UNIVERSIDADE FEDERAL DA GRANDE DOURADOS
Faculdade de Ciências Exatas e Tecnologia
Mestrado em Matemática – PROFMAT

CONSTRUÇÃO E MANIPULAÇÃO DE ESTRUTURAS ALGÉBRICAS NOTÁVEIS DO ENSINO FUNDAMENTAL: CAMPOS CONCEITUAIS, AMBIENTES DE ENSINO E DE APRENDIZAGEM E PROPOSTAS METODOLÓGICAS

VALDEMIR CONTIERO

DOURADOS - MS
Abril/2014

UNIVERSIDADE FEDERAL DA GRANDE DOURADOS
Faculdade de Ciências Exatas e Tecnologia
Mestrado em Matemática – PROFMAT

VALDEMIR CONTIERO

CONSTRUÇÃO E MANIPULAÇÃO DE ESTRUTURAS ALGÉBRICAS NOTÁVEIS DO ENSINO FUNDAMENTAL: CAMPOS CONCEITUAIS, AMBIENTