

UNIVERSIDADE FEDERAL DA GRANDE DOURADOS – UFGD
FACULDADE DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLOGIAS – FACET

MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA

**INTERPRETAÇÃO GEOMÉTRICA DO DETERMINANTE
2x2 E DE SUAS PROPRIEDADES COM APLICAÇÕES
NA GEOMETRIA ANALÍTICA**

DOURADOS - MS

Abril de 2013

UNIVERSIDADE FEDERAL DA GRANDE DOURADOS – UFGD
FACULDADE DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLOGIAS – FACET

Fernando Boze dos Santos

MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA

**INTERPRETAÇÃO GEOMÉTRICA DO DETERMINANTE
2x2 E DE SUAS PROPRIEDADES COM APLICAÇÕES
NA GEOMETRIA ANALÍTICA**

Dissertação de mestrado apresentada como requisito para a conclusão do Mestrado Profissional em Matemática – PROFMAT, sob a orientação do professor Dr. Sergio Rodrigues.

DOURADOS - MS

Abril de 2013

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca Central - UFGD

516.3 Boze, Fernando.
B793i Interpretação geométrica do determinante 2×2 e de suas propriedades com aplicações na geometria analítica / Fernando Boze dos Santos. – Dourados, MS : UFGD, 2013.
72 f.

Orientadora: Prof. Dr. Sérgio Rodrigues.
Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) – Universidade Federal da Grande Dourados.

1. Geometria analítica – Ensino. 2. Matemática (Segundo Grau). I. Título.



MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
FUNDAÇÃO UNIVERSIDADE FEDERAL DA GRANDE DOURADOS
FACULDADE DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLOGIA
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE
NACIONAL - PROFMAT

Termo de Aprovação

Após a apresentação, arguição e apreciação pela banca examinadora foi emitido o parecer **APROVADO**, para a dissertação intitulada: "**Interpretação Geométrica do Determinante 2×2 e de suas Propriedades com Aplicações na Geometria Analítica**", de autoria de Fernando Boze dos Santos, apresentada ao Programa de Mestrado em Matemática da Universidade Federal da Grande Dourados.

Prof. Dr. Sérgio Rodrigues (Orientador-UFGD)
Presidente da Banca Examinadora

Prof. Dra. Marietela Missio
Membro Examinador (UEMS)

Prof. Dr. Rogério de Oliveira
Membro Examinador (UFGD)

Dourados/MS, 15 de abril de 2013

DEDICATÓRIA

*Com muito amor e carinho,
dedico a minha esposa Leticia
e meus filhos Nicolás e
Ana Livia.*

AGRADECIMENTOS

Primeiramente agradeço a Deus pela oportunidade que tive de iniciar o mestrado e também por ter abençoado toda a caminhada.

Agradeço a minha família por estar sempre ao meu lado, compreendendo os momentos de minha ausência e me dando força nos momentos mais difíceis.

Agradeço aos meus Professores neste mestrado: Sérgio Rodrigues, Lino Sanábria, Rogério de Oliveira, Adriano Cavalcante Bezerra, Irene Magalhães Craveiro, Robert Jesús Rodríguez Reyes, por compartilharem seus conhecimentos e me possibilitar meu crescimento pessoal e profissional.

Agradeço ao meu orientador pelo tempo disponibilizado, pela orientação e contribuições feitas neste trabalho.

Agradeço aos meus colegas de mestrado, pelo incentivo, com os quais trocamos conhecimentos e experiências.

Agradeço a todos que direta ou indiretamente colaboraram para a concretização deste trabalho.

RESUMO

O presente trabalho apresenta uma forma para se calcular a área de triângulos quando são conhecidas as coordenadas de três de seus vértices que é diferente das que aparecem nos textos do Ensino Médio. Dados os três pontos de um triângulo, associa-se a este um paralelogramo no plano cartesiano e uma matriz 2×2 cujo determinante, em valor absoluto, mede a área deste paralelogramo que é o dobro da área do triângulo. Deste modo, as propriedades algébricas dos determinantes de 2ª ordem que são ensinadas no Ensino Médio também podem ser interpretadas geometricamente enriquecendo de significado geométrico destas propriedades. Este trabalho também apresenta uma sequência destes tópicos organizados de maneira didática que poderá ser utilizada pelos professores no ensino de determinante e da geometria analítica no Ensino Médio.

Palavras-chave: Geometria Analítica, Determinantes, Áreas

ABSTRACT

This paper presents a way to calculate the area of triangles are known when the coordinates of three of its vertices that is different from what you see in high school texts. Given three points of a triangle, this is associated with a parallelogram in the coordinate plane and an 2×2 matrix whose determinant, in absolute value, measure the area of the parallelogram that is twice the area of the triangle. Thus, the properties of algebraic determinants 2nd order that are taught in high school can also be interpreted geometrically enriching the geometric meaning of these properties. This paper also presents a sequence of topics organized in a didactic manner which can be used by teachers in teaching and determinant of analytic geometry in high school.

Keywords: Analytic Geometry, Determinants, Areas

SUMÁRIO

CAPÍTULO 1	1
1.1 - Introdução.....	1
1.2 – Áreas, Determinantes e Geometria Analítica no Ensino Médio	2
1.3 – Justificativa	4
1.4 – Organização do plano de aula proposto	5
CAPÍTULO 2	8
2.1- A fórmula da área de um triângulo	8
2.2- Demonstração da fórmula para o cálculo da área do triângulo utilizando o determinante da matriz de 3ª ordem	10
2.3- Por que o determinante de segunda é uma medida de área?.....	13
1ª Proposta: Tomando-se um dos vértices na origem.....	13
2ª Proposta: Caso geral com translação dos eixos cartesianos	15
3ª Proposta: Utilizando a definição geométrica da área do triângulo $S = 1/2 \cdot base \cdot altura$	17
2.4 Uma interpretação geométrica do determinante e do seu sinal.....	19
2.4.1- O valor absoluto do determinante	19
2.4.2- O sinal do determinante	20
2.5- Interpretação geométrica das propriedades dos determinantes de matrizes 2x2	22
2.5.1- Multiplicação de uma fila por um número real k.....	22
2.5.2- Soma de múltiplos de linha paralela	25
2.5.3- Troca de posição entre duas linhas e a orientação	28
2.5.4- Transposição.....	29
CAPÍTULO 3	32
3.1 Introdução	32
3.2- Pré-requisitos	33
3.2.1- Plano Cartesiano e Coordenadas Cartesianas	33
3.2.2- Segmento de reta orientado e translação da origem das coordenadas.....	34
3.3- Área do paralelogramo	38
1º caso: Área o paralelogramo de lados paralelos aos eixos.	39
2º caso: Um dos lados paralelos aos eixos cartesianos	42
3º caso: Paralelogramo com vértice na origem e lados não paralelos aos eixos cartesianos	45

4º caso: Paralelogramo que nenhum de seus vértices esta sobre a origem.....	48
3.4- Área do triângulo	51
3.5- Propriedades dos determinantes utilizando a visão geométrica.....	54
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....	58

Lista de Figuras:

FIGURA 1	9
FIGURA 2	10
FIGURA 3	15
FIGURA 4	15
FIGURA 5	17
FIGURA 6	19
FIGURA 7	23
FIGURA 8	23
FIGURA 9	24
FIGURA 10	25
FIGURA 11	25
FIGURA 12	26
FIGURA 13	26
FIGURA 14	28
FIGURA 15	28
FIGURA 16	29
FIGURA 17	29
FIGURA 18	30
FIGURA 19	30
FIGURA 20	31

FIGURA 21	31
FIGURA 22	33
FIGURA 23	35
FIGURA 24	35
FIGURA 25	36
FIGURA 26	36
FIGURA 27	38
FIGURA 28	40
FIGURA 29	42
FIGURA 30	44
FIGURA 31	44
FIGURA 32	46
FIGURA 33	46
FIGURA 34	46
FIGURA 35	47
FIGURA 36	47
FIGURA 37	48
FIGURA 38	49
FIGURA 39	51
FIGURA 40	52
FIGURA 41	52

FIGURA 42	53
FIGURA 43	53
FIGURA 44	55
FIGURA 45	55
FIGURA 46	56
FIGURA 47	56
FIGURA 48	57
FIGURA 49	57
FIGURA 50	57
FIGURA 51	57

CAPÍTULO 1

1.1 - Introdução

O autor deste trabalho tem ensinado no terceiro ano do Ensino Médio desde 2000 o conteúdo de geometria analítica conforme os textos didáticos recomendados pelo Estado do Mato Grosso do Sul. Ao ensinar o conteúdo sobre retas na geometria analítica os textos utilizam a condição de alinhamento de três pontos através da fórmula da área de um triângulo, dada por um determinante 3×3 quando se conhece os três vértices, impondo a condição de que esta área seja nula. Neste ponto, o professor se dirige aos alunos e diz “*se o triângulo não tem área é porque os três vértices estão alinhados*”. Os textos didáticos apresentam a fórmula da área do triângulo, como se fosse um postulado, e apresentam alguns exemplos numéricos.

A fórmula do determinante 3×3 apresentada pelos livros didáticos é bem aceita pelos alunos, pois em geral, eles já viram o conceito de determinante. A fórmula é visualmente simples, mnemônica e os alunos a identificam e fazem cálculos com ela com facilidade.

1.2 – Áreas, Determinantes e Geometria Analítica no Ensino Médio

Ao fazer uma correlação entre o conceito de determinantes na álgebra com o conceito de áreas na geometria pode-se fazer também uma interpretação geométrica das propriedades dos determinantes através da invariância da área do paralelogramo por certas transformações geométricas. Esta interpretação enriquece e atribui significado mais amplo para estes dois conteúdos do Ensino Médio.

Nos livros do Ensino Médio que são os recomendados pelo Ministério da Educação e Cultura – MEC e pela Secretária Estadual de Educação de Mato Grosso do Sul – SED/MS, não são apresentadas situações que associam esses três tópicos, vistos que eles são propostos em anos diferentes do Ensino Médio, de acordo com o Referencial Curricular do Ensino Médio de Mato Grosso do Sul. Nestes textos também não são apresentadas relações entre área e volume associado aos determinantes das matrizes 2x2 e de 3x3.

Em geometria analítica, por exemplo, para o cálculo da área de um triângulo, conhecendo seus vértices, os textos apresentam simplesmente a fórmula:

$$S = \frac{1}{2} \cdot \left| \det \begin{bmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{bmatrix} \right| \quad (I)$$

Esta fórmula é apresentada como se fosse um postulado sem ao menos apresentar alguma argumentação para ela. Pode ser que essa falta de apresentação tenha a ver com a disposição que o conteúdo de geometria analítica é apresentado, pois uma das maneiras mais simples de efetuar a demonstração desta fórmula utiliza conceitos que são dados posteriormente para os alunos. Mesmo assim, esta fórmula não é justificada.

O livro Matemática Fundamental – 2º grau Volume Único, (GIOVANI, 1994), expressa somente que a área do triângulo é dada pela metade da

medida da base vezes a medida da altura, apresentando um triângulo no qual a base é paralela ao eixo das abscissas. O texto de Giovani (GIOVANI, 1994 e pg521) pelo menos justifica:

“devida à sua longa extensão, não apresentaremos o desenvolvimento genérico efetuado para obter a fórmula que permite calcular a área de um triângulo, limitando-nos a fornecer apenas o resultado.”

No livro Matemática: Ensino Médio (YOUSSEF, 2005), dado os vértices de um triângulo, então, para se calcular a área deste triângulo, é apresentada a fórmula citada seguida de um exemplo numérico. A condição de alinhamento de três pontos é apresentada da mesma maneira.

Apesar dos livros didáticos não fazerem uma apresentação satisfatória para a fórmula acima, como já dissemos anteriormente, esta é bem aceita pelos alunos, pois eles já estudaram anteriormente o conceito de determinantes e o cálculo de determinantes 2×2 e 3×3 é considerado por eles como um assunto e fácil.

1.3 – Justificativa

Vamos propor aqui outra forma de determinar a área da superfície de um triângulo, fazendo-se o uso de outra fórmula mais simples que (1). Também será proposto uma fórmula para calcular a área da superfície do paralelogramo, conhecendo-se as coordenadas de 3 de seus vértices no plano cartesiano.

O professor do Ensino Médio poderá também aplicar esta interpretação geométrica do determinante para ilustrar e justificar as propriedades dos determinantes de 2^a ordem para os alunos do 2^o ano independente destes já terem visto os conceitos de geometria analítica que, em geral, são estudados no 3^o ano.

1.4 – Organização do plano de aula proposto

O presente trabalho tem por objetivo apresentar uma proposta diferente das propostas usuais, para se ensinar a parte da geometria analítica do Ensino Médio que trata da determinação do valor da área de um triângulo no plano cartesiano, quando são conhecidas as coordenadas dos seus vértices. Os segmentos formados por estes pontos, juntamente com a origem das coordenadas, definem um paralelogramo de lados paralelos a estes segmentos, quando estes três pontos não estão alinhados. Com estes mesmos pontos dados pode-se definir uma matriz 2×2 na qual as linhas são dadas pelas coordenadas destes dois vértices.

Como aplicação destes conceitos apresentamos aqui também uma sequência didática como uma sugestão de uma forma de apresentar este assunto aos estudantes do Ensino Médio e convencê-los, utilizando-se argumentos geométricos, de que o valor absoluto de um determinante da matriz 2×2 é igual ao valor da área de um paralelogramo que se constrói no plano cartesiano com os dois pontos dados pelas linhas da matriz. A forma de adequar esta sequência vai depender do grau de conhecimento e motivação dos alunos de cada sala de aula.

Com esta interpretação geométrica do determinante pode-se definir a área de um triângulo, dado pela origem e dois outros pontos do plano cartesiano, como a metade da área do paralelogramo sem utilizar um determinante 3×3 . Neste trabalho utilizamos a interpretação geométrica do determinante 2×2 para fazer também uma elegante interpretação geométrica das propriedades dos determinantes. Esta é uma proposta diferente das que são apresentadas nos textos didáticos.

O leitor deve estar se perguntando: “ *E como se calcula então a área de um triângulo definido por três pontos dados?*” É claro que neste trabalho damos uma resposta a esta pergunta, mas convidamos o leitor a acompanhar a nossa exposição e opinar se a nossa proposta pode ser uma

alternativa para as propostas usuais dos textos didáticos e apontar-nos para as dificuldades e falhas deste caminho.

Descrevemos a seguir a organização deste trabalho.

O capítulo 2 é voltado para professor. Apresentamos neste capítulo os conceitos, exemplos e as demonstrações para as situações que serão apresentadas no capítulo 3. No capítulo 2 os assuntos são abordados sem se preocupar com os pré-requisitos. O professor pode escolher quais partes deste material do Capítulo 2 que será apresentado para os alunos do Ensino Médio.

A proposta de uma sequência didática está apresentada no Capítulo 3. Sugerimos primeiramente fazer uma rápida abordagem dos pré-requisitos na forma de exercícios com o objetivo de recordar conceitos que serão utilizados tais como: coordenadas cartesianas, determinantes, propriedade dos determinantes e, opcionalmente, segmentos orientados e translação dos eixos cartesianos (usualmente estes dois assuntos não fazem parte do programa do Ensino Médio). A abordagem que adotamos aqui não faz uso explícito de vetores pois este não é um tópico do currículo de matemática do Ensino Médio.

A seguir apresentamos a fórmula para o cálculo da área do paralelogramo, conhecendo seus vértices, utilizando o resultado do determinante de uma matriz de 2ª ordem, e para averiguar o resultado obtido, será utilizada as propriedades dos determinantes para a transformação do paralelogramo em um paralelogramo que possui pelo menos um de seus eixos paralelo aos eixos cartesianos.

Neste ponto já é possível chamar a atenção dos alunos para a interpretação geométrica das propriedades dos determinantes em alguns casos particulares e a seguir apresentamos a fórmula que permite o cálculo da área de um triângulo conhecendo seus vértices, que é ponto que motivou este projeto, utilizando-se o determinante de uma matriz de 2ª ordem.

Como já dissemos anteriormente, a sequência apresentada pode ser aplicada no Ensino Médio inclusive pode ser adaptada para estudantes que ainda não possuem conhecimento da geometria analítica, como no caso dos

programas que incluem o estudo dos determinantes no 2º ano e a geometria analítica no 3º ano. A sequência é de fácil entendimento e com apelo geométrico apresentando-se como uma alternativa para as sequências que são apresentadas nos livros didáticos.

Procurou-se fazer uma abordagem que apela para intuição geométrica em casos particulares com exemplos numéricos, facilitando o entendimento por parte dos alunos. Fica a critério do professor a escolha do momento e a forma mais adequada, em cada sala de aula, para apresentar as demonstrações .

CAPÍTULO 2

2.1- A fórmula da área de um triângulo

Dadas as coordenadas dos vértices de um triângulo ABC sendo $A = (x_A, y_A)$, $B = (x_B, y_B)$ e $C = (x_C, y_C)$, então a área deste triângulo é dada pela fórmula (1).

$$S = \frac{1}{2} \cdot \left| \det \begin{bmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{bmatrix} \right| \quad (1)$$

Uma demonstração deste fato com as ferramentas matemáticas do Ensino Médio demanda alguma habilidade algébrica por parte dos alunos e não é pertinente em muitas salas de aula, por razões de ordem prática.

No ensino da matemática na universidade o estudante pode justificar, com auxílio de vetores, que dada uma matriz 2×2 então o valor absoluto de seu determinante é igual a área do paralelogramo formado pelos vetores cujas coordenadas são dadas pelas linhas (ou colunas) da matriz. Analogamente, dada uma matriz 3×3 , o valor absoluto de seu determinante representa o volume do paralelepípedo formado pelos vetores cujas coordenadas são dadas pelas linhas (ou colunas) da matriz dada.

A interpretação geométrica para o produto misto, segundo (STEINBRUCH, 1987, pág 82) apresentada na figura (1):

“Geometricamente, o produto misto $\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w})$ é igual, em módulo, ao volume do paralelepípedo de arestas determinadas pelos vetores \vec{u} , \vec{v} e \vec{w} , ...”

Assim, o produto misto, que corresponde ao cálculo do determinante de ordem 3, corresponde em módulo ao volume do paralelepípedo e não ao dobro da área do triângulo.

A fórmula (I) apresentada nos livros didáticos atuais do Ensino Médio, por se tratar do determinante de uma matriz de ordem 3, o valor obtido deveria ser interpretado como o volume do paralelepípedo formado pelos vetores com coordenadas que são formadas pelas linhas (ou colunas) da matriz.

Neste caso, o volume do paralelepípedo gerado pelos três vetores linhas de (I) possuem as terceiras coordenadas iguais a 1, este volume coincide numericamente com o dobro da área do triângulo definido pelos pontos do plano cartesiano gerado pelas duas primeiras coordenadas dos 3 pontos dados. Estes fatos podem ser justificados facilmente com as propriedades dos vetores que não fazem parte do programa de matemática do Ensino Médio.

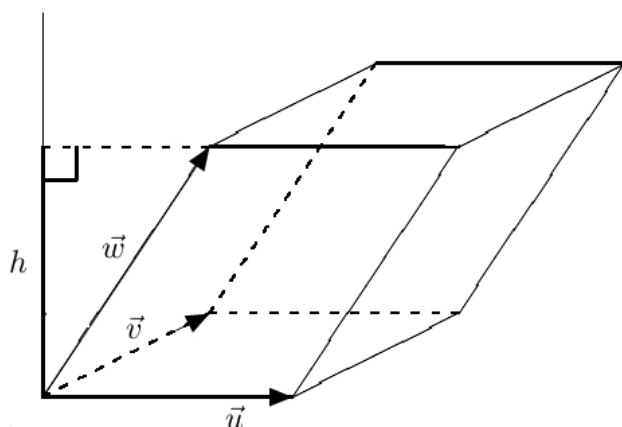


Figura 1

Estas informações não são apresentadas nos livros didáticos atuais, portanto o aluno não tem o conhecimento da associação dos determinantes a áreas e a volumes, somente aceitando a fórmula proposta como se fosse um postulado.

2.2- Demonstração da fórmula para o cálculo da área do triângulo utilizando o determinante da matriz de 3ª ordem

Apresentaremos uma das possíveis demonstrações para a fórmula (I) da área do triângulo, dadas as coordenadas de seus vértices. A proposta, é apresentada no livro Geometria Analítica (LEHMANN, 1989) que utiliza somente os conceitos da geometria analítica do Ensino Médio.

Teorema: Sejam $A = (x_1, y_1)$, $B = (x_2, y_2)$ e $C = (x_3, y_3)$ os vértices de um triângulo dado qualquer, então a área desse triângulo ABC é dada por:

$$S = \frac{1}{2} \cdot \left| \det \begin{bmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{bmatrix} \right|$$

Demonstração:

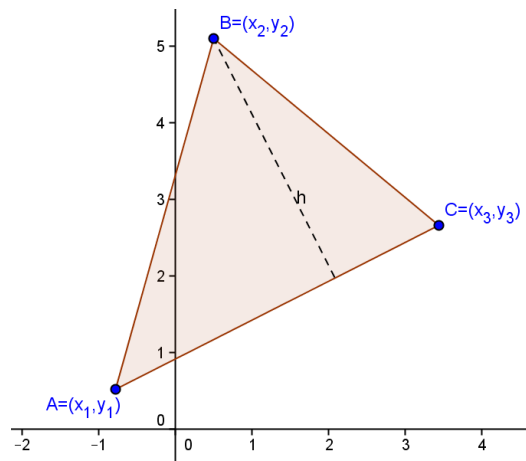


Figura 2

Defina h como sendo a altura do triângulo a distância do vértice B ao lado \overline{AC} , e por b o tamanho do segmento de reta \overline{AC} . Dessa forma a área do triângulo ABC pode ser expressa pela fórmula:

$$S = \frac{1}{2} \cdot b \cdot h \quad (II)$$

Pela fórmula da distância entre dois pontos, temos que:

$$b = d(A, C) = \sqrt{(x_1 - x_3)^2 + (y_1 - y_3)^2} \quad (III)$$

A equação da reta que passa pelos pontos A e C tem coeficiente angular igual a $m = \frac{y_1 - y_3}{x_1 - x_3}$ e sua equação pode ser expressa como:

$$m = \frac{y - y_1}{x - x_1}$$

$$\frac{y_1 - y_3}{x_1 - x_3} = \frac{y - y_1}{x - x_1}$$

$$y - y_1 = \left(\frac{y_1 - y_3}{x_1 - x_3} \right) \cdot (x - x_1)$$

$$(y - y_1)(x_1 - x_3) = (y_1 - y_3)(x - x_1)$$

$$x(y_1 - y_3) + y(x_3 - x_1) + x_1 y_3 - x_3 y_1 = 0 \quad (IV)$$

Utilizando a equação da reta \overleftrightarrow{AC} (IV), juntamente com o ponto B, é possível determinar h que é dado por :

$$h = d(B, \overleftrightarrow{AC}) = \frac{|x_2(y_1 - y_3) + y_2(x_3 - x_1) + x_1 y_3 - x_3 y_1|}{\sqrt{(y_1 - y_3)^2 + (x_3 - x_1)^2}}$$

$$h = \frac{|x_2(y_1 - y_3) + y_2(x_3 - x_1) + x_1 y_3 - x_3 y_1|}{d(A, C)} \quad (V)$$

Utilizando (II), (III) e (V) podemos expressar que a área do triângulo que é dada em (II) por:

$$S = \frac{1}{2} \cdot b \cdot h$$

$$S = \frac{1}{2} \cdot d(A, C) \cdot \frac{|x_2(y_1 - y_3) + y_2(x_3 - x_1) + x_1 y_3 - x_3 y_1|}{d(A, C)}$$

$$S = \frac{1}{2} \cdot |x_2(y_1 - y_3) + y_2(x_3 - x_1) + x_1y_3 - x_3y_1|$$

$$S = \frac{1}{2} |x_2y_1 - x_2y_3 + y_2x_3 - y_2x_1 + x_1y_3 - x_3y_1| \quad (VI)$$

A expressão (VI) é equivalente a :

$$S = \frac{1}{2} |-x_2y_1 + x_2y_3 - y_2x_3 + y_2x_1 - x_1y_3 + x_3y_1|$$

$$S = \frac{1}{2} |-y_2x_3 - x_1y_3 - x_2y_1 + y_2x_1 + x_3y_1 + x_2y_3|$$

$$S = \frac{1}{2} |-x_3y_2 - x_1y_3 - x_2y_1 + x_1y_2 + x_3y_1 + x_2y_3| \quad (VII)$$

E a expressão (VII) ainda pode ser expressa por:

$$S = \frac{1}{2} \left| \det \begin{bmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{bmatrix} \right| \quad (VIII)$$

Logo a área do triângulo conhecendo os seus três vértices pode ser expressa pela fórmula da expressão (VIII), que é a que aparece nos livros didáticos do Ensino Médio mais comumente.

Por razões de ordem prática, os livros didáticos evitam de apresentar a demonstração acima. Um dos motivos é que esta prova é “extensa” e, portanto é desestimulante a sua apresentação a alunos do Ensino Médio. Outro possível motivo é que a fórmula apresentada nos textos didáticos é usada para obter a equação da reta por dois pontos e, para provar este fato como foi feito acima, é necessário usar equações de retas que ainda não foram apresentados aos alunos no momento em que esse conteúdo é abordado.

2.3- Por que o determinante de segunda ordem é uma medida de área?

Uma vez já tendo uma justificativa ou demonstração para a fórmula (I), podemos usá-la para provar que módulo do determinante de uma matriz 2×2 é o dobro da área do triângulo definido pelas linhas da matriz como as coordenadas de dois pontos do triângulo mais a origem. Uma vantagem de se fazer isto é que o cálculo do determinante de uma matriz 2×2 é mais simples do que de uma matriz 3×3 .

Supondo a fórmula (I) como verdadeira então, para se medir a área de um triângulo, como está nos livros didáticos, apresentaremos duas demonstrações de que a metade do módulo do determinante 2×2 é a metade da área de um triângulo. Vamos apresentar uma terceira demonstração sem fazer uso da fórmula (I).

1ª Proposta: Tomando-se um dos vértices na origem

Se os pontos $A = (x_1, y_1)$, $B = (x_2, y_2)$ e $C = (x_3, y_3)$ são os vértices de um triângulo e supondo que $C = (x_3, y_3) = (0, 0)$, isto é, o ponto C está sobre a origem do sistema cartesiano, então a área S do triângulo é dada por:

$$S = \frac{1}{2} \cdot \left| \det \begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{bmatrix} \right|$$

Demonstração: Seja M a matriz do determinante dado pela fórmula (I). Então o determinante de M pode ser calculado pelo desenvolvimento de Laplace na 3ª linha então :

$$\det(M) = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\det(M) = a_{31} \cdot A_{31} + a_{32} \cdot A_{32} + a_{33} \cdot A_{33}$$

$$\det(M) = 0 \cdot \begin{vmatrix} y_1 & 1 \\ y_2 & 1 \end{vmatrix} + 0 \cdot \begin{vmatrix} x_1 & 1 \\ x_2 & 1 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}$$

$$\det(M) = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \quad (IX)$$

Pela fórmula (I) $\det(M)$ é o dobro da área S do triângulo definido pelos vértices A, B e C logo:

$$S = \frac{1}{2} \cdot \left| \det \begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{bmatrix} \right| \quad (X)$$

2ª Proposta: Caso geral com translação dos eixos cartesianos

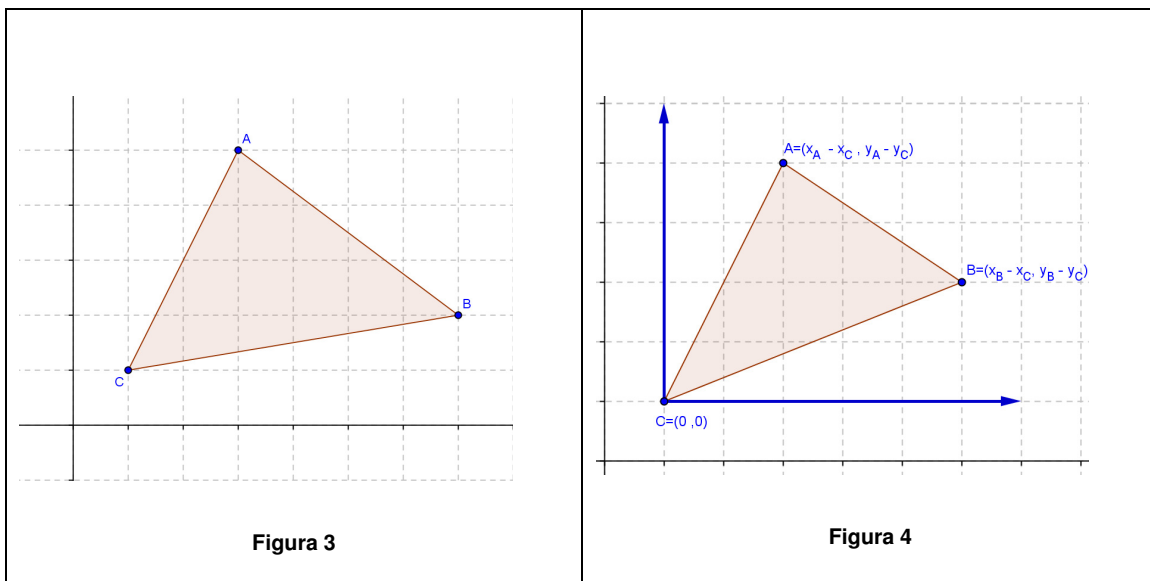
Se os pontos $A = (x_A, y_A)$, $B = (x_B, y_B)$ e $C = (x_C, y_C)$ são os vértices de um triângulo e se nenhum dos vértices estão posicionado sobre a origem do sistema cartesiano, podemos fazer a translação dos eixos cartesianos, de forma que a origem sobreponha um desses vértices.

