, 1991 p.2).

Em 1654 Pascal, após receber uma correspondência de seu amigo Chevalier de Méré que o indagava sobre problemas relacionados a jogos de dados, ligou o estudo das probabilidades com o Triângulo Aritmético, descobrindo algumas propriedades importantes que hoje aplicamos no desenvolvimento dos binômios. A partir daí tal Triângulo ficou conhecido como *Triângulo de Pascal* [2]. Porém o Triângulo Aritmético já era conhecido a mais de 600 anos como se pode observar na obra *Espelho Precioso dos quatro elementos* de Chu Shih (1280? – 1303?).

> [...] O *Espelho precioso* começa com um diagrama aritmético impropriamente conhecido no Ocidente como “triângulo de Pascal”. No arranjo de Chu temos os coeficientes das expansões binomiais até a oitava potência, claramente dados em numerais em barra e um símbolo redondo para o zero. Chu não reivindicava crédito pelo triângulo, referindo-se a ele como um “diagrama do velho método para achar potências oitavas e menores”. Um arranjo semelhante tinha aparecido na obra de Yang Hui, mas sem o símbolo redondo para o zero. Nas obras chinesas há cerca de 1.100 referências a sistemas de tabulação para coeficientes binomiais, e é provável que o triângulo

> aritmético tenha se originado na China, aproximadamente nesta data (BOYER, 2010, p.140).

Em 1685 Wallis publica em sua obra, *Álgebra,* o *Teorema Binomial* que foi desenvolvido por Newton, ao estudar um trabalho deste, sobre a determinação da área sob curvas da forma $(1 - x^2)^n$. Tal teorema foi descoberto em 1664 ou 1665 e foi descrito em duas cartas de Newton para o secretário da Royal Society, Henry Oldenburg .

> Esse teorema foi enunciado pela primeira vez por Newton numa carta de 13 de junho de 1676, enviada a Oldenburg mas destinada a Leibniz. Numa segunda carta de 24 de outubro do mesmo ano Newton explicou detalhadamente como tinha chegado a essa série binomial (BOYER, 2010, p.271).

Apesar de pouco utilizado no Ensino Médio, o Teorema Binomial é de grande utilidade na resolução de problemas de contagem. Pretende-se, neste trabalho, descrever algumas ferramentas utilizando e aplicando este teorema e sua generalização. Os conceitos apresentados neste trabalho serão introduzidos por meio de exemplos que facilitarão o entendimento e desenvolvimento desejados.

No capítulo 1 deste trabalho será introduzido o conceito de coeficientes binomiais e o teorema binomial através de uma interpretação combinatória para este. Na sequência dar-se-á uma breve descrição do Triângulo de Pascal, a dedução da fórmula de recorrência para sua construção e algumas propriedades importantes que facilitam a aplicação do teorema binomial.

No capítulo 2 será definido, brevemente, os polinômios fazendo uma relação dos mesmos à problemas de contagem. Os polinômios aplicados à Análise Combinatória se tornam uma ferramenta muito útil que facilita a resolução de muitos problemas. Na sequência será generalizado o teorema binomial e faremos algumas aplicações para o mesmo.

Já no capítulo 3, o objetivo deste trabalho será atingido, isto é, introduzir-se-á uma extensão para o coeficiente binomial: o coeficiente trinomial. Será apresentado sua definição, algumas propriedades similares às do coeficiente binomial, e, na sequência, uma interpretação combinatória para o mesmo. Com a propriedade similar à de Stifel será construído um triângulo similar ao triângulo de Pascal que nos fornecerá os coeficientes do desenvolvimento dos trinômios.

Não se pretende, com este trabalho, trazer técnicas novas, mas sim possibilitar ao professor do Ensino Médio condições para que busque maneiras diferentes de ensinar, ou mesmo, ampliar seus conhecimentos de técnicas na resolução de problemas de contagem.

1. COEFICIENTES BINOMIAIS E O TEOREMA BINOMIAL

Neste capítulo definiremos os *números binomiais*, enunciaremos o *teorema binomial* e estudaremos algumas propriedades do *Triângulo de Pascal*. Estes conceitos são de grande utilidade no estudo de combinatória, uma vez que facilitam a resolução dos problemas através de suas propriedades e características.

Binômio é qualquer expressão da forma $(a+b)$, isto é, a soma de dois símbolos distintos [13]. Seu estudo já aparece em obras de 600 anos antes de Cristo, como por exemplo, em *Os Elementos* de Euclides. Existem indícios de que os chineses já conheciam o desenvolvimento de binômios até a oitava potência por volta de 1303. Na mesma época que os chineses descobriram o teorema binomial os árabes também descobriram algo equivalente.

> [...] Nas obras chinesas há cerca de 1.100 referências a sistemas de tabulação para coeficientes binomiais, [...]. O equivalente do teorema aparentemente era conhecido por Omar Khayyam mais ou menos na mesma época em que estava sendo usado na China, mas a mais antiga obra árabe existente que o contém é de Al-Kashi no século quinze (BOYER, 2001, p.140).

O teorema binomial tornou-se conhecido através de correspondências de Newton endereçadas a Leibniz em 1676. Nessas correspondências Newton explica como deduziu propriedades importantes no desenvolvimento de potências de binômios e mostrou que as propriedades se aplicavam aos expoentes reais. Newton descobriu que a extração de raízes se tornam muito mais abreviadas quando é utilizado o teorema binomial [2].

1.1 Números binomiais

"De quantas maneiras podemos escolher p objetos distintos, de forma não ordenada, dentre n objetos distintos?". Ou, "quantos subconjuntos com p elementos podemos formar com os elementos do conjunto $\{a_1,\ a_2, \dots, a_n\}$?". Problemas como esses são comuns em Análise Combinatória. Cada subconjunto com p elementos será uma *combinação* dos n elementos do conjunto dado.

Para a definição que será feita a seguir usaremos a notação de *fatorial* de um número natural, ou seja:

$$x! = x.(x-1)(x-2)(x-3)\ldots 2.1, \ \forall\, x \in \mathbb{N}\,.$$

Por convenção $0! = 1$.

Definição 1.1.1: Chamamos de *combinação* de n, k a k, denotado por $\binom{n}{k}$, o total de combinações de diferentes subconjuntos contendo k elementos, tomados de um conjunto contendo n elementos, sendo $0 \leq k \leq n$.

Por exemplo, dado o conjunto $\{a, b, c, d, e\}$ podemos formar:

- 10 subconjuntos com dois elementos: $\{a, b\}; \{a, c\}; \{a, d\}; \{a, e\}; \{b, c\}; \{b, d\}; \{b, e\}; \{c, d\}; \{c, e\}; \{d, e\}$. Logo $\binom{5}{2} = 10$.

Observe que, para formar os 10 subconjuntos de dois elementos, primeiro faremos as escolhas ordenadas dos 2 elementos. A escolha do primeiro elemento do subconjunto pode ser feita de 5 modos, e a escolha do segundo pode ser feita de 4 modos. Pelo *Princípio Fundamental da Contagem*[3] a resposta é $5 \times 4 = 20$ modos de escolher os elementos. Porém, as escolhas $\{a, b\}$ e $\{b, a\}$ formam conjuntos idênticos. Assim estamos contando cada subconjunto duas vezes. Dessa forma, temos $\frac{5\times4}{2} = 10$ subconjuntos, ou seja:

$$\binom{5}{2} = \frac{5.4}{2} = \frac{\frac{5.4.3.2.1}{3.2.1}}{2.1} = \frac{\frac{5!}{3!}}{2!} = 10.$$

Usando esta ideia, podemos formar ainda:

- 5 subconjuntos de um elemento cada: $\{a\}; \{b\}; \{c\}; \{d\}; \{e\}$. Então

$$\binom{5}{1} = \frac{5}{1} = \frac{\frac{5.4.3.2.1}{4.3.2.1}}{1} = \frac{\frac{5!}{4!}}{1!} = 5.$$

- 1 subconjunto de cinco elementos: $\{a, b, c, d, e\}$. Então

$$\binom{5}{5} = \frac{5}{5} = \frac{\frac{5.4.3.2.1}{1}}{5.4.3.2.1} = \frac{\frac{5!}{0!}}{5!} = 1.$$

---

[3] Princípio Fundamental da Contagem ou Principio Multiplicativo é uma técnica elementar que serve de base para a resolução de muitos problemas de contagem.

- 1 subconjunto com zero elementos: { }, “vazio”. Logo

$$\binom{5}{0} = \frac{\frac{5!}{5!}}{0!} = 1.$$

- Nenhum subconjunto com 6 elementos cada. Então $\binom{5}{6} = 0$.

