

UNIVERSIDADE FEDERAL DA GRANDE DOURADOS
FACULDADE DE ENGENHARIA
ENGENHARIA MECÂNICA

ISMAEL ANTÔNIO AGOSTINI

**ANÁLISE E PROJETO DE UM SISTEMA *BALL*
*AND BEAM***

Dourados
2025

ISMAEL ANTÔNIO AGOSTINI

ANÁLISE E PROJETO DE UM SISTEMA BALL AND BEAM

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à Faculdade de Engenharia da Universidade Federal da Grande Dourados.

Análise e Projeto de um Sistema *Ball and Beam*

Sanderson Manoel da Conceição

Dourados
2025

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP).

A275a Agostini, Ismael Antonio
ANÁLISE E PROJETO DE UM SISTEMA BALL AND BEAM [recurso eletrônico] / Ismael Antonio Agostini. -- 2025.
Arquivo em formato pdf.

Orientador: Sanderson Manoel da Conceição.
TCC (Graduação em Engenharia Mecânica)-Universidade Federal da Grande Dourados, 2025.
Disponível no Repositório Institucional da UFGD em:
<https://portal.ufgd.edu.br/setor/biblioteca/repositorio>

1. Bola e Viga. 2. PID. 3. Sistemas de Controle. I. Conceição, Sanderson Manoel Da. II. Título.

Ficha catalográfica elaborada automaticamente de acordo com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).

©Direitos reservados. Permitido a reprodução parcial desde que citada a fonte.



MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
FUNDAÇÃO UNIVERSIDADE FEDERAL DA GRANDE DOURADOS

ANEXO D – AVALIAÇÃO FINAL DO TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO

Aluno: **ISMAEL ANTONIO AGOSTINI**

Título do trabalho: **ANÁLISE E PROJETO DE UM SISTEMA BALL AND BEAM**

BANCA EXAMINADORA

1. Presidente (orientador):

Prof. Dr. Sanderson Manoel da Conceição, Universidade Federal da Grande Dourados - UFGD

2. Membro:

Prof. Dr. Rodrigo Borges Santos, Universidade Federal da Grande Dourados – UFGD

3. Membro:

Prof. Dr. Douglas Domingues Bueno, Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho” – UNESP

De acordo com o grau final obtido pelo aluno, nós da banca examinadora, declaramos **Aprovado** o aluno acima identificado, na componente curricular Trabalho de Conclusão de Curso (TCC-II) de Graduação no Curso de Engenharia Mecânica da Universidade Federal da Grande Dourados.

Dourados, 27 de Novembro de 2025.

Documento assinado digitalmente
SANDERSON MANOEL DA CONCEICAO
Data: 28/11/2025 16:03:32-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Prof. Dr. Sanderson Manoel da Conceição

Documento assinado digitalmente
RODRIGO BORGES SANTOS
Data: 02/12/2025 10:52:48-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Prof. Dr. Rodrigo Borges Santos

Documento assinado digitalmente
DOUGLAS DOMINGUES BUENO
Data: 02/12/2025 14:54:12-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Prof. Dr. Douglas Domingues Bueno

Dedico este trabalho ao meu pai e ao meu irmão, alicerces fundamentais da minha jornada. Ao meu orientador, pela inestimável mentoria, e à instituição de ensino, por me proporcionar a sólida formação acadêmica aqui consolidada.

AGRADECIMENTOS

Agradeço ao meu monitor, cuja orientação foi fundamental ao longo deste trabalho. Sua disponibilidade para esclarecer dúvidas, sua dedicação durante a mentoria e a possibilidade de acesso ao laboratório foram essenciais para o desenvolvimento desta pesquisa.

Estendo meus agradecimentos ao graduando Odailton Pereira dos Anjos, pela valiosa colaboração na disponibilização e fabricação dos materiais em impressão 3D, contribuindo diretamente para a execução prática deste projeto.

"Se soubéssemos o que era aquilo que estávamos fazendo, não seria chamado de pesquisa."

Albert Einstein

RESUMO

O presente trabalho apresenta o desenvolvimento, a implementação e a análise de uma plataforma experimental do tipo *Ball and Beam* (Bola e Viga), um sistema clássico de controle utilizado para o estudo de sistemas instáveis e não lineares. O objetivo central consistiu no projeto de uma bancada didática capaz de integrar conceitos de modelagem matemática, instrumentação eletrônica e controle digital, resultando em uma ferramenta de alta eficiência para aplicações acadêmicas. A metodologia baseou-se no desenvolvimento de projetos em fases, iniciando-se pela concepção mecânica via software CAD e manufatura por processos de precisão (CNC e impressão 3D). No âmbito do hardware, a arquitetura foi estruturada em torno do microcontrolador Arduino Mega 2560, utilizando um sensor a laser (*ToF*) *VL53L1X* (*ToF*) *VL53L1X* para realimentação de posição e um servomotor de alto torque para atuação. A modelagem matemática do sistema foi deduzida a partir das Leis de Newton, incorporando a determinação experimental do coeficiente de atrito estático e a aplicação de filtros digitais IIR de segunda ordem para o condicionamento dos sinais de leitura. A estratégia de controle baseou-se no algoritmo PID digital, cuja sintonia inicial foi realizada pelo método de Ziegler-Nichols analítico e experimental. Durante os ensaios, identificou-se que a estabilização marginal do sistema ocorria com um ganho crítico de 1,47 e um período de 3,5 s. Embora os parâmetros teóricos tenham servido como base, ajustes finos foram necessários para mitigar os efeitos de saturação do atuador e as não linearidades da planta física. Os resultados demonstram que a plataforma atingiu um desempenho satisfatório, apresentando estabilidade, repetibilidade e precisão no posicionamento da esfera. Conclui-se que o sistema desenvolvido é uma ferramenta eficaz para a demonstração prática de fenômenos de controle, cumprindo com êxito os requisitos de projeto e desempenho estabelecidos.

Palavras-chave: Bola e Viga. PID. Sistemas de Controle.

ABSTRACT

Resumo em outro idioma 1: This work presents the development, implementation, and analysis of an experimental Ball and Beam platform, a classic control system used for the study of unstable and nonlinear systems. The central objective was to design a didactic bench capable of integrating concepts of mathematical modeling, electronic instrumentation, and digital control, resulting in a highly efficient tool for academic applications. The methodology was based on the phased development of projects, starting with mechanical design via CAD software and manufacturing by precision processes (CNC and 3D printing). In terms of hardware, the architecture was structured around the Arduino Mega 2560 microcontroller, using a VL53L1X laser sensor (ToF) for position feedback and a high-torque servomotor for actuation. The mathematical modeling of the system was deduced from Newton's Laws, incorporating the experimental determination of the static friction coefficient and the application of second-order IIR digital filters for conditioning the reading signals. The control strategy was based on the digital PID algorithm, whose initial tuning was performed using the analytical and experimental Ziegler-Nichols method. During the tests, it was identified that the marginal stabilization of the system occurred with a critical gain of 1.47 and a period of 3.5 s. Although the theoretical parameters served as a basis, fine adjustments were necessary to mitigate the effects of actuator saturation and the nonlinearities of the physical plant. The results demonstrate that the platform achieved satisfactory performance, exhibiting stability, repeatability, and precision in the positioning of the sphere. It is concluded that the developed system is an effective tool for the practical demonstration of control phenomena, successfully fulfilling the established design and performance requirements.

Key words: Ball and Beam. PID. Control Systems.

RESUMEN

Este trabajo presenta el desarrollo, la implementación y el análisis de una plataforma experimental de bola y viga, un sistema de control clásico utilizado para el estudio de sistemas inestables y no lineales. El objetivo principal fue diseñar un banco didáctico capaz de integrar conceptos de modelado matemático, instrumentación electrónica y control digital, resultando en una herramienta altamente eficiente para aplicaciones académicas. La metodología se basó en el desarrollo de proyectos por fases, comenzando con el diseño mecánico mediante software CAD y la fabricación mediante procesos de precisión (CNC e impresión 3D). En cuanto al hardware, la arquitectura se estructuró en torno al microcontrolador Arduino Mega 2560, utilizando un sensor láser VL53L1X (ToF) para la retroalimentación de posición y un servomotor de alto par para la actuación. El modelado matemático del sistema se dedujo de las Leyes de Newton, incorporando la determinación experimental del coeficiente de fricción estática y la aplicación de filtros digitales IIR de segundo orden para el acondicionamiento de las señales de lectura. La estrategia de control se basó en el algoritmo PID digital, cuyo ajuste inicial se realizó mediante el método analítico y experimental de Ziegler-Nichols. Durante las pruebas, se identificó que la estabilización marginal del sistema se produjo con una ganancia crítica de 1,47 y un período de 3,5 s. Si bien los parámetros teóricos sirvieron de base, fue necesario realizar ajustes finos para mitigar los efectos de la saturación del actuador y las no linealidades de la planta física. Los resultados demuestran que la plataforma alcanzó un rendimiento satisfactorio, mostrando estabilidad, repetibilidad y precisión en el posicionamiento de la esfera. Se concluye que el sistema desarrollado es una herramienta eficaz para la demostración práctica de fenómenos de control, cumpliendo satisfactoriamente los requisitos de diseño y rendimiento establecidos.

Contraseñas: Ball and Beam. PID. Sistema Control.

LISTA DE FIGURAS

1	Dispositivo de Watt	17
2	Fluxograma de projeto.	24
3	Interface SolidWorks.	25
4	Máquinas utilizadas.	26
5	Modelos de Bola e Viga.	27
6	Primeira concepção modelada	28
7	Primeiro protótipo construído.	29
8	Segundo protótipo modelado e construído.	30
9	Objeto de controle do protótipo número dois.	30
10	Mudança do objeto de controle.	31
11	Mudança dimensional do braço do servo motor.	31
12	Sensores de distância pré definidos.	35
13	Desvio de sinal devido a superfície esférica.	36
14	Ângulo de abertura do feixe <i>VL53L1X</i>	36
15	Configuração da Região de Interesse (ROI) na matriz de detecção do sensor <i>VL53L1X</i>	37
16	Delimitação de zona ativa do sensor <i>VL53L1X</i> centrada na posição (4, 4).	37
17	Ilustração do funcionamento teórico do sensor delimitado.	38
18	Delimitação utilizada <i>VL53L1X</i>	38
19	Ensaio para comparação de leitura do sensor	38
20	Representação visual de um servo motor e um motor de passo para aplicações de baixa potência.	40
21	Conjunto para funcionamento Motor de Passo	40
22	Componentes internos de um servo motor.	41
23	Diagrama de funcionamento de um servo motor.	41
24	Servomotores disponíveis.	42
25	Teste de referência e dead band.	42
26	Servo motor T-8120MG/TIANKONGRC.	43
27	Exemplos de microcontroladores comumente usados em robótica.	44
28	Esquema físico e esquemático.	44
29	Softwares utilizados.	45
30	Diagrama de corpo livre (DCL) da esfera na plataforma ball and beam.	46
31	Diagrama de corpo livre do sistema	47
32	Forças atuantes na esfera	48
33	Relação entre os ângulos α e β	49
34	Diagrama de blocos do sistema de controle	51

35	Diagrama de blocos do sistema de controle reduzido	51
36	Diagrama de blocos com plantas teóricas	52
37	Método de Ziegler & Nichols para sistema marginalmente estável . . .	57
38	Sistema marginalmente estável com $K = 1.47$	58
39	Saturação do sinal de controle	59
40	Posição por tempo- <i>SetPoint</i> fixo 200mm	60
41	Setpoint fixo em 200mm com perturbação.	61
42	<i>Setpoint</i> em onda quadrada.	62
43	Ensaio de robustez de longa duração.	63
44	Vista explodida.	68
45	Construção.	68
46	Modelo físico e esquemático.	69
47	Modelo físico e esquemático(2).	70

LISTA DE TABELAS

1	Comparação valor Real e valor Medido	39
2	Parâmetros Físicos do Sistema	48
3	Ganhos do controlador PID calculados via Ziegler-Nichols.	56
4	Ganhos teóricos	57
5	Tabela de Ziegler & Nichols	58
6	Ganhos por Ziegler Nichols	59
7	Ganhos ajustados por tentativa e erro	59

LISTA DE SÍMBOLOS

Letras latinas

e	Diferença do valor lido com o pré-definido
L	Comprimento da barra
t	Variável de tempo
g	Constante de gravidade

Letras gregas

α	Angulação da barra
β	Angulação do braço do servo motor

Notações especiais

K_p	Ganho proporcional
K_i	Ganho integrativo
K_d	Ganho derivativo
R_M	Comprimento do braço do servo motor
M_e	Massa da esfera
K_f	Coefficiente de atrito
x_e	Posicionamento da esfera
$F_{x,t}$	Força translacional
$F_{x,f}$	Força rotacional
$F_{x,t}$	Força de atrito relacionada a velocidade
J_e	Momento de inércia polar da esfera

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	17
1.1	Objetivos	18
2	REVISÃO BIBLIOGRÁFICA	20
3	MATERIAIS E MÉTODOS	24
3.1	REQUISITOS	25
3.1.1	Fabricação	25
3.1.2	Literaturas	26
3.1.3	Objetivos	27
3.2	PROJETO CONCEITUAL	27
3.2.1	Tipos de Bola-viga	27
3.2.1.1	Escolha de um modelo	28
3.2.2	Métodos de Controle	32
3.2.2.1	Controle PID	32
3.2.2.2	Representação por Espaço de Estados	33
3.2.2.3	Outras Abordagens de Controle	33
3.2.2.4	Justificativa da Escolha do Controlador	33
3.3	PROJETO PRELIMINAR	34
3.3.1	Análise de Sensores	34
3.3.2	Análise de Atuadores	39
3.3.3	Análise de microcontroladores	43
3.3.3.1	Escolha do microcontrolador	44
3.4	PROJETO DETALHADO	45
3.4.1	Metodologia de Controle	45
3.4.1.1	Determinação do coeficiente de atrito	45
3.4.1.2	Procedimento Experimental	47
3.4.1.3	Modelo Matemático Ball and Beam	47
3.4.1.4	Modelo Matemático do Atuador	51
3.4.1.5	Implementação Digital de Controladores	52
3.4.2	Discretização do Controlador PID	52
3.4.2.1	Condicionamento de Sinais e Filtragem Digital	53
3.4.2.2	Sintonia do Controlador PID pelo Método de Ziegler-Nichols analítico	55
3.4.2.3	Determinação do Ganho e Período Críticos	55
3.4.2.4	Cálculo dos Ganhos do Controlador PID	56
3.4.2.5	Afinação de PID	57

4	RESULTADOS E DISCUSSÕES	60
5	CONCLUSÕES	65
5.1	SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS	65
	REFERÊNCIAS	67
	APÊNDICE A - Imagens da modelagem e sua concepção . . .	68
	APÊNDICE AA - Algoritmo desenvolvido	71

1 INTRODUÇÃO

A engenharia de controle moderno permeia, de forma ubíqua, o tecido tecnológico da sociedade contemporânea. Desde a regulação homeostática em organismos biológicos até a complexa navegação de veículos aeroespaciais, o conceito de controlar um sistema, isto é, manipular as variáveis de entrada para obter um comportamento desejado na saída, é fundamental para garantir estabilidade, precisão e eficiência. Formalmente, um sistema de controle pode ser definido como um interconectado de componentes que formam uma configuração capaz de fornecer uma resposta desejada mediante uma entrada específica.

Embora dispositivos de regulação automática, como relógios de água e lâmpadas de óleo, tenham surgido na antiguidade, foi com o advento da Revolução Industrial que a necessidade de controlar fontes de energia massivas impulsionou o desenvolvimento formal da área. Neste cenário, a máquina a vapor emergiu como a força motriz da indústria, trazendo o desafio crítico de manter uma velocidade de operação constante sob variações de carga. A solução para este problema representa um dos marcos mais emblemáticos na história da engenharia: o regulador centrífugo, aperfeiçoado por James Watt no final do século XVIII.

O dispositivo de Watt, ilustrado na Figura 1, operava sob um princípio mecânico de retroalimentação. O eixo de saída da máquina a vapor era conectado a massas rotativas que, pela força centrífuga, atuavam sobre a válvula de admissão de vapor, regulando a velocidade da máquina automaticamente (WATT, 1788).

Figura 1 – Dispositivo de Watt

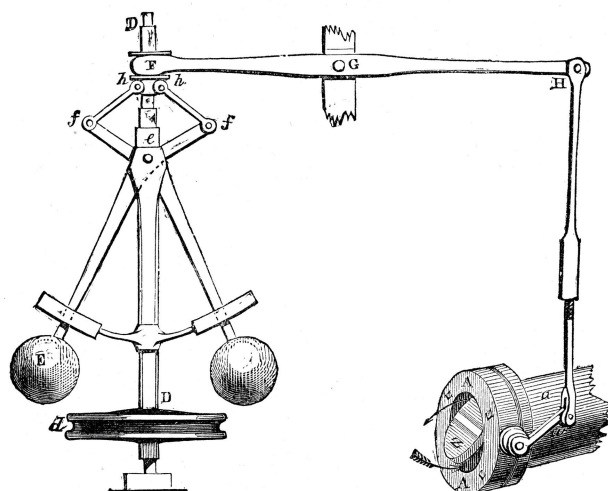


FIG. 4.—Governor and Throttle-Valve.

Fonte: Watt (1788).

A genialidade desta invenção reside na implementação prática do conceito de **malha fechada** (*closed-loop*). Para compreender a relevância desta arquitetura, é imperativo distingui-la dos sistemas de **malha aberta** (*open-loop*). Em um sistema de malha aberta, a ação de controle é computada sem levar em consideração o estado atual da saída do processo; baseia-se puramente em uma calibração prévia e na expectativa de que não haverá perturbações externas. Por outro lado, o controle em malha fechada — a base do regulador de Watt e da moderna Teoria de Controle — utiliza a medição contínua da saída para ajustar a entrada. O sistema compara o valor desejado (*setpoint*) com o valor real, gerando um sinal de erro que aciona mecanismos corretivos. Essa capacidade de autoajuste confere ao sistema robustez contra incertezas e instabilidade.

É sob a ótica destes fundamentos que se insere o estudo de sistemas dinâmicos instáveis, utilizados amplamente como plataformas de experimentação acadêmica. Dentre estes, destaca-se o sistema *Ball and Beam* (Bola e Viga). Trata-se de um experimento clássico nos laboratórios de controle, consistindo em uma viga que pode ser inclinada por um servomotor, sobre a qual uma esfera deve ser equilibrada em uma posição específica. A dinâmica deste sistema é não linear e instável em malha aberta — a esfera não permanece parada sem uma atuação corretiva ativa e contínua —, tornando-o um candidato ideal para a aplicação e validação de estratégias de controle em malha fechada.

Neste contexto, a presente monografia dedica-se ao estudo aprofundado deste mecanismo. O trabalho tem como objetivo principal a explanação detalhada de todo o processo de construção do sistema *Ball and Beam*, abrangendo desde a modelagem mecânica até a implementação eletrônica. Adicionalmente, visa-se a apresentação e análise da teoria de controle aplicada, demonstrando como os algoritmos de regulação podem ser desenvolvidos e sintonizados para estabilizar um sistema físico real, conectando os conceitos históricos iniciados por Watt às práticas contemporâneas de engenharia de automação.

1.1 Objetivos

objetivo central deste trabalho consiste no desenvolvimento integral e na validação experimental de uma plataforma didática do tipo Bola e Viga. A finalidade primordial é implementar um sistema de controle em malha fechada capaz de estabilizar uma esfera em uma posição pré-determinada sobre uma haste móvel, utilizando para tanto um controlador PID (*Proportional-Integral-Derivative*).