Se tomamos o vértice C como origem dos eixos coordenados então as coordenadas dos pontos A, B e C são dadas por $A' = (x_A - x_C, y_A - y_C)$, $B' = (x_B - x_C, y_B - y_C)$ e $C=(0,0)$ e então a área S do triângulo é dada por

$$S = \frac{1}{2} \left| \det \begin{bmatrix} x_A - x_C & y_A - y_C \\ x_B - x_C & y_B - y_C \end{bmatrix} \right|$$

e chamando $B = B' = (x'_B, y'_B)$ e $A = A' = (x'_A, y'_A)$ temos

$$S = \frac{1}{2} \left| \det \begin{bmatrix} x'_A & y'_A \\ x'_B & y'_B \end{bmatrix} \right| \quad (\text{XI})$$



Um outro modo de se obter a fórmula (XI) para a área S de um triângulo é calcular o valor do determinante (I) utilizando-se as propriedades do determinante.

$$S = \frac{1}{2} \left| \det \begin{bmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{bmatrix} \right|$$

Fazendo-se a combinação linear entre as linhas da matriz que representam as coordenadas acima (figura (3)), podemos ter:

$$M = \begin{bmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_1=L_1-L_3} \begin{bmatrix} x_A - x_C & y_A - y_C & 0 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_2=L_2-L_3} \begin{bmatrix} x_A - x_C & y_A - y_C & 0 \\ x_B - x_C & y_B - y_C & 0 \\ x_C & y_C & 1 \end{bmatrix}$$

Calcula-se agora o determinante de M pelo desenvolvimento de Laplace da 3ª coluna:

$$\det \begin{bmatrix} x_A - x_C & y_A - y_C & 0 \\ x_B - x_C & y_B - y_C & 0 \\ x_C & y_C & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{XII})$$

$$\begin{aligned} &= 0 \cdot \begin{vmatrix} x_B - x_C & y_B - y_C \\ x_C & y_C \end{vmatrix} + 0 \cdot \begin{vmatrix} x_A - x_C & y_A - y_C \\ x_C & y_C \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} x_A - x_C & y_A - y_C \\ x_B - x_C & y_B - y_C \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} x_A - x_C & y_A - y_C \\ x_B - x_C & y_B - y_C \end{vmatrix} \end{aligned}$$

Portanto, podemos afirmar que:

$$S = \frac{1}{2} \left| \det \begin{bmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{bmatrix} \right| = \frac{1}{2} \left| \det \begin{bmatrix} x_A - x_C & y_A - y_C \\ x_B - x_C & y_B - y_C \end{bmatrix} \right|$$

Chamando $B = B' = (x'_B, y'_B)$ e $A = A' = (x'_A, y'_A)$ temos que a área da superfície desse triângulo (figura (4)) pode ser expressa por:

$$S = \frac{1}{2} \left| \det \begin{bmatrix} x'_A & y'_A \\ x'_B & y'_B \end{bmatrix} \right|$$

3ª Proposta: Utilizando a definição geométrica da área do triângulo

$$S = \frac{1}{2} \text{base} \cdot \text{altura}$$

A seguir vamos apresentar uma demonstração da fórmula (X) sem fazer uso da fórmula (I). Esta demonstração está disponível no livro de Geometria Analítica e Álgebra Linear, (LIMA, 2011).

Considere inicialmente um triângulo A_1, A_2, A_3 (figura (5)) do qual o vértice $A_3 = (0,0)$ é a origem. Sejam $A_1 = (a_1, b_1)$ e $A_2 = (a_2, b_2)$. A numeração dos vértices foi feita de modo que o lado $\overline{A_1A_3}$ não é vertical, isto é $a_1 \neq 0$.

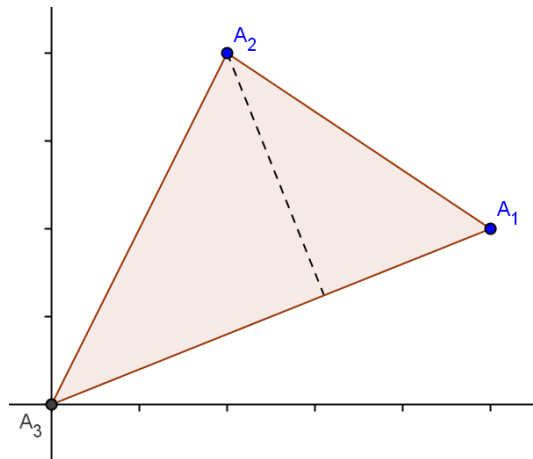


Figura 5

Sejam $\overline{A_1A_3}$ a base do triângulo. Assim, a distância de A_2 até o segmento de reta $\overline{A_1A_3}$ é a sua altura. Como a equação $\overline{A_1A_3}$ é $b_1x - a_1y = 0$, temos:

$$\text{Área de } A_1A_2A_3 = \frac{1}{2} \sqrt{a_1^2 + b_1^2} \cdot \frac{|b_1a_2 - a_1b_2|}{\sqrt{b_1^2 + (-a_1)^2}} = \frac{1}{2} \cdot |a_1b_2 - a_2b_1|$$

Observemos que:

$$|a_1b_2 - a_2b_1| = \left| \det \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix} \right|$$

Portanto a área do triângulo $A_1A_2A_3 = \frac{1}{2} \cdot \left| \det \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix} \right|$

Para o caso geral, segundo (LIMA, 2011):

“No caso geral, temos um triângulo $A_1A_2A_3$ onde os vértices $A_1 = (a_1, b_1)$, $A_2 = (a_2, b_2)$ e $A_3 = (a_3, b_3)$ são pontos quaisquer. A partir da origem O , traçamos os segmentos OP e OQ , respectivamente equipolentes a A_1A_3 e A_3A_2 , logo $P = (\alpha_1, \beta_1)$ e $Q = (\alpha_2, \beta_2)$, com $\alpha_1 = a_1 - a_3$, $\beta_1 = b_1 - b_3$, $\alpha_2 = a_2 - a_3$, $\beta_2 = b_2 - b_3$.

Então:

Área de $A_1A_2A_3 = \text{área de } OPQ = \frac{1}{2} \cdot |\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1|$.”

Observemos que $\frac{1}{2} \cdot |\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1| = \frac{1}{2} \cdot \left| \det \begin{bmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \end{bmatrix} \right|$

A demonstração elegante, apresentada por (LIMA, 2011), foi possível devido a uma sequência diferente de apresentar os conceitos da geometria analítica, sequência diferente da que é apresentada dos textos para o Ensino Médio. Neste texto E. Lima utiliza a fórmula da área, os conceitos de equação da reta, distância entre ponto e reta que são abordados antes da apresentação deste resultado.

2.4 Uma interpretação geométrica do determinante e do seu sinal

2.4.1- O valor absoluto do determinante

Dada uma matriz $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ então as linhas da matriz definem as coordenadas dos pontos $A = (a, b)$ e $B = (c, d)$ do plano cartesiano. Considere a origem $O = (0,0)$. Os segmentos \overline{OB} e \overline{AO} determinam de maneira única um paralelogramo $OABC$ de lados $\overline{OB} \parallel \overline{AC}$ e $\overline{AO} \parallel \overline{BC}$.

A área deste paralelogramo é o dobro da área do triângulo OAB , pelos vários argumentos que demos anteriormente. Muito embora não vamos necessitar deste resultado, pode-se mostrar que o as coordenadas do ponto $C = (a + c, b + d)$.

$$A = \left| \det \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \right| \quad (\text{XIII})$$

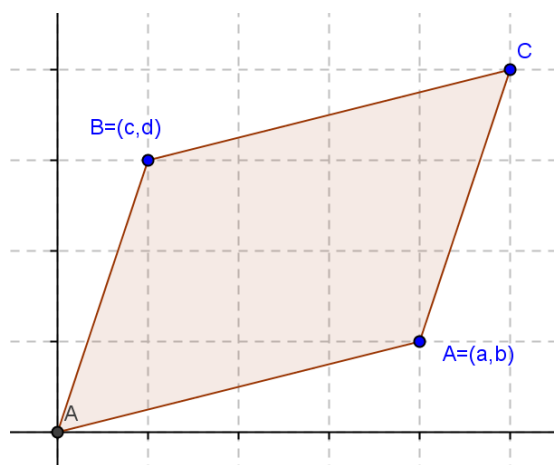


Figura 6

A fórmula (XIII) pode ser tomada como “definição” de área de um paralelogramo. As propriedades geométricas dos determinantes que veremos a seguir poderão convencer o leitor de que esta é uma “definição razoável”.

2.4.2- O sinal do determinante

Dada uma matriz $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ não nula, então as linhas da matriz definem as coordenadas $A = (a, b)$ e $B = (c, d)$. Considere a origem $O = (0, 0)$. Se os pontos O, A e B não estão numa mesma reta então podemos girar o segmento \overline{AO} gerado pela primeira linha da matriz pelo menor ângulo entre estes segmentos (menor que 180°) até este coincidir com \overline{OB} . Se o determinante de M é positivo este giro é no sentido anti-horário e se o determinante de M é negativo então o giro é no sentido horário (figuras (14) e (15)).

Neste caso, dizemos que o par de segmentos $(\overline{AO}, \overline{OB})$ nesta ordem, estão em uma orientação positiva ou negativa. O sentido anti-horário ou positivo é determinado geometricamente pelo sentido do giro do semieixo positivo das abcissas na direção do semieixo positivo das ordenadas e portanto é uma definição que depende da posição dos eixos coordenados. De modo algébrico podemos dizer que a positividade do giro é definida pela matriz identidade $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Comentário:

A igualdade (XIII) pode ser tomada como uma *definição* da medida da área de um paralelogramo em geometria analítica. Isto pode parecer uma imposição *muito forte* para os alunos do Ensino Médio, pois não é intuitivo.

Nos primeiros anos dos cursos em ciências exatas nas universidades os estudantes aprendem que o $|det(M)|$ de uma matriz M de ordem 3×3 é a medida de volume de um paralelepípedo gerado pelos vetores linhas desta matriz.

De modo geral o $|det(M)|$ de uma matriz M de ordem $(n \times n)$ é *por definição* o volume do hiper-paralelepípedo do R^n gerado pelos vetores linhas (ou colunas).

Com estas explicações o professor pode perguntar:

“Se o módulo do determinante de uma matriz 3×3 é uma medida de volume, por que então a fórmula (I) pode ser tomada como uma medida de área?”.

Os argumentos geométricos que justificam isto podem ser delineados da seguinte maneira: os vetores linhas da matriz da fórmula (I) têm as 3^a coordenadas iguais a 1. As operações elementares que transformaram a matriz da fórmula (I) na matriz da fórmula (XIII) não alteram o determinante e portanto as linhas da matriz (1) são as coordenadas de um paralelepípedo com base no plano $(x, y, 0)$ e altura 1, logo o seu volume coincide com a área da base.

Para que o professor do Ensino Médio possa compreender melhor os argumentos acima vamos esclarecer como as propriedades dos determinantes 2×2 podem ser interpretadas geometricamente. Os argumentos usados para os determinantes de ordem 2 também se aplicam para determinantes de ordem 3.

2.5- Interpretação geométrica das propriedades dos determinantes de matrizes 2x2

Como definimos um paralelogramo associado a uma matriz 2x2 gerado pelas linhas vamos nos ater às propriedades geométricas dos determinantes de 2ª ordem quando aplicamos as propriedades usuais dos determinantes às linhas da matriz. Os argumentos usados aqui para as linhas também pode ser empregado para as colunas.

2.5.1- Multiplicação de uma fila por um número real k

Propriedade 1: *Dada uma $M_{2 \times 2}$ se uma linha (ou coluna) é multiplicada por um número real k então o valor do determinante de M também é multiplicado pelo mesmo valor k.*

Se $M = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ então $\det(M) = ad - bc$. Se multiplicamos a segunda linha por k então $M' = \begin{bmatrix} a & b \\ kc & kd \end{bmatrix}$, logo $\det(M') = kad - kbc$, isto é, $\det(M') = k(ad - bc)$ e portanto $\det(M') = k \cdot \det(M)$. O mesmo argumento vale para segunda linha ou para a coluna.

Se $M = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ então a matriz é composta pelas coordenadas dos pontos $A = (a, b)$ e $B = (c, d)$, e a representação do paralelogramo, que é formado por esses dois vértices e um dos vértices posicionado na origem, é como na Figura (7).

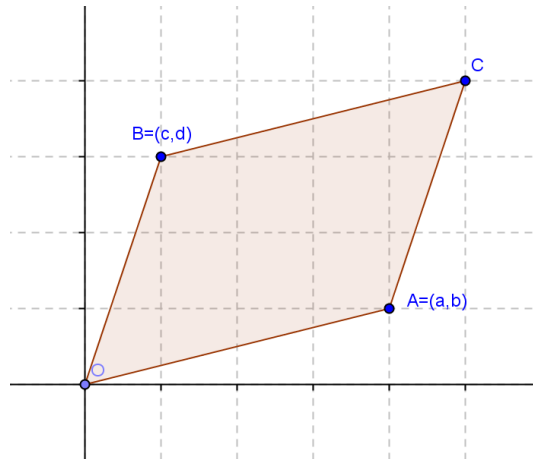


Figura 7

Fazendo a multiplicação da primeira linha por k , onde $k \in \mathbb{R}$, temos a matriz:

$$M' = \begin{bmatrix} ka & kb \\ c & d \end{bmatrix}, \text{ cujas coordenadas são } A' = (ka, kb) \text{ e } B = (c, d) \text{ e}$$

sua representação geométrica é o paralelogramo $OA'EB$, da figura (8) abaixo, em destaque também o paralelogramo $OACB$. Se for utilizado um $k > 1$, o paralelogramo expande ao longo de \overline{OA} na razão k .

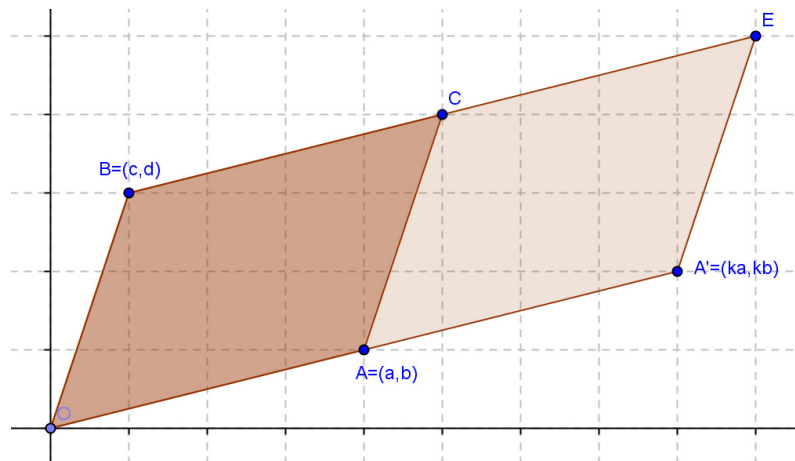


Figura 8

Se o k utilizado fosse $0 < k < 1$, teríamos a representação da figura (9), e neste caso o paralelogramo *contraí* ao longo de \overline{OA} na razão k .

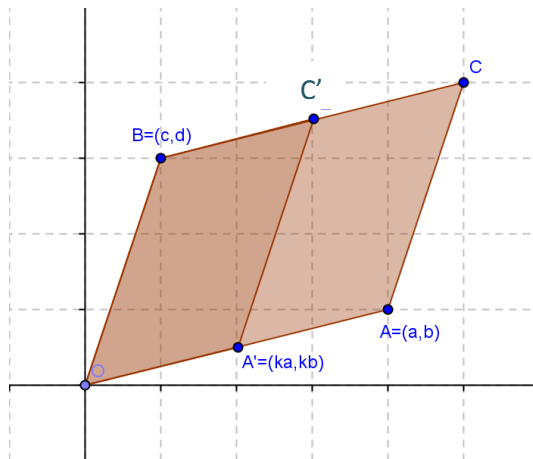


Figura 9

Geometricamente a área S da figura (7) é o produto do comprimento do segmento \overline{OA} que é a base pela altura h do paralelogramo, isto é:

$$S = |\overline{AO}| h$$

Ao multiplicar a primeira linha por um número k (suponhamos $k > 0$), então, por um argumento de semelhança de triângulos, o comprimento do segmento \overline{OA} se transforma em $\overline{OA'}$ multiplicado por k . O paralelogramo $OA'B'C'$ é tal que sua base mede $k|AO|$ e a altura não se altera com esta transformação, logo a área do paralelogramo $S = k \cdot |AO|h = kS$, isto é, multiplicando uma das linhas (ou colunas) da matriz por um número real k , a área do paralelogramo que é formado pelas vértices que constituem essa matriz, também é multiplicado pelo k .

Note que se $k > 0$ a orientação dos segmentos $(\overline{OA}, \overline{OB})$ e $(\overline{kOA}, \overline{OB})$ se mantém pois os segmentos \overline{kOA} e \overline{OB} estão na mesma semi-reta definida pelo ponto O . Se $k < 0$ a orientação fica revertida pois \overline{kOA} e \overline{OB} vão estar em semi-retas opostas.

2.5.2- Soma de múltiplos de linha paralela

Propriedade 2: Dada uma matriz M 2×2 se acrescentamos à 2ª linha um múltiplo da primeira linha então o determinante não se altera. Analogamente, se acrescentamos à 1ª linha um múltiplo da 2ª linha o determinante também não se altera.

Se $M = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ então $\det(M) = ad - cb$. Fazendo $L_2 = L_2 + k.L_1$,

onde $k \in \mathbb{R}$, temos a matriz M' :

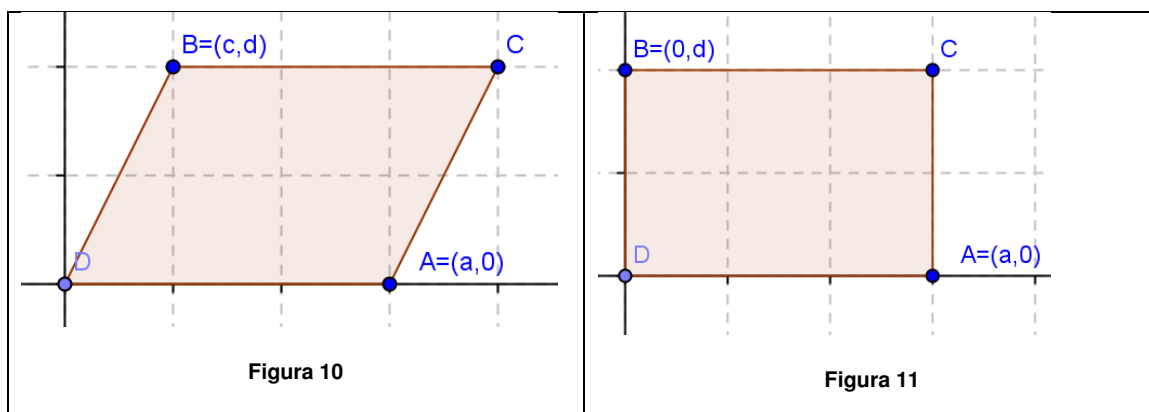
$M' = \begin{bmatrix} a & b \\ c + ka & d + kb \end{bmatrix}$ então:

$$\det(M') = ad + kab - cb - kab = ad - cb.$$

Logo, $\det(M) = \det(M')$

Do ponto de vista geométrico, isto quer dizer que a área do paralelogramo gerado pelas linhas se mantém com esta operação na matriz dada.

Vamos interpretar primeiro o caso em que $b = 0$. Neste caso um dos lados do paralelogramo é paralelo ao eixo das abscissas como na figura (10).



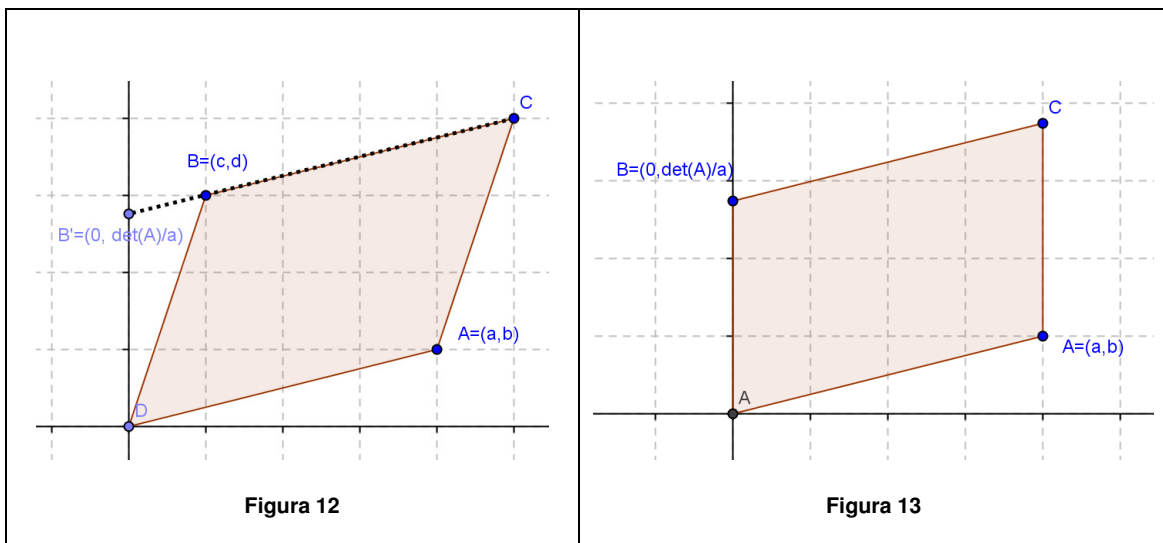
Ao adicionarmos um múltiplo da linha L_1 à linha L_2 altera-se a posição do ponto $B = (c, d)$ para $B' = (c + ka, d + kb)$ e portanto a altura do paralelogramo continua igual e a base é a mesma. Logo a área não se altera.

$$M = \begin{bmatrix} a & 0 \\ c & d \end{bmatrix} \xrightarrow{L_2 = L_2 - \frac{a}{c}L_1} M' = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{bmatrix}$$

Na figura (10) ilustramos o caso em a é não nulo e então podemos fazer $c + ka = 0$. Neste caso a área do paralelogramo é equivalente a área de um retângulo. Neste caso o paralelogramo definido por M' é um retângulo como na figura (11) a seguir:

No caso geral, vamos supor que $a \neq 0$. Se somamos à linha L_2 um múltiplo k de L_1 então $B' = (c + ka, d + kb)$ desloca-se paralelamente à reta \overrightarrow{OA} pois $\overrightarrow{OB'} = (c, d) + k(a, b)$, isto é, B' pertence à reta $y - d = \left(\frac{b}{a}\right)(x - c)$ cuja equação não depende do valor de k e esta reta corta o eixo das ordenadas em $B' = \left(0, \frac{\det(M)}{a}\right)$ com $\det(M) = ad - bc$.

Note que B' pertence ao mesmo semi-plano definido pela reta \overrightarrow{OA} (figuras (12) e (13)) de onde se conclui que o giro de \overrightarrow{OA} para $\overrightarrow{OB'}$ está na mesma orientação do giro de \overrightarrow{OA} para \overrightarrow{OB} . Geometricamente, a propriedade 2 conserva a área da figura e a orientação dos segmentos e portanto preserva o determinante.



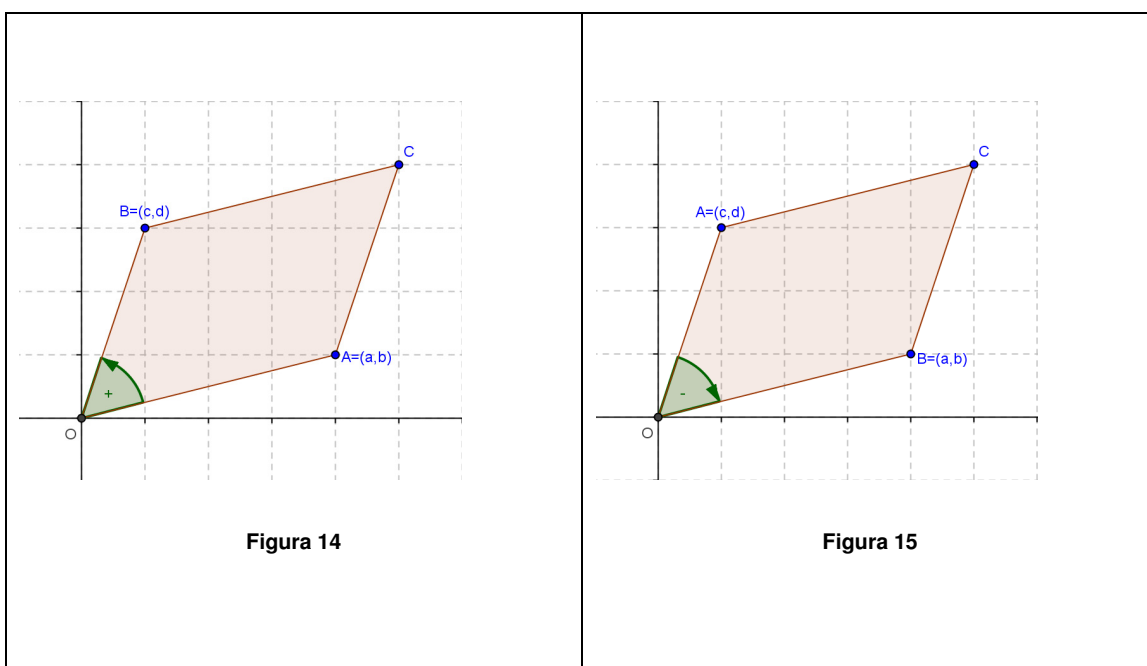
O paralelogramo da figura (13) pode ainda ser transformado em um retângulo com a mesma área projetando o ponto A verticalmente sobre o eixo das abcissas. Algebricamente, isto corresponde a diagonalizar a matriz M com o mesmo determinante.

2.5.3- Troca de posição entre duas linhas e a orientação

Propriedade 3: Dada uma matriz $M = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ se trocamos a ordem de duas linhas da matriz M então o determinante de M troca de sinal.

Seja $M = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ então $\det(M) = ad - bc$ e se trocamos as duas linhas da matriz obtemos a matriz $M^{\#} = \begin{bmatrix} c & d \\ a & b \end{bmatrix}$ e $\det(M^{\#}) = cb - ad = -1 \cdot \det(M)$.

Pela a interpretação geométrica do sinal do determinante dada em (2.4.2) , suponha que ao girar o segmento \overline{OA} no sentido de \overline{OB} pelo menor ângulo entre estes dois segmentos este se dá no sentido anti-horário ou horário (figuras(14) e (15)) então ao trocarmos de ordem as duas linhas vamos fazer o giro do segmento \overline{OB} para \overline{OA} no sentido oposto.

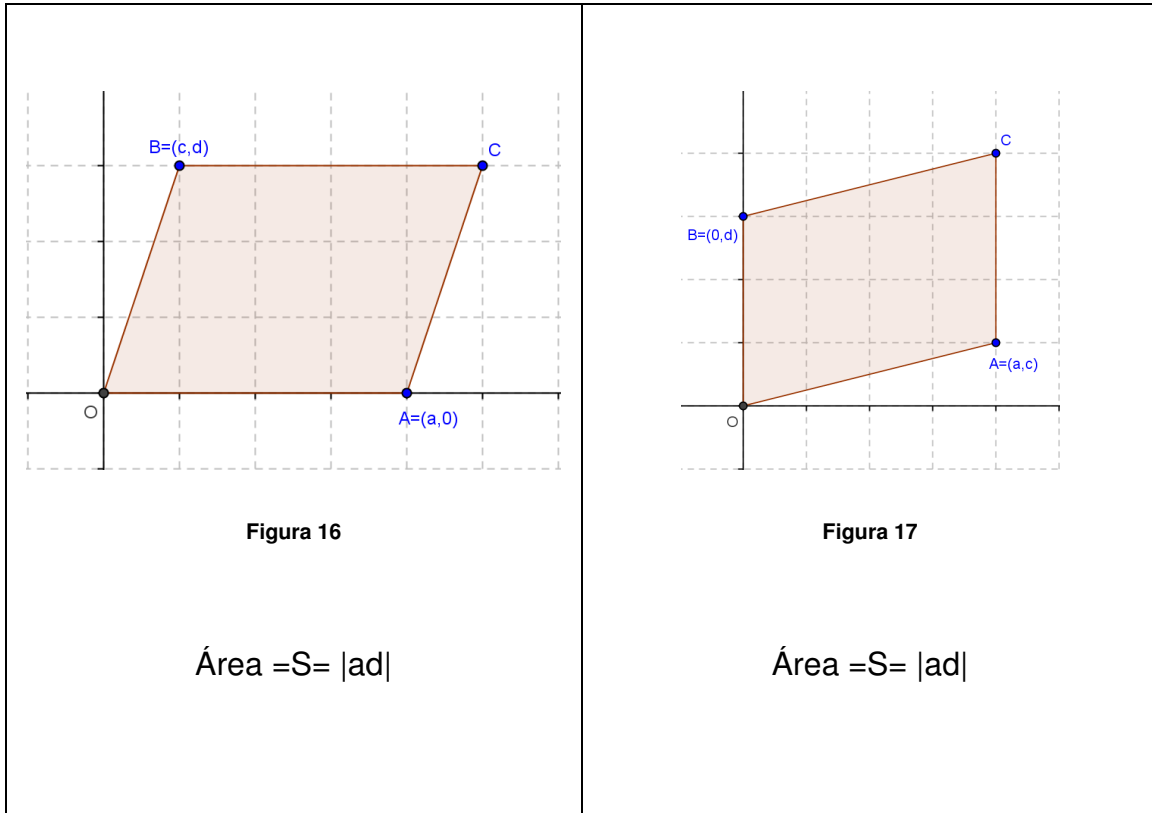


2.5.4- Transposição

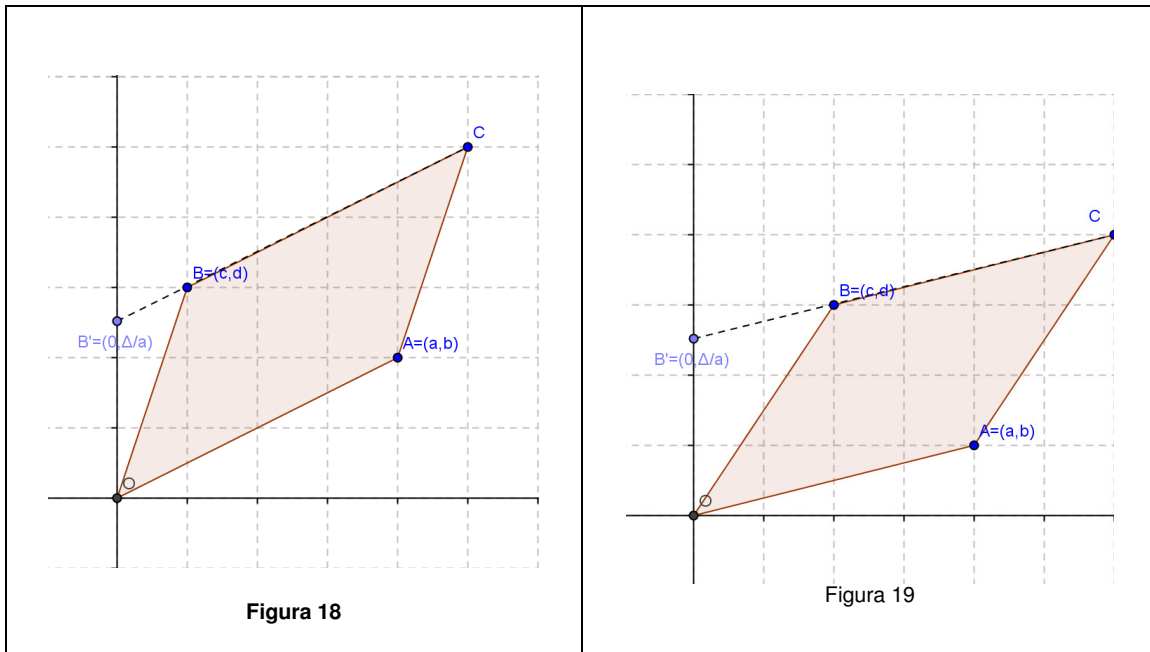
Propriedade 4:- Dada uma matriz $M = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ então se trocamos as linhas da matriz pelas colunas obtemos a matriz transposta $M^t = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$ e o determinante de M e M^t são iguais.

Para matrizes 2x2 a verificação do cálculo algébrico é imediata. A interpretação geométrica deste fato é fácil de ver no caso do lado \overline{OA} ser paralelo ao eixo das abcissas, isto é $A = (a, 0)$ e $B = (c, d)$ como na figura (16). Neste caso o paralelogramo $OACB$ é tal que tem uma base de comprimento $|a|$ e a altura é $|d|$, logo a sua área $S = |ad|$.

A matriz M^t define o paralelogramo $OAC'B'$ com $A' = (a, c)$ e $B' = (0, d)$ (figura (17)) e, neste caso, o paralelogramo tem base $|d|$ e altura $|a|$ e portanto a área $S = |a d|$.



No caso geral, dada $M = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ considere o paralelogramo $OACB$ com vértices $A = (a, b)$ e $B = (c, d)$, veja na figura (18), e como $M^t = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$ considere o paralelogramo $OA'B'C'$ de vértices $A' = (a, c)$ e $B' = (b, d)$ como na figura (19):



Lema: a) Dada uma matriz $M = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ seja $\Delta = ad - bc$ então:

a) o paralelogramo $OACB$ definido pelas linhas é tal que o ponto de interseção da reta que passa por B e C com o eixo das ordenadas é $B' = \left(0, \frac{\Delta}{a}\right)$ (figura (18));

b) Se $OACB$ é o paralelogramo definido pela matriz transposta $M^t = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$ então o ponto de interseção da reta que passa por BC com o eixo das ordenadas é $B' = \left(0, \frac{\Delta}{a}\right)$ (figura (19)).

Prova: Vamos usar a interpretação geométrica da propriedade 2 com a figura(19), isto é, se aplicamos à matriz M a operação de adicionar à linha um múltiplo da 1ª dada por:

$$M = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \xrightarrow{L_2=L_2-\frac{c}{a}L_1} \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & d-\frac{bc}{a} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & \frac{\Delta}{a} \end{bmatrix}$$

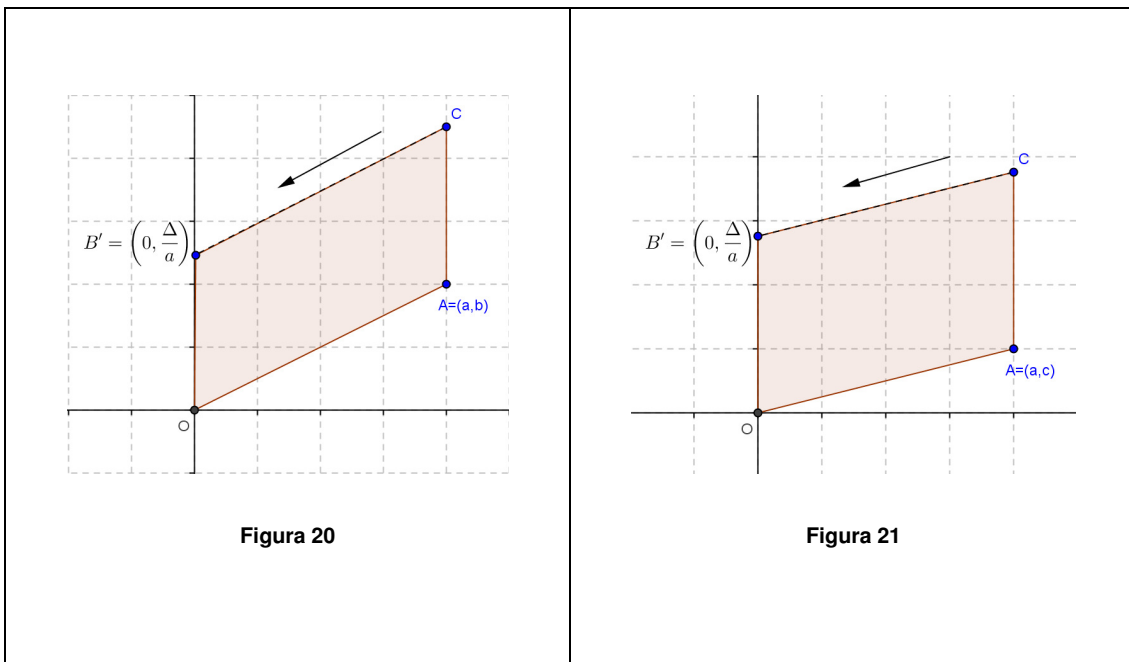
então o $\det M = \det \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & \frac{\Delta}{a} \end{bmatrix} = \Delta$ (figura (20)).

Do mesmo modo, se aplicamos a propriedade 2 para a matriz M^t dada por:

$$M^t = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} \xrightarrow{L_2=L_2-\frac{b}{a}L_1} \begin{bmatrix} a & c \\ 0 & d-\frac{bc}{a} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & c \\ 0 & \frac{\Delta}{a} \end{bmatrix}$$

então o $\det(M^t) = \det \begin{bmatrix} a & c \\ 0 & \frac{\Delta}{a} \end{bmatrix} = \Delta$ (figura (21))

Representando as coordenadas $A = (a, b)$, $B = (c, d)$ que são as coordenadas obtidas na matriz M e $A^* = (a, c)$ e $B^* = (b, d)$ as coordenadas da matriz M^t temos a representação dos paralelogramos das figuras (20) e (21):



CAPÍTULO 3

3.1 Introdução

A sequência didática do terceiro capítulo esta organizada para os alunos comentando a maneira que é proposta nos livros didáticos atuais recomendados para o Ensino Médio para o cálculo da área dos triângulos.

Os pré-requisitos necessários serão abordados, de maneira bem prática fazendo o uso de exercícios de aplicação e fixação.

Primeiramente mostraremos para o aluno a fórmula da área do paralelogramo quando são conhecidos seus vértices, que é coincidente com a área que ele obtém geometricamente fazendo o uso do produto das medidas de sua base e sua altura. Posteriormente generalizaremos o cálculo da área do triângulo quando conhecidos seus vértices fazendo o uso do determinante de uma matriz de 2ª ordem.

O conteúdo proposto pode ser aplicado no 3º ano do Ensino Médio, de acordo com o Referencial Curricular do Ensino Médio da Secretária Estadual de Educação de Mato Grosso do Sul, 2012, para o desenvolvimento desta sequência utilizaremos alguns conhecimentos como cálculo de determinantes de matriz de ordem 2 e a representação de coordenadas, conceitos que são vistos nos anos anteriores.

Apresentaremos uma proposta diferenciada das que aparecem nos livros didáticos para ser utilizada no ensino médio, visando obter a área do triângulo utilizando as coordenadas de seus vértices, partindo da interpretação geométrica do determinante de uma matriz de ordem 2 ao invés de uma matriz de ordem 3. Para chegarmos a esta relação, primeiramente faremos o cálculo da área do paralelogramo, e posteriormente particularizamos para os triângulos.

3.2- Pré-requisitos

3.2.1- Plano Cartesiano e Coordenadas Cartesianas

Objetivos: Rever os conceitos de representação dos pontos no plano cartesiano. O estudante deverá saber representar pontos no plano cartesiano sendo dadas as coordenadas do ponto e, reciprocamente, obter as coordenadas de pontos dados os pontos no plano.

Atividades propostas

1- No seu caderno, separe as coordenadas a seguir, de acordo com o quadrante que as mesmas pertencem:

$$A=(3,7) \quad B=(-2,4) \quad C=(-1,-1) \quad D=(3,-2) \quad E=(-3;2,5)$$

$$F=(1,1) \quad G=(-2,-3) \quad H=(1,4) \quad I=(2,-6)$$

2- Determine as coordenadas dos vértices que aparecem em cada uma das figuras abaixo:

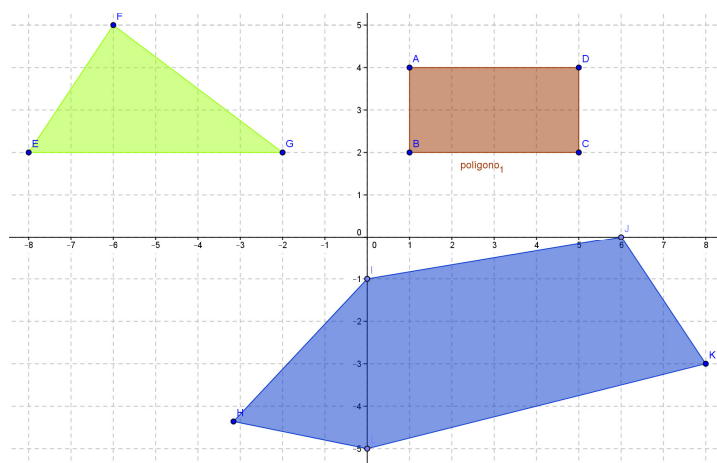


Figura 22

3- No mesmo plano cartesiano faça a representação dos polígonos a seguir (utilize cores diferentes para facilitar a visualização):

a) O polígono de vértices $A = (-8, 2)$, $B = (-4, -4)$, $C = (18, -4)$ e $D = (22, 2)$.

b) O polígono de vértices $E = (7, 2)$, $F = (7, 14)$, $G = (8, 14)$ e $H = (8, 2)$.

c) O polígono $F=(7,14)$, $I=(4,14)$ e $J=(7,12)$.

d) O polígono $M=(7,12)$, $O=(7,4)$ e $P=(-2,4)$.

e) O polígono $G=(8,14)$, $K=(8,4)$ e $L=(18,4)$

3.2.2- Segmento de reta orientado e translação da origem das coordenadas.

Objetivos: O aluno deve saber representar um segmento de reta orientado no plano cartesiano e calcular as novas coordenadas dos pontos ao fazer translação dos eixos cartesianos de forma que a origem do sistema cartesiano coincida com um dos extremos do segmento de reta.

Obs.: O segmento orientado é introduzido aqui para distinguir qual dos pontos do segmento dado, será a nova origem no sistema de coordenadas. Nesta sequência didática não será necessário o uso de vetores, esta noção é opcional na sequência a seguir.

Consideremos dois pontos A e B , que são representados pelas coordenadas $A = (a, b)$ e $B = (c, d)$:

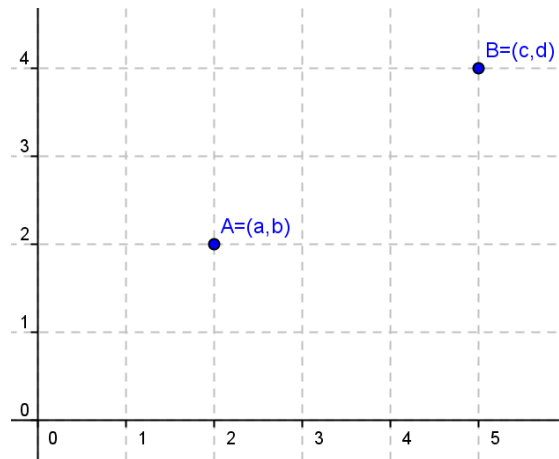


Figura 23

Podemos obter o segmento orientado \overline{AB} , que possui direção de 3 unidades na horizontal a direita e 2 unidades na vertical para cima.

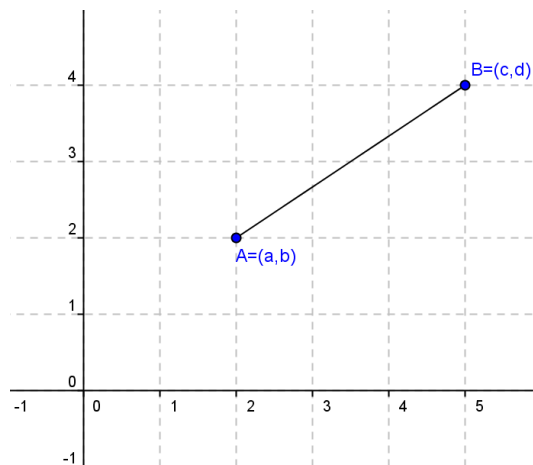


Figura 24

Podemos realizar uma translação de eixos, paralelamente aos eixos, de modo que a origem passe a ser uma das coordenadas apresentadas na figura, por exemplo, a coordenada A.

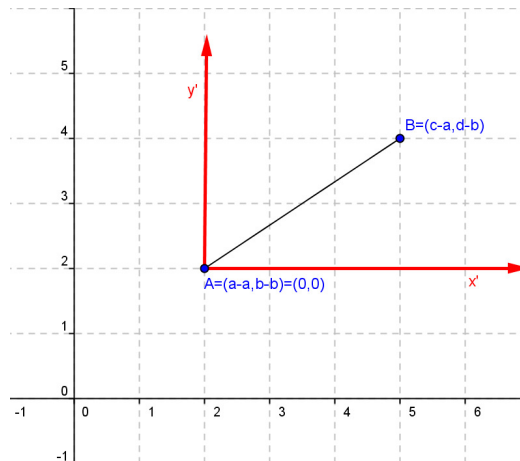


Figura 25

Após fazer a translação dos eixos cartesianos, paralelamente aos eixos, o eixo das abscissas foi transladado, ficando como eixo x' , e o eixo das ordenadas também foi transladado, ficando como eixo y' .

No sistema cartesiano transladado as coordenadas A e B assumem os valores $A' = (a - a, b - b) = (0,0)$ e $B' = (c - a, d - b)$, e mesmo assim podemos verificar na imagem abaixo que seu módulo continua o mesmo, e que sua orientação também não se alterou:

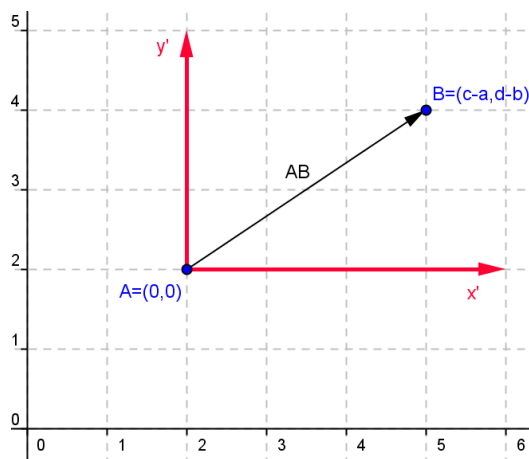


Figura 26

Atividades propostas:

1- Utilizando o caderno, represente no plano cartesiano os pontos $P=(-2,5)$ e $Q=(2,6)$. Faça a translação dos eixos cartesianos de modo que a origem

coincida com o ponto P. Quais são as coordenadas obtidas nesse sistema cartesiano obtido após a translação?

2- Construa no plano cartesiano o quadrilátero de vértices $A=(1,2)$, $B=(3,6)$, $C=(4,1)$ e $D=(2,-2)$. Após sua construção faça a translação dos eixos cartesianos, passando a origem para o vértice A. Determine qual são as coordenadas A, B, C e D desse sistema após a translação.

3- Repita o processo do item 2, mas trocando a origem para o vértice D. Determine as coordenadas A, B, C e D do sistema transladado.

4- Determine a distância de A e B no exercício 2 usando as coordenadas destes dois pontos antes e depois de fazer a translação. Interprete as respostas obtidas.

3.3- Área do paralelogramo

Objetivo: Introduzir através de exemplos a representação geométrica de uma matriz 2x2 dada por um paralelogramo e associar o determinante desta matriz como o módulo da área deste paralelogramo.

Repetimos a seguir o que já foi estabelecido no capítulo 2:

Dada uma matriz $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ então as linhas da matriz definem as coordenadas dos pontos $A = (a, b)$ e $B = (c, d)$ do plano cartesiano e considere a origem $O = (0, 0)$. Os segmentos \overline{OB} e \overline{AO} determinam de maneira única um paralelogramo de OABC de lados $\overline{OB} \parallel \overline{AC}$ e $\overline{AO} \parallel \overline{BC}$.

A área deste paralelogramo é o dobro da área do triângulo OAB, pelos vários argumentos que demos anteriormente. Muito embora não vamos necessitar deste resultado, mas pode-se mostrar que o as coordenadas do ponto $C = (a + c, b + d)$.

$$A = \left| \det \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \right| \quad (\text{XIII})$$

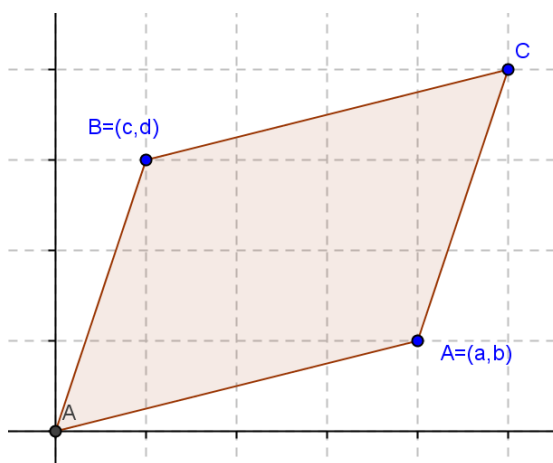


Figura 27

De modo geral, a área do paralelogramo é igual ao módulo do determinante que tem suas linhas (ou colunas), formada pelos vértices do paralelogramo que são adjacentes a origem do sistema cartesiano.

Na sequência a seguir, vamos partir dos casos mais simples para os casos mais gerais.

1º caso: Área o paralelogramo de lados paralelos aos eixos.

Objetivo: Apresentar ao aluno um determinante cuja matriz 2x2 é diagonal e representar o retângulo gerado pelos pontos das linhas e calcular o determinante da matriz e a área do retângulo.

Pré-requisito: O estudante deverá saber desenhar um paralelogramo sendo dados dois lados adjacentes \overline{OA} e \overline{OB} e utilizar a fórmula da área de um paralelogramo.

Atividade:

- Dada a matriz $\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ representar os pontos A e B no plano cartesiano pela primeira e segunda linha da matriz.
- Desenhar um paralelogramo OACB com os pontos O A e B com lados adjacentes OA e OB. Que nome recebe a figura geométrica obtida?
- Calcular a área do paralelogramo e o valor do determinante da matriz. Qual a sua conclusão?

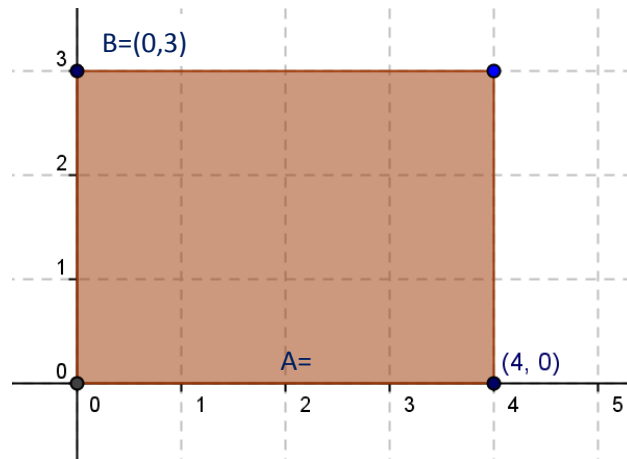


Figura 28

Solução esperada:

O aluno deve obter uma figura semelhante à figura (28) na qual estão definidos os pontos de coordenadas $A=(4,0)$ e $B=(0,3)$ e obter o paralelogramo.

O aluno deverá reconhecer que o paralelogramo é também um retângulo.

A área deste retângulo é calculada na geometria elementar como sendo:

$$S = \text{base} \times \text{altura} = 4 \times 3 = 12$$

O cálculo do módulo do determinante

$$S = \left| \det \begin{bmatrix} x_A & y_A \\ x_B & y_B \end{bmatrix} \right|$$

$$S = \left| \det \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \right|$$

$$S = |4 \times 3 - 0 \times 0| = 12$$

Comentário:

Para ser feito o cálculo da área do paralelogramo tem-se como proposta a utilização de dois dos seus vértices, desde que um dos outros

vértices esteja sobre a origem do sistema cartesiano, e faz-se o uso das duas coordenadas que são adjacentes a esse vértice. Denominaremos um de vértice A e a outro de vértice B, e a área desse paralelogramo pode ser definida com sendo:

$$S = \left| \det \begin{bmatrix} x_A & y_A \\ x_B & y_B \end{bmatrix} \right|$$

2º caso: Um dos lados paralelos aos eixos cartesianos

Objetivo: Apresentar ao aluno um determinante cuja matriz 2×2 é triangular e representar o paralelogramo gerado pelas linhas e calcular o determinante da matriz e a área do paralelogramo.

Atividade:

a) Considere a matriz $\begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ representar os pontos A e B no plano cartesiano dados pela primeira e segunda linha da matriz.

b) Desenhar um paralelogramo $OACB$ com os pontos O , A e B com lados os segmentos adjacentes OA e OB .

c) Calcular a área do paralelogramo e o valor do determinante da matriz. Qual a sua conclusão?

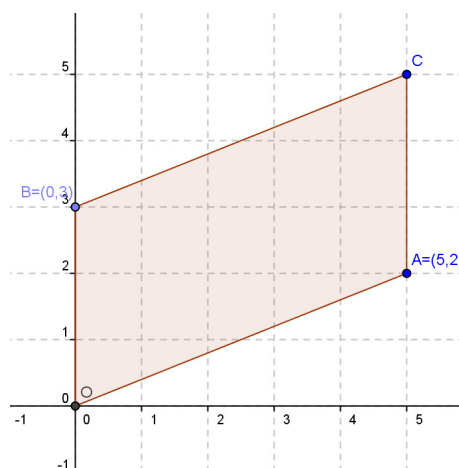


Figura 29

Solução esperada:

O aluno deve obter uma figura semelhante à figura (29) na qual estão definidos os pontos de coordenadas $A=(4,0)$, $B=(0,3)$ e $O=(0,0)$ e obter o paralelogramo.

A área S deste paralelogramo é calculada na geometria elementar como sendo:

$$S = \text{base} \times \text{altura} = 3 \times 5 = 15$$

O cálculo do módulo do determinante

$$S = \left| \det \begin{bmatrix} x_A & y_A \\ x_B & y_B \end{bmatrix} \right|$$

$$S = \left| \det \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \right|$$

$$S = |5 \cdot 3 - 0 \cdot 2| = 15$$

O estudante deve concluir a igualdade dos dois resultados e possivelmente indagar se isto é coincidência.

Para que não ocorram alterações na área do paralelogramo, faremos a combinação linear na matriz, operação a qual não altera o valor do determinante da matriz.

$$M = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_1 = L_1 - \frac{2}{3}L_2} \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

A matriz que obtemos através da combinação linear, possui o mesmo determinante da matriz anterior, mas as coordenadas dos vértices passaram a ser $A=(5,0)$ e $B=(0,3)$, e na figura (31) o valor de sua área pode ser simplesmente calculada por base \times altura, o que sustenta a veracidade dos conceitos anteriores.

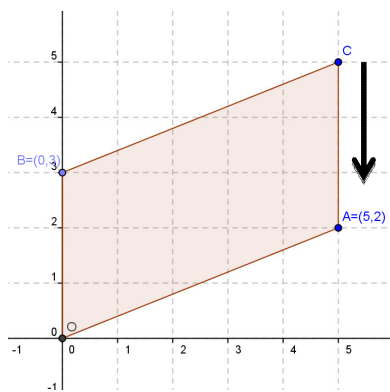


Figura 30

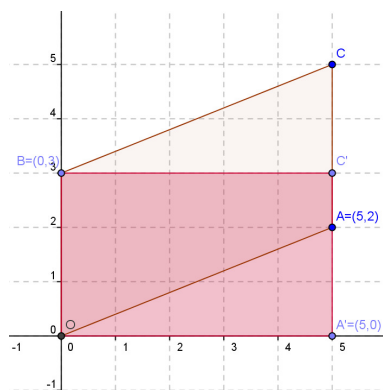


Figura 31

O caso onde o paralelogramo possui um par de lados paralelos ao eixo das abscissas e os outros lados transversais, fica como exercício para o aluno.

3º caso: Paralelogramo com vértice na origem e lados não paralelos aos eixos cartesianos

Objetivo: Apresentar ao aluno o determinante de uma matriz 2x2 simples para ilustrar o caso geral, representar o paralelogramo gerado pelas linhas, calcular o determinante da matriz e a área do paralelogramo.

Pré-requisito: Propriedade de determinante: um determinante não se altera se somamos a uma linha um múltiplo de uma outra linha.

Atividade :

a) Considere a matriz $M = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$ representar os pontos A e B no plano cartesiano dados pela primeira e segunda linha da matriz.

b) Desenhar um paralelogramo $OACB$ com lados dados pelos segmentos adjacentes \overline{OA} e \overline{OB} .

c) Desenhar um paralelogramo $OAC'B'$ com a mesma área que $OACB$ de modo que B' esteja no eixo-y. Sugestão: Traçar uma reta paralela a \overline{OA} passando por B .

d) Justificar por que as matrizes M e M' possuem o mesmo determinante

$$M = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_1 = L_1 - \frac{1}{2}L_2} \begin{bmatrix} 0 & \frac{5}{2} \\ 4 & 1 \end{bmatrix} = M'$$

e) Interpretar geometricamente o que ocorre quando M se transformar em M' e calcular as coordenadas do ponto B'

Solução esperada:

O estudante deve obter uma figura semelhante a figura (32).

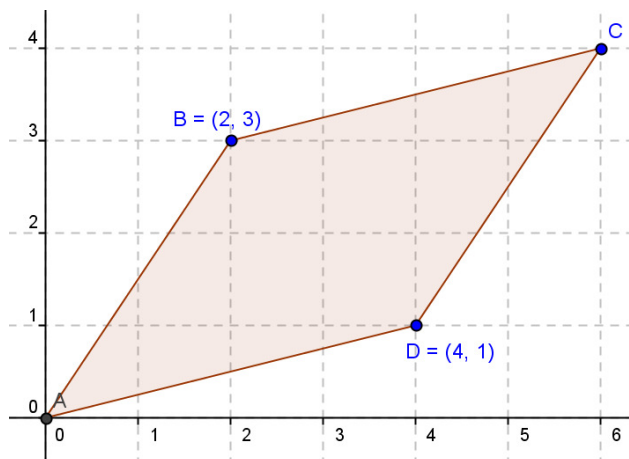


Figura 32

$$d) M = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_1=L_1-\frac{1}{2}L_2} \begin{bmatrix} 0 & \frac{5}{2} \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$$

E, com a sugestão do item (c) ele deve obter o ponto B' como nas figuras (33) e (34).

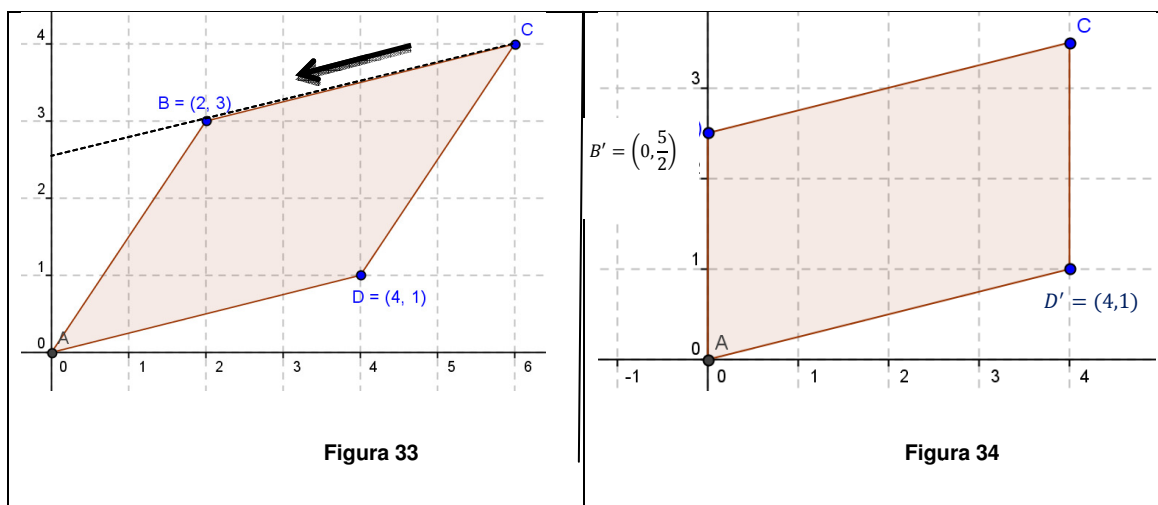


Figura 33

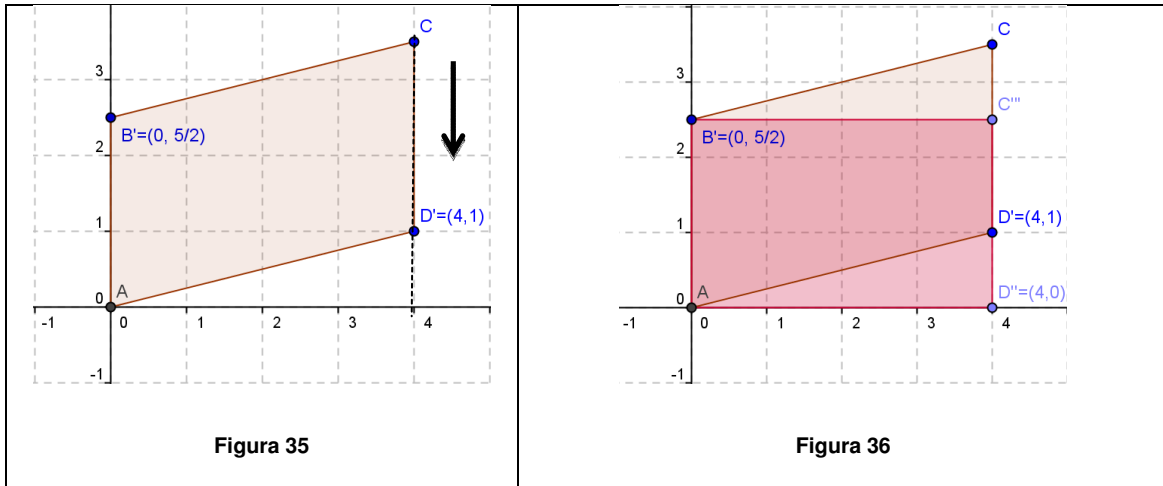
Figura 34

No item d) e e) o aluno deve lembrar a propriedade de cálculo de determinantes e ser capaz de identificar as coordenadas do ponto B' com a primeira linha da matriz M'

Observação: O professor pode aqui acrescentar, como no caso anterior, que o paralelogramo $OACB$ pode ser transformado num retângulo de mesma área, como nas figuras (35) e (36) e relacionar esta transformação geométrica com a operação entre as linhas dada por

$$M = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_1=L_1-\frac{1}{2}L_2} \begin{bmatrix} 0 & \frac{5}{2} \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$$

que preserva o determinante.



Conclusão: Depois destes exemplos aqui apresentados o professor poderá então definir que a área S da superfície de um paralelogramo gerado pelos lados adjacentes \overline{OA} e \overline{OB} com $A = (x_A, y_A)$ e $B = (x_B, y_B)$ é dado por.

$$S = \left| \det \begin{bmatrix} x_B & y_B \\ x_A & y_A \end{bmatrix} \right|$$

Essa fórmula é eficaz e fácil de ser utilizada. Em alguns casos o professor poderá usar o argumento mais geral utilizado no capítulo 2.

4º caso: Paralelogramo que nenhum de seus vértices esta sobre a origem

Objetivo: Calcular a área de um paralelogramo dado por 4 pontos sendo que nenhum deles está na origem.

Pré-requisito: Mudança das coordenadas dos pontos dados escolhendo-se um dos pontos como origem.

Atividade:

Dada a figura (37) calcular a área do paralelogramo fazendo uma translação dos eixos coordenados para o ponto A. Fazer um desenho destacando os eixos transladados.

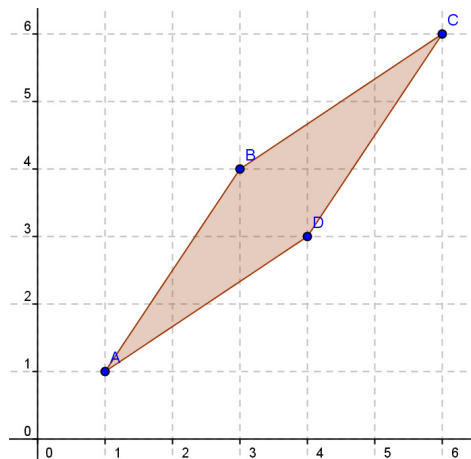


Figura 37

Solução esperada:

O estudante deverá fazer um desenho como a figura (38).

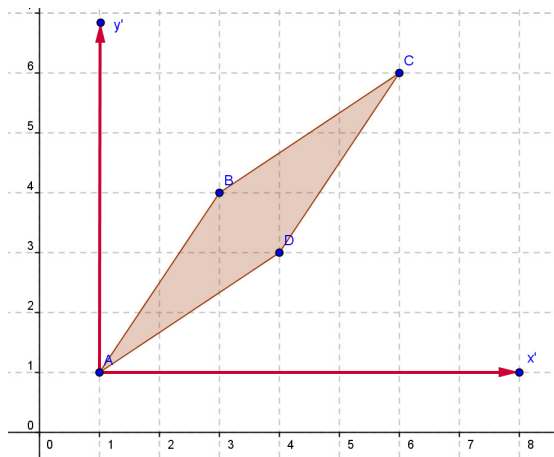


Figura 38

As coordenadas obtidas após a translação dos eixos são:

$$A' = (1 - 1, 1 - 1) = (0,0);$$

$$B' = (3 - 1, 4 - 1) = (2,3);$$

$$C' = (6 - 1, 6 - 1) = (5,5);$$

$$D' = (4 - 1, 3 - 1) = (3,2).$$

Ou seja, temos $A' = (0,0)$, $B' = (2,3)$, $C' = (5,5)$ e $D' = (3,2)$. Então se aplicarmos o caso anterior, como os lados $A'B'$ e $A'D'$ são adjacentes a origem, temos:

$$S = \left| \det \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \right| = |3 \times 3 - 2 \times 2| = 5$$

Note que aqui temos 3 pontos não nulos. Pelo problema anterior, para calcular a área do paralelogramo temos que ter as coordenadas dos dois pontos que são as extremidades dos dois lados $A'B'$ e $A'D'$ adjacentes.

Aqui o estudante pode ficar confuso sobre quais dois pontos escolher dentre os três pontos não nulos. A figura pode ajudar nas escolhas dos pontos. Contudo, podemos notar que as coordenadas de C' , corresponde a

soma das coordenadas de B' e D' e mesmo que o aluno troque um dos pontos B' ou D' por C' o resultado da área será mantido, pois pela propriedade dos determinantes, estamos somando duas linhas da matriz. Neste caso, a interpretação geométrica não fica de acordo com a figura.

3.4- Área do triângulo

O paralelogramo é um quadrilátero (convexo) e portanto ele possui duas diagonais. Utilizando uma dessas diagonais é possível dividir o paralelogramo em duas partes de mesma área, pois os triângulos são semelhantes com um lado comum, logo são congruentes e, portanto, possuem a mesma área e a soma delas é a área do paralelogramo, isto é, “a área de cada triângulo é a metade da área do paralelogramo” e esta conclusão “*independe de qual das duas diagonais foi escolhida*”.

Esta segunda conclusão de que a área do triângulo independe da diagonal é lógica mas pode não ser “visualmente” convincente para alguns alunos, pois os triângulos definidos por cada uma das diagonais não são sempre congruentes quando o paralelogramo não é retângulo. Neste caso o professor pode apelar para a fórmula da área do triângulo, pois triângulos de mesma base e mesma altura têm a mesma área.

Observe as figuras (39), (40) e (41) a seguir:

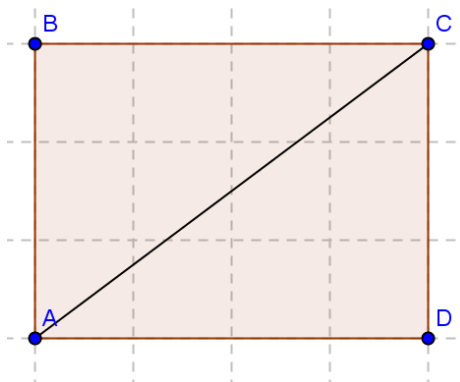


Figura 39

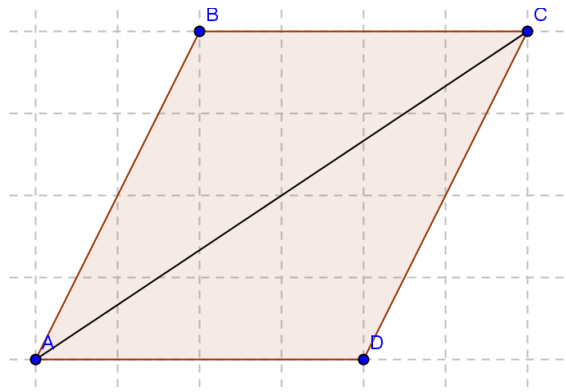


Figura 40

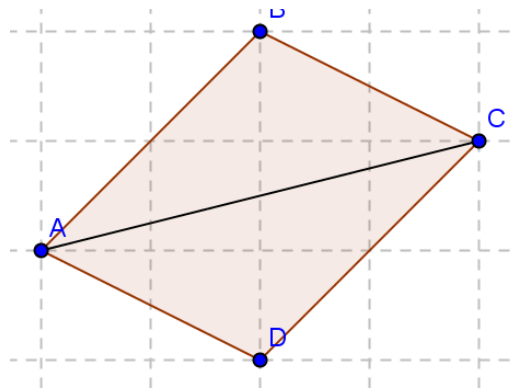


Figura 41

Atividades

Objetivo: Calcular a área de triângulos definido pelas coordenadas de 3 pontos A, B e C utilizando a fórmula do determinante 2×2 e considerando dois casos: a) um dos pontos é a origem; b) nenhum dos pontos é a origem.

Pré-requisito: Determinar coordenadas dos pontos A, B e C fazendo-se a translação dos eixos coordenados para o ponto A (B ou C).

a) Desenhar o triângulo formado pelos pontos $A = (0,0)$, $C = (4,0)$ e $B = (0,3)$ e calcular a área do triângulo utilizando a fórmula do determinante de 2^{a} ordem.

b) Desenhar o triângulo formado pelos pontos $A = (0,0)$, $B = (2,4)$ e $C = (5,3)$ e calcular a área do triângulo utilizando a fórmula do determinante de 2^{a} ordem.

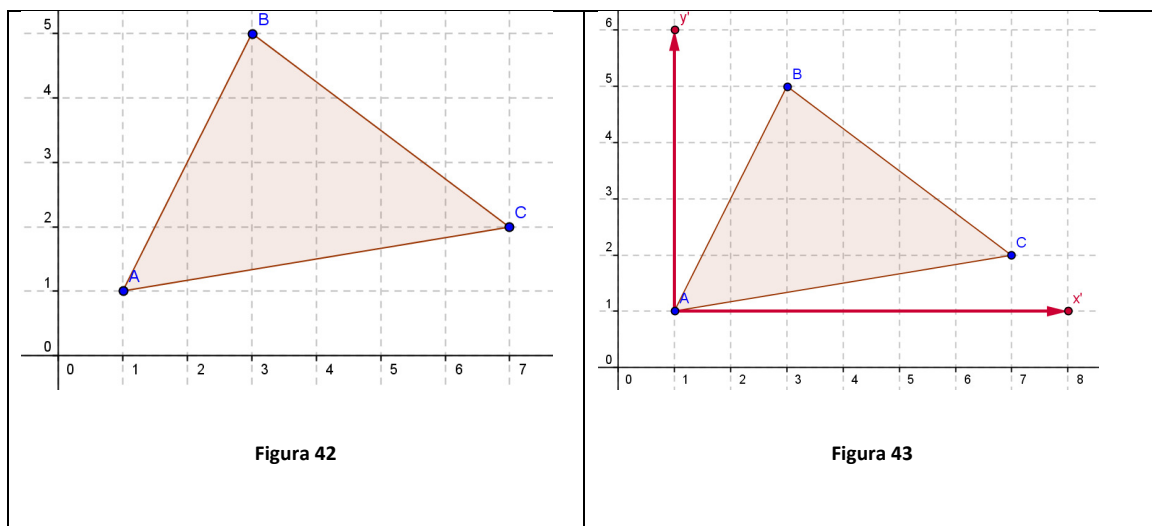
c) Desenhar o triângulo formado pelos pontos $A = (1,1)$, $B = (3,5)$ e $C = (7,2)$ e calcular as coordenadas A' , B' e C' dos pontos A , B e C transladando a origem para o ponto A . Destacar no desenho os eixos transladados.

d) Calcular a área do triângulo do item c) usando as coordenadas A' , B' e C' utilizando a fórmula do determinante de 2ª ordem.

Solução esperada.

Vamos destacar aqui somente a solução esperada dos itens c) e d)

No item c) e d) o estudante deve fazer desenhos semelhantes às figuras (42) e (43).



Considerando a origem no ponto $A = (1,1)$ então as coordenadas dos pontos A , B e C serão dadas por

$$A' = ((1 - 1), (1 - 1)) = (0,0),$$

$$B' = (3 - 1, 5 - 1) = (4,3), \quad e$$

$$C' = (7 - 1, 2 - 1) = (6,1)$$

e então a área do triângulo ABC é dada por

$$S = \frac{1}{2} \cdot \left| \det \begin{bmatrix} x_{B'} & y_{B'} \\ x_{C'} & y_{C'} \end{bmatrix} \right| = \frac{1}{2} \cdot \left| \det \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 1 \end{bmatrix} \right| = \frac{1}{2} \cdot |2 \times 1 - 6 \times 4| = |-11| = 11$$

3.5- Propriedades dos determinantes utilizando a visão geométrica

Como foi elaborado no capítulo 2, faremos aqui uma interpretação geométrica das propriedades dos determinantes de 2ª ordem através de exemplos. O professor, dependendo da turma, poderá fazer estas interpretações como foi feito no capítulo 2.

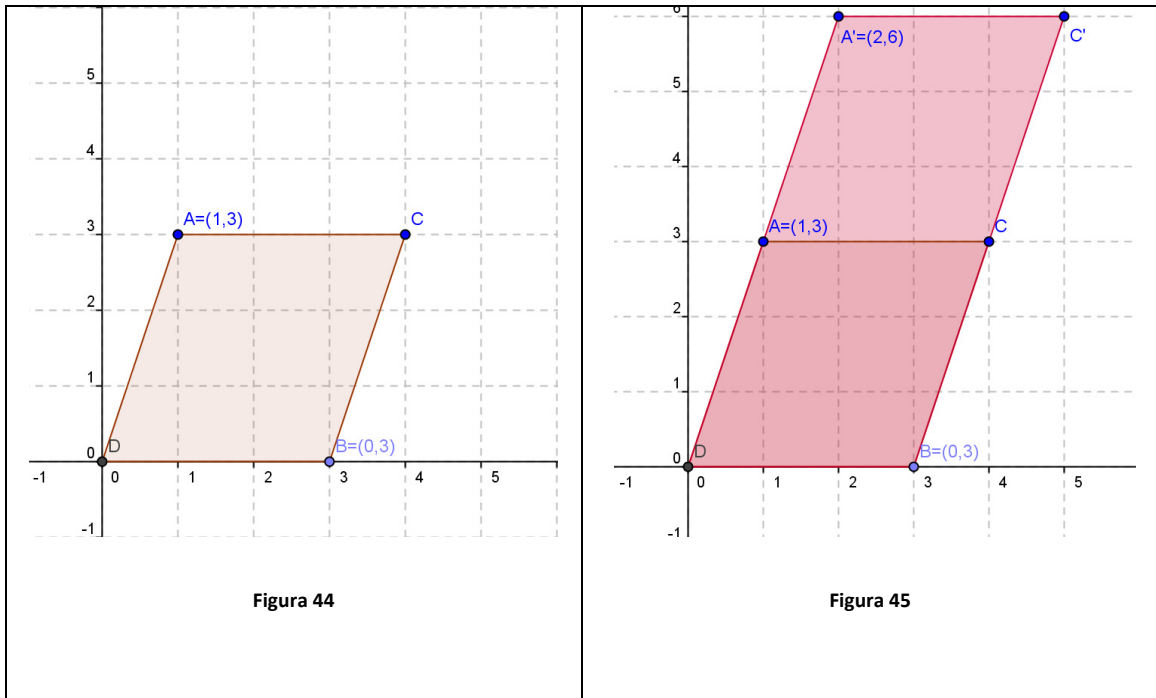
A sequência sugerida a seguir poderá ser feita no segundo ano do Ensino Médio desde que os alunos tenham os pré-requisitos que destacaremos a seguir na forma de uma exposição feita pelo professor

Objetivo: Fornecer aos estudantes uma interpretação geométrica das propriedades dos determinantes de 2ª ordem a partir da representação das matrizes 2x2 como um paralelogramo e o módulo do seu determinante como a área deste paralelogramo.

Pré-requisitos: Localização de pontos no plano cartesiano, representação das linhas de uma matriz $M_{2 \times 2}$ como 2 pontos A e B do plano, desenho do paralelogramo $OACB$, interpretação da área como módulo do determinante da matriz M .

Propriedade 1: *Dada uma matriz $A_{2 \times 2}$ e se uma linha é multiplicada por um número real k então o valor do determinante de A também é multiplicado pelo mesmo valor k .*

Dadas as matrizes $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$, e $A' = \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$ o professor dever representar as matrizes pelos paralelogramos das figuras (44) e (45) e destacar que a 1ª linha foi multiplicada por $k = 2$ e $\det(A) = -9$ e temos agora que $\det(A') = -18 = 2 \det(A)$.



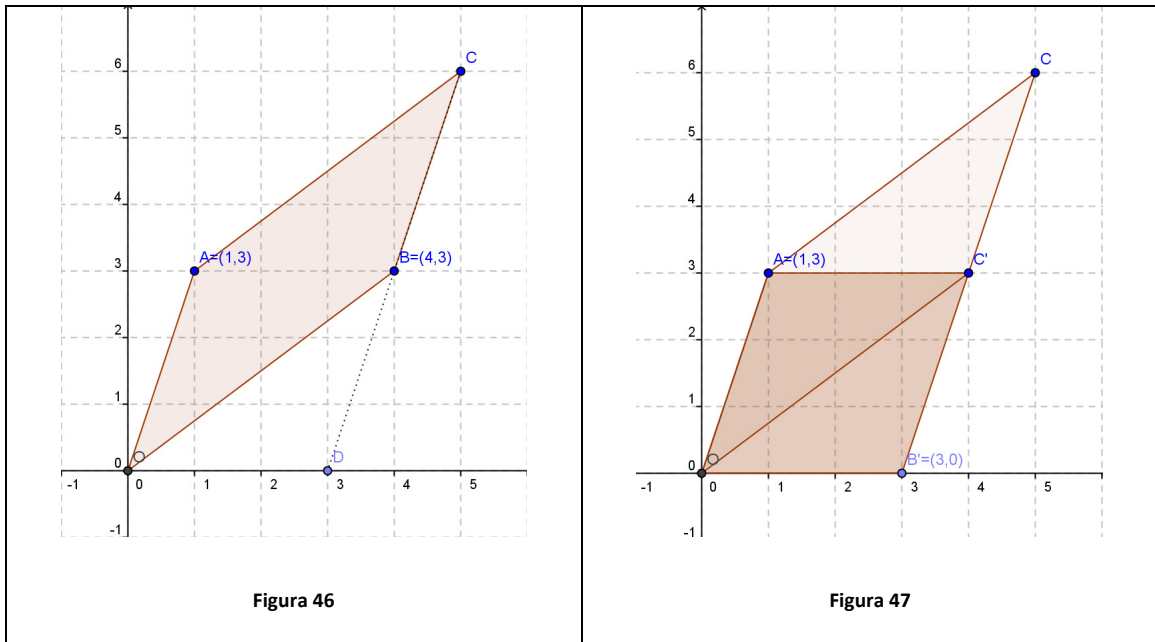
O professor poderá sugerir alguns exercícios em crescente grau de dificuldades.

Propriedade 2: Dada uma matriz A 2×2 se acrescentamos à 2ª linha um múltiplo da primeira linha então o determinante não se altera. Analogamente, se acrescentamos a 1ª linha um múltiplo da 2ª linha o determinante também não se altera.

Nesta propriedade o professor poderá propor a seguinte situação

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_2=L_2-L_1} A' = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$$

e destacar que $\det(A) = \det(A') = -9$. Nestas figuras o paralelogramo da figura (47) é obtido da figura (46) deslocando os pontos D e A paralelamente a base OB e mantendo a altura do paralelogramo, e por isso suas áreas são iguais.



Propriedade 3: Dada uma matriz $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ se trocamos a ordem de duas linhas da matriz A então o determinante de A troca de sinal.

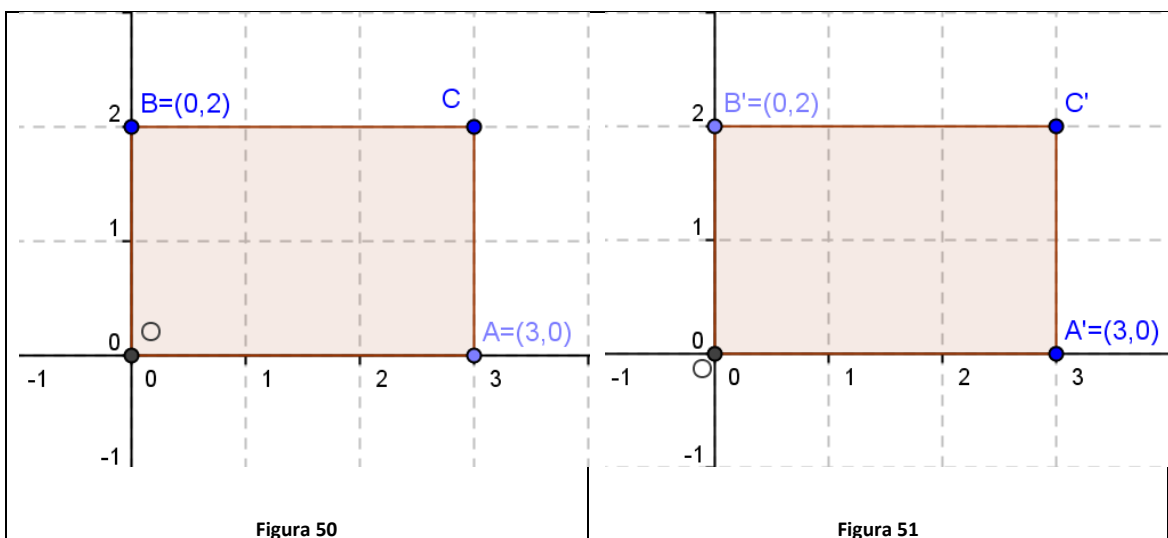
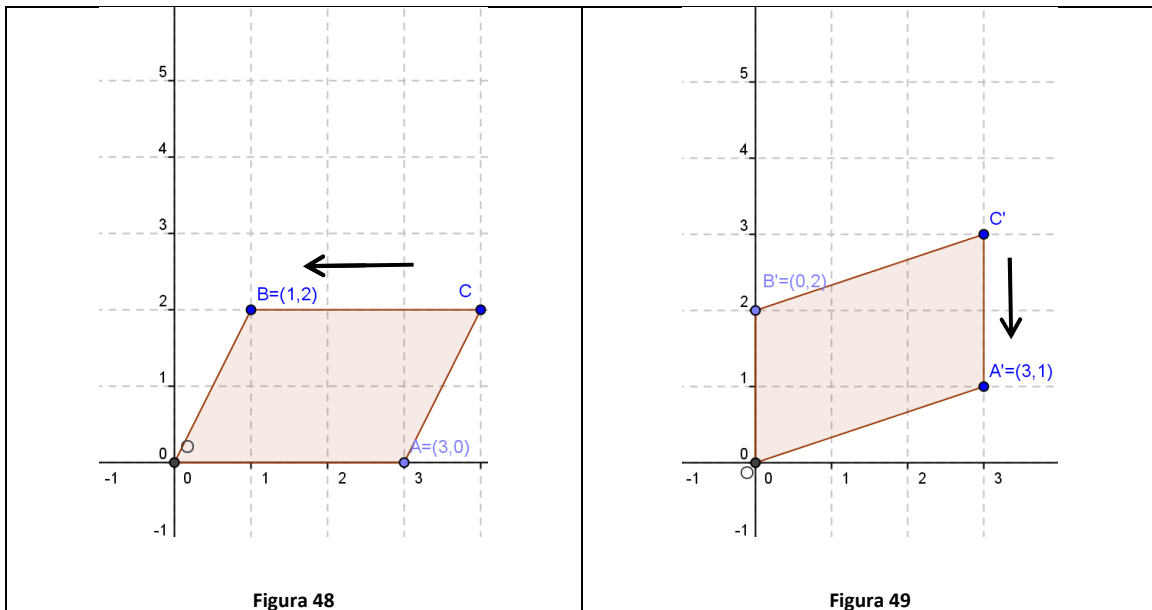
Neste caso os paralelogramos são os mesmos e portanto não é evidente a transformação geométrica pois as áreas das figuras são iguais nos dois casos.

Fica a critério do professor falar sobre a mudança de orientação do giro do segmento OA para OB no sentido do menor ângulo (menos de 180°) mudar do sentido horário ou anti-horário ou ao contrário. O conceito de orientação em geometria é bastante delicado e é muito comum encontramos explicações errôneas.

Propriedade 4:- Dada uma matriz $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ então se trocamos as linhas da matriz pelas colunas obtemos a matriz transposta $A^t = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$ e o determinante de A e A^t são iguais.

Neste caso o professor pode fazer em sala de aula somente casos em que um dos lados do paralelogramo fique paralelo aos eixos. A discussão do caso geral, como foi descrito no capítulo 2, não é tão imediata.

Dadas as matrizes $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ e $A^t = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ então estas matrizes estão representadas pelos paralelogramos nas figuras (48) e (49). Uma das possíveis explicações seria dizer que cada um dos paralelogramos tem área igual a um retângulo R de lados 2 e 3 como nas figuras (50) e (51):



Conclusão

O desenvolvimento deste trabalho foi motivado por um questionamento do uso da fórmula da área do triângulo, sendo conhecidas as coordenadas dos seus vértices, que é utilizada por quase todos os livros didáticos do Ensino Médio no ensino de geometria analítica. Esta fórmula é utilizada também para se obter a condição de alinhamento de três pontos bem como para se obter a equação da reta por dois pontos dados.

O questionamento que se fez foi que esta fórmula é utilizada, em geral, sem justificativas, dando a impressão de que ela é um postulado da geometria analítica. A justificativa desta fórmula, quando aparece no texto, depende de um desenvolvimento algébrico longo.

O objetivo deste trabalho foi apresentar uma proposta de calcular a área de um paralelogramo, dadas as coordenadas de 3 de seus 4 vértices, utilizando-se o módulo do determinante de uma matriz de segunda ordem, e sem utilizar explicitamente o conceito de vetor. Deste modo, dadas as coordenadas dos vértices de um triângulo, a sua área é a metade da área de um paralelogramo gerado pelos seus 3 vértices.

Uma vantagem de se interpretar o módulo do determinante de uma matriz de 2ª ordem como a área de um paralelogramo, como está proposto neste trabalho, é a de se poder dar uma interpretação geométrica para as propriedades algébricas dos determinantes que são ensinadas no Ensino Médio. Deste modo, pode-se correlacionar os conceitos algébricos com conceitos geométricos que é um dos objetivos da geometria analítica.

Na maioria das coleções didáticas de matemática para o Ensino Médio o tópico de determinante precede ao tópico geometria analítica, pois é esperado ensinar os determinantes no 2º ano e a geometria analítica no 3º ano. A sequência didática proposta neste trabalho, permite ao professor apresentar aos estudantes do 2º ano do Ensino Médio a interpretação geométrica do determinante como a área de um paralelogramo independente dos conteúdos da geometria analítica, pois o estudante só necessita do conhecimento de coordenadas de pontos no plano cartesiano. O professor poderá apresentar aos estudantes do 3º ano o conceito de área de um paralelogramo, utilizando o determinante de uma matriz de 2ª ordem, como está proposto neste trabalho, de forma independente da interpretação geométrica das propriedades dos determinantes, pois os dois tópicos são independentes.

Muito embora não tenhamos testado esta proposta em sala de aula no Ensino Médio, acreditamos que a interpretação geométrica do determinante de 2ª ordem vem enriquecer o seu significado, sem a necessidade de introduzir conceitos matemáticos novos, e é uma alternativa também significativa para o ensino da geometria analítica.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

GIOVANI, J. R., et all, *Matemática Fundamental 2º grau – Volume Único*. São Paulo: FTD, 1994.

LEHMANN, C.H. *Geometria Analítica*. México: Noriega Editores, 1989.

LIMA, E. L. *Geometria Analítica e Álgebra Linear – 2ª edição*. Rio de Janeiro: IMPA, 2011.

MACHADO, A. S., *Álgebra Linear e Geometria Analítica – 2ª edição*. São Paulo: Atual, 1982.

SEDMS, Referencial Curricular da Rede Estadual de Ensino de Mato Grosso do Sul – Ensino Médio. Campo Grande - MS, 2012.

STEINBRUCH, A., WINTERLE, P. *Geometria Analítica – 2ª edição*. São Paulo: McGraw-Hill, 1987.

YOUSSEF, A. N., *Matemática: Ensino Médio – volume único*. São Paulo: Scipione, 2005.