Seguindo este raciocínio vê-se que são formados 10 subconjuntos com 3 elementos e 5 com 4 elementos. Podemos então, propor:

Proposição 1.1.1: Dado um conjunto com n elementos, o número de subconjuntos com k elementos que podemos formar a partir desse conjunto é dado por:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} \; se\; n \geq k, \text{ e } \binom{n}{k} = 0 \; se\; n < k,$$

Demonstração: Vamos começar escolhendo ordenadamente k elementos dentre os n elementos do conjunto dado. Isto pode ser feito de: $n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)$ modos. Como cada subconjunto com k elementos é contado $k!$ vezes, já que aparece um em cada ordem possível, então, o total de subconjuntos com k elementos do conjunto dado é:

$$\frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)}{k(k-1)(k-2)\ldots3.2.1} = \frac{\frac{n(n-1)(n-2)\ldots3.2.1}{(n-k)(n-k-1)\ldots2.1}}{k(k-1)(k-2)\ldots3.2.1} = \frac{\frac{n!}{(n-k)!}}{k!}.$$

Multiplicando numerador e denominador por $(n-k)!$ obtemos:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

Se $n < k$ não é possível formar nenhum subconjunto com k elementos, logo $\binom{n}{k} = 0$. ■

Pascal, ao estudar problemas de combinatória, utilizando-se de um triângulo aritmético já conhecido pelos hindus séculos antes, observou que os coeficientes do desenvolvimento dos chamados *Binômios de Newton*, $(a+b)^n$, com a e b reais e n natural, são números do tipo $\binom{n}{k}$. Estes números aparecem naturalmente como coeficientes multiplicadores nessas expansões. Por esta estreita relação entre as combinações simples e esses coeficientes, os números $\binom{n}{k}$ são conhecidos como *coeficientes binomiais,* ou *números binomiais*.

1.1.1 A relação de Stifel

A proposição que enunciaremos a seguir foi criada pelo matemático alemão Michael Stifel (1487–1567). A maior obra de Stifel é *"Arithmetica Integra" 1544,* um tratado importante que desenvolveu a Álgebra na Alemanha do século *XVI*. Nesta obra, Stifel apresenta o triângulo dos coeficientes binomiais até os de ordem 17 e, inclusive, a fórmula de recorrência para a construção deste triângulo. Esta fórmula é conhecida como *Relação de Stifel*,[2].

Na linguagem popular a Relação de Stifel pode ser traduzida pela seguinte propriedade: **"***a soma de dois números binominais de mesmo numerador e denominadores consecutivos é um número binominal cujo numerador possui uma unidade a mais que os numeradores das parcelas e o denominador é o maior dos denominadores das parcelas"*.

Proposição 1.1.1.1: (*Relação de Stifel*). Sejam $n \in \mathbb{N}$ e $1 \leq k \leq n$, temos que

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}.$$

Demonstração: Seja X um conjunto com n elementos. Fixemos um elemento $a \in X$. Vamos considerar duas classes de subconjuntos de X com k elementos:

1) Os subconjuntos de X com k elementos, tal que a é um elemento desses subconjuntos;

2) Os subconjuntos de X com k elementos, tal que a não é um elemento desses subconjuntos.

Observe que unindo todos os subconjuntos descritos em 1) e 2) temos todos os subconjuntos de X com k elementos. No primeiro caso temos um total de $\binom{n-1}{k-1}$ subconjuntos com k elementos, tal que a está presente em todos eles. Para tal, basta tomar em $X-\{a\}$ todos os subconjuntos com $k-1$ elementos e em seguida colocar o elemento a. No segundo caso, temos um total de $\binom{n-1}{k}$ subconjuntos, pois basta tomar em $X-\{a\}$ todos os subconjuntos com k elementos, garantindo assim, que a não está presente nesses subconjuntos. Portanto:

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}. \qquad \blacksquare$$

Com esta regra fica fácil a construção do triângulo aritmético, conhecido como *Triângulo de Pascal*, conforme veremos no tópico 1.3.

1.2 Teorema Binomial

Aqui descreveremos o conceito de *binômio* seguindo a bibliografia [13] e deduziremos o *Teorema Binomial*.

Definição 1.2.1: Binômio é qualquer expressão da forma $(a+b)$, isto é, a soma de dois símbolos distintos.

No nosso estudo o que nos interessa é o cálculo dos coeficientes dos termos na expansão de $(a+b)^n$. Para isso, consideremos.

$$(a+b)(c+d) = ac + ad + bc + bd,$$

ou seja, obtemos quatro termos, onde cada termo é composto por duas letras, cada uma delas selecionada de um dos binômios. Observa-se que o número de termos pode ser obtido pelo princípio multiplicativo, e consiste de $2^2 = 4$ termos possíveis.

Consideremos, agora, o seguinte produto:

$$\begin{aligned}(a+b)(c+d)(e+f) &= (ac + ad + bc + bd)(e+f) = \\ &= ace + acf + ade + adf + bce + bcf + bde + bdf,\end{aligned}$$

resultando em oito termos, onde cada um é composto de três letras, cada uma delas selecionada de um dos binômios. Segue, portanto, que o total de termos é dado por $2^2.2 = 2^3 = 8$. Seguindo esta ideia, e, considerando o produto $(a+b)(c+d)(e+f)(g+h)$ teremos $2^3.2 = 2^4 = 16$ termos, cada um deles obtidos do produto de quatro letras selecionadas, cada uma delas, de um dos binômios. Podemos concluir, por recorrência, que o produto de n binômios distintos nos fornecerá 2^n termos.

Agora, consideremos o produto dos binômios idênticos:

$$(a+b)(a+b)(a+b)(a+b)(a+b)(a+b).$$

Temos $2^6 = 64$ maneiras de selecionarmos seis letras, uma de cada binômio, e como todos estes são iguais a $(a+b)$ teremos termos repetidos. Por exemplo:

i. Se tomarmos a letra a nos quatro primeiros binômios e a letra b nos dois últimos teremos: a^4b^2

ii. Se tomarmos a letra a nos quatro binômios centrais e a letra b no primeiro e no último, teremos: a^4b^2.

Note que o termo a^4b^2 irá aparecer toda vez que escolhermos a letra a em, exatamente, quatro dos seis binômios e a letra b nos dois restantes. Desta forma, a quantidade de escolhas diferentes para obter o termo a^4b^2 é $\binom{6}{4}$ ou, de forma análoga, $\binom{6}{2}$.

Como todo termo é formado do produto de seis letras podemos concluir, então, que o termo geral na expansão de $(a+b)^6$ é da forma a^ib^j, onde $i+j=6$, ou seja, cada um dos termos é da forma a^ib^{6-i}. Segue que cada um destes termos aparece $\binom{6}{i}$ vezes. Sendo assim, a expansão fica da seguinte forma:

$$(a+b)^6 = \binom{6}{0}a^0b^6 + \binom{6}{1}a^1b^5 + \binom{6}{2}a^2b^4 + \binom{6}{3}a^3b^3 + \binom{6}{4}a^4b^2 + \binom{6}{5}a^5b^1 + \binom{6}{6}a^6b^0$$

$$(a+b)^6 = 1b^6 + 6ab^5 + 15a^2b^4 + 20a^3b^3 + 15a^4b^2 + 6a^5b^1 + 1a^6.$$

Em geral, os termos obtidos na expansão de $(a+b)^n$ são da forma a^ib^{n-i}. Estes termos surgem a partir de cada escolha da letra a em i binômios, e para a escolha da letra b em $n-i$ binômios. Como tal escolha pode ser feita de $\binom{n}{i}$ maneiras diferentes então podemos enunciar o seguinte resultado, conhecido como *Teorema Binomial*:

Teorema 1.2.1: Sejam a e b números reais e n número inteiro positivo,

$$(a+b)^n = \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}a^ib^{n-i} =$$

$$= \binom{n}{0}a^0b^n + \binom{n}{1}a^1b^{n-1} + \binom{n}{2}a^2b^{n-2} + \cdots + \binom{n}{n-1}a^{n-1}b^1 + \binom{n}{n}a^nb^0 \qquad (1.2)$$

Listamos abaixo a expansão de $(a+b)^n$ para alguns valores de n.

$n = 0 \implies (a+b)^0 = 1;$
$n = 1 \implies (a+b)^1 = a + b;$
$n = 2 \implies (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2;$
$n = 3 \implies (a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3;$
$n = 4 \implies (a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4;$
$n = 5 \implies (a+b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5;$
$n = 6 \implies (a+b)^6 = a^6 + 6a^5b + 15a^4b^2 + 20a^3b^3 + 15a^2b^4 + 6ab^5 + b^6.$

Estas expansões são trabalhadas no Ensino Fundamental até $n = 3$ através dos produtos notáveis. No Ensino M édio é feito a generalização para $n \in \mathbb{N}$ ao ser introduzido, no 2º ano, o Binômio de Newton, como pode ser visto em [7].

O desenvolvimento binomial continua válido para a expansão de $(a-b)^n$. Basta notar que:

$$(a-b)^n = [a + (-b)]^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a^i (-b)^{n-i} = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} (-1)^{n-i} a^i b^{n-i}$$

Assim, os sinais de cada termo se alternam conforme as potências de (-1).

1.3 Triângulo de Pascal

Nota-se que os coeficientes dos termos dos polinômios resultante das expansões do binômio $(a+b)^n$ formam um triângulo o qual chamamos de *Triângulo de Pascal* (veja tabela 1). Esta tabela de números apareceu em uma obra do francês Blaise Pascal, *Traité du triangle arithmétique*, escrita em 1653, porém publicada após sua morte em 1665. Nesta obra Pascal introduziu o triângulo aritmético para resolver problemas de probabilidade e de combinatória.

Blaise Pascal (1623-1662) foi um matemático, físico, filósofo e escritor francês. Pascal, aos 19 anos, construiu a primeira máquina de calcular do mundo para ajudar o pai nos cálculos dos impostos. O

> nome de Pascal está também associado a um arranjo triangular de números que se reveste de propriedades notáveis e que de há muito era conhecido dos matemáticos. Este triângulo aritmético aparece pela primeira vez em textos indianos do século III A.C., ou seja, 200 anos antes de Pascal. Surge também em obras do matemático árabe Alkhayyami (1150 d.C), do chinês Yang Hui (1250 d.C.) e do italiano Tartaglia (1556). No entanto, o estudo exaustivo que Pascal fez deste triângulo, no âmbito da teoria das probabilidades, fez com que o seu nome lhe ficasse doravante associado (BOYER, 2010, p.140.).

O triângulo aritmético ficou conhecido como Triângulo de Pascal por conta da repercussão de uma obra do inglês De Moivre publicada em 1739, na qual este usou a denominação *Triangulum Arithmeticum Pascalianum*.

De acordo com os estudos de Pascal, os números do triângulo aritmético são coeficientes binomiais [14]. Assim, este triângulo pode ser facilmente construído, a partir da linha 2, por meio da Relação de Stifel. Considere a primeira linha do triângulo como linha 0, resultante do desenvolvimento de $(a+b)^0 = 1$. Na linha 1 temos os coeficientes de $(a+b)^1$ e, a partir desta linha obtemos a linha 2 somando os dois elementos imediatamente superiores. Para as demais linhas basta repetir o procedimento. O Primeiro e o último elemento de cada linha é sempre 1, obtidos de $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$.

Tabela 1: Triângulo de Pascal formado a partir da Relação de Stifel

					1						$\rightarrow$						$\binom{0}{0}$					
				1		1					$\rightarrow$					$\binom{1}{0}$		$\binom{1}{1}$				
			1		2		1				$\rightarrow$				$\binom{2}{0}$		$\binom{2}{1}$		$\binom{2}{2}$			
		1		3		3		1			$\rightarrow$			$\binom{3}{0}$		$\binom{3}{1}$		$\binom{3}{2}$		$\binom{3}{3}$		
	1		4		6		4		1		$\rightarrow$		$\binom{4}{0}$		$\binom{4}{1}$		$\binom{4}{2}$		$\binom{4}{3}$		$\binom{4}{4}$	
1		5		10		10		5		1	$\rightarrow$	$\binom{5}{0}$		$\binom{5}{1}$		$\binom{5}{2}$		$\binom{5}{3}$		$\binom{5}{4}$		$\binom{5}{5}$

Fonte: Autora

Outras propriedades são observadas imediatamente neste triângulo e podem ser estendidas para os coeficientes de $(a+b)^n$, vejamos:

- ✓ Os coeficientes dos termos equidistantes dos extremos, em cada linha do Triângulo de Pascal são iguais. De fato, para cada subconjunto com k elementos, extraído de um conjunto com n elementos, permanecem $(n-k)$ elementos que não foram retirados, logo

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}, \text{pois } k+n-k = n.$$

Ou seja, números binomiais complementares são iguais.

- ✓ A soma dos coeficientes de $(a+b)^n$ é igual a 2^n. Para verificar isto basta tomar $a = b = 1$ e notar que a parcela da direita, na equação (1.2), nos fornece a soma desejada. Por esta propriedade podemos concluir que a soma dos elemntos da n-ésima linha do Triângulo de Pascal é igual a

$$2^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \cdots + \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n}.$$

- ✓ No desenvolvimento do binômio $(a+b)^n$ temos $n+1$ termos. Assim sendo, este é o número de elementos da *n*-ésima linha do Triângulo de Pascal.

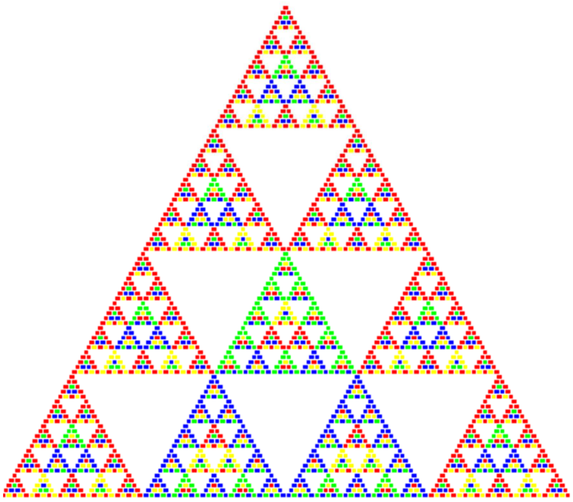
Podemos notar vários outros padrões interessantes no triângulo aritmético. Tais padrões foram estudados durante séculos por matemáticos no mundo todo, e, ainda hoje, fascinam os estudiosos que buscam novas relações neste triângulo. Uma propriedade muito interessante é observada ao colorirmos, no triângulo de Pascal, os múltiplos de um número natural. Por exemplo, ao colorirmos de amarelo os números que deixam resto zero, na divisão por 5, e colorirmos de azul, vermelho, verde e roxo os demais que deixam, respectivamente, resto 1, 2, 3 e 4, obteremos uma belíssima imagem fractal.

Figura 1: Fractal – Múltiplos de 5 no triângulo de Pascal com 27 linhas

Fonte: http://boj.pntic.mec.es/acorra7/fracta/mainbody.htm, acesso em 21/11/15

Na figura 2 vemos mais uma linda figura ao colorirmos as classes módulo 5 no Triângulo de Pascal.

Figura 2: Fractal – Múltiplos de 5 no triângulo de Pascal com 100 linhas



Fonte: http://matspc.no.sapo.pt/Pascal.PDF, acesso em 03/12/15

Outras imagens belíssimas podem ser obtidas ao colorirmos os múltiplos de qualquer número natural neste triângulo. Estas imagens podem ou não representar um fractal. O leitor mais interessado pode consultar outros exemplos em [1].

2. POLINÔMIOS E O TEOREMA BINOMIAL GENERALIZADO

Um método utilizado por matemáticos bem antes da invenção do Cálculo é a forma de escrever uma função como somas infinitas de monômios.

Muitos matemáticos se esforçaram para dar contribuições para o desenvolvimento e aplicação de tais métodos. Arquimedes (287 - 212 a.C.), ao obter resultados sobre área de figuras e volumes de sólidos, explica como somas infinitas podem ter resultados finitos. O matemático italiano Fibonacci (1170 - 1240) descobriu uma sequência de números inteiros repleta de propriedades importantes que ainda hoje é utilizada em várias áreas da Matemática e da Ciência. Newton (1642 - 1727) e Leibniz (1646 - 1716) desenvolveram a representações de séries para funções como conhecemos hoje. Usando Álgebra e Geometria Newton calculou as séries para as funções trigonométricas *sen(x)* e *cos(x)* e para a função exponencial. Estes resultados são encontrados em seus trabalhos intitulados "*Method of Fluxions and Infinite Series*" e "*Analysis with Infinite Series*". Newton ainda utilizou séries para desenvolver muitos resultados de Cálculo tais como: área, comprimento de arco e volumes. Leibniz analisou várias sequências geométricas, e explicou o conceito de limite se utilizando de uma abordagem sequencial de valores infinitamente próximos, e, embora nunca tenha pensado na derivada como um limite, descobriu muitos dos resultados que agora estudamos em Cálculo usando estes. Foi o inglês Brook Taylor (1685 - 1731) o primeiro a apresentar uma fórmula geral para a construção de séries de potências de funções, publicando o método em seu trabalho "*Methodus Incrementorum Directa et Inversa*" de 1715. Porém antes de Taylor ter nascido James Gregory (1638 - 1675) já trabalhava com séries para representar funções trigonométricas, as quais hoje conhecemos como *Séries de Taylor* [2, 14].

O estudo das séries infinitas propiciou o desenvolvimento do Cálculo e a modelagem de problemas aplicados à mecânica, à astronomia, às engenharias e a várias outras ciências. A análise combinatória se apropria deste estudo para desenvolver técnicas de contagem, facilitando a obtenção dos resultados.

2.1 Polinômios na resolução de problemas de contagem

Polinômios são utilizados em uma grande variedade de áreas da matemática e de outras ciências. Eles são utilizados para formar, por exemplo, as equações e as funções polinomiais que modelam uma grande variedade de problemas que vão desde a Química básica até a Física, da Economia até as Ciências Sociais.

Em [13] é dado um método para resolver problemas de contagem por meio de funções geradoras[4]. Tais funções são séries de potências em que os coeficientes nos trazem informações sobre uma sequência (a_n), e o expoente de x na série quantifica alguma propriedade em que estamos interessados. Essa propriedade pode ser, por exemplo, o comprimento de uma sequência, ou uma solução inteira de uma determinada equação com coeficientes inteiros cuja soma é igual a n. Se associarmos tais potências de x somando-as, o coeficiente de x^n será o termo da sequência na posição n que satisfaz as exigências solicitadas no problema. Na literatura encontramos muitas obras que tratam deste assunto. Nesse trabalho iremos explorar um pouco essa ideia sendo que, por meio dela, é possível integrar os conteúdos de polinômios e contagem, cujos tópicos são abordados no Ensino Médio.

Nesta seção, inicialmente iremos apresentar o conceito formal de *polinômios*, com algumas de suas propriedades, em seguida abordaremos problemas de contagem que podem ser resolvidos por meio de polinômios. Finalmente, enunciaremos e demonstraremos o *Teorema Binomial generalizado*, e mostraremos aplicações deste em combinatória.

Definição 2.1.1: Um *polinômio* sobre $\mathbb{R}$ em uma variável x é uma expressão formal

$$p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n ,$$

com $a_i \in \mathbb{R}$; $i = 0, 1, 2, \ldots, n$.

- Se $a_n \neq 0$ e $n > 0$, então definimos: *grau* p igual a n e denotamos por $\deg(p(x)) = n$.
- Os a_i são chamados *coeficientes* do polinômio;
- Cada uma das parcelas $a_i x^i$, com $i = 0, 1, 2, \ldots, n$, corresponde a um *termo* do polinômio;
- Quando $p(x) = a$, com $a \in \mathbb{R}$, então dizemos que $p(x)$ é o polinômio *constante.*

As operações que definiremos a seguir são chamadas, respectivamente, de *soma* e *multiplicação* de polinômios. Vejamos: Sejam dados

$$p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n$$

e

---

[4] O leitor mais interessado pode consultar também [4, 11].

$$q(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \dots + b_n x^n,$$

temos que:

$$p(x) + q(x) = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x + (a_2 + b_2)x^2 + \cdots + (a_n + b_n)x^n$$

e

$$p(x).q(x) = a_0 b_0 + (a_0 b_1 + a_1 b_0)x + \cdots + (a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \cdots + a_{n-1} b_1 + a_n b_0)x^n.$$

Dizemos que $p(x) = q(x)$ se, e somente se $a_n = b_n, \ \forall\, n \geq 0$, com n inteiro.

No conjunto dos polinômios o elemento neutro para a soma é o polinômio com todos os coeficientes iguais a zero. E o elemento neutro para a multiplicação é o polinômio constante, $p(x) = a_0 = 1$, também chamado de unidade. Um polinômio constante não nulo qualquer sempre tem inverso multiplicativo.

Nos exemplos a seguir usaremos os polinômios para nos auxiliar na resolução de problemas de contagem.

Exemplo 2.1.1: (Adaptado de [13] pag. 150) Determine o número de soluções inteiras positivas da equação

$$x_1 + x_2 + x_3 = 16,$$

com as seguintes restrições $x_1, \ x_2, \ x_3 \in \{4, 5, 6\}$.

Solução: A cada variável x_i da equação vamos associar um polinômio $p_i(x)$, com $i = 1, 2, 3$, cujos expoentes pertencem ao conjunto $\{4, 5, 6\}$. Logo:

$$p_1(x) = x^4 + x^5 + x^6$$
$$p_2(x) = x^4 + x^5 + x^6$$
$$p_3(x) = x^4 + x^5 + x^6$$

Fazendo o produto desses polinômios, e, escrevendo convenientemente para facilitar a visualização das soluções, segue que:

$$p_1(x).p_2(x).p_3(x) = \begin{cases} x^{4+4+4} + x^{4+4+5} + x^{4+4+6} \\ x^{4+5+4} + x^{4+5+5} + x^{4+5+6} \\ x^{4+6+4} + x^{4+6+5} + x^{\boxed{4+6+6}} \\ x^{5+4+4} + x^{5+4+5} + x^{5+4+6} \\ x^{5+5+4} + x^{5+5+5} + x^{\boxed{5+5+6}} \\ x^{5+6+4} + x^{\boxed{5+6+5}} + x^{5+6+6} \\ x^{6+4+4} + x^{6+4+5} + x^{\boxed{6+4+6}} \\ x^{6+5+4} + x^{\boxed{6+5+5}} + x^{6+5+6} \\ x^{\boxed{6+6+4}} + x^{6+6+5} + x^{6+6+6} \end{cases}.$$

Podemos observar que nos expoentes de x aparecem, exatamente, os valores que as variáveis $x_1,\ x_2,\ x_3$ podem assumir. Os valores destacados que aparecem no expoente de x são as soluções do problema.

De acordo com o problema, queremos saber de quantas maneiras diferentes podemos obter tais valores para x, de modo que a soma dê 16. Desta forma, a resposta do problema é o coeficiente de x^{16} no desenvolvimento de

$$p_1(x).p_2(x).p_3(x) = (x^4 + x^5 + x^6)^3 =$$
$$= x^{12} + 3x^{13} + 6x^{14} + 7x^{15} + 6x^{16} + 3x^{17} + x^{18}\,. \tag{2.1}$$

Logo a equação inicial possui 6 soluções inteiras com as restrições dadas. Podemos escolher uma solução com $x_1 = 4,\ x_2 = 6$ e $x_3 = 6,$ fornecendo o termo $x^4x^6x^6 = x^{16}$. Outra solução seria o termo $x^5x^6x^5$, onde $x_1 = 5,\ x_2 = 6$ e $x_3 = 5$. Portanto, cada solução da equação corresponde a uma única maneira de se obter x^{16} na expansão do produto dos polinômios $p_i(x)$. ∎

É interessante notar que o polinômio (2.1) pode nos fornecer respostas para outros problemas. Como, por exemplo: temos 7 soluções para a equação $x_1 + x_2 + x_3 = 15$, com as restrições dadas, uma vez que o coeficiente de x^{15} é 7. E mais ainda, olhando para o polinômio (2.1) notamos que não há expoentes de x menores que 12 e nem maiores que 18. Assim podemos concluir que o polinômio nos fornece o número de soluções para todas as equações do tipo:

$$x_1 + x_2 + x_3 = q,$$

onde $q \in \{12, 13, 14, 15, 16, 17, 18\}$, com as restrições impostas às variáveis.

Com estas observações podemos concluir que a resposta de um problema deste tipo nos é fornecida pelos coeficientes da função $f(x) = p_1(x).p_2(x).p_3(x)$. Funções que modelam tais problemas de contagem são chamadas *funções geradoras*, [13]. Também podemos dizer que $f(x)$ é uma *interpretação combinatória* para a generalização do exemplo (2.1.1), ou seja, nos fornece o total de soluções de $x_1 + x_2 + x_3 = q$, onde $q \in \{12, 13, 14, 15, 16, 17, 18\}$. Observe que podemos concluir isto fazendo $a = 1$ e $b = x$ no teorema binomial obtendo o seguinte polinômio:

$$p(x) = (1 + x)^n = 1 + \binom{n}{1}x + \binom{n}{2}x^2 + \cdots + \binom{n}{n-1}x^{n-1} + \binom{n}{n}x^n.$$

Nesse caso $p(x)$ é uma interpretação combinatória para o problema de determinar o número de subconjuntos com k elementos, sendo $k = 0, 1, 2, \ldots, n$, de um conjunto com n elementos, pois o coeficiente de x^k é a resposta para o problema.

Exemplo 2.1.2: Numa competição de corrida cada um dos três juízes deve atribuir notas de 1 a 6 para cada participante. Para ser finalista um participante deve ter no mínimo 16 pontos. De quantas maneiras os juízes podem atribuir as notas de modo que um participante seja finalista?

Solução: O Problema consiste em resolver a equação $x_1 + x_2 + x_3 = t$, onde $t \in \{16, 17, 18\}$. Os x_i, para $i = 1, 2, 3$, representam as notas atribuídas pelos juízes i. Notemos que para algum dos $x_i \leq 3$ o problema não tem solução. Logo $x_i \in \{4, 5, 6\}$. Sendo assim, a solução deste problema é dada pelo polinômio gerador do exemplo (2.1.1) e a resposta para o mesmo é 10. ■

Exemplo 2.1.3: No lançamento de dois dados, quais são as possíveis somas (S) dos resultados obtidos, e de quantas maneiras diferentes podemos obter tais somas?

Solução: Seja x o resultado do lançamento de um dado. Lembrando que $x \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Vamos associar os resultados obtidos em cada dado ao expoente dos polinômios $d_1(x)$ e $d_2(x)$, referentes, respectivamente, aos dados 1 e 2.

$$d_1(x) = x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6,$$
$$d_2(x) = x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6.$$

Fazendo o produto $d_1(x).d_2(x)$ obtemos a função geradora:

$$f(x) = d_1(x).d_2(x) = (x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6)^2 =$$
$$= x^2 + 2x^3 + 3x^4 + 4x^5 + 5x^6 + 6x^7 + 5x^8 + 4x^9 + 3x^{10} + 2x^{11} + x^{12}.$$

Nota-se que os expoentes de x, em $f(x)$, nos fornecem todas as possíveis somas deste experimento, obtidas somando-se os expoentes das indeterminadas no produto $d_1(x).d_2(x)$, ou seja, $S \in \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$. As maneiras de se obter tais somas estão associadas, respectivamente, aos coeficientes de x^S, ou seja:

- As somas 2 e 12 podem ser obtidas de uma única forma em: x^2 e x^{12}.
- As somas 3 e 11 podem ser obtidas de duas maneiras diferentes em: $2x^3$ e $2x^{11}$.
- As somas 4 e 10 podem ser obtidas de 3 maneiras diferentes em: $3x^4$ e $3x^{10}$.
- As somas 5 e 9 podem ser obtidas de 4 maneiras diferentes em: $4x^5$ e $4x^9$.
- As somas 6 e 8 podem ser obtidas de 5 maneiras distintas em: $5x^6$ e $5x^8$.
- A soma 7 pode ser obtida de 6 modos distintos em: $6x^7$. ■

Nos exemplos que acabamos de ver utilizamos os polinômios para modelar um problema de contagem. Os coeficientes destes polinômios representam uma quantidade que buscamos e o expoente da variável representa a restrição que o problema nos impõe. O conceito de polinômios é amplamente estudado no ensino fundamental e médio, portanto as aplicações sugeridas aqui dão mais sentido a este estudo, sendo possível desenvolvê-lo juntamente com Análise Combinatória.