Para atingir tal propósito, o estudo estabelece como metas a realização da modelagem matemática do sistema dinâmico, o desenvolvimento do projeto mecânico estrutural e a integração dos componentes eletrônicos de sensoramento, processamento e atuação. Complementarmente, busca-se desenvolver o *firmware* de controle embarcado e realizar a

sintonia dos parâmetros do controlador, visando obter um protótipo estável e funcional que sirva como ferramenta de apoio ao estudo de sistemas de controle.

2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

A história dos sistemas de controle, particularmente aqueles que empregam a realimentação (*feedback*), demonstra que os fundamentos desta área científica e tecnológica possuem raízes profundas, estendendo-se por séculos e não sendo meramente um produto da engenharia contemporânea. Conforme destaca Yoneyama (2017), em *Engenharia de Controle: Teoria e Prática*, a compreensão plena de muitos procedimentos e técnicas de controle exige uma análise de sua trajetória histórica de invenção e desenvolvimento. O marco inicial dessa evolução reside no **governador centrífugo** de **James Watt**, que impulsionou a necessidade de uma teoria formal para garantir a **estabilidade** dos sistemas realimentados.

O salto da engenharia mecânica para a fundamentação matemática, essencial para a análise dos sistemas realimentados, é detalhado por obras que definiram a **Teoria de Controle Clássica** do século XX. Yoneyama (2017) reforça que a base teórica permitiu a transição de um projeto de controle baseado na intuição para uma abordagem sistemática. Nesse contexto, a obra seminal de Ogata (2010) *Engenharia de Controle Moderno*, ilustra como a necessidade de analisar o desempenho e a estabilidade levou à formalização de métodos no **domínio do tempo**, **domínio da frequência** (*Diagramas de Bode e Nyquist*) e as técnicas de **Lugar das Raízes**.

A chave para essa formalização reside na **Transformada de Laplace (TdL)**. O uso da TdL foi amplamente difundido na engenharia de sistemas lineares, sendo ideal para a solução de **equações diferenciais lineares com coeficientes constantes (EDLC)**. Conforme Dorf e Bishop (2013), em *Sistemas de Controle Moderno*, a TdL é a ferramenta que converte as complexas operações de cálculo diferencial no domínio do tempo em simples manipulações algébricas no domínio de s , permitindo que o sistema seja representado pela **Função de Transferência** $G(s)$, o que representa o resultado direto da aplicação da TdL. O mecanismo central é a propriedade que converte a derivada $\frac{d}{dt}f(t)$ em uma multiplicação por s :

$$\mathcal{L} \left\{ \frac{df(t)}{dt} \right\} = sF(s) - f(0) \quad (2.1)$$

Em suma, a TdL foi o instrumento matemático que a engenharia de controle precisava para sair do campo da invenção empírica e entrar na era da **ciência de projeto sistemático** (OGATA, 2010).

O sucesso da TdL estabeleceu a Teoria Clássica, contudo, o avanço tecnológico na aeronáutica e na robótica revelou as limitações dessa abordagem para sistemas de *multiple inputs and multiple outputs (MIMO)*. A transição para a **Teoria de Controle Moderna** (pós-1960) foi marcada pela adoção da **representação no espaço de estados**. O grande

impulsionador para que esta teoria pudesse ser aplicada na prática foi a **evolução computacional**. Conforme [Franklin, Powell e Emami-Naeini \(2016\)](#), em sua obra fundamental *Sistemas de Controle para Engenharia*, a Teoria Moderna exigia o uso de operações com matrizes complexas inviáveis de serem realizadas manualmente. A capacidade crescente dos **computadores digitais** a partir dos anos 1960 permitiu a solução em tempo real das equações de estado e dos algoritmos de controle ótimo, como o LQR, consolidando a Teoria Moderna para sistemas de alta complexidade ([YONEYAMA, 2017](#)).

Apesar da sofisticação da Teoria Moderna, o controlador **Proporcional-Integral-Derivativo (PID)** continuou a dominar as aplicações industriais devido à sua simplicidade e eficácia. Sua popularidade foi amplamente estabelecida após o trabalho seminal de [Ziegler e Nichols \(1942\)](#), que desenvolveram métodos empíricos de sintonia que dispensavam a modelagem matemática complexa. Essa contribuição abordava o problema prático enfrentado por engenheiros, ecoando a crítica à complexidade da teoria pura ([ZIEGLER; NICHOLS, 1942](#) apud [DORF; BISHOP, 2013](#), p. 3):

"Uma abordagem puramente matemática para o estudo de controle automático é, sem dúvida, a mais desejável do ponto de vista de precisão e agilidade. Infelizmente, entretanto, a matemática da área de controle envolve uma variedade tão desconcertante de funções exponenciais e trigonométricas que um engenheiro comum não tem tempo para lidar com ela e encontrar uma solução para o seu problema."

A metodologia de Ziegler-Nichols garantiu a aplicabilidade prática do PID, cuja ação de controle $u(t)$ é a soma das contribuições Proporcional, Integral e Derivativa baseadas no erro $e(t) = r(t) - y(t)$:

$$u(t) = K_p e(t) + K_i \int_0^t e(t) dt + K_d \frac{de(t)}{dt}$$

O termo **Proporcional** (K_p) atua sobre o erro atual, sendo responsável pela rapidez; o termo **Integral** (K_i) atua sobre o erro acumulado, eliminando o erro de regime estacionário (*offset*); e o termo **Derivativo** (K_d) atua sobre a taxa de variação do erro, amortecendo oscilações e melhorando a estabilidade ([YONEYAMA, 2017](#)).

O controlador PID mantém sua relevância na era moderna por ser o método preferencial para o controle de variáveis contínuas em processos industriais, sendo o Controle de Temperatura uma de suas aplicações mais ubíquas e críticas.

Uma aplicação industrial de alta relevância é o controle de temperatura em reatores químicos ou fornos industriais. Em muitos processos, como a fabricação de plásticos, produtos farmacêuticos ou o tratamento térmico de metais, a qualidade e a segurança do produto final dependem diretamente de manter a temperatura dentro de margens extremamente estreitas.

Nesse cenário, o PID é ideal porque:

- Ação Integral (K_i): É essencial para eliminar o erro de regime estacionário (offset). Se o reator for projetado para operar a 180°C, a ação integral garante que qualquer desvio persistente seja corrigido ao longo do tempo, atingindo o setpoint exato.
- Ação Derivativa (K_d): Ajuda a lidar com a inércia térmica do processo. Se a temperatura começar a subir muito rápido (o que poderia levar a um *overshoot* perigoso e à degradação do produto), o termo derivativo detecta essa mudança rápida e aplica uma ação corretiva imediata (redução da potência de aquecimento) antes que o *setpoint* seja ultrapassado.
- Robustez: O modelo do processo (reator) pode mudar ao longo do tempo (por incrustação, por exemplo), mas o PID, mesmo com sintonia empírica, geralmente permanece suficientemente robusto para manter o controle aceitável.

Como enfatizam [Stephanopoulos \(1984\)](#), em sua obra clássica *Chemical Process Control*, o controle de processos químicos se apoia fortemente na simplicidade e na capacidade de ajuste do PID:

"A grande maioria dos loops de controle de processos químicos e petroquímicos utiliza o algoritmo PID ou variações dele. Sua ampla utilização é devida à sua simplicidade, robustez e capacidade de fornecer um desempenho satisfatório para uma vasta gama de sistemas dinâmicos." (Parafraseado com base na natureza do uso do PID em controle de processos).

O PID, portanto, não é apenas um legado histórico da Teoria Clássica; ele é uma solução prática e vital que sustenta a precisão e a eficiência da maior parte da infraestrutura de controle de processos industriais modernos.

Para que os estudantes e pesquisadores possam aplicar e testar na prática os conceitos teóricos de controle, que vão desde a sintonia empírica do PID até os métodos avançados da Teoria Moderna, são utilizados modelos físicos que simulam os desafios de controle encontrados na indústria. O sistema ***Ball and Beam*** (bola e barra) é um dos modelos mais relevantes e amplamente utilizados em ambientes acadêmicos e laboratórios didáticos de controle, conforme destacado por ([ÅSTRÖM; MURRAY, 2008](#)).

O sistema consiste essencialmente em uma esfera que deve ser mantida em equilíbrio ou rastrear uma posição específica ao longo de uma barra (ou viga) que é rotacionada por um motor. Seu valor didático reside em características dinâmicas que o tornam um desafio de controle particularmente rico:

- **Instabilidade Inerente:** A bola, naturalmente, tende a rolar para longe do centro de equilíbrio. Isso exige que o controlador (e o atuador) esteja sempre ativo, ou

seja, é um sistema instável em malha aberta, obrigando o uso de realimentação para estabilização.

- **Natureza Não-Linear:** A dinâmica da bola e da barra é intrinsecamente não-linear. Embora os alunos frequentemente comecem modelando-o de forma linear para aplicar a Teoria Clássica, a comparação com o modelo não-linear é essencial para introduzir o conceito de **linearização** em torno de um ponto de operação.
- **Ideal para Controle Avançado:** O *Ball and Beam* é uma plataforma excelente para o estudo e aplicação da **Teoria de Controle Moderna**. Sua representação no **espaço de estados** é direta e permite que sejam testados projetos baseados em alocação de polos e controle ótimo, onde um controlador de estado completo (que mede ou estima a posição e a velocidade da bola e o ângulo da barra) é necessário para obter o melhor desempenho ([ÅSTRÖM; MURRAY, 2008](#)).

Os autores enfatizam que, ao longo do tempo, o *Ball and Beam* se estabeleceu como um "*benchmarking*" crucial, permitindo aos estudantes não apenas aprender a teoria, mas também enfrentar as dificuldades práticas de implementação, como ruído, saturação do atuador e atrasos de tempo, que são onipresentes em sistemas de controle reais.

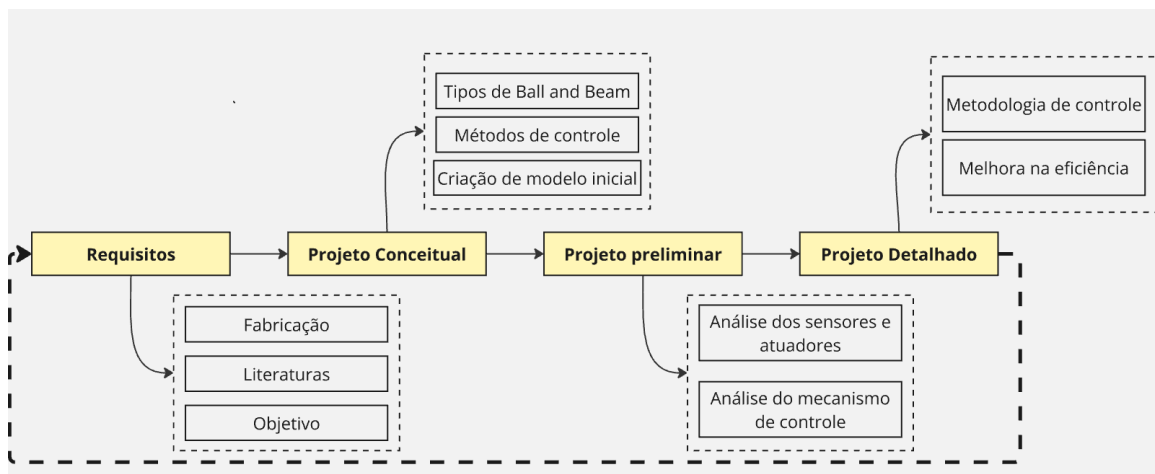
Trazendo essa discussão para o cenário local, o curso de Engenharia Mecânica da Universidade Federal da Grande Dourados (UFGD) já conta com produções científicas na área, totalizando duas monografias sobre sistemas de controle. Nesse contexto, destaca-se o trabalho de [Araújo \(2023\)](#), que compartilham com a presente pesquisa o foco desafiador na construção física e implementação prática de protótipos experimentais do sistema *Ball and Beam*. Este trabalho propõe-se a dar continuidade a essa linha de desenvolvimento experimental, retomando o *benchmarking* dos modelos anteriores para aprimorar a análise do sistema e contribuir para a consolidação do conhecimento prático de controle na instituição.

3 MATERIAIS E MÉTODOS

A metodologia de projeto define o caminho sistemático a ser seguido para a concepção, desenvolvimento e validação de um sistema de controle, assegurando que os objetivos e requisitos definidos sejam atingidos de forma eficiente e verificável. Para projetos na área de Engenharia de Controle, é essencial adotar um processo estruturado que permita a transição clara entre o modelo teórico e a implementação prática.

Visando a sistematização e a eficácia na execução do mecanismo Bola e Viga, adotou-se a metodologia de "Desenvolvimento de Projetos em Fases". O processo foi estruturado através das etapas de Levantamento de Requisitos, Projeto Conceitual, Projeto Preliminar e Projeto Detalhado, sendo que cada fase estabeleceu objetivos específicos que nortearam o desenvolvimento do trabalho. A representação esquemática deste processo pode ser visualizada no fluxograma da Figura 2.

Figura 2 – Fluxograma de projeto.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Conforme ilustrado na figura acima, o desenvolvimento do projeto seguiu uma dinâmica cíclica, permitindo o retorno a fases anteriores sempre que necessário. Essa abordagem possibilitou a realização de testes intermediários em diferentes componentes da bancada, contribuindo para a identificação antecipada de falhas e a mitigação da maior parte dos problemas ao longo do processo. Apesar do caráter iterativo da metodologia, a descrição a seguir será apresentada de forma linear: cada fase do projeto será tratada uma única vez e na ordem estabelecida pelo fluxograma, de modo a facilitar a compreensão e garantir maior fluidez na exposição dos conteúdos.

3.1 REQUISITOS

Esta etapa do projeto Bola e Viga teve como objetivo estabelecer os fundamentos necessários para orientar as fases subsequentes do desenvolvimento. Para isso, foram considerados três aspectos principais: os requisitos de fabricação, que definiram as limitações e possibilidades construtivas da bancada; as referências presentes na literatura, que forneceram parâmetros consolidados e boas práticas para o dimensionamento e funcionamento do mecanismo e os objetivos do projeto, que delimitaram o desempenho esperado e as funcionalidades desejadas. A combinação desses elementos permitiu estruturar de forma clara as necessidades do sistema e direcionar o processo de projeto de maneira coerente e eficiente.

- Materiais- Quais os materiais necessários para a concepção da bancada;
- Literaturas- Pesquisa abrangente na área de controle visando métodos de controle;
- Objetivo- Definissem o objetivo principal de utilização do sistema.

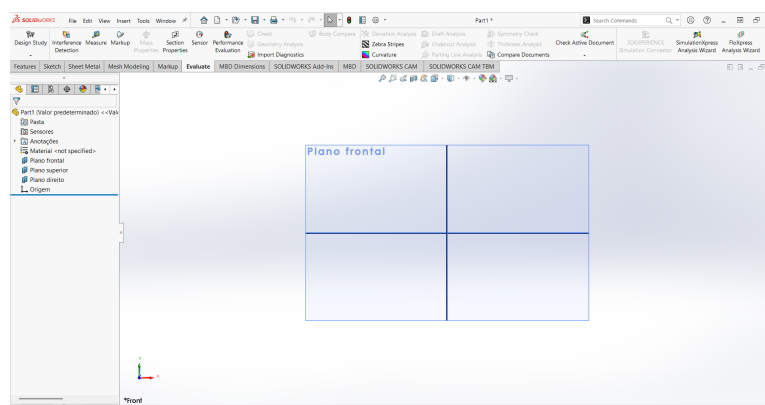
Nesse sentido, os primeiros materiais a serem utilizados são escolhidos, levando em consideração apenas características qualitativas, aos quais serão testadas posteriormente e uma melhor otimização dos sistema poderá ser feita.

Por conseguinte, após a realização de uma abrangente pesquisa sobre os tópicos supracitados pode-se partir para criação do primeiro modelo no Projeto Conceitual.

3.1.1 Fabricação

Para garantir o rigor dimensional e permitir uma análise aprofundada do projeto, adotou-se a modelagem tridimensional como estratégia de desenvolvimento. A ferramenta escolhida para a concepção do mecanismo Bola e Viga foi o software CAD SolidWorks (Dassault Systèmes, 2024). O ambiente gráfico utilizado durante a modelagem pode ser observado na Figura 3.

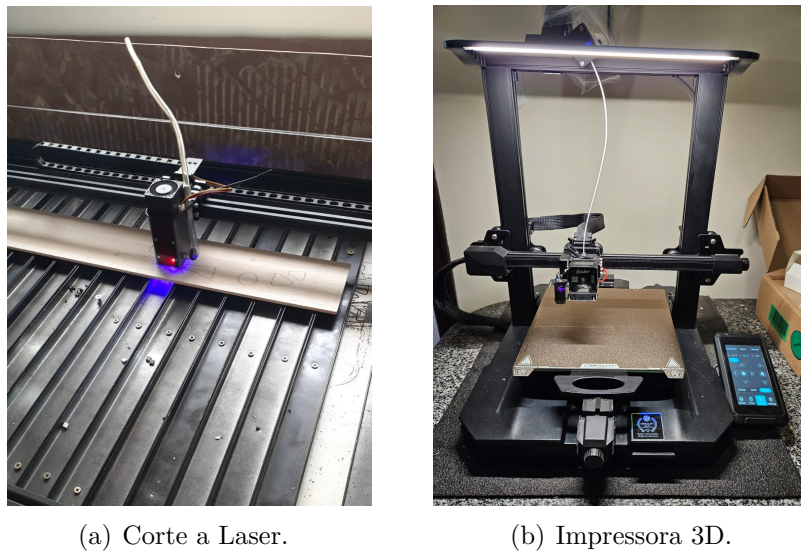
Figura 3 – Interface SolidWorks.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Ao outros protótipos desenvolvidos evidenciou-se que a qualidade construtiva é um fator determinante para o sucesso e a estabilidade do projeto. Em resposta a essa constatação, a manufatura dos componentes do sistema priorizou o uso de processos automatizados. Foram utilizadas, majoritariamente, máquinas de Comando Numérico Computadorizado (CNC), especificamente uma cortadora a laser e uma impressora 3D, as quais podem ser visualizadas na Figura 4.

Figura 4 – Máquinas utilizadas.



Fonte: Elaborado pelo autor.

3.1.2 Literaturas

Mediante a realização de uma revisão bibliográfica abrangente acerca de projetos e relatórios técnicos do sistema, destacam-se os seguintes estudos pela sua relevância para o desenvolvimento deste trabalho:

- **Quanser Inc. (2009)**: Este material serviu de amparo crucial para o desenvolvimento do projeto, destacando-se pela sua abordagem didática e pela presença de ilustrações intuitivas que facilitam a compreensão do fenômeno físico. O documento sistematiza a modelagem matemática da planta, detalhando as equações diferenciais que regem a dinâmica da bola sobre a viga e o processo de linearização necessário para a síntese dos controladores.
- **Real (2021)**: Projeto, Construção e Controle de um Protótipo de Bancada Didática, constituiu-se como referência técnica fundamental para a etapa de instrumentação. A relevância deste estudo reside na apresentação de soluções práticas para sensores e atuadores, servindo de base comparativa para a análise e validação dos componentes eletrônicos adotados nesta monografia.

3.1.3 Objetivos

Fundamentando-se na análise dos trabalhos correlatos, delimitaram-se as diretrizes do projeto. Desta forma, os objetivos centrais estabelecidos para a bancada Bola e Viga consistem em:

- Uma plataforma física de fácil entendimento;
- Estável e com desempenho aceitável;
- Construída sem grandes erros dimensionais;
- Capaz de apresentar fenômenos teóricos na prática.

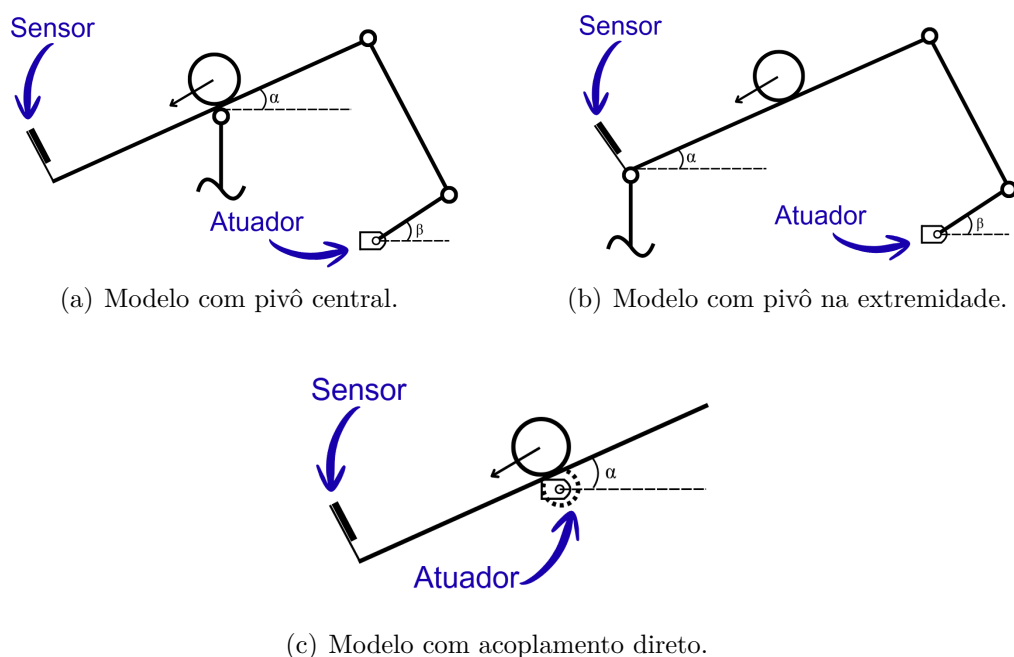
3.2 PROJETO CONCEITUAL

Esta seção estabelece a arquitetura fundamental e os requisitos técnicos do sistema. O desenvolvimento do Projeto Conceitual foi integralmente subsidiado pelo embasamento teórico e pela análise comparativa de diferentes conceitos de Bola e Viga, cujos pormenores serão detalhados nas subseções subsequentes.

3.2.1 Tipos de Bola-viga

Nesta etapa, avaliaram-se as arquiteturas mais usuais de *Ball and Beam* disponíveis na literatura. A partir desse levantamento, selecionaram-se três modelos para uma análise técnica qualitativa, visando definir a melhor estratégia construtiva para a bancada. As configurações estudadas podem ser observadas na Figura 5.

Figura 5 – Modelos de Bola e Viga.



Fonte: Elaborado pelo autor.

A partir da comparação entre as configurações propostas, observam-se as seguintes características estruturais e cinemáticas:

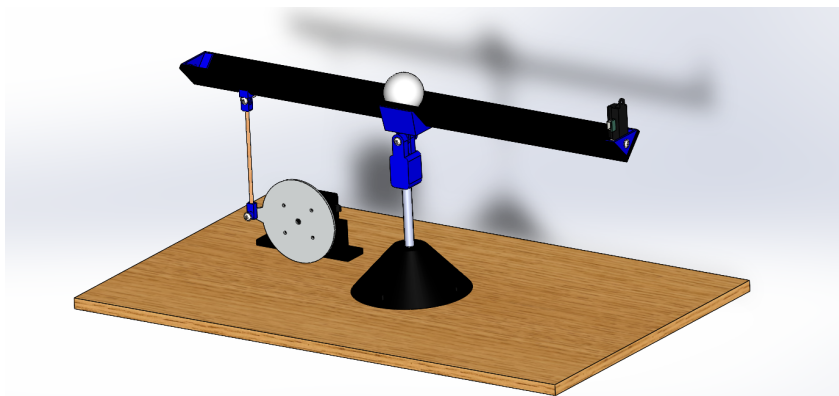
- **Modelo com pivô central:** O ponto de rotação da viga localiza-se no centro geométrico do mecanismo, enquanto o atuador transmite o movimento através de uma haste conectada a uma das extremidades.
- **Modelo com pivô na extremidade:** O suporte de rotação situa-se em uma das extremidades da viga, ao passo que o atuador se conecta, via braço de alavanca, à extremidade oposta.
- **Modelo com acoplamento direto:** Nesta configuração, o próprio eixo do atuador serve como suporte de rotação, posicionado no centro da barra. É importante ressaltar que, neste caso, o ângulo da viga é idêntico ao do atuador (relação 1:1), simplificação que não ocorre nos modelos com transmissão por hastes.

Analisando as três variantes, nota-se um padrão no posicionamento dos sensores, que são instalados em uma das extremidades da calha. Em contrapartida, a atuação difere entre o uso de mecanismos de transmissão (como quadriláteros articulados) e o acoplamento direto do motor à viga.

3.2.1.1 Escolha de um modelo

Inicialmente, adotando-se como parâmetros apenas aspectos qualitativos, tais como facilidade de construção e posicionamento dos componentes, optou-se pela configuração apresentada na Figura 6(a). Em seguida, iniciou-se a construção do primeiro protótipo, cuja modelagem pode ser observada na Figura 6.

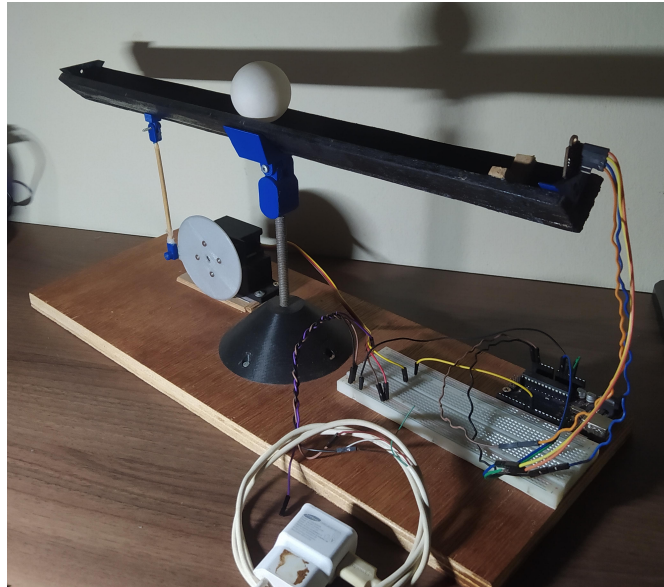
Figura 6 – Primeira concepção modelada



Fonte: Elaborado pelo autor.

Nesse contexto, o primeiro protótipo foi desenvolvido utilizando o atuador, o sensor e o microcontrolador que serão detalhados na Seção 3.4. A montagem física final deste conjunto é apresentada na Figura 7.

Figura 7 – Primeiro protótipo construído.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Após a análise do mecanismo, identificaram-se limitações relacionadas tanto à concepção do projeto quanto aos componentes físicos utilizados, destacando-se:

- A permissão de elevados ângulos de inclinação da viga, o que resultava em baixa precisão de ajuste e, conseqüentemente, comprometia a controlabilidade;
- A massa reduzida da esfera, implicando em baixa inércia e tornando o sistema mais suscetível a vibrações e perturbações externas;
- O comprimento insuficiente da barra, cujas dimensões reduzidas dificultavam a realização de ensaios com o protótipo.

Diante das limitações observadas, partiu-se para o desenvolvimento de um segundo modelo, cujo objetivo construtivo foi sanar os problemas supracitados. Para tanto, selecionou-se a configuração com pivô na extremidade, conforme representado na Figura 6(b). A modelagem deste novo conceito e sua respectiva fabricação são apresentadas na Figura 8.

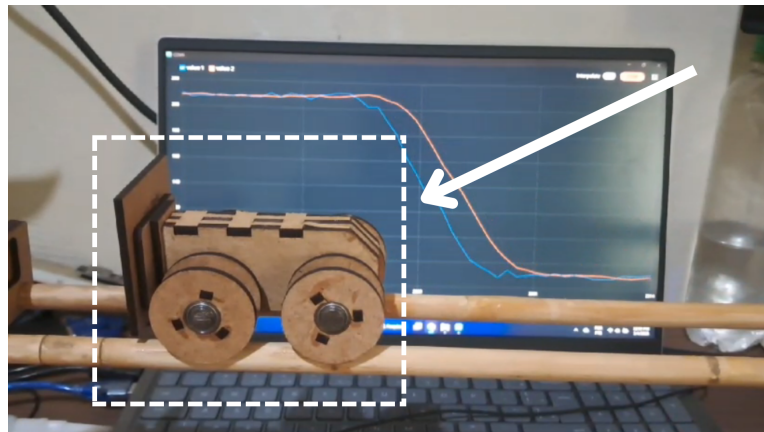
Figura 8 – Segundo protótipo modelado e construído.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Devido a limitações na leitura do sensor, a serem discutidas adiante, optou-se por alterar o objeto de controle deste segundo protótipo. Adotou-se, portanto, uma estrutura móvel com uma placa frontal (carrinho), cuja configuração pode ser observada na Figura 9.

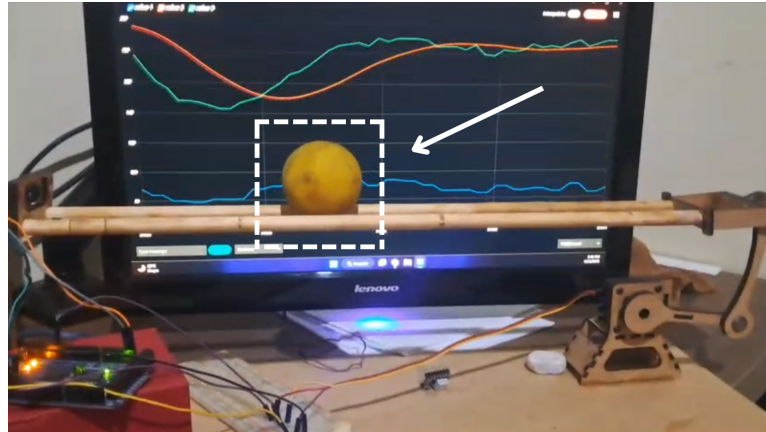
Figura 9 – Objeto de controle do protótipo número dois.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Todavia, constatou-se um elevado grau de atrito, fator que inviabilizaria o controle do sistema. Apesar dos ganhos notórios na leitura do sensor, a ausência de uma dinâmica fluida comprometeria o funcionamento do mecanismo. Consequentemente, essa concepção foi descartada e retomou-se a utilização da esfera, optando-se, desta vez, por um corpo de maiores dimensões e massa, conforme pode ser observado na Figura 10.

Figura 10 – Mudança do objeto de controle.



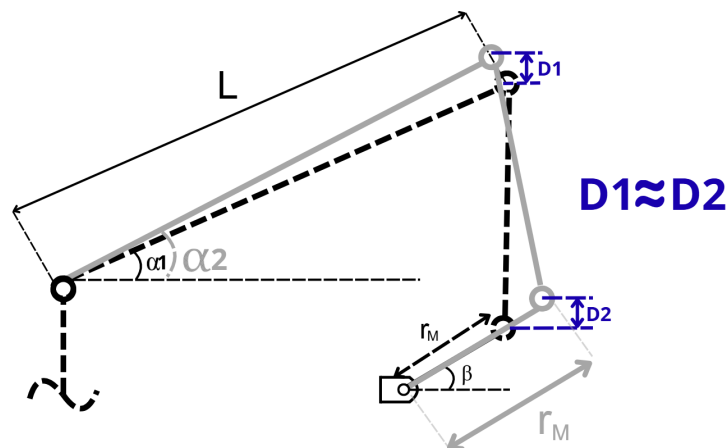
Fonte: Elaborado pelo autor.

A comparação entre as Figuras 9 e 10 evidenciam também uma modificação estrutural na viga (braço). Tal alteração foi motivada pela dificuldade de controle da esfera em pequenas variações angulares, comportamento atribuído ao elevado atrito no contato entre o trilho e a esfera. Contudo, como a concepção geral do sistema demonstrou vantagens em relação à anterior, optou-se por mantê-la. Dessa forma, desenvolveu-se a versão final do mecanismo, focada nas seguintes melhorias:

- Redução do atrito na interface trilho-esfera;
- Aumento adicional da inércia da esfera;
- Redução do braço de alavanca do atuador *horn*, visando aprimorar a controlabilidade.

A estratégia de redução do braço de alavanca *horn* fundamenta-se na premissa de que o braço e o trilho apresentam variações angulares aproximadamente proporcionais, relação que pode ser observada na Figura 11.

Figura 11 – Mudança dimensional do braço do servo motor.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Nesse sentido, a redução do braço de alavanca (r_M) diminui a sensibilidade da variação de α em relação a β . A análise geométrica da Figura 11 demonstra que $\alpha_1 < \alpha_2$, o que implica um aumento na resolução do controle. Isso ocorre porque, para um mesmo deslocamento angular do motor (β), obtém-se uma resposta angular menor na viga (α), permitindo ajustes mais finos no posicionamento.

3.2.2 Métodos de Controle

Os métodos de controle mais comuns são o **Controlador PID** (Proporcional-Integral-Derivativo), que predomina na maioria das aplicações industriais devido à sua simplicidade e eficácia, e a **Representação por Espaço de Estados**, base da Teoria de Controle Moderna e essencial para sistemas complexos.

3.2.2.1 Controle PID

O controlador **PID** é o método de controle mais difundido na indústria, presente em mais de 95% das malhas de controle. Sua atuação baseia-se no **erro** ($e(t)$), definido como a diferença entre a referência (valor desejado) e a saída medida do sistema. A partir dessa grandeza, o algoritmo gera um sinal de controle ($u(t)$) fundamentado em três ações distintas: **Proporcional**, **Integral** e **Derivativa**. A função de transferência clássica do controlador PID é expressa por:

$$G_c(s) = K_p \left(1 + \frac{1}{T_i s} + T_d s \right) \quad (3.1)$$

No domínio do tempo, o sinal de controle é descrito pela equação:

$$u(t) = K_p e(t) + K_i \int_0^t e(\tau) d\tau + K_d \frac{de(t)}{dt} \quad (3.2)$$

Nessas expressões, K_p representa o ganho proporcional, que atua sobre o erro atual de forma imediata, reduzindo-o rapidamente, embora ganhos excessivos possam induzir instabilidade. O termo K_i (relacionado ao tempo integral T_i) refere-se ao ganho integral, responsável por eliminar o erro em regime estacionário (erro acumulado) ao longo do tempo. Por fim, K_d (relacionado ao tempo derivativo T_d) denota o ganho derivativo, que age sobre a taxa de variação do erro, antecipando seu comportamento futuro para amortecer oscilações e melhorar a resposta transitória. O principal desafio na implementação do PID reside na **sintonia** adequada desses três parâmetros para equilibrar velocidade de resposta, estabilidade e precisão.

3.2.2.2 Representação por Espaço de Estados

O método de **Espaço de Estados** modela sistemas dinâmicos lineares por meio de um conjunto de equações diferenciais de primeira ordem. Essa abordagem é particularmente vantajosa para sistemas com múltiplas entradas e múltiplas saídas, sistemas não-lineares ou aqueles com condições iniciais não nulas. Ao contrário da função de transferência, que relaciona entrada e saída no domínio da frequência, o Espaço de Estados descreve o comportamento interno do sistema através de um vetor de **variáveis de estado** ($\mathbf{x}$), o qual contém a informação mínima necessária para determinar o estado futuro do sistema. As equações fundamentais que regem esse modelo são a **Equação de Estados**, que descreve a evolução temporal do sistema, e a **Equação de Saída**, que relaciona os estados internos às saídas observáveis:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \quad (3.3)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t) \quad (3.4)$$

Nesse modelo, $\mathbf{x}(t)$ é o vetor de estado, $\mathbf{u}(t)$ representa o vetor de entradas (sinal de controle) e $\mathbf{y}(t)$ o vetor de saídas. As matrizes $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$ e $\mathbf{D}$ caracterizam, respectivamente, a dinâmica do sistema, a entrada, a saída e a transmissão direta. Essa representação viabiliza técnicas avançadas como a **Realimentação de Estados** (*State Feedback*), onde o controle é dado por $\mathbf{u}(t) = -\mathbf{K}\mathbf{x}(t)$, sendo $\mathbf{K}$ uma matriz de ganhos calculada, por exemplo via métodos como Alocação de Polos ou RQL (Regulador Quadrático Linear).

3.2.2.3 Outras Abordagens de Controle

Além das metodologias supracitadas, destacam-se outras classes de controle amplamente utilizadas:

- **Controladores PI/PD:** Versões simplificadas do PID que utilizam apenas ações parciais;
- **Lógica Fuzzy:** Técnica que emprega a lógica difusa para lidar com incertezas e imprecisões em sistemas complexos;
- **Controle Preditivo (MPC):** Método avançado que utiliza o modelo do sistema para prever e otimizar o comportamento futuro em um horizonte de tempo definido.

3.2.2.4 Justificativa da Escolha do Controlador

A seleção da estratégia de controle adequada depende intrinsecamente da complexidade do sistema, da precisão requerida e dos recursos disponíveis. No contexto da bancada *Ball and Beam* desenvolvida neste trabalho, optou-se pela implementação do **controlador PID**. Tal escolha fundamenta-se, primordialmente, na robustez do algoritmo, que permite controlar o sistema de forma satisfatória sem a necessidade estrita de um

modelo matemático (planta) de altíssima fidelidade. Considerando que a modelagem teórica pode apresentar divergências em relação aos parâmetros físicos reais devido a atritos não lineares e imperfeições construtivas, o PID oferece a flexibilidade de ajuste (sintonia) diretamente sobre o protótipo, garantindo a estabilidade e o desempenho desejados para esta etapa do projeto.

3.3 PROJETO PRELIMINAR

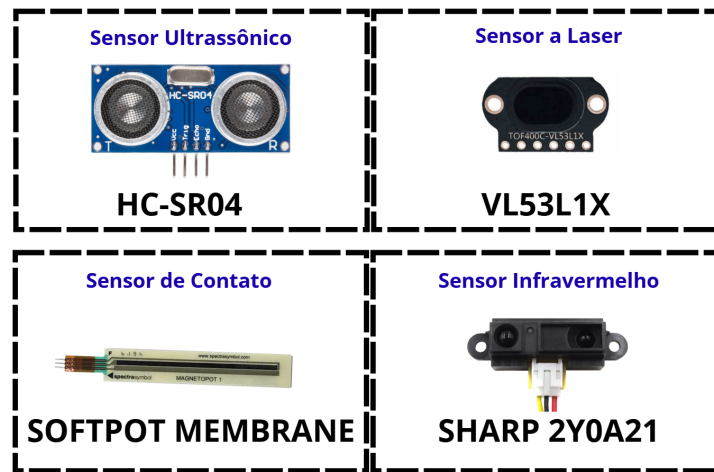
Nesta fase do projeto, a ênfase recai sobre a estruturação do *hardware* de controle, abrangendo os subsistemas de leitura (sensoriamento), atuação e processamento (micro-controlador). O objetivo central consiste em assegurar a integração eficiente entre esses três componentes, estabelecendo a base física necessária para a futura implementação das estratégias de controle.

3.3.1 Análise de Sensores

O sensor de distância é responsável por medir a posição linear da bola ao longo da superfície onde ela se desloca. Ele opera emitindo um feixe ou pulso de referência (luminoso, ultrassônico ou infravermelho, dependendo do modelo) e detectando o retorno desse sinal após refletir no objeto monitorado. Com base no tempo de retorno, na intensidade recebida ou na variação geométrica do feixe, o sensor determina a distância até a superfície da bola. Essa medida é então convertida internamente em um sinal elétrico proporcional, geralmente na forma de tensão ou valor digital, que representa a posição detectada pelo dispositivo.

Dando seguimento à etapa de sensoriamento, realizou-se uma prospecção comercial que resultou na pré-seleção de quatro modelos distintos. As opções consideradas para o projeto são apresentadas na Figura 12.

Figura 12 – Sensores de distância pré definidos.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Sob esta ótica, iniciaram-se os testes com os sensores ultrassônico e infravermelho, em virtude da disponibilidade imediata destes componentes. Ao aplicá-los nos protótipos supracitados, observaram-se as seguintes limitações:

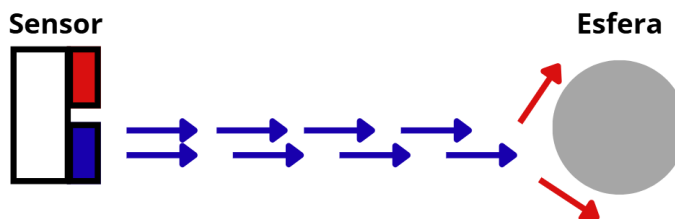
- Elevado nível de ruído;
- Alta imprecisão nas medidas;
- Alcance de leitura limitado.

Diante das inconsistências verificadas, levantaram-se as seguintes hipóteses para justificar as anomalias nas medições:

- A geometria esférica do componente mensurado pode dificultar a reflexão adequada do sinal para a localização precisa do objeto;
- A presença de obstáculos no entorno do mecanismo pode estar gerando interferências externas nos sensores;
- As propriedades ópticas (cor e refletividade) da esfera podem comprometer a eficácia do sensor infravermelho.

O fenômeno físico responsável por essas falhas de leitura, caracterizado pela dispersão do sinal incidente devido à curvatura da superfície, encontra-se esquematizado na Figura 13.

Figura 13 – Desvio de sinal devido a superfície esférica.



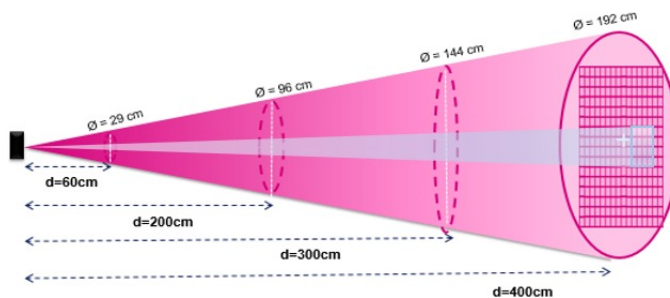
Fonte: Elaborado pelo autor.

Na tentativa de mitigar essa questão, substituiu-se a esfera por um objeto dotado de uma placa frontal plana, conforme anteriormente apresentado na Figura 9. Contudo, como supramencionado, a dinâmica do sistema foi comprometida, levando à descontinuidade dessa abordagem.

Diante da inexistência de soluções eficazes para corrigir a leitura na geometria esférica, os sensores ultrassônico e infravermelho foram descartados, procedendo-se à análise das alternativas restantes.

Nesse contexto, verificou-se que o sensor *Softpot Membrane* eliminaria a falha de detecção por operar via contato. Entretanto, tratava-se de um dispositivo financeiramente inviável e indisponível no mercado nacional. Portanto, recaindo a escolha sobre a última opção viável, adquiriu-se o sensor *VL53L1X*, dando-se início aos testes com este componente.

Nos testes iniciais, o dispositivo apresentou limitações análogas às observadas nos sensores anteriores. Ao analisar as especificações técnicas (*datasheet*), constatou-se que o ângulo de abertura do feixe (*Field of View*) é relativamente amplo, característica detalhada na Figura 14.

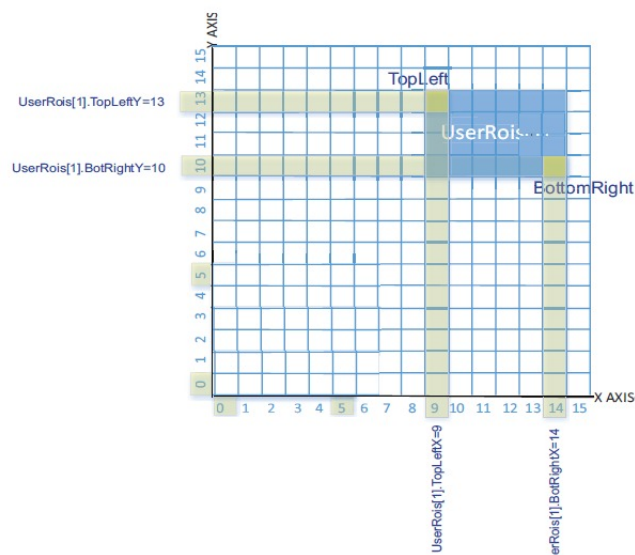
Figura 14 – Ângulo de abertura do feixe *VL53L1X*.

Fonte: *Datasheet* (*STMicroelectronics*, 2018).

Nesse contexto, notou-se que o dispositivo oferece a funcionalidade de configuração de uma Região de Interesse (ROI-*Region Of Interest*). Esse recurso permite restringir a

matriz de detecção ativa, reduzindo efetivamente o campo de visão (ângulo de abertura) do sensor, conforme ilustrado na Figura 15.

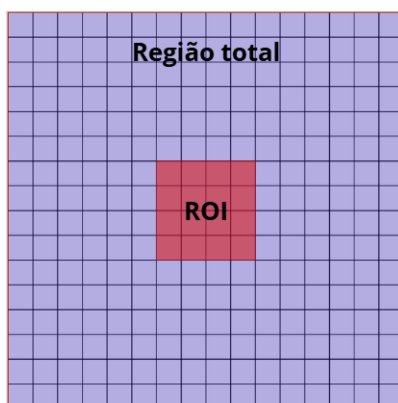
Figura 15 – Configuração da Região de Interesse (ROI) na matriz de detecção do sensor *VL53L1X*.



Fonte: Datasheet (*STMicroelectronics, 2018*).

Mediante a aplicação do conceito de ROI, determinou-se que a configuração otimizada consiste em centralizar a janela de detecção na coordenada (4,4), conforme representado na Figura 16.

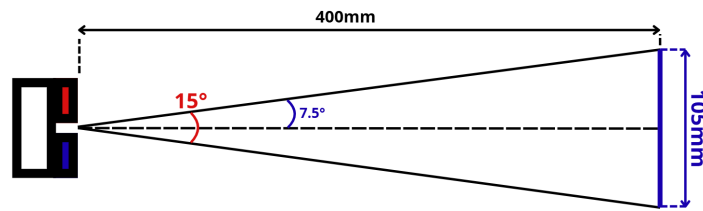
Figura 16 – Delimitação de zona ativa do sensor *VL53L1X* centrada na posição (4,4).



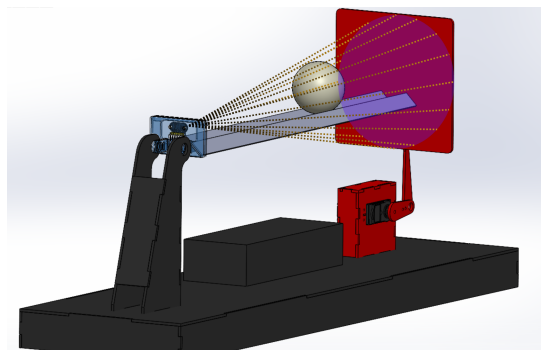
Fonte: Elaborado pelo autor.

Segundo o datasheet, essa delimitação da ROI restringe o Campo de Visão (FoV) para 15°. Considerando o comprimento da viga de 400 mm, projeta-se um cone de detecção com diâmetro de aproximadamente 105 mm na extremidade oposta, conforme demonstrado na Figura 17.

Figura 17 – Ilustração do funcionamento teórico do sensor delimitado.

Fonte: Datasheet *VL53L1X*.

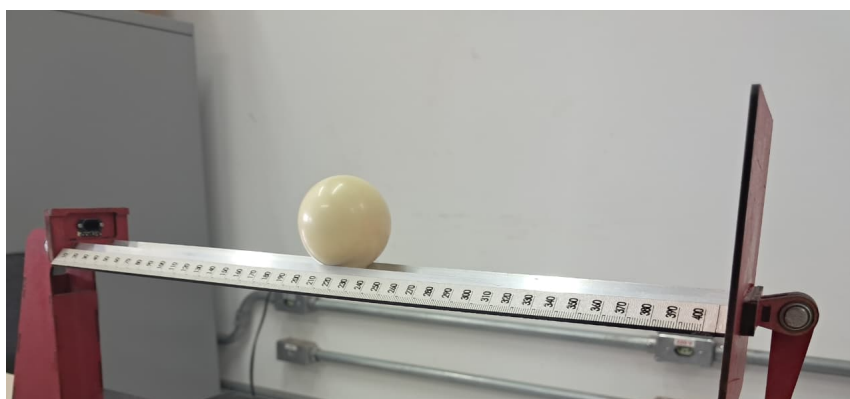
Sob tal ótica, após teste observou-se muita melhoria na qualidade das medidas e na diminuição de ruído. Todavia a mudança de ambiente da bancada, como esperado, ainda afetava as leituras obtidas pelo dispositivo. Para sanar essa limitação foi projetado uma placa quadrada centralizada com o sensor e com laterais na medida de $105mm$, como mostra-se na Figura 18.

Figura 18 – Delimitação utilizada *VL53L1X*

Fonte: Elaborado pelo autor.

Nesse sentido, para análise das medidas adquiridas aplicou-se um dispositivo físico de medida na bancada como pode ser observado na Figura 19, e dessa maneira foram realizados ensaios, ao qual se resume na variação da posição da esfera e seu resultado comparativo real com o medido.

Figura 19 – Ensaio para comparação de leitura do sensor



Fonte: Elaborado pelo autor.

A comparação entre as medições realizadas pelo sensor e os valores reais de referência é apresentada na Tabela 1.

Tabela 1 – Comparação valor Real e valor Medido

Valor Real [mm]	Valor Lido [mm]
50	56
100	98
150	152
200	196
250	250
300	302
350	347

Fonte: Elaborado pelo autor.

A partir da análise da Tabela 1, julgou-se desnecessária a aplicação de quaisquer fatores de correção (calibração) nas leituras, dada a significativa concordância entre os valores medidos e os reais.

3.3.2 Análise de Atuadores

Os atuadores mais frequentemente empregados em sistemas do tipo *Ball and Beam* classificam-se em duas categorias principais: Motor de Passo e Servomotor.

- **Motor de Passo:** Caracteriza-se pela operação nativa em malha aberta, oferecendo a vantagem de total flexibilidade na implementação das leis de controle, uma vez que não possui controlador interno pré-definido. Contudo, para a aplicação em questão, sua utilização demandaria a integração de componentes externos, especificamente um *driver* de potência e um *encoder* para realimentação de posição.
- **Servomotor:** Consiste em um sistema de atuação em malha fechada com eletrônica embarcada. Embora essa arquitetura limite o acesso direto aos parâmetros do controlador interno (dinâmica pré-fixada), apresenta como benefício a alta integração de *hardware* (incluindo driver e sensor de posição), o que resulta na redução significativa da complexidade das conexões elétricas.

A representação visual de um conjunto de Motor de Passo e de um Servomotor encontra-se disposta na Figura 20.

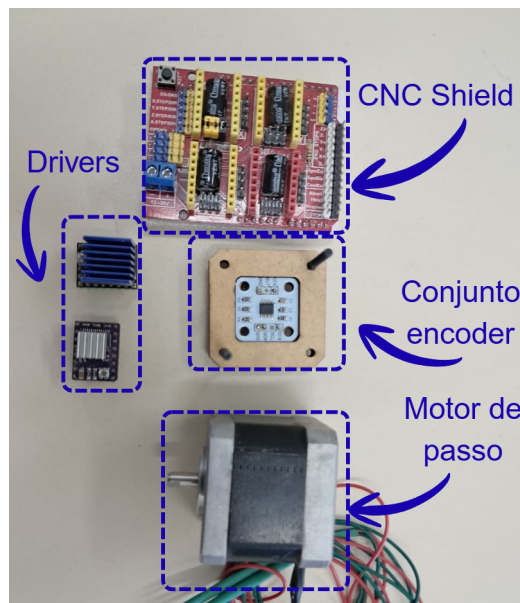
Figura 20 – Representação visual de um servo motor e um motor de passo para aplicações de baixa potência.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Nessa perspectiva, visando maior flexibilidade na implementação de estratégias de controle e a ampliação do escopo para futuros trabalhos acadêmicos com a bancada, optou-se pela utilização do Motor de Passo e seus periféricos. A montagem final deste conjunto é apresentada na Figura 21.

Figura 21 – Conjunto para funcionamento Motor de Passo



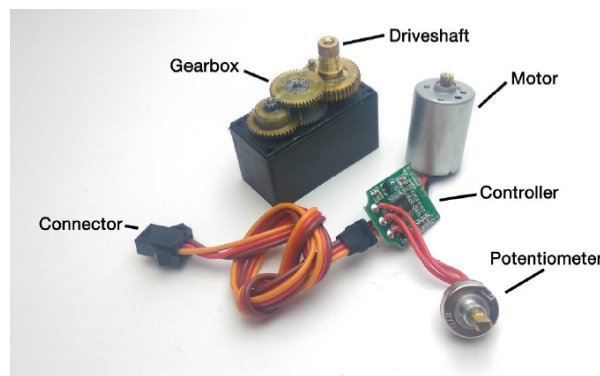
Fonte: Elaborado pelo autor.

Entretanto, em decorrência de falhas operacionais na placa de acionamento (*CNC Shield*) e da indisponibilidade imediata de reposição, somadas às restrições do cronograma, tornou-se mandatória a substituição do atuador. Optou-se, portanto, pela continuidade do projeto utilizando o servomotor, decisão amparada pela sua maior simplicidade de implementação e robustez.

Sob a ótica de funcionamento, o servomotor opera como um sistema autônomo de controle em malha fechada. Internamente, o dispositivo integra um motor de corrente

contínua (DC), acoplado a uma caixa de redução (*Gearbox*) responsável pela ampliação do torque no eixo de saída (*Driveshaft*). O sistema conta ainda com um potenciômetro (*Potentiometer*) solidário ao eixo para monitoramento angular. O circuito controlador (*Controller*) compara continuamente o sinal de referência (posição desejada) com o sinal do potenciômetro (posição real) e, baseado na diferença entre eles (erro), ajusta o acionamento do motor até garantir o alinhamento final. A disposição física desses componentes internos é ilustrada na Figura 22.

Figura 22 – Componentes internos de um servo motor.

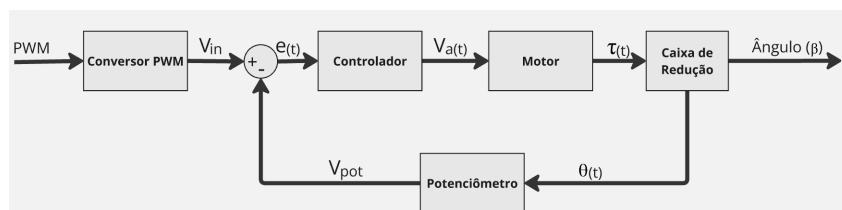


Fonte: (Quanser Inc., 2009).

A representação esquemática da Figura 23 ilustra a arquitetura de controle de um servomotor, modelado como um sistema eletromecânico em malha fechada (*closed-loop system*). O diagrama de blocos evidencia a dinâmica de fluxo de sinais, onde a variável controlada (posição angular do eixo) é continuamente ajustada em resposta a um sinal de referência de entrada (PWM).

O sistema fundamenta-se no princípio da realimentação negativa, utilizando um transdutor resistivo (potenciômetro) para monitorar a saída física. A discrepância entre o valor de referência (*setpoint*) e o valor medido é processada pelo bloco comparador, gerando um sinal de erro que aciona o atuador (motor DC) até que o equilíbrio posicional seja restabelecido.

Figura 23 – Diagrama de funcionamento de um servo motor.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Nesse contexto, foram submetidos a ensaios os servomotores disponíveis para esta etapa do projeto. Os modelos avaliados encontram-se ilustrados na Figura 24.

Figura 24 – Servomotores disponíveis.



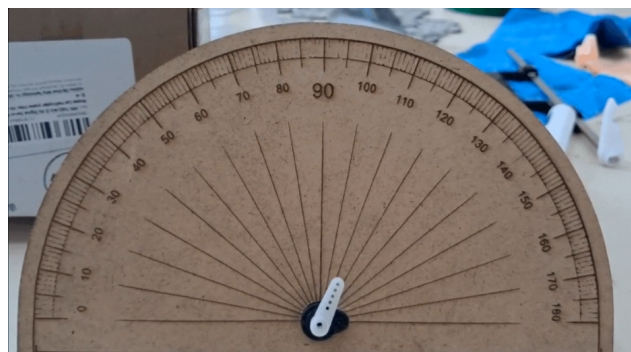
Fonte: Elaborado pelo autor.

Durante a fase inicial de testes, identificaram-se deficiências operacionais nos atuadores avaliados. As principais limitações observadas foram:

- **Perda de Referência:** Caracteriza-se pela falha do controlador interno em determinar a posição angular correta do eixo. Esse fenômeno decorre, geralmente, de sinais incorretos, instáveis ou intermitentes provenientes do potenciômetro de realimentação;
- **Zona Morta (*Dead Band*) Excessiva:** Refere-se à faixa de tolerância na qual o controlador não atua para corrigir o erro. Uma zona morta elevada implica que o servo só reage quando a discrepância entre a posição desejada (referência) e a real ultrapassa um limite significativo, reduzindo a sensibilidade do sistema.

A ocorrência acentuada dessas anomalias inviabiliza o desenvolvimento de uma bancada *Ball and Beam* de alta precisão. Nesse contexto, visando quantificar tais limitações, realizaram-se testes de estresse nos servomotores como apresentado na Figura 25.

Figura 25 – Teste de referência e dead band.

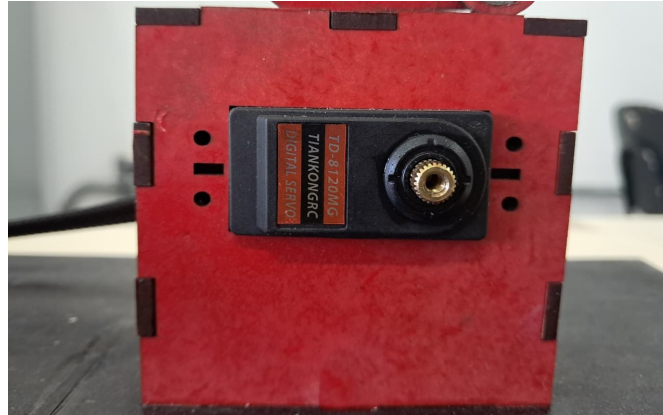


Fonte: Elaborado pelo autor.

Os ensaios preliminares evidenciaram que os dispositivos testados exibiam as limitações descritas anteriormente de forma crítica, o que inviabilizou sua aplicação no sistema. Consequentemente, procedeu-se à aquisição de um novo mecanismo atuador, cujos requisitos de seleção priorizaram a minimização da zona morta, a robustez contra perda

de referência e a relação custo-benefício. O servomotor escolhido pode ser visualizado na Figura 26.

Figura 26 – Servo motor T-8120MG/TIANKONGRC.



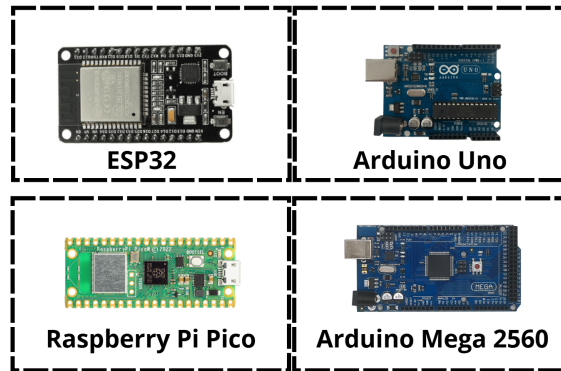
Fonte: Elaborado pelo autor.

3.3.3 Análise de microcontroladores

Um microcontrolador consiste em um circuito integrado que agrupa, em um único chip, uma unidade central de processamento (CPU), memória e interfaces de entrada e saída (I/O). Projetado para aplicações dedicadas, esse dispositivo atua como o núcleo de processamento em sistemas embarcados, viabilizando a automação de tarefas, a leitura de sensores e o controle de atuadores.

No contexto acadêmico e de prototipagem rápida, destacam-se diversas arquiteturas e plataformas de desenvolvimento. Entre as mais difundidas estão a plataforma Arduino (baseada em famílias AVR e ARM), notória por sua acessibilidade e vasta documentação; o *Raspberry Pi Pico*, que emprega o microcontrolador *RP2040*, oferecendo desempenho superior para aplicações robustas; e as famílias *ESP32* e *ESP8266*, que integram conectividade *Wi-Fi* e *Bluetooth*, expandindo o escopo para projetos de Internet das Coisas (IoT). Exemplos representativos desses dispositivos encontram-se ilustrados na Figura 27.

Figura 27 – Exemplos de microcontroladores comumente usados em robótica.



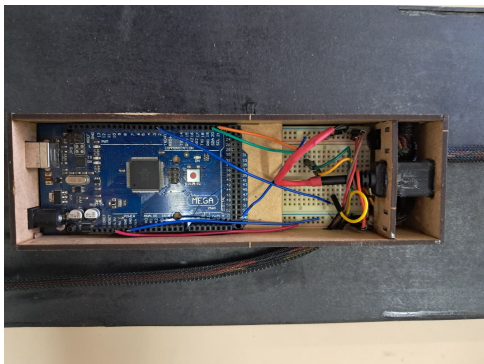
Fonte: Elaborado pelo autor.

3.3.3.1 Escolha do microcontrolador

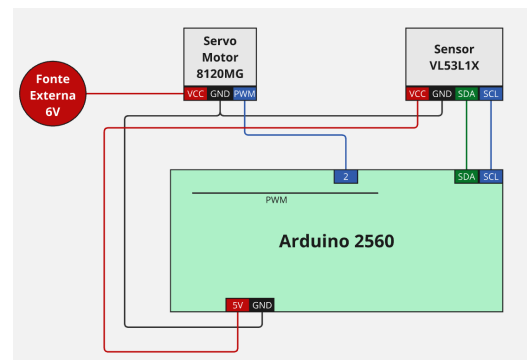
Optou-se pela utilização do microcontrolador Arduino devido à sua robustez para aplicações de prototipagem rápida. A plataforma oferece vantagens como ampla compatibilidade com sensores e atuadores, além de um ecossistema de *software* maduro que simplifica a etapa de codificação. Essas características são essenciais para viabilizar a leitura precisa do sensor de posição e a atuação dinâmica no servomotor dentro do escopo do sistema *Ball and Beam*.

Diante desses critérios, empregou-se especificamente a placa Arduino Mega 2560, cuja montagem e conexões periféricas podem ser visualizadas na Figura 28.

Figura 28 – Esquema físico e esquemático.



(a) Arduino Mega 2560.

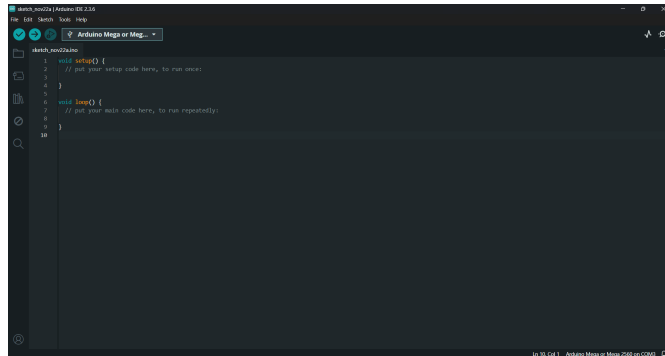


(b) Diagrama esquemático das conexões elétricas do sistema.

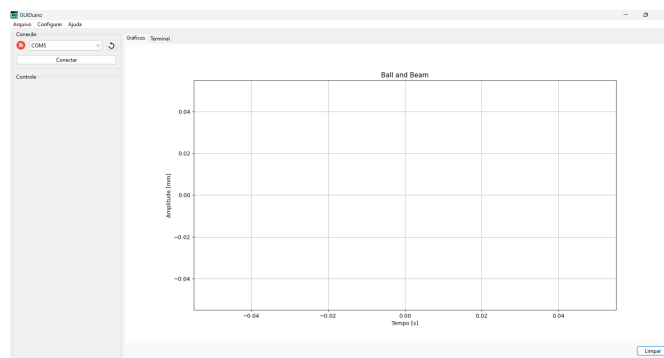
Fonte: Elaborado pelo autor.

Juntamente com esse microcontrolador utilizou-se o *Software* Livre IDE Arduino para criação do algoritmo e, também as apresentações gráficas criadas a partir do programa GUIduino, também gratuito e desenvolvido por alunos da UFPR. As interfaces de ambos os programas podem ser vistas na Figura 29.

Figura 29 – Softwares utilizados.



(a) Interface IDE Arduino.



(b) Interface GUIduino

Fonte: Elaborado pelo autor.

3.4 PROJETO DETALHADO

A presente etapa do estudo tem por objetivo promover a integração entre o desenvolvimento da instrumentação física, detalhado anteriormente, e a modelagem matemática do sistema, estabelecendo os fundamentos necessários para o projeto das estratégias de controle subsequentes.

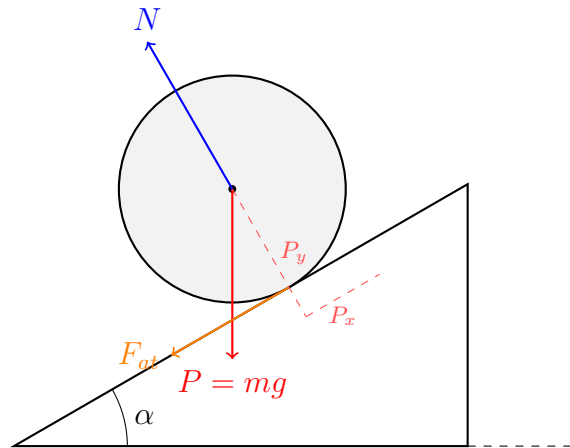
3.4.1 Metodologia de Controle

3.4.1.1 Determinação do coeficiente de atrito

A modelagem precisa de um sistema *Ball and Beam* requer a consideração das forças dissipativas que atuam sobre a esfera. O atrito estático desempenha um papel fundamental na dinâmica do sistema, introduzindo uma não-linearidade conhecida como zona morta (*dead zone*), onde pequenos ângulos de inclinação da viga não são suficientes para vencer a inércia da esfera.

Para a determinação empírica do coeficiente de atrito estático (k_f) entre a esfera e a superfície da viga, utiliza-se o método do plano inclinado. Este método fundamenta-se na análise das forças no momento da iminência do movimento, conforme ilustrado no Diagrama de Corpo Livre (DCL) da Figura 30.

Figura 30 – Diagrama de corpo livre (DCL) da esfera na plataforma ball and beam.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Considerando o sistema em equilíbrio estático limite, as forças atuantes na direção do movimento se anulam. A força peso (P) é decomposta em suas componentes normal (P_y) e tangencial (P_x), descritas pelas equações:

$$P_x = m_e g \sin(\alpha) \quad (3.5)$$

$$P_y = m_e g \cos(\alpha) \quad (3.6)$$

onde m_e é a massa da esfera, g é a aceleração da gravidade e α é o ângulo de inclinação da viga.

Pela Lei de Coulomb para o atrito, a força de atrito estático máximo (F_{at}) é proporcional à força normal (N). No plano inclinado, a normal é igual em magnitude à componente perpendicular do peso ($N = P_y$). Logo:

$$F_{at} = k_f N = k_f m_e g \cos(\alpha) \quad (3.7)$$

Na iminência do movimento, a componente tangencial do peso iguala-se à força de atrito estático ($P_x = F_{at}$). Igualando as equações, obtém-se:

$$m_e g \sin(\alpha) = k_f m_e g \cos(\alpha) \quad (3.8)$$

Simplificando os termos de massa e gravidade, isola-se o coeficiente de atrito:

$$k_f = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)} = \tan(\alpha) \quad (3.9)$$

3.4.1.2 Procedimento Experimental

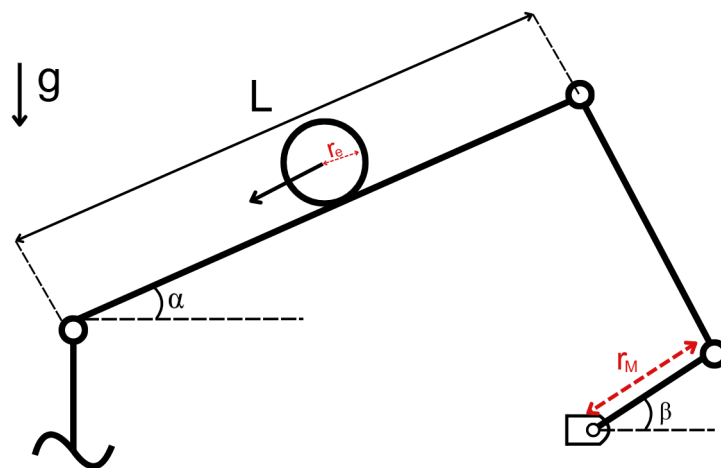
O procedimento para a obtenção dos dados baseou-se na variação controlada do ângulo da viga através do servo motor. O algoritmo de calibração seguiu as seguintes etapas:

1. **Inicialização:** A viga foi posicionada em nível horizontal ($\alpha = 0^\circ$) com a esfera em repouso.
2. **Incremento Angular:** O servo motor foi acionado para incrementar o ângulo da viga com uma taxa de variação quase estática, minimizando efeitos inerciais.
3. **Deteção do Limiar:** No instante em que o deslocamento da esfera foi detectado visualmente o ângulo crítico (α_{crit}) foi registrado.
4. **Cálculo:** O coeficiente k_f foi calculado aplicando-se o ângulo crítico na Equação 3.9 e seu resultado aparece na Tabela 2.

3.4.1.3 Modelo Matemático Ball and Beam

Para o modelo matemático é desenvolvido o diagrama de corpo livre que pode ser visto na Figura 31.

Figura 31 – Diagrama de corpo livre do sistema



Fonte: Elaborado pelo autor.

Para tal mecanismo, tem-se as medidas presentes na Tabela 2.

Símbolos	Definição	Valor	Unidade
L	Comprimento barra	0,400	$[m]$
r_M	Comprimento braço do motor	0,035	$[m]$
r_e	Raio da esfera	0,026	$[m]$
m_e	Massa da esfera	0,126	$[kg]$
J_e	Momento de inércia rotacional	0,00004259	$[kg * m^2]$
k_f	Coefficiente de atrito	0,035	$[-]$
g	Aceleração da gravidade	9,810	$[m/s^2]$
α	Ângulo da barra	(Variável)	$[graus]$
β	Ângulo do motor	(Variável)	$[graus]$

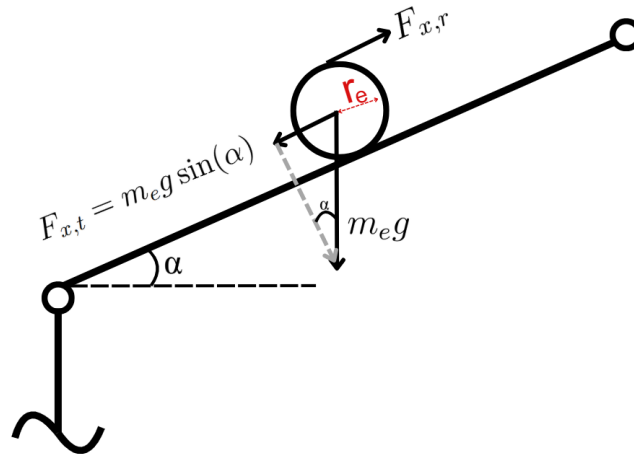
Tabela 2 – Parâmetros Físicos do Sistema

Nessa perspectiva, de acordo com a segunda lei de Newton, tem-se:

$$\sum F = m_e \frac{d^2 x_e}{dt^2} \quad (3.10)$$

Analizando as forças que agem na esfera chega-se no diagrama de corpo livre da Figura 32.

Figura 32 – Forças atuantes na esfera



Fonte: Elaborado pelo autor.

Desenvolvendo a Equação 3.10 chega-se em:

$$\sum F = F_{x,t} - F_{x,r} - F_{x,f} \quad (3.11)$$

$F_{x,t}$ denota a força translacional que atua sobre a esfera em virtude da gravidade e do plano inclinado, conforme ilustrado na Figura 32.

$$F_{x,t} = m_e g \sin(\alpha) \quad (3.12)$$

Observa-se, ainda, a atuação de uma força de atrito dependente da velocidade ($F_{x,f}$) sobre a esfera, cujo sentido é oposto ao da força translacional.

$$F_{x,f} = k_f \dot{x}_e \quad (3.13)$$

$F_{x,r}$ representa a força que atua sobre a esfera devido à sua rotação. O torque gerado em virtude da rotação da esfera é dado por:

$$T = F_{x,r} r_e = \frac{J_e}{r_e} \ddot{x}_e \quad \longrightarrow \quad F_{x,r} = \frac{J_e}{r_e^2} \ddot{x}_e \quad (3.14)$$

Assim, tem-se:

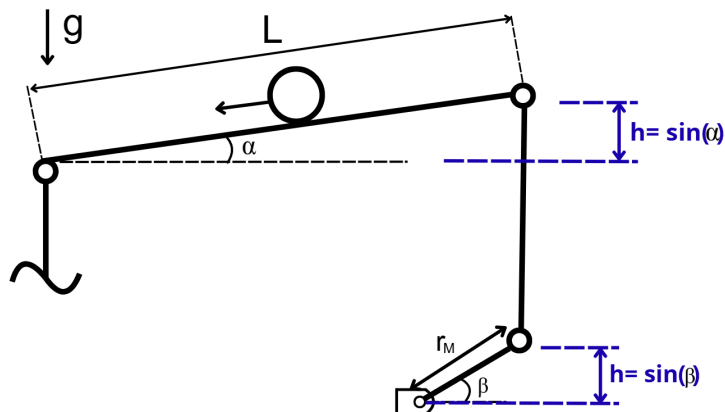
$$m_e \ddot{x}_e = m_e g \sin(\alpha) - \frac{J_e}{r_e^2} \ddot{x}_e - k_f \dot{x}_e \quad (3.15)$$

Ao solucionar a equação para a aceleração e a velocidade da esfera, obtém-se a forma requerida da equação:

$$\ddot{x}_e - \frac{k_f r_e^2}{m_e r_e^2 + J_e} \dot{x}_e = \frac{m_e g r_e^2}{m_e r_e^2 + J_e} \sin(\alpha) \quad (3.16)$$

O objetivo da modelagem consiste em deduzir a relação física existente entre a saída e a entrada de um sistema. No presente caso, a saída do sistema é definida pela posição da esfera (x_e), enquanto a entrada é representada pelo ângulo do motor (β), conforme desenvolvido na Figura 33.

Figura 33 – Relação entre os ângulos α e β



Fonte: Elaborado pelo autor.

$$\sin(\beta)r_M = \sin(\alpha)L = h \quad (3.17)$$

Desta forma, obtém-se a seguinte relação entre o ângulo da barra e o ângulo do motor:

$$\sin(\alpha) = \frac{r_M}{L} \sin(\beta) \quad (3.18)$$

Pode-se substituir o termo $\sin(\alpha)$ na Equação 3.16 pelo lado direito da Equação 3.17. Consequentemente, obtém-se a equação diferencial do sistema que descreve a relação entre a saída e a entrada:

$$\ddot{x}_e - \frac{k_f r_e^2}{m_b r_e^2 + J_e} \dot{x}_e = \frac{m_e g r_e^2 r_M}{(m_e r_e^2 + J_e) L} \sin(\beta) \quad (3.19)$$

Com o intuito de se obter a função de transferência do sistema, a equação diferencial deve ser linearizada em torno do ponto de operação ($x = 0$). Considerando a aproximação para pequenos ângulos:

$$\sin(\beta) \approx \beta \quad (3.20)$$

Assim, os lados esquerdo e direito da Equação 3.19 podem ser reescritos como:

$$\ddot{x}_e - \frac{k_f r_e^2}{m_e r_e^2 + J_e} \dot{x}_e = \ddot{x}_e - K_{FF} \dot{x}_e \quad , \quad \frac{m_b g r_e^2 r_M}{(m_e r_e^2 + J_e) L} \beta = K_{EE} \beta \quad (3.21)$$

Utilizando os valores dos parâmetros do sistema listados na Tabela 2, as constantes K_{BB} e K_{FF} podem ser calculadas facilmente.

Para obter a função de transferência da planta, segue-se com a equação diferencial da planta é dada por:

$$\ddot{x}_e - K_{FF} \dot{x}_e = K_{EE} \beta \quad (3.22)$$

Aplicando a Transformada de Laplace, obtém-se:

$$s^2 X_b(s) + K_{FF} s X_b(s) = K_{BB} \beta(s) \quad (3.23)$$

A função de transferência pode ser derivada conforme a Equação 3.24:

$$G_{BB}(s) = \frac{X_b(s)}{\beta(s)} = \frac{K_{BB}}{s^2 + K_{FF} s} = \frac{0.56}{s^2 + 0.18s} \quad (3.24)$$

3.4.1.4 Modelo Matemático do Atuador

O atuador do sistema esfera-barras é um servomotor. A função de transferência do servomotor pode ser aproximada como uma função de primeira ordem, expressa da seguinte forma:

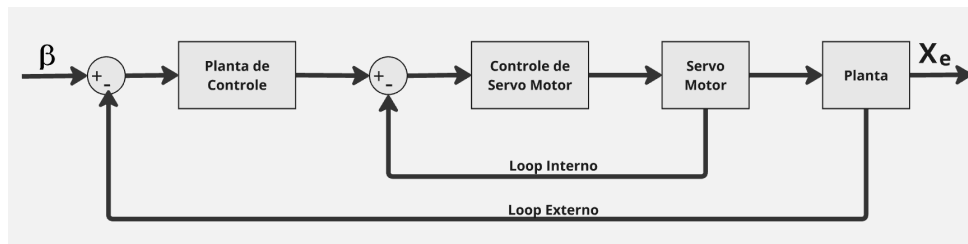
$$G_M(s) = \frac{\beta(s)}{V_m(s)} = \frac{K_M}{\tau s + 1} \quad (3.25)$$

Onde K_M é o ganho e τ é a constante de tempo do atuador. Determinou-se que $K_M = 2$ e $\tau = 0,01$. Após os cálculos, a função de transferência do motor é obtida conforme abaixo:

$$G_M(s) = \frac{2}{0,01s + 1} \quad (3.26)$$

O sistema Ball and Beam apresenta uma estrutura em cascata que compreende uma malha interna e uma malha externa, conforme ilustrado na Figura 34.

Figura 34 – Diagrama de blocos do sistema de controle

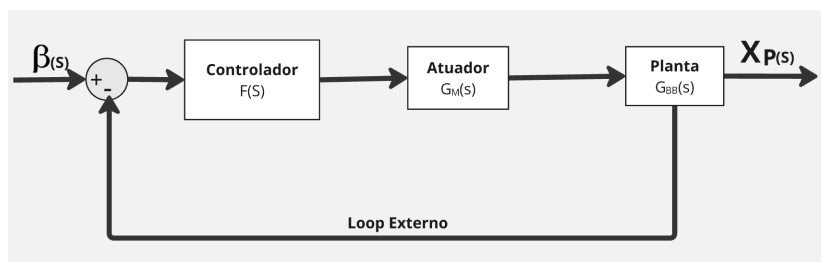


Fonte: Elaborado pelo autor.

A malha interna consiste em um sistema de malha fechada com realimentação unitária, responsável pelo controle da posição do servomotor. O servomotor do sistema controla automaticamente sua posição por meio de seu próprio controlador como apresentou-se na Figura 23.

Visto que a malha interna atinge o estado de regime permanente em uma fração de segundo, a função de transferência desta malha pode ser obtida como uma função de primeira ordem para o sistema Ball and Beam. Quando a malha interna é reduzida a um atuador, o novo diagrama de blocos apresenta-se conforme a Figura 35:

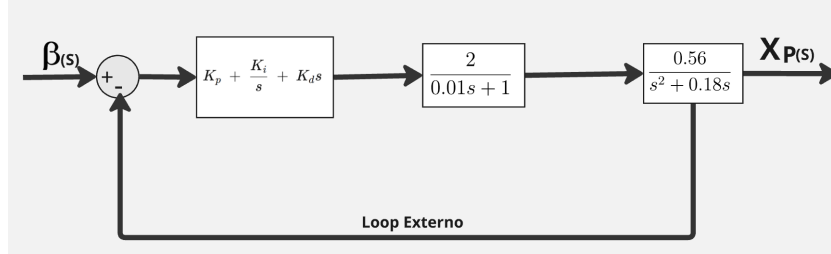
Figura 35 – Diagrama de blocos do sistema de controle reduzido



Fonte: Elaborado pelo autor.

As funções de transferência da planta e do atuador foram obtidas anteriormente. Ao substituir os parâmetros, o diagrama de blocos apresenta-se conforme a Figura 36.

Figura 36 – Diagrama de blocos com plantas teóricas



Fonte: Elaborado pelo autor.

3.4.1.5 Implementação Digital de Controladores

A ubiquidade dos microcontroladores e sistemas embarcados impulsionou a transição de estratégias de controle do domínio contínuo para o digital. Diferentemente de sistemas analógicos, regidos por equações diferenciais contínuas, os sistemas digitais operam mediante a amostragem de sinais em instantes discretos. Consequentemente, a análise e síntese de controladores demandam o uso da *Transformada Z*.

A Transformada Z atua como a contraparte discreta da Transformada de Laplace, convertendo equações de diferenças em expressões algébricas no plano- z . Para um sinal discreto $x[k]$, a transformada unilateral é definida por:

$$X(z) = \mathcal{Z}\{x[k]\} = \sum_{k=0}^{\infty} x[k]z^{-k}. \quad (3.27)$$

A transição entre os domínios contínuo e discreto baseia-se na discretização de operadores, onde a variável complexa s pode ser aproximada em função do período de amostragem T , permitindo o mapeamento de controladores clássicos para o plano- z via métodos como Euler ou Tustin.

3.4.2 Discretização do Controlador PID

O controlador PID clássico no domínio contínuo é descrito pela função de transferência:

$$U(s) = \left(K_p + \frac{K_i}{s} + K_d s \right) E(s). \quad (3.28)$$

Para a implementação digital, cada termo deve ser aproximado utilizando operadores de atraso z^{-1} .

- **Ação Integral:** A integração contínua ($1/s$) é aproximada por uma soma acumulativa. No domínio z , essa operação é representada por:

$$U_I(z) = K_i T \frac{1}{1 - z^{-1}} E(z). \quad (3.29)$$

- **Ação Derivativa:** A derivada (s) é substituída pelo método das diferenças finitas regressivas (Backward Difference), resultando em:

$$U_D(z) = \frac{K_d}{T}(1 - z^{-1})E(z). \quad (3.30)$$

- **Controlador PID Digital:** Considerando que o termo proporcional K_p independe da dinâmica temporal, a agregação dos termos resulta na seguinte função de transferência discreta:

$$U(z) = \left[K_p + \frac{K_i T}{1 - z^{-1}} + \frac{K_d}{T}(1 - z^{-1}) \right] e(z). \quad (3.31)$$

A Equação 3.31 evidencia a estrutura algorítmica do controlador, viabilizando sua implementação computacional através de acumuladores, operações de diferença e ganhos estáticos, conforme ilustrado nos diagramas de blocos de sistemas discretos.

Nessa perspectiva, ao implementar o algoritmo decidiu por usar uma biblioteca com o PID em funcionamento chamada PID-v1, haja vista diminuição de código e melhor funcionamento.

Tal biblioteca possui a seguinte estrutura PID apresentada na Equação 3.32.

$$\text{output}[k] = K_p e[k] + \frac{K_i T e[k]}{1 - z^{-1}} - \frac{K_d}{T} (1 - z^{-1}) u[k] \quad (3.32)$$

Como nota-se na Equação 3.32 a única diferença da biblioteca utilizada para o PID clássico é a ação derivativa que é negativa e não é aplicada com o erro e sim com a saída, isso além de não ser um problema reduz o ruído, evita picos no caso de uma mudança de referência e melhora a estabilidade do sistema.

3.4.2.1 Condicionamento de Sinais e Filtragem Digital

A etapa de aquisição de dados em sistemas de controle digital é intrinsecamente sujeita a incertezas e ruídos de medição. No contexto da plataforma *Ball and Beam*, o sensor de distância (responsável por realimentar a posição da esfera) captura não apenas a dinâmica do corpo físico, mas também componentes indesejados de alta frequência. Estes componentes podem ter origens diversas, variando desde ruído térmico e eletromagnético nos circuitos eletrônicos até erros de quantização na conversão analógico-digital (ADC).

A presença de ruído no sinal de realimentação é particularmente crítica em malhas de controle que utilizam ação derivativa (PID). Como a derivada matemática amplifica variações rápidas, pequenos ruídos no sinal de posição podem resultar em grandes picos no sinal de controle. Esse fenômeno provoca vibrações excessivas no servo motor (*jitter*), resultando em aquecimento, desgaste mecânico prematuro das engrenagens e instabilidade no equilíbrio da esfera.

Para mitigar esses efeitos, torna-se necessário o uso de filtros passa-baixa (*Low-Pass Filters*). O princípio de funcionamento destes filtros baseia-se na discriminação espectral: permite-se a passagem de sinais com frequências inferiores a uma determinada frequência de corte (f_c) — correspondentes ao movimento real e lento da esfera — enquanto se atenua severamente as frequências superiores, associadas ao ruído estocástico.

No entanto, a aplicação de filtros digitais impõe um compromisso de projeto (*trade-off*): quanto maior a atenuação do ruído (filtragem mais agressiva), maior o atraso de fase (*lag*) introduzido no sistema. Um atraso excessivo pode degradar a margem de fase da malha fechada, levando o sistema à instabilidade. Portanto, o projeto do filtro deve equilibrar a necessidade de um sinal limpo com a exigência de uma resposta temporal rápida o suficiente para o algoritmo de controle.

Neste trabalho, optou-se pela implementação de um filtro digital de Resposta ao Impulso Infinita (IIR) de segunda ordem, cujas características de projeto e dimensionamento são detalhadas na sequência.

Para garantir a rejeição de ruídos de alta frequência provenientes do sensor de distância sem comprometer a margem de fase do sistema de controle, realizou-se o dimensionamento analítico dos coeficientes do filtro IIR de segunda ordem.

O critério de projeto baseou-se na definição da frequência de corte (f_c). Considerando que a dinâmica mecânica da esfera sobre a viga é predominantemente lenta (com oscilações naturais abaixo de 1 Hz) e que a taxa de amostragem do sistema é fixa em $f_s = 50\text{ Hz}$ ($T_s = 20\text{ ms}$), estabeleceu-se a frequência de corte em $f_c = 2.0\text{ Hz}$. Este valor oferece um compromisso ótimo entre a suavização do sinal e a manutenção de uma largura de banda suficiente para a atuação do controlador PID.

A relação entre a frequência de corte no domínio contínuo e os polos discretos ($z = p$) do filtro digital é obtida pela transformação exponencial:

$$p = e^{-2\pi f_c T_s} \quad (3.33)$$

Substituindo os parâmetros de projeto:

$$p = e^{-2\pi \cdot 2.0 \cdot 0.02} = e^{-0.08\pi} \approx 0.778 \quad (3.34)$$

Para implementação no microcontrolador, os coeficientes a e b foram arredondados para 0.78. Substituindo estes valores na equação de diferenças recursiva do algoritmo, obtém-se a lei de controle final do filtro:

$$y[k] = 1.56 \cdot y[k-1] - 0.6084 \cdot y[k-2] + 0.0484 \cdot x[k-2] \quad (3.35)$$

Esta relação recursiva constitui o algoritmo definitivo de condicionamento de sinal implementado no *firmware*. Ao aplicar estes coeficientes, o sistema assegura a eliminação dos ruídos de quantização e interferências de alta frequência sem distorcer a dinâmica natural do movimento da esfera. Desta forma, o sinal $y[k]$ resultante apresenta a fidelidade e a suavidade necessárias para ser processado pelo termo derivativo do controlador PID, prevenindo a amplificação de ruídos e garantindo uma atuação estável do servo motor.

3.4.2.2 Sintonia do Controlador PID pelo Método de Ziegler-Nichols analítico

Para determinar os parâmetros ótimos do controlador PID ($F(s)$), optou-se pela utilização do método de Ziegler-Nichols em malha fechada (segundo método). Esta técnica baseia-se na determinação do ganho crítico (K_{cr}) que leva o sistema à instabilidade marginal, caracterizada por uma oscilação de amplitude constante.

A função de transferência de malha aberta da planta, $G_p(s)$, é obtida pela associação em série da dinâmica do atuador e da viga, conforme apresentado no diagrama de blocos do sistema:

$$G_p(s) = \left(\frac{2}{0.01s + 1} \right) \cdot \left(\frac{0.56}{s^2 + 0.18s} \right) \quad (3.36)$$

Expandindo o denominador e simplificando o numerador, obtém-se a função de transferência global da planta:

$$G_p(s) = \frac{1.12}{0.01s^3 + 1.0018s^2 + 0.18s} \quad (3.37)$$

Para fins de simplificação analítica, arredonda-se o coeficiente de segunda ordem para a unidade, resultando em:

$$G_p(s) \approx \frac{1.12}{0.01s^3 + s^2 + 0.18s} \quad (3.38)$$

3.4.2.3 Determinação do Ganho e Período Críticos

Considerando um controlador puramente proporcional ($F(s) = K_{cr}$), a equação característica do sistema em malha fechada é dada por $1 + K_{cr}G_p(s) = 0$, resultando no polinômio:

$$0.01s^3 + s^2 + 0.18s + 1.12K_{cr} = 0 \quad (3.39)$$

Para encontrar o ponto de oscilação sustentada, aplica-se a substituição da variável de Laplace s pela frequência complexa $j\omega_{cr}$, onde ω_{cr} representa a frequência crítica de oscilação. Substituindo $s = j\omega_{cr}$ na Equação 3.39:

$$0.01(j\omega_{cr})^3 + (j\omega_{cr})^2 + 0.18(j\omega_{cr}) + 1.12K_{cr} = 0 \quad (3.40)$$

Sabendo que $j^2 = -1$ e $j^3 = -j$, a expressão pode ser reorganizada separando-se as partes real e imaginária:

$$\underbrace{(-\omega_{cr}^2 + 1.12K_{cr})}_{\text{Parte Real}} + j \underbrace{(-0.01\omega_{cr}^3 + 0.18\omega_{cr})}_{\text{Parte Imaginária}} = 0 \quad (3.41)$$

Para que a equação seja satisfeita, ambas as partes devem ser nulas simultaneamente. Analisando a parte imaginária para $\omega_{cr} \neq 0$:

$$\begin{aligned} -0.01\omega_{cr}^3 + 0.18\omega_{cr} &= 0 \\ \omega_{cr}(-0.01\omega_{cr}^2 + 0.18) &= 0 \\ \omega_{cr}^2 &= \frac{0.18}{0.01} = 18 \\ \omega_{cr} &= \sqrt{18} \approx 4.2426 \text{ rad/s} \end{aligned} \quad (3.42)$$

O período crítico de oscilação (P_{cr}) é calculado a partir da frequência angular:

$$P_{cr} = \frac{2\pi}{\omega_{cr}} = \frac{2\pi}{4.2426} \approx 1.481 \text{ s} \quad (3.43)$$

Substituindo o valor de ω_{cr}^2 na parte real da equação, determina-se o ganho crítico:

$$\begin{aligned} -18 + 1.12K_{cr} &= 0 \\ K_{cr} &= \frac{18}{1.12} \approx 16.071 \end{aligned} \quad (3.44)$$

3.4.2.4 Cálculo dos Ganhos do Controlador PID

Com base nos valores de $K_{cr} = 16.071$ e $P_{cr} = 1.481$ s, utilizam-se as regras de sintonia clássica de Ziegler-Nichols para um controlador PID. Os parâmetros calculados são apresentados na Tabela 3.

Tabela 3 – Ganhos do controlador PID calculados via Ziegler-Nichols.

Parâmetro	Equação Base	Cálculo	Resultado
Ganho Proporcional (K_p)	$0.6K_{cr}$	0.6×16.071	9.64
Tempo Integral (T_i)	$0.5P_{cr}$	0.5×1.481	0.74 s
Tempo Derivativo (T_d)	$0.125P_{cr}$	0.125×1.481	0.185 s

Para implementação em algoritmos de controle na forma paralela padrão ($u(t) = K_p e(t) + K_i \int e(t)dt + K_d \frac{de(t)}{dt}$), os ganhos integrais (K_i) e derivativos (K_d) são derivados conforme segue:

$$K_i = \frac{K_p}{T_i} = \frac{9.64}{0.74} \approx 13.03 \quad (3.45)$$

$$K_d = K_p \cdot T_d = 9.64 \cdot 0.185 \approx 1.78 \quad (3.46)$$

Conclui-se que o controlador sintonizado deve iniciar a operação com $K_p = 9.64$, $K_i = 13.03$ e $K_d = 1.78$, sujeitos a ajustes finos experimentais para mitigar o *overshoot* característico do método de Ziegler-Nichols.

3.4.2.5 Afinação de PID

A primeira abordagem para a tentativa de encontrar os ganhos K_p , K_i , K_d , do sistema foi a abordagem analítica desenvolvendo as equações presentes no diagrama de bloco da Figura 23, dessa maneira os ganhos obtidos podem ser observados na Tabela 4.

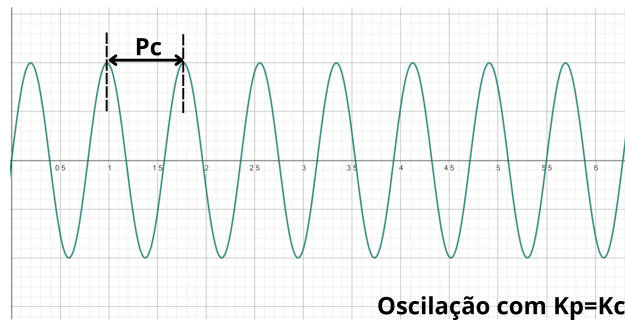
Tabela 4 – Ganhos teóricos

K_p	K_i	K_d
9.64	0.12	2

Fonte: Elaborado pelo autor.

Entretanto, a aplicação dos referidos ganhos não resultou na estabilização do sistema. Presume-se que tal divergência decorra de inconsistências não mapeadas entre o modelo teórico e a planta física. Portanto, outra técnica de estabilização necessitou ser utilizada, para isso usou-se a técnica de Ziegler & Nichols em sua tabela heurística para um modelo marginalmente estável como pode ser visualizado na Figura 37.

Figura 37 – Método de Ziegler & Nichols para sistema marginalmente estável



Fonte: Elaborado pelo autor.

Ao analisar a tabela de sintonia apresentada na Figura 37, deve-se observar que as expressões para os termos integral ($K_I = 2/P_c$) e derivativo ($K_D = 0.125P_c$) referem-se

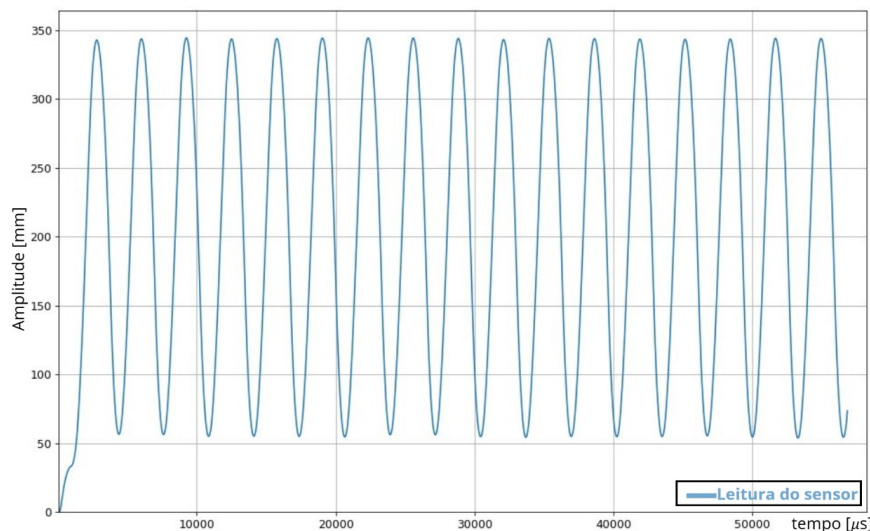
Tabela 5 – Tabela de Ziegler & Nichols

	K_p	K_i	K_d
P	$0,5K_C$	0	0
PI	$0,45K_C$	$\frac{1,2}{P_C}$	0
PID	$0,6K_C$	$\frac{1,2}{P_C}$	4

Fonte: Elaborado pelo autor.

à estrutura *PID Ideal (Standard)*, correspondendo, na verdade, à taxa integral ($1/T_i$) e ao tempo derivativo (T_d). Visto que o controlador projetado neste trabalho opera com a estrutura *Paralela* (ganhos independentes), os valores finais calculados para K_i e K_d incorporaram a multiplicação pelo ganho proporcional K_p , assegurando a equivalência dinâmica necessária entre a referência teórica e a implementação prática.

Por conseguinte, foram testados vários K_P enquanto os outros ganhos estavam zerados em busca de encontrar um valor de k que transformava o sistema em marginalmente estável, também conhecido como ganho crítico. Dessa forma, o ganho críticos encontrado foi de 1.47 e o comportamento gráfico pode ser observado na Figura 38.

Figura 38 – Sistema marginalmente estável com $K = 1.47$ 

Fonte: Elaborado pelo autor.

Analisando o gráfico da Figura 38 e esboçando retas tem-se que o período crítico é, aproximadamente, 3.5s. Logo, os valores dos ganhos encontrados a partir do método da Figura 37 pode ser visualizado na Tabela 6.

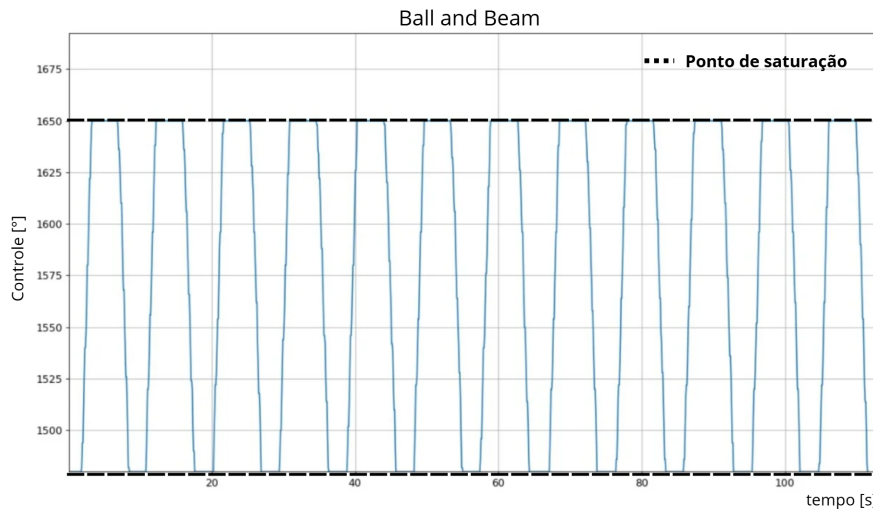
Convém salientar que, durante os ensaios para determinação da estabilidade marginal, a esfera não atingiu as extremidades da barra, condição que invalidaria a dinâmica modelada do sistema. Não obstante, observou-se a saturação do sinal de controle no atuador, conforme ilustrado na Figura 39.

Tabela 6 – Ganhos por Ziegler Nichols

K_p	K_i	K_d
0.88	0.57	0.44

Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 39 – Saturação do sinal de controle



Fonte: Elaborado pelo autor.

Tal comportamento decorre das não linearidades inerentes aos sistemas reais, fator que introduz imprecisões nos ensaios experimentais, cujos detalhes e resultados são discutidos na Seção 4. Ademais, os ganhos apresentados na Tabela 6 não foram suficientes para garantir a estabilidade do sistema. Contudo, serviram como estimativa inicial válida para o processo de sintonia. Após iterações de ajuste fino, observou-se que um incremento de aproximadamente 40% no ganho derivativo resultou em uma estabilidade satisfatória, conforme demonstrado na seção subsequente, além disso a Tabela 7 abaixo apresenta os ganhos utilizados para os dados obtidos posteriormente.

Tabela 7 – Ganhos ajustados por tentativa e erro

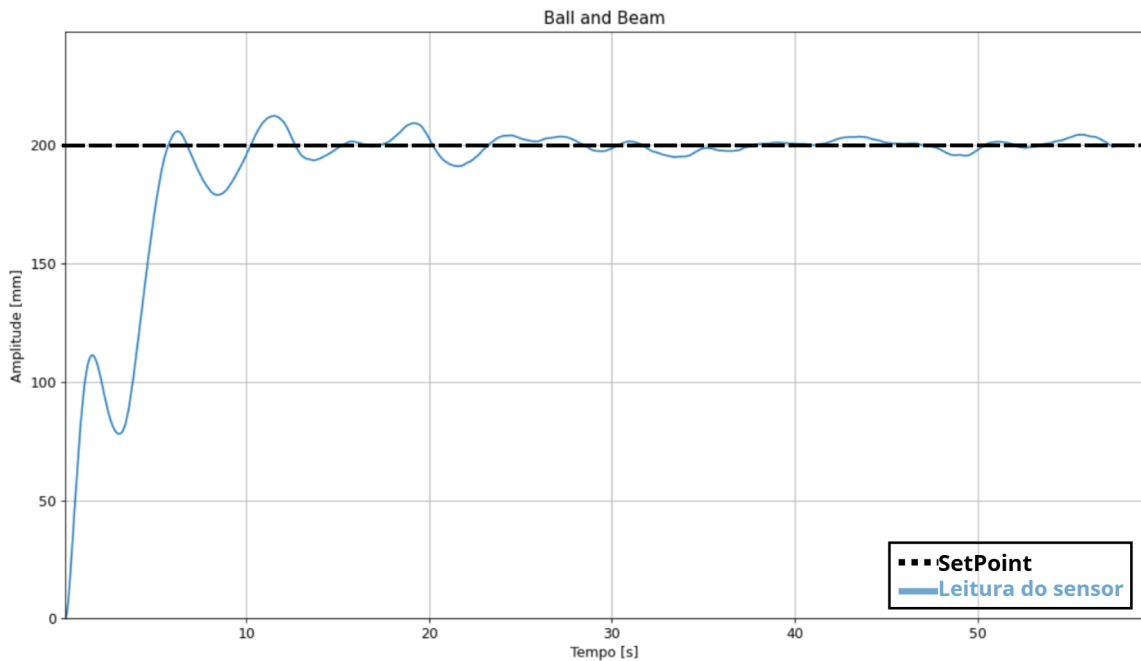
K_p	K_i	K_d
0.9	0.57	0.61

Fonte: Elaborado pelo autor.

4 RESULTADOS E DISCUSSÕES

Após a modelagem matemática do sistema Ball and Beam e o projeto do controlador digital discretizado, este capítulo apresenta os resultados obtidos por meio de ensaios experimentais. O objetivo principal é avaliar a eficácia da estratégia de controle proposta frente à dinâmica instável e não-linear da planta. Neste cenário, adotou-se um sinal de referência constante de 200 mm. A resposta do sistema para essa condição de teste encontra-se ilustrada na Figura 40.

Figura 40 – Posição por tempo- *SetPoint* fixo 200mm



Fonte: Elaborado pelo autor.

Pela análise gráfica, destacam-se os seguintes parâmetros de desempenho:

- **Tempo de Subida (t_r):** O sistema cruza o valor de referência pela primeira vez em aproximadamente $t \approx 7,0$ segundos. Note-se uma não-linearidade inicial (entre 0 e 5 segundos), onde a esfera oscila antes de iniciar a trajetória ascendente contínua, comportamento atribuído à inércia inicial e possíveis folgas mecânicas no acoplamento do servo motor.
- **Sobressinal Máximo (M_p):** O primeiro pico de amplitude ocorre em $t \approx 11,5$ segundos, atingindo uma posição aproximada de 212 mm. O sobressinal percentual é calculado em torno de 6%. Este valor é consideravelmente baixo para o padrão do método de Ziegler-Nichols (que tipicamente resulta em até 25%), indi-

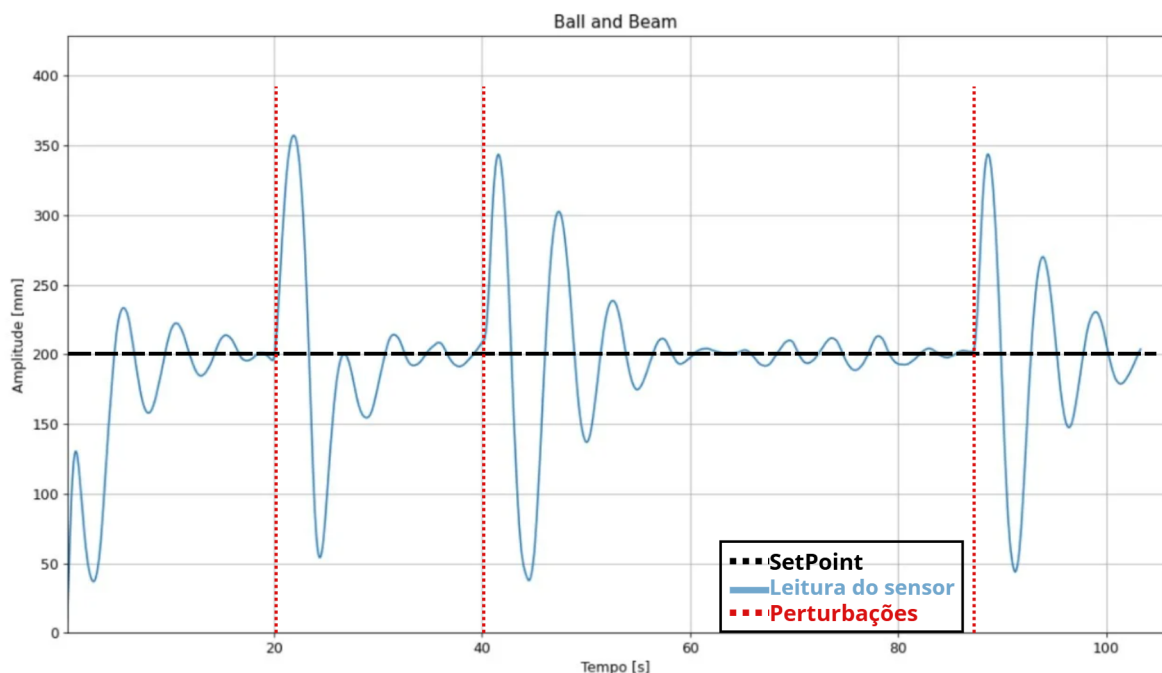
cando que as características dissipativas (atrito) do sistema físico real auxiliaram no amortecimento.

- **Tempo de Acomodação (t_s):** O sistema demonstra dificuldade em estabilizar completamente devido à ação integral. Observa-se uma oscilação de baixa frequência em torno do *SetPoint* que persiste ao longo do tempo de ensaio.
- **Regime Permanente:** Após $t = 30$ segundos, a resposta entra em um comportamento de ciclo limite, oscilando com pequena amplitude em torno de 200 mm . Este fenômeno é típico em sistemas mecânicos com zona morta (*dead zone*) e foi causada, provavelmente, devido a falta de maior sensibilidade angular do atuador.

Em suma, o controlador foi capaz de levar a planta ao ponto de operação desejado e mantê-la estável, com um erro de rastreamento aceitável considerando as limitações mecânicas e não-linearidades inerentes à plataforma didática.

Por conseguinte, aplicaram-se perturbações no sistema, sendo um impulso que deslocava a esfera da sua posição de equilíbrio nos instantes 20, 40 e 85 s. Os resultados obtidos estão ilustrados na Figura 41.

Figura 41 – Setpoint fixo em 200 mm com perturbação.



Fonte: Elaborado pelo autor.

A análise do gráfico permite as seguintes observações técnicas sobre o desempenho do controlador sintonizado:

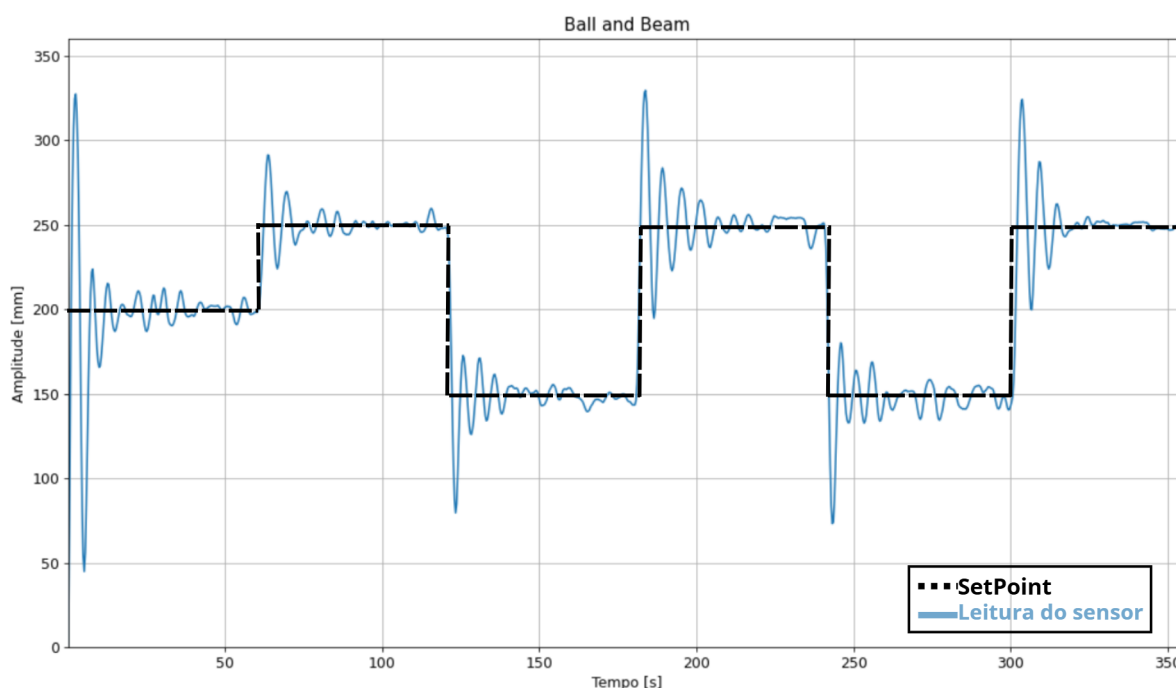
- **Magnitude da Perturbação:** O sistema foi submetido a desvios severos, com a amplitude chegando a ultrapassar 350 mm (no primeiro e terceiro eventos) e

descendo a menos de 50 mm (no segundo evento). Tais variações representam condições extremas de operação, muito além do ruído ou vibrações naturais da bancada.

- **Tempo de Recuperação:** Após a cessação da força externa, o controlador atua imediatamente para frear a inércia da esfera e trazê-la de volta. O tempo médio de recuperação (para retornar à faixa de erro de $\pm 5\%$) situa-se em torno de 10 a 15 segundos.
- **Amortecimento da Resposta:** Semelhante à resposta ao degrau, o retorno ao equilíbrio apresenta comportamento oscilatório subamortecido. Isso confirma a agressividade da sintonia Ziegler-Nichols, onde o termo proporcional elevado (K_p) reage vigorosamente ao erro gerado pela perturbação, causando o balanço da esfera em torno do alvo antes da estabilização completa.
- **Erro em Regime Permanente:** É notável que, após cada evento de perturbação e o subsequente período transitório, a posição média da esfera retorna precisamente à referência de 200 mm . Isso evidencia a eficácia da ação Integral (K_i) do controlador, que acumula o erro gerado durante o deslocamento forçado e ajusta a inclinação da viga para garantir erro nulo em estado estacionário.

Continuando os ensaios, aplicou-se uma entrada em onda quadrada com o intuito de avaliar o comportamento do sistema frente a mudanças bruscas de *setpoint*. O resultado desta leitura pode ser visualizado na Figura 43.

Figura 42 – *Setpoint* em onda quadrada.



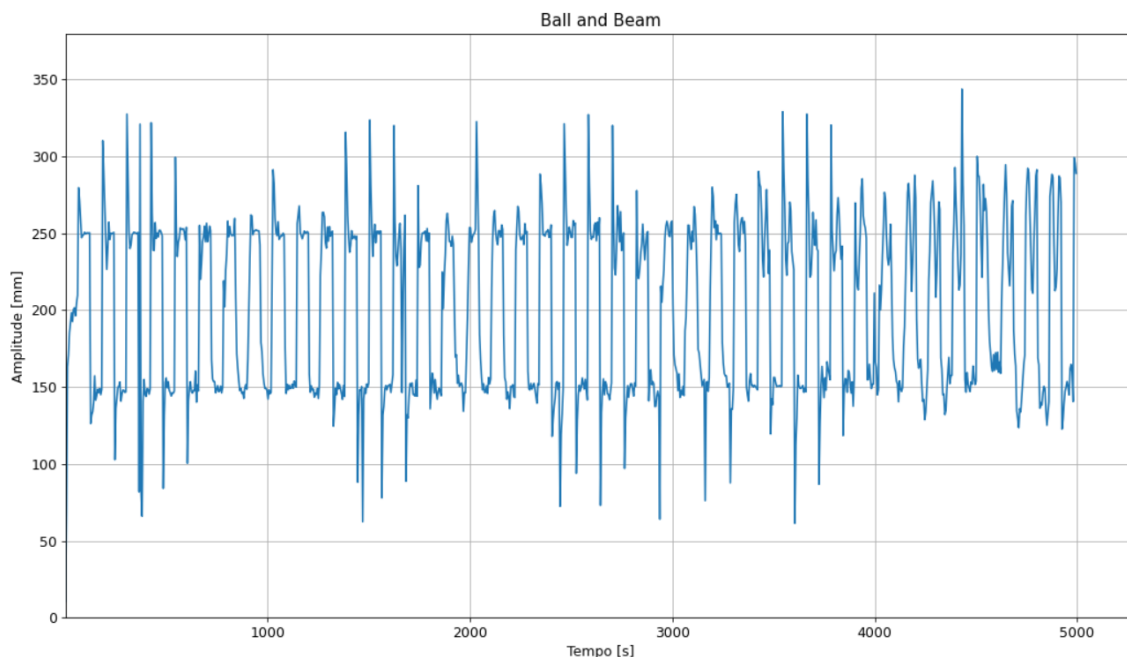
Fonte: Elaborado pelo autor.

A análise da resposta transitória neste cenário revela características importantes do projeto:

- **Sobressinal Elevado:** Corroborando os resultados anteriores, observa-se um sobressinal expressivo nas transições de maior amplitude. Por exemplo, na transição de 150 mm para 250 mm, a esfera atinge picos próximos a 330 mm. Embora a estabilidade seja mantida, este comportamento subamortecido sugere que, para aplicações que exijam movimentos mais suaves, seria necessário realizar um ajuste fino (*fine tuning*) reduzindo o ganho proporcional (K_p) ou aumentando a ação derivativa (K_d).
- **Erro Estacionário Nulo:** Independente do nível de referência (150, 200 ou 250 mm), o controlador é capaz de eliminar o erro de regime permanente após o período transitório, mantendo a esfera na posição desejada com as oscilações de ciclo limite típicas do atrito estático já discutidas anteriormente.

Para concluir a etapa de validação experimental, o sistema foi submetido a um ensaio de estresse de longa duração. Esse procedimento, com 5.000 segundos de operação contínua (aproximadamente 1 hora e 23 minutos), teve como finalidade avaliar a resiliência do algoritmo de controle diante de distúrbios acumulados, bem como identificar eventuais falhas mecânicas, tais como aquecimento de atuadores, fadiga estrutural de componentes ou a ocorrência de zonas mortas que tendem a se manifestar apenas em regimes prolongados de funcionamento.

Figura 43 – Ensaio de robustez de longa duração.



Fonte: Elaborado pelo autor.

A análise estatística e visual dos dados coletados ao longo dos 5.000 segundos permite as seguintes conclusões acerca da robustez do projeto:

- **Estabilidade Térmica e Ausência de Deriva (*Drift*):** Uma preocupação comum em sistemas acionados por servomotores de baixo custo é a alteração dos parâmetros internos (resistência da bobina e viscosidade da graxa) devido ao aquecimento por efeito Joule em operação contínua. Observa-se no gráfico que o valor médio da posição da esfera se mantém constante em torno do *Setpoint* do início ao fim do ensaio ($t = 0$ a $t = 5000s$). A ausência de uma inclinação ou deslocamento da média indica que o termo Integral (K_i) foi capaz de compensar dinamicamente quaisquer variações paramétricas lentas do sistema.
- **Consistência da Zona Morta:** A amplitude do ciclo limite (as pequenas oscilações em torno do alvo) permaneceu uniforme durante todo o experimento. Caso houvesse desgaste prematuro das engrenagens ou fadiga no acoplamento da viga, esperar-se-ia um aumento progressivo na amplitude dessas oscilações (aumento da folga mecânica). A constância na variância do erro confirma a integridade estrutural do protótipo sob regime de uso intenso.
- **Confiabilidade do Algoritmo:** Não foram registrados eventos de instabilidade repentina, travamentos de software ou saturação irreversível do sinal de controle. O sistema demonstrou capacidade de operar em *steady-state* por período indeterminado, validando o controlador PID para aplicações que exijam funcionamento contínuo.

5 CONCLUSÕES

O estudo apresentado resultou na concepção completa de uma plataforma *Ball and Beam*, desde a fundamentação teórica até a montagem física. A metodologia adotada permitiu que o modelo matemático servisse como guia para o entendimento da dinâmica não linear do sistema e para a sintonia inicial dos parâmetros do controlador.

A implementação prática evidenciou a complexidade inerente aos sistemas reais, exigindo a solução de problemas de ruído de sensoriamento e zonas mortas de atuação. A superação desses obstáculos através de ajustes de *hardware* e *software* resultou em um sistema capaz de realizar o controle de posição da esfera com estabilidade.

Conclui-se, portanto, que a bancada desenvolvida cumpre plenamente seu papel acadêmico. Ela serve como um instrumento robusto para corroborar o aprendizado prático nas disciplinas de controle, permitindo que estudantes confrontem a teoria com a realidade física e desenvolvam uma compreensão mais profunda sobre o comportamento de sistemas dinâmicos instáveis.

5.1 SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS

Embora os objetivos deste estudo tenham sido alcançados com êxito, o desenvolvimento da plataforma *Ball and Beam* abre diversas oportunidades para aprofundamento acadêmico e aprimoramento técnico. Com base nas experiências adquiridas durante a execução deste projeto, propõem-se as seguintes diretrizes para investigações futuras:

Primeiramente, recomenda-se a implementação de estratégias de controle avançadas, transcendendo o controlador PID clássico. A aplicação de técnicas baseadas em modelos modernos, como a realimentação de estados via Alocação de Polos, o Regulador Quadrático Linear (RLQ) ou o Controle Robusto, permitiria explorar melhor a dinâmica não linear do sistema e avaliar o desempenho sob diferentes critérios de otimização.

No âmbito dos atuadores, sugere-se a substituição do servomotor por um mecanismo em malha aberta, como um motor de passo associado a um *encoder* externo. Diferentemente do servomotor, que possui um controlador de posição interno e lacrado, essa configuração arquitetural ofereceria ao projetista acesso irrestrito à dinâmica do atuador. Isso ampliaria a margem para a criação de leis de controle desde o nível mais baixo, permitindo o estudo de compensadores de atrito e dinâmicas de aceleração.

Adicionalmente, visando elevar a fidelidade experimental, propõe-se a atualização do hardware por componentes de maior precisão. A utilização de sensores com menor ruído de medição e atuadores industriais com zona morta (*dead band*) reduzida contri-

buiria significativamente para a estabilidade do sistema em torno do ponto de equilíbrio, minimizando oscilações espúrias.

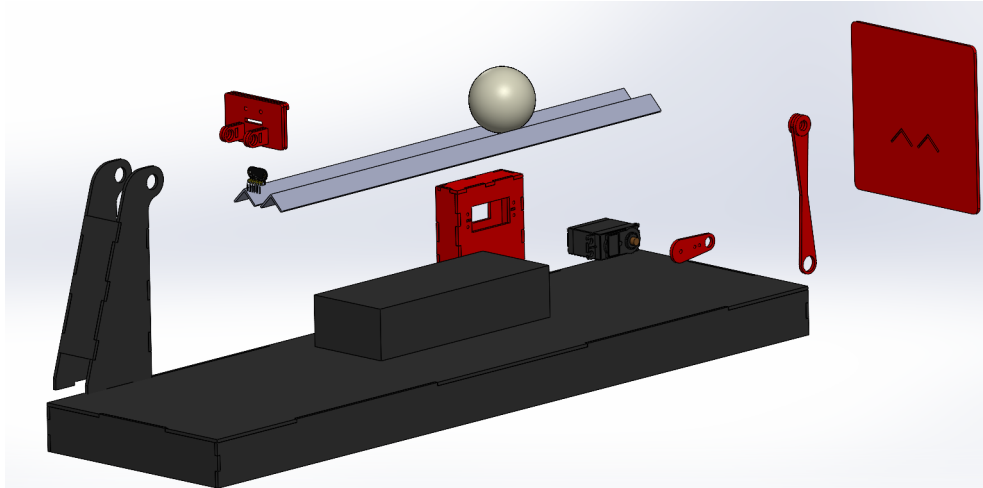
Por fim, indica-se o refinamento do modelo matemático através de métodos de Identificação de Sistemas. Recomenda-se especificamente a abordagem *Grey-Box* (Caixa Cinza), que combina o conhecimento prévio da estrutura física (equações de movimento) com o ajuste numérico de parâmetros baseado em dados experimentais de entrada e saída. Essa metodologia permitiria obter uma função de transferência mais fiel à realidade da bancada construída, incorporando não linearidades e perdas mecânicas difíceis de modelar analiticamente.

REFERÊNCIAS

- ARAÚJO, L. S. *Estudo do controle de um sistema Ball and Beam via RLQ e observador de estado*. Monografia (Trabalho de Conclusão de Curso) — Universidade Federal da Grande Dourados, Dourados, MS, 2023.
- ÅSTRÖM, K. J.; MURRAY, R. M. *Feedback Systems: An Introduction for Scientists and Engineers*. Princeton: Princeton University Press, 2008.
- Dassault Systèmes. *SolidWorks 2024: Software de CAD 3D*. Waltham, MA, EUA, 2024. Versão 2024 SP0.
- DORF, R. C.; BISHOP, R. H. *Sistemas de Controle Modernos*. 12. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2013.
- FRANKLIN, G. F.; POWELL, J. D.; EMAMI-NAEINI, A. *Sistemas de Controle para Engenharia*. 7. ed. São Paulo: Pearson, 2016.
- OGATA, K. *Engenharia de Controle Moderno*. 5. ed. São Paulo: Prentice Hall, 2010.
- Quanser Inc. *Ball and Beam Courseware: Laboratory Guide (LabVIEW)*. Markham, Ontario, Canada, 2009. Material didático e manual de experimentos.
- REAL, R. F. C. Trabalho de Conclusão de Curso, *Ball and Beam: Projeto, Construção e Controle de um Protótipo de Bancada Didática*. Tucuruí, PA: [s.n.], 2021. Campus Universitário de Tucuruí.
- STEPHANOPOULOS, G. *Controle de Processos Químicos: Introdução à Teoria e à Prática*. Rio de Janeiro: LTC, 1984.
- STMicroelectronics. *VL53L1X Datasheet - Ultra-lite distance sensor*. [S.l.], 2018. Documento DS12791 - Rev 6.
- WATT, J. *Centrifugal Governor and Throttle-Valve (Figure 4)*. 1788.
- YONEYAMA, T. *Engenharia de Controle: Teoria e Prática*. 2. ed. São Paulo: Edgard Blücher, 2017.
- ZIEGLER, J. G.; NICHOLS, N. B. Optimum settings for automatic controllers. *Transactions of the ASME*, v. 64, n. 11, p. 759–768, 1942.

APÊNDICE A - Imagens da modelagem e sua concepção

Figura 44 – Vista explodida.



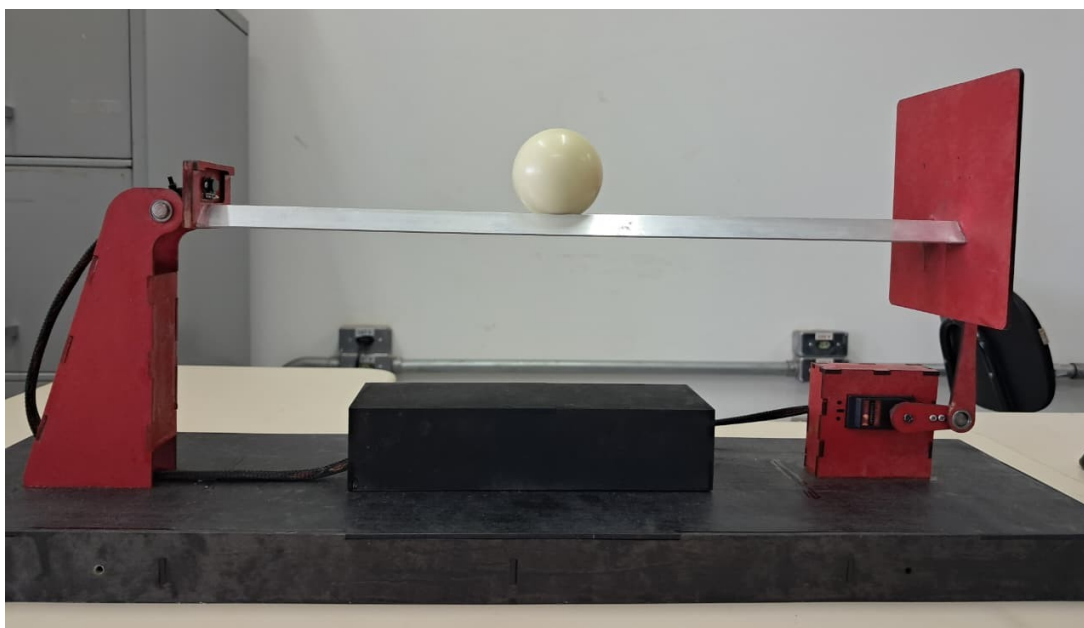
Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 45 – Construção.

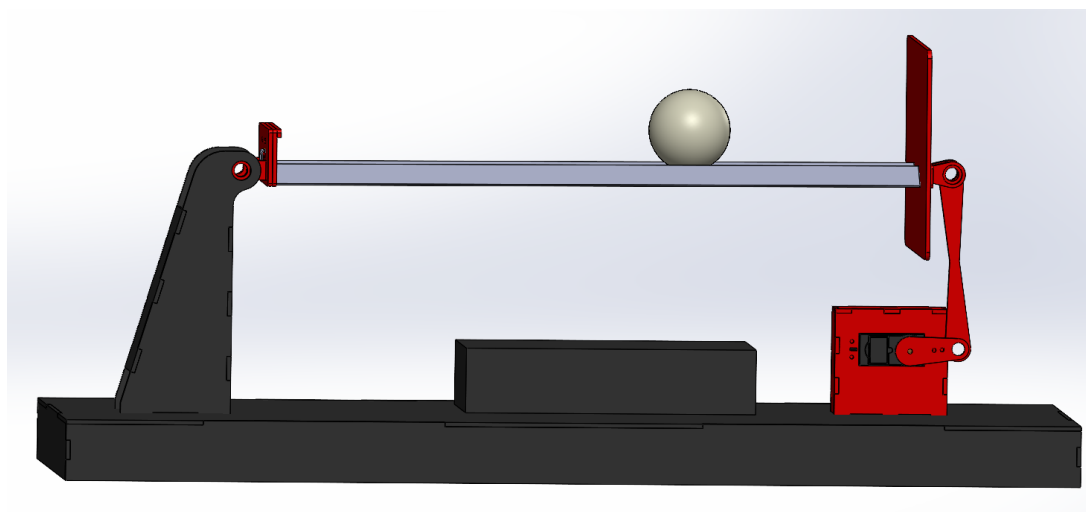


Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 46 – Modelo físico e esquemático.



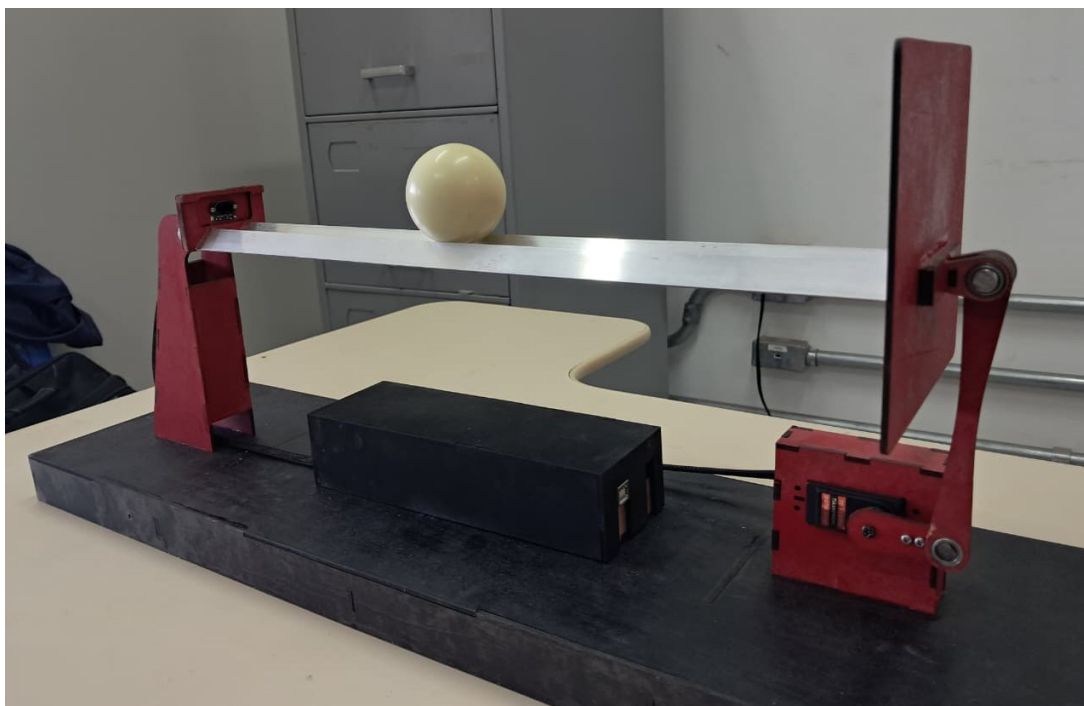
(a) Modelo construído.



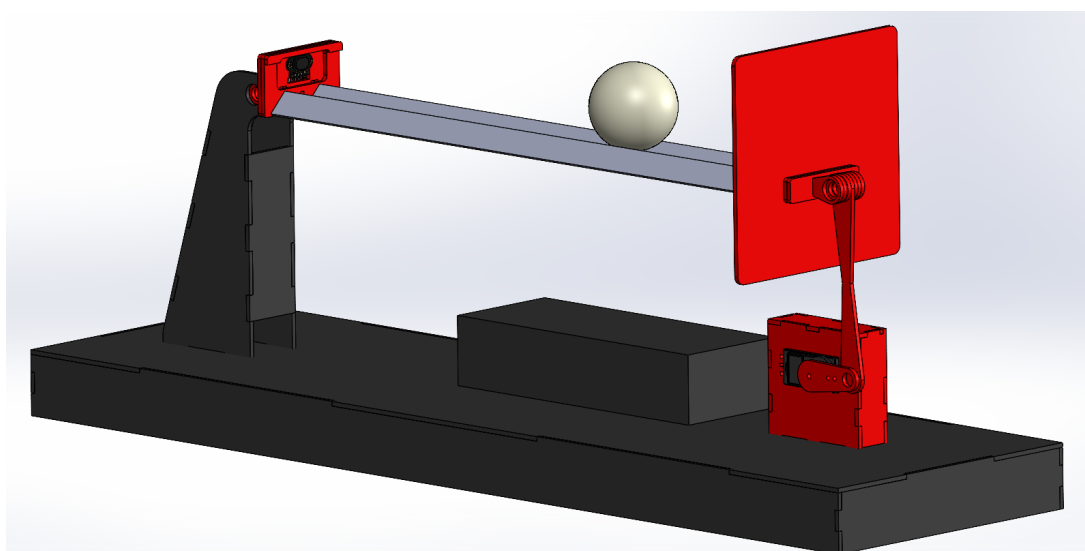
(b) Modelo em CAD.

Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 47 – Modelo físico e esquemático(2).



(a) Modelo construído (visão 2).



(b) Modelo em CAD(visão 2).

Fonte: Elaborado pelo autor.

APÊNDICE AA - Algoritmo desenvolvido

O código a seguir apresenta a implementação do sistema de controle na plataforma Arduino, incluindo a configuração do sensor VL53L1X com Região de Interesse (ROI), o algoritmo PID e o filtro digital para visualização dos dados.

```

1 #include <Wire.h>
2 #include <VL53L1X.h>
3 #include <PID_v1.h>
4 #include <Servo.h>
5
6 // --- Parametros do PID ---
7 // Sintonia obtida experimentalmente para estabilidade do sistema
8 float Kp = 0.9;
9 float Ki = 0.4;
10 float Kd = 0.8;
11
12 // Variaveis globais de controle
13 double original; // Leitura bruta do sensor
14 double Setpoint = 220; // Posicao alvo (centro da barra em mm)
15 double Input; // Entrada do PID
16 double Output; // Saida do PID (0 a 255)
17
18 // Inicializacao do objeto PID
19 // Parametros: Entrada, Saida, Setpoint, Kp, Ki, Kd, Direcao
20 PID Controlador(&Input, &Output, &Setpoint, Kp, Ki, Kd, 1, DIRECT);
21
22 // --- Configuracoes do Servo Motor ---
23 // Limites angulares para seguranca mecanica da haste
24 double angleMin = 130; // Angulo maximo de inclinacao
25 double angleMax = 80; // Angulo minimo de inclinacao
26 double angle = 100; // Angulo inicial (posicao neutra aproximada)
27 double lastAngle = -1; // Armazena o ultimo angulo para evitar escritas
    redundantes
28
29 // Objetos do Hardware
30 VL53L1X sensor;
31 Servo servo;
32
33 unsigned long lastUpdate = 0; // Timer para loop de controle
34
35 // --- Funcoes Auxiliares de Filtragem ---
36 // Desloca vetor para o filtro digital (buffer circular simples)
37 void deslocaVetor (float *vetorAddr, int tam, float valor)
38 {

```

```
39  for(int k = tam - 1; k > 0; k--)
40  {
41      *(vetorAddr + k) = *(vetorAddr + k - 1);
42  }
43  *vetorAddr = valor;
44  }
45
46  // Filtro Passa-Baixa (Implementacao de Equacao de Diferencas)
47  // Utilizado para suavizar a visualizacao dos dados na serial
48  float filtroPB(float x)
49  {
50      static float y_pass[2] = {0, 0}, x_pass[2] = {0, 0};
51      // Coeficientes do filtro discretizado
52      const float a = 0.9, b = 0.9;
53      float y = (a + b) * y_pass[0] - a * b * y_pass[1] + (1 - a - b + a * b
54          ) * x_pass[1];
55
56      deslocaVetor(y_pass, 2, y);
57      deslocaVetor(x_pass, 2, x);
58
59      return y;
60  }
61
62  void setup()
63  {
64      Serial.begin(115200);
65      Wire.begin();
66      Wire.setClock(400000); // I2C em modo Fast (400kHz)
67
68      // --- Inicializacao do Sensor VL53L1X ---
69      sensor.setTimeout(500);
70      if (!sensor.init())
71      {
72          Serial.println("Falha ao detectar o sensor!");
73          while (1);
74      }
75
76      // Configuracao para curto alcance (maior precisao e imunidade a luz
77      // ambiente)
78      sensor.setDistanceMode(VL53L1X::Short);
79      sensor.setMeasurementTimingBudget(20000); // 20ms de tempo de
80      // aquisicao
81      sensor.startContinuous(10); // Inicia leituras continuas
82
83      // --- Configuracao da Regiao de Interesse (ROI) ---
84      // Restringe o cone de leitura para evitar deteccoes fora da barra
85      // SPADs: 4x10 (Matriz estreita para focar na esfera)
```

```
83  sensor.setROISize(4,10);
84  sensor.setROICenter(199); // Centro optico calibrado
85
86  // --- Inicializacao do Servo e PID ---
87  servo.attach(2); // Pino de sinal do servo
88  Controlador.SetMode(AUTOMATIC);
89 }
90
91 void loop()
92 {
93     // 1. Leitura do Sensor
94     original = sensor.read();
95
96     if (sensor.timeoutOccurred()) {
97         Serial.println("TIMEOUT");
98     }
99
100    // 2. Calculo do Controle PID
101    Input = original; // Alimenta o PID com a leitura bruta (menor atraso
    de fase)
102    Controlador.Compute();
103
104    // 3. Atuacao
105    // Mapeia a saida do PID (0-255) para os angulos fisicos do servo
106    angle = map(Output, 0, 255, angleMin, angleMax);
107
108    unsigned long now = millis();
109
110    // Loop de atuacao com frequencia de 50Hz (20ms)
111    if (now - lastUpdate > 20) {
112        lastUpdate = now;
113
114        // Evita enviar comando se o angulo nao mudou (reduz jitter do servo
        )
115        if (angle != lastAngle) {
116            servo.write(angle);
117            lastAngle = angle;
118        }
119
120        float t = millis();
121
122        // 4. Telemetria (Serial Plotter)
123        // Formato: <Angulo, Marcador, Tempo, ValorFiltrado>
124        Serial.print(angle);
125        Serial.print(",");
126        Serial.print("<1"); // Marcador de referencia visual
127        Serial.print(",");
```

```
128     Serial.print(t);
129     Serial.print(",");
130     // Envia o dado filtrado apenas para visualizacao (grafico mais
limpo)
131     Serial.print(filtroPB(original));
132     Serial.println(">");
133 }
134 }
```

Listing 5.1 – Código fonte do firmware de controle do Ball and Beam