2.2 A Série binomial

O próximo teorema é chamado de *Série Binomial* ou *Teorema Binomial generalizado* por se tratar da expansão de $(1 + x)^u$, onde u é um número real. Esta generalização do teorema binomial feita por Newton utiliza-se de uma série infinita onde o expoente pode ser qualquer número real (ou mesmo complexo). Neste trabalho usaremos essa expansão no caso em que u é um inteiro negativo.

Teorema 2.2.1: (*Teorema Binomial generalizado*). Seja u um número real. Então:

$$(1+x)^u = \sum_{r=0}^{\infty} \binom{u}{r} x^r,$$

onde

$$\binom{u}{r} = \begin{cases} (u-1)\dfrac{u \ldots (u-r+1)}{r!}, & se\ r > 0 \\ 1, & se\ r = 0 \end{cases}$$

O número $\binom{u}{r}$ é chamado de C*oeficiente Binomial generalizado*.

Demonstração: Consideremos a função $f(x) = (1+x)^u$, onde u é um número real arbitrário. Seja a expansão de $f(x)$ em série de Taylor[5] em torno de $x = 0$. Dessa forma,

$$(1+x)^u = 1 + ux + \frac{u(u-1)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{u(u-1)\ldots(u-r+1)}{r!}x^r + \cdots$$

Denotando,

$$\binom{u}{r} = \begin{cases} \dfrac{u(u-1)\ldots(u-r+1)}{r!}, & se\ r > 0 \\ 1, & se\ r = 0 \end{cases}$$

temos:

$$(1+x)^u = \sum_{r=0}^{\infty} \binom{u}{r} x^r \qquad \blacksquare$$

Observe que quando u é inteiro positivo recaímos no Teorema Binomial apresentado no capítulo 1.

Corolário 2.2.1: O coeficiente de x^p na expansão de

$$(1 + x + x^2 + x^3 + \cdots)^n \quad \text{é igual a} \quad \binom{n+p-1}{p}.$$

---

[5] Série de Taylor é uma expansão de uma função analítica *f(x)* na vizinhança de um ponto $x = a$. Estas séries devem o seu nome a Brook Taylor que as estudou no trabalho "*Methodus incrementorum directa et inversa*" em 1715. O leitor mais interessado pode consultar livros de Cálculo para aprofundar este tema. Sugerimos [5].

Demonstração: Temos que:

$$(1 + x + x^2 + x^3 + \cdots)^n = \left(\frac{1}{1-x}\right)^n = (1-x)^{-n}, \text{ onde } n \in \mathbb{N} \text{ e } |x| < 1.$$

No Teorema Binomial Generalizado, fazendo $u = -n$ e substituindo x por $(-x)$, obtemos:

$$(1-x)^{-n} = \sum_{p=0}^{\infty} \binom{-n}{p} (-x)^p = \sum_{p=0}^{\infty} \binom{-n}{p} (-1)^p x^p.$$

Neste desenvolvimento observamos que o coeficiente de x^p é dado por:

$$\binom{-n}{p} (-1)^p = \frac{-n(-n-1)(-n-2)\ldots(-n-p+1)(-1)^p}{p!} =$$

$$= \frac{(-1)n(-1)(n+1)(-1)(n+2)\ldots(-1)(n+p-1)(-1)^p}{p!} =$$

$$= \frac{(-1)^p n(n+1)(n+2)\ldots(n+p-1)(-1)^p}{p!} =$$

$$= \frac{n(n+1)(n+2)\ldots(n+p-1)}{p!} =$$

$$= \frac{n(n+1)(n+2)\ldots(n+p-1)(n-1)!}{p!\,(n-1)!} =$$

$$= \frac{(n+p-1)(n+p-2)\ldots(n+1)n(n-1)\ldots 2.1}{p!\,(n-1)!} =$$

$$= \frac{(n+p-1)!}{p!\,(n-1)!} =$$

$$= \binom{n+p-1}{p} \qquad \blacksquare$$

Exemplo 2.2.1: Encontrar o coeficiente de x^{12} no desenvolvimento de

$$\left(\frac{1-x^6}{1-x}\right)^4.$$

Solução: Observando que

$$\left(\frac{1-x^6}{1-x}\right)^4 = (1-x^6)^4(1-x)^{-4}.$$

Assim, basta verificar que na quinta linha do triângulo de Pascal temos os coeficientes do desenvolvimento de $(1-x^6)^4$, logo:

$$(1-x^6)^4 = 1-4x^6+6x^{12}-4x^{18}+x^{24}.$$

Além disso devemos encontrar os coeficientes de x^6 e x^{12} em $(1-x)^{-4}$. Assim, usando o corolário 2.2.1, segue que os coeficientes buscados são:

$$\binom{-4}{6}(-1)^6 = \binom{4+6-1}{6} = \binom{9}{6} = 84$$
$$\binom{-4}{12}(-1)^{12} = \binom{4+12-1}{12} = \binom{15}{12} = 455$$

Portanto, o coeficiente de x^{12} em $(1-x^6)^4(1-x)^{-4}$ é :

$$1\times 455 - 4\times 84 + 6\times 1 = 125$$ ■

Exemplo 2.2.2: (Retirado de [13] pag. 173) De quantas maneiras podemos selecionar $3n$ letras de um conjunto de $2n$ a's, $2n$ b's e $2n$ c's?

Solução: Neste caso a ordem de escolha não é importante pois queremos fazer apenas uma seleção, e qualquer uma das $3n$ letras pode ser retirada até $2n$ vezes, a resposta da questão é o coeficiente de x^{3n} em

$$f(x) = (1+x+x^2+x^3+\cdots+x^{2n})^3 = \left(\frac{1-x^{2n+1}}{1-x}\right)^3 =$$

$$= (1 - x^{2n+1})^3(1-x)^{-3} = (1 - 3x^{2n+1} + 3x^{4n+2} - x^{6n+3})(1-x)^{-3}.$$

Segue que:

$$(1-x)^{-3} = \sum_{r=0}^{\infty} \binom{-3}{r} (-x)^r = \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r \binom{-3}{r} x^r.$$

Concluímos que o coeficiente de x^{3n} em:

$$(1 - 3x^{2n+1} + 3x^{4n+2} - x^{6n+3}).\left[\sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r \binom{-3}{r} x^r\right]$$

é:

$$\left[(-1)^{3n}\binom{-3}{3n} - 3(-1)^{n-1}\binom{-3}{n-1}\right].$$

Do corolário 2.2.1 segue que:

$$(-1)^r \binom{-n}{r} = \binom{n+r-1}{r}, \text{ assim:}$$

$$(-1)^{3n}\binom{-3}{3n} - 3(-1)^{n-1}\binom{-3}{n-1} = \binom{3+3n-1}{3n} - 3\binom{3+n-1-1}{n-1} =$$
$$= \binom{3n+2}{3n} - 3\binom{n+1}{n-1} = \binom{3n+2}{2} - 3\binom{n+1}{2} = 3n(n+1)+1.$$

Portanto teremos $3n(n+1)+1$ maneiras de selecionar as $3n$ letras com as restrições impostas. ■

Observe que $f(x)$ dada no exemplo (2.2.2) pode ser escrita por meio de série de potências [13], e o coeficiente x^{3n} nessa série é a resposta do problema. Aqui novamente nos deparamos com funções geradoras para solucionar um problema de contagem.

3. UMA EXTENSÃO DO COEFICIENTE BINOMIAL: O COEFICIENTE TRINOMIAL

Neste capítulo vamos apresentar uma extensão para os coeficientes binomiais, os *Coeficientes Trinomiais*. Inicialmente apresentaremos sua definição, deduziremos uma fórmula explícita para os mesmos e algumas propriedades. Finalizaremos com uma interpretação combinatória para tais coeficientes alcançando, assim, o objetivo a que nos propomos nesse trabalho.

Definição 3.1: Os *Coeficientes Trinomiais* são os coeficientes de x^j na expansão de

$(1+x+x^2)^n$ e são denotados por $\binom{n}{h}_2$.

Queremos determinar uma fórmula explícita para $\binom{n}{h}_2$. Então escrevemos:

$$(1+x+x^2)^n = [(1+x)^2 - x]^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} [(1+x)^2]^{n-i}(-x)^i =$$

$$= \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} (1+x)^{2n-2i}(-1)^i x^i. \qquad (3.1)$$

Por outro lado,

$$(1+x)^{2n-2i} = \sum_{k=0}^{2n-2i} \binom{2n-2i}{k} x^{2n-2i-k},$$

que substituindo em (3.1) resulta

$$(1+x+x^2)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} (1+x)^{2n-2i}(-1)^i x^i = \sum_{i=0}^{n} \sum_{k=0}^{2n-2i} (-1)^i \binom{n}{i} \binom{2n-2i}{k} x^{2n-i-k} =$$

$$= x^n \sum_{i=0}^{n} \sum_{k=0}^{2n-2i} (-1)^i \binom{n}{i} \binom{2n-2i}{k} x^{n-i-k}. \qquad (3.2)$$

Fazendo $n - i - k = h$ e, observando que i varia de 0 até n e k de 0 até $2n-2i$, podemos concluir, então, que h varia de $-n$ até n. Dessa forma,

$$(1+x+x^2)^n = x^n \sum_{i=0}^{n} \sum_{k=0}^{2n-2i} (-1)^i \binom{n}{i} \binom{2n-2i}{k} x^{n-i-k} =$$

$$= x^n \sum_{i=0}^{n} \sum_{h=-n}^{n} (-1)^i \binom{n}{i} \binom{2n-2i}{n-i-h} x^h = \sum_{h=-n}^{n} \sum_{i \geq 0} (-1)^i \binom{n}{i} \binom{2n-2i}{n-i-h} x^{h+n} \qquad (3.3)$$

Esta última igualdade é válida, pois $\binom{n}{i} = 0$, para $i \geq n$. Fazendo em (3.3)

$$\sum_{i \geq 0} (-1)^i \binom{n}{i} \binom{2n-2i}{n-i-h} = \binom{n}{h}_2,$$

segue que:

$$(1+x+x^2)^n = \sum_{h=-n}^{n} \binom{n}{h}_2 x^{h+n}. \qquad (3.4)$$

Nos parece que o coeficiente trinomial é expresso por meio de combinações simples $\binom{n}{i}$, porém bem diferente destas, dessa forma vamos chamá-los de *combinação de duplas* [13]. A interpretação combinatória, deduzida a seguir, justifica este nome.

Queremos obter uma interpretação combinatória para o coeficiente trinomial tal qual encontramos para o coeficiente binomial, para isso vamos reescrevê-lo com outra notação.

Note que em (3.4) h está variando de $-n$ a n. Se não colocarmos x^n em evidência em (3.2), então o índice da soma irá variar de 0 a $2n$ e fazendo $h + n = j$, podemos reescrever a expressão (3.4) com uma outra notação:

$$(1+x+x^2)^n = \sum_{j=0}^{2n} \begin{bmatrix} 2n \\ j \end{bmatrix} x^j, \qquad (3.5)$$

onde

$$\begin{bmatrix} 2n \\ h+n \end{bmatrix} = \binom{n}{h}_2. \tag{3.6}$$

Esta igualdade nos ajudará na interpretação combinatorial que queremos. Entretanto, de acordo com a definição dada, temos:

$$\binom{n}{h}_2 = \sum_{i\geq 0} (-1)^i \binom{n}{i} \binom{2n-2i}{n-i-h}.$$

Vejamos alguns exemplos que nos auxiliarão no entendimento de expressões do tipo $\binom{n}{h}_2$.

Exemplo 3.1: Qual o valor de $\binom{4}{2}_2$.

Solução: Pela equação (3.6) temos que: $\binom{4}{2}_2 = \begin{bmatrix} 2.4 \\ 4+2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 6 \end{bmatrix}$. Segue da definição:

$$\binom{4}{2}_2 = \sum_{i\geq 0} (-1)^i \binom{4}{i} \binom{2.4-2i}{4-i-2}.$$

Lembrando que $\binom{m}{p} = 0$ se $m < p$. Então:

$$\binom{4}{2}_2 = 1.\binom{4}{0}.\binom{8}{2} - 1.\binom{4}{1}.\binom{6}{1} + 1.\binom{4}{2}.\binom{4}{0} = 28 - 24 + 6 = 10$$

Portanto $\binom{4}{2}_2 = 10$.

Exemplo 3.2: Calcular $\binom{4}{-1}_2$.

Solução: Como $\binom{4}{-1}_2 = \begin{bmatrix} 8 \\ 3 \end{bmatrix}$. Segue da definição:

$$\binom{4}{-1}_2 = \sum_{i\geq 0} (-1)^i \binom{4}{i} \binom{8-2i}{4-i+1}$$

Lembrando que $\binom{m}{p} = 0$ se $m < p$. Logo:

$$\binom{4}{-1}_2 = 1.\binom{4}{0}.\binom{8}{5} - 1.\binom{4}{1}.\binom{6}{4} + 1.\binom{4}{2}.\binom{4}{3} - 1.\binom{4}{3}.\binom{2}{2} + 1.\binom{4}{4}.\binom{0}{1} =$$

$$= \binom{8}{5} - \binom{4}{1}.\binom{6}{4} + \binom{4}{2}.\binom{4}{3} - \binom{4}{3}.\binom{2}{2} = 56 - 60 + 24 - 4 = 16 \qquad \blacksquare$$

3.1 O coeficiente trinomial: Propriedades

A seguir vamos apresentar algumas propriedades dos coeficientes trinomiais. Estas propriedades facilitam o desenvolvimento dos trinômios e nos auxilia na construção de um triângulo aritmético semelhante ao Triângulo de Pascal.

Proposição 3.1.1: Para $n, h \in \mathbb{N}$

$$\binom{n}{h}_2 = \binom{n}{-h}_2.$$

Demonstração: Temos que

$$\binom{n}{h}_2 = \sum_{i\geq 0}(-1)^i\binom{n}{i}\binom{2n-2i}{n-i-h}$$

Por outro lado,

$$\binom{n}{-h}_2 = \sum_{i\geq 0}(-1)^i\binom{n}{i}\binom{2n-2i}{n-i+h} = \sum_{i\geq 0}(-1)^i\binom{n}{i}\binom{2n-2i}{2n-2i-n+i-h} =$$

$$= \sum_{i\geq 0}(-1)^i\binom{n}{i}\binom{2n-2i}{n-i-h} = \binom{n}{h}_2 \qquad \blacksquare$$

Proposição 3.1.2: Para $n, h \in \mathbb{N}$

$$\binom{n}{h}_2 = \binom{n-1}{h-1}_2 + \binom{n-1}{h}_2 + \binom{n-1}{h+1}_2.$$

Demonstração: De 3.4 temos que

$$(1 + x + x^2)^n = \sum_{h=-n}^{n} \binom{n}{h}_2 x^{h+n}.$$

Além disso, podemos escrever

$$(1 + x + x^2)^n = (x(x^{-1} + 1 + x))^n = x^n(x^{-1} + 1 + x)^n = x^n \sum_{h=-n}^{n} \binom{n}{h}_2 x^h.$$

Segue que $\binom{n}{h}_2$ é o coeficiente de x^h na expansão de $(x^{-1} + 1 + x)^n$. Desta forma, vamos reescrever

$$(x^{-1} + 1 + x)^n = (x^{-1} + 1 + x)(x^{-1} + 1 + x)^{n-1} = x^{-1}(x^{-1} + 1 + x)^{n-1} +$$

$$(x^{n-1} + 1 + x)^{n-1} + x(x^{-1} + 1 + x)^{n-1}.$$

Assim, o coeficiente de x^h na expansão de $(x^{-1} + 1 + x)^n$ é igual à soma dos coeficientes de x^{h+1}, x^h e x^{h-1} na expansão de $(x^{-1} + 1 + x)^{n-1}$. Portanto temos a seguinte recorrência:

$$\binom{n}{h}_2 = \binom{n-1}{h-1}_2 + \binom{n-1}{h}_2 + \binom{n-1}{h+1}_2. \qquad \blacksquare$$

Observe que esta proposição é similar à Relação de Stifel para os coeficientes binomiais.

3.2 Uma interpretação combinatória para o coeficiente trinomial

Considere o seguinte problema: De quantas maneira podemos retirar 3 bolas, sem levar em consideração a ordem, de uma caixa que contém 8, sendo elas: a, a, b, b, c, c, d, d. Usaremos o conceito de polinômio gerador para resolver este problema. Para isso associaremos às bolas do tipo a o polinômio

$$1 + ax + a^2x^2,$$

onde o termo ax significa que uma bola do tipo a foi retirada, o termo a^2x^2 significa que duas bolas do tipo a foram retiradas enquanto que o termo $1(= a^0x^0)$ significa que não foram retiradas bolas do tipo a. Da mesma forma associaremos os polinômios $1 + bx + b^2x^2$; $1 + cx + c^2x^2$ e $1 + dx + d^2x^2$, respectivamente, às bolas b, c e d. Assim podemos escrever:

$$p(x) = (1 + ax + a^2x^2)(1 + bx + b^2x^2)(1 + cx + c^2x^2)(1 + dx + d^2x^2) =$$

$$= 1 + A_1x + A_2x^2 + A_3x^3 + A_4x^4 + A_5x^5 + A_6x^6 + A_7x^7 + A_8x^8,$$

cujas parcelas A_i de x^i, com $i = 1, 2, 3, \dots, 8$, resultam de expressões que dependem de a, b, c e d, conforme listado na tabela 2.

Tabela 2: Lista das possibilidades geradas pelo polinômio p(x)

Coeficientes	Soma das parcelas dos coeficientes de x^i
A_1	$a + b + c + d$
A_2	$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + ab + ac + bc + bd + cd$
A_3	$ab^2 + ac^2 + ad^2 + bc^2 + bd^2 + cd^2 + a^2b + a^2c + a^2d + b^2c + b^2d + c^2d + abc + abd + acd + bcd$
A_4	$c^2d^2 + bc^2d + bcd^2 + b^2c^2 + abd^2 + ac^2d + acd^2 + abcd + abc^2 + a^2d^2 + b^2d^2 + b^2cd + a^2cd + a^2c^2$
A_5	$bc^2d^2 + ac^2d^2 + ab^2d^2 + ab^2cd + a^2bc^2 + b^2c^2d + b^2cd^2 + abc^2d + ab^2c^2 + a^2b^2d + a^2c^2d + a^2cd^2 + a^2bd^2 + a^2bcd + a^2b^2c$
A_6	$b^2c^2d^2 + ab^2c^2d + a^2bcd^2 + abc^2d^2 + ab^2cd^2 + a^2b^2d^2 + a^2c^2d^2 + a^2bc^2d + a^2b^2cd + a^2b^2c^2$
A_7	$ab^2c^2d^2 + a^2b^2cd^2 + a^2bc^2d^2 + a^2b^2c^2d$
A_8	$a^2b^2c^2d^2$

Fonte: Autora

Nesta tabela podemos observar uma lista de possibilidades para $p(x)$, onde o expoente de x representa o número de bolas retiradas e cada parcela das somas uma possibilidade de retirar aquela quantidade.

Em nosso problema estamos interessados, não na listagem das diferentes escolhas, mas somente na quantidade de tais diferentes escolhas. Assim, basta tomarmos no produto dos quatro polinômios $a = b = c = d = 1$, obtendo:

$$p(x) = (1 + x + x^2)^4,$$

o qual nos diz que existem 16 maneiras de retirarmos 3 bolas dentre as 8 que estão na caixa. Ou seja, a *combinação de duplas* de 8 elementos tomados 3 a 3 é:

$$\binom{4}{-1}_2 = \begin{bmatrix} 8 \\ 3 \end{bmatrix} = 16$$

Vamos representar as possibilidades para o problema reescrevendo as parcelas da linha A_3 na tabela 4.

Tabela 3: Representação da linha A3 da tabela 2

{aab}	{bba}	{cca}	{dda}
{aac}	**{bbc}**	**{ccb}**	**{ddb}**
{aad}	**{bbd}**	**{ccd}**	**{ddc}**
{abc}	{abd}	{acd}	**{bcd}**

Nesta tabela temos em itálico os conjuntos contendo exatamente duas bolas do tipo a, sublinhado temos a presença de apenas uma bola deste tipo, e em negrito as sete possibilidades em que essas bolas não foram retiradas da caixa.

De (3.4) temos que:

$$(1 + x + x^2)^n = \sum_{h=-n}^{n} \binom{n}{h}_2 x^{h+n},$$

onde:

$$\binom{n}{h}_2 = \sum_{i\geq 0}(-1)^i\binom{n}{i}\binom{2n-2i}{n-i-h}.$$

e, pela equação (3.5) segue que:

$$\binom{n}{h}_2 = \begin{bmatrix}2n\\ n+h\end{bmatrix}.$$

Assim,

$$(1+x+x^2)^n = \sum_{j=0}^{2n}\begin{bmatrix}2n\\ j\end{bmatrix}x^j,$$

onde $\begin{bmatrix}2n\\ j\end{bmatrix} = \binom{n}{h}_2$, com $j = n+h$. Com isto podemos enunciar o seguinte resultado:

Teorema 3.2.1: $\binom{n}{h}_2$ é o número de maneiras de tirarmos $n+h$ elementos de um conjunto com $2n$ elementos, onde estes $2n$ elementos são formados por 2 exemplares de cada um dos distintos elementos.

3.3 Uma prova combinatória para a identidade similar à de Stifel para os coeficientes trinomiais

Faremos aqui uma prova combinatória para a identidade similar à de Stifel dos coeficientes binomiais.

Usando a notação da equação (3.6) vamos reescrever o resultado da proposição 3.1.2

$$\binom{n}{h}_2 = \binom{n-1}{h-1}_2 + \binom{n-1}{h}_2 + \binom{n-1}{h+1}_2$$

como:

$$\begin{bmatrix}2n\\ n+h\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2n-2\\ n+h-2\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}2n-2\\ n+h-1\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}2n-2\\ n+h\end{bmatrix}$$

Prova: Segue do teorema 3.2.1 que $\begin{bmatrix} 2n \\ n+h \end{bmatrix}$ é o número de maneiras de tirarmos $n+h$ elementos de um total de $2n$, onde estes $2n$ elementos são formados por 2 exemplares de cada um dos n objetos distintos. Consideremos, assim, os elementos distintos $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$. Vamos tomar duas cópias de cada um destes elementos, ou seja, $a_1, a_1, a_2, a_2, a_3, a_3, \ldots, a_n, a_n$. Queremos retirar $n+h$ elementos do conjunto formado por estes $2n$ elementos.

Seja $a_j \in \{a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n\}$. A cada retirada de $n+h$ elementos dentre os $2n$ temos as seguintes possibilidades:

1. a_j não está na lista, cuja quantidade é $n+h$;
2. a_j pode aparecer apenas uma vez na lista, cuja quantidade é $n+h$;
3. a_j pode aparecer duas vezes na lista, cuja quantidade é $n+h$.

No primeiro caso a quantidade de listas de $n+h$ objetos, quando retiramos $n+h$ elementos dos $2n$ que estão no conjunto, cujo elemento a_j não aparece é

$$\begin{bmatrix} 2n-2 \\ n+h \end{bmatrix}.$$

No segundo caso a quantidade dessas listas é dada por

$$\begin{bmatrix} 2n-2 \\ n+h-1 \end{bmatrix}.$$

Para o terceiro caso, a quantidade de listas é dada por

$$\begin{bmatrix} 2n-2 \\ n+h-2 \end{bmatrix}.$$

Portanto, reunindo todas as listas obtidas em 1., 2., 3., temos:

$$\begin{bmatrix} 2n \\ n+h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2n-2 \\ n+h-2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2n-2 \\ n+h-1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2n-2 \\ n+h \end{bmatrix}. \qquad \blacksquare$$

3.4 O triângulo aritmético para os coeficientes trinomiais

Com as propriedades dos coeficientes trinomiais e as interpretações combinatórias dada em 3.2 e 3.3 podemos construir um triângulo similar ao Triângulo de Pascal. Observe que a proposição 3.1.2 nos diz que a soma de três números trinomiais gera um número cujo numerador é uma unidade maior que o numerador dos números somados e o denominador é igual ao mediano. Assim, para obter um elemento deste triângulo basta somar os 3 elementos da linha imediatamente superior. A proposição 3.1.1 nos garante a simetria neste triângulo. Observe, na tabela 4 que a n-ésima linha deste triângulo é formada pelos coeficientes do desenvolvimento de $(1 + x + x^2)^n$.

Tabela 4: Triângulo aritmético associado ao trinômio

							1							
						1	1	1						
					1	2	3	2	1					
				1	3	6	7	6	3	1				
			1	4	10	16	19	16	10	4	1			
		1	5	15	30	45	51	45	30	15	5	1		
	1	6	21	50	90	126	141	126	90	50	21	6	1	
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

Fonte: Autora

Com o auxílio deste triângulo a resolução do problema proposto no início do capítulo fica bastante simples. Vejamos: modelamos o problema através da função geradora

$$p(x) = (1 + x + x^2)^4$$

Para desenvolver $p(x)$ basta nos utilizarmos da 4ª linha do triângulo da tabela 4 e as potências crescentes de x^j, com $0 \leq j \leq 2n$, obtendo:

$$p(x) = 1 + 4x + 10x^2 + 16x^3 + 19x^4 + 16x^5 + 10x^6 + 4x^7 + x^8,$$

e a resposta do problema é o coeficiente de x^3 neste desenvolvimento, portanto 16.

Exemplo 3.4.1: (Adaptado de [13] pag. 168) Uma loja recebeu de seus fornecedores três caixas, *A*, *B* e *C*, com brinquedos, respectivamente, dos tipos a, b e c. De quantos modos diferentes os funcionários podem arrumar quatro brinquedos, colocando-os na prateleira, sem levar em consideração a ordem, sendo que cada tipo de brinquedo pode ser colocado no máximo duas vezes?

Solução: De início vamos considerar a função geradora que nos fornecerá as possíveis escolhas levando em consideração as restrições impostas. Neste momento podemos associar os polinômios $p(x), q(x)$ e $s(x)$ respectivamente aos brinquedos a, b e c, isto é:

$$p(x) = 1 + ax + a^2x^2$$
$$q(x) = 1 + bx + b^2x^2$$
$$s(x) = 1 + cx + c^2x^2$$

onde, em $p(x)$, o termo ax significa que um brinquedo do tipo a foi colocado na prateleira, enquanto que o termo $1(= a^0x^0)$ significa que nenhum brinquedo do tipo a foi escolhido, e o termo a^2x^2 indica que dois brinquedos do tipo a foram colocados na prateleira. A mesma interpretação se dá em $q(x)$ e $s(x)$ para os brinquedos do tipo b e c, respectivamente.

Sendo assim, cada um dos polinômios "controla" a presença de um determinado tipo de brinquedo. Fazendo o produto desses polinômios temos:

$$p(x).q(x).s(x) = (1 + ax + a^2x^2).(1 + bx + b^2x^2).(1 + cx + c^2x^2).$$

Como não estamos interessados nas diferentes maneiras de arrumarmos os 6 brinquedos, mas sim, na quantidade de maneiras diferentes que temos para fazer tal arrumação, então vamos fazer $a = b = c = 1$, obtendo a função trinomial:

$$f(x) = (1 + x + x^2)^3.$$

Agora, utilizando-nos da linha 3 do triângulo dos coeficientes trinomiais e das potências crescente de x^j, com $0 \leq j \leq 2n$, segue que:

$$f(x) = 1 + 3x + 6x^2 + 7x^3 + 6x^4 + 3x^5 + x^6.$$

Assim podemos concluir que, com as restrições apresentadas, o máximo de arrumações que é possível fazer é dado pelo coeficiente de x^4, ou seja, podem ser arrumados até seis brinquedos na prateleira. ■

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Estar familiarizado com as técnicas de resolução de problemas de contagem que aparecem nas mais diversas ciências não tem se mostrado fácil ao aluno em todos os níveis de aprendizado. Manipular habilidosamente as ferramentas requer tempo e treinamento. Os professores, em muitos casos, deixam de trabalhar os conteúdos de Análise Combinatória por não deterem as habilidades necessárias e pertinentes ao tema. Permanente formação, estudo e pesquisa seria uma forma de amenizar estas dificuldades.

Neste trabalho apresentou-se algumas sugestões de utilização dos coeficientes binomiais e uma de suas extensões para a resolução de problemas de contagem, os coeficientes trinomiais. Os métodos, usualmente, utilizados no Ensino Médio são capazes de resolver problemas relativamente simples. Com o domínio das técnicas apresentadas neste trabalho basta que o estudante saiba interpretar e modelar o problema uma vez que a solução aparecerá naturalmente nos coeficientes dos polinômios que os modelam.

Nossa intenção neste trabalho foi apresentar técnicas versáteis e acessíveis que se utilizam de conhecimentos trabalhados no Ensino Médio, como os Polinômios e os Binômios de Newton, para resolver os mais diversos problemas encontrados nas diferentes ciências que se utilizam da contagem.

APÊNDICE

Série de potências e aproximação de Taylor

As séries de potências são usadas na aproximação de funções. Ou seja, dada uma função, ao encontrar uma série infinita que converge, para esta função, vemos que as somas parciais desta série podem ser utilizadas para aproximar a função a um número real. Mesmo que as funções originais sejam difíceis, ou impossíveis de serem avaliadas diretamente, as somas parciais destas séries infinitas correspondentes se tornam polinômios e podem ser avaliados com facilidade. A aproximação de funções por somas parciais de suas séries infinitas é o método utilizado por computadores e por calculadoras para gerar valores de funções tais como e^x, lnx e as funções trigonométricas. Neste apêndice daremos a definição de *Séries Formais* e *Séries de Taylor* segundo [5]. Os exemplos retirados deste mesmo autor ilustram a obtenção dos coeficientes de Taylor para a construção da série.

Definição 1: *Série de potências* ou *séries formais* são séries infinitas da forma:

$$\sum_{n\geq 0} a_n x^n = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots$$

onde cada termo é uma constante multiplicada por uma potência de x.

Pode-se notar que um polinômio de grau n é uma série de potência cujos coeficientes são zero, exceto para um conjunto finito de índices. De fato,

$$\begin{gathered} p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n = \\ = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n + 0x^{n+1} + 0x^{n+2} + \cdots = \\ = \sum_{n\geq 0} a_n x^n \end{gathered}$$

Note que a n-ésima soma parcial de uma série de potência é um polinômio, isto é,

$$S_n = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_{n-1}x^{n-1}.$$

Se a variável x assume um valor numérico em específico, a série se torna uma sequência de termos constante que converge ou diverge. Uma série de potência pode convergir para alguns valores de x e divergir para outros. Pode ser mostrado, através do Cálculo, que a cada série de potências corresponde um intervalo simétrico $-L < x < L$, no interior do qual a série converge e no exterior diverge. Nos pontos de fronteira, $x = -L$ e $x = L$, tanto pode convergir como divergir. O número L é chamado *raio de convergência*, e o conjunto de todos os números para os quais a série converge é chamado *intervalo de convergência*. Este intervalo pode ser infinito, caso a série seja convergente para todos os valores de x.

Tomemos uma função $f(x)$, vamos encontrar os correspondentes coeficientes a_n, tal que a série de potência

$$\sum_{n \geq 0} a_n x^n$$

convirja para $f(x)$ em algum intervalo. Para descobrir que coeficientes seriam estes, suponha que

$$f(x) = \sum_{n \geq 0} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots + a_n x^n + \cdots.$$

Se $x = 0$, somente o primeiro termo na soma é não-nulo, assim $a_0 = f(0)$.

Observando que, se a série de potência converge para $f(x)$ no intervalo $-L < x < L$, então a série derivada converge para $f'(x)$ neste intervalo. Assim, derivando a série, termo a termo, obtemos:

$$f'(x) = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \cdots + n a_n x^{n-1} + \cdots$$

e, se $x = 0$, segue que

$$a_1 = f'(0)$$

Derivando novamente obtemos:

$$f''(x) = 2a_2 + 3.2a_3 x + \cdots + n(n-1)a_n x^{n-2} + \cdots$$

Fazendo $x = 0$, concluímos que

$$2a_2 = f''(0) \;\; \rightarrow \;\; a_2 = \frac{f''(0)}{2}$$

A terceira derivada de f é:

$$f^{(3)}(x) = \; 3.2a_3 + \cdots + n(n-1)(n-2)a_n x^{n-3} + \cdots$$

e

$$f^{(3)}(0) = \; 3.2a_3 \;\; \rightarrow \;\; a_3 = \frac{f^{(3)}(0)}{3.2} \;\; \rightarrow \;\; a_3 = \frac{f^{(3)}(0)}{3!}.$$

Seguindo o mesmo procedimento concluímos que

$$f^{(n)}(0) = \; n!\, a_n \rightarrow \; a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$$

onde $f^{(n)}(0)$ é a n-ésima derivada de f calculada em $x = 0$ e $f^{(0)}(0) = f(0) = a_0$.

O desenvolvimento acima mostra que, se existe alguma série de potência que converge para $f(x)$, seus coeficientes devem ser os obtidos das derivadas de f através da fórmula

$$a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$$

Tal série é conhecida como *série de Taylor de f* em torno de $x = 0$, e os coeficientes $a_n$são conhecidos como *coeficientes de Taylor de f*.

Definição 2: A série de Taylor de $f(x)$ em torno de $x = 0$ é a série de potências

$$\sum_{n \geq 0} a_n \, x^n$$

onde

$$a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$$

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

[1] BARBOSA, RUI MADSEN. Descobrindo a Geometria Fractal – para sala de aula. 3 ed. Belo Horizonte: Editora Autêntica, 2005.

[2] BOYER, CARL B. História da Matemática. 3. ed. São Paulo: E. Blucher, 2010.

[3] BRASIL, SEC. DE ED. FUNDAMENTAL. "Parâmetros curriculares nacionais: matemática." Brasilia: MEC/SEF, 1997.

[4] GARCIA, DOMINGOS BOAES. "Resolução de problemas de Combinatória usando Funções Geradoras." Dissetação PROFMAT - Universidade Federal do Maranhão. São Luís: UFMA, 2013.

[5] HOFFMANN, LAURENCE D. BRADLEY, GERALD L. Cálculo um curso moderno e suas aplicações. Rio de Janeiro: LTC, 1996.

[6] IEZZI, GELSON. Fundamentos da Matemática Elementar, vol 5. São Paulo: Atual, 1977.

[7] —. Matemática: ciência e aplicação, Vol 1,2, 3: ensino médio. São Paulo: Saraiva, 2013.

[8] LIMA, ELON LAGES, *et al*. A Matemática do Ensino Médio. Vol. 2. Rio de Janeiro: SBM, 2006.

[9] MEC, "PCN-PARAMETROS NACIONAIS DO ENSINO MÉDIO." portal.mec.gov.br. 2000. www.portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/ciencian.pdf (acesso em 05 de agos. de 2015).

[10] MORGADO, AUGUSTO CEZAR DE O, *et al.* Análise Combinatória e Probabilidade. Rio de Janeiro: SBM, 1991.

[11] NETO, DIONÍSIO NOGUEIRA. O uso de funções geradoras no ensino médio para articular conteúdos variados em análise combinatória. Dissertação PROFMAT - Universidade Federal da Grande Dourados. Dourados: UFGD, 2014.

[12] SÁNCHEZ, DAVID GÓMEZ, *et al*. Modelo para resolver un trinomio elevado a la n. UNIÓN - REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA - Nº 25, Março 2001.

[13] SANTOS, JOSÉ PLINIO, MARGARIDA P. MELLO, E IDANI T. C. MURARI. Introdução à Análise Combinatória. Rio de Janeiro: Ciência Moderna, 2007.

[14] UFMG. História das Seqüências e Séries. s.d. www.mat.ufmg.br/calculoII/h1sese.html (acesso em 30 de set. de 2015).

[15] UFRGS. O triângulo de Pascal é de Pascal? s.d. www.mat.ufrgs.br/~portosil/histo2b.html (acesso em 17 de set. de 2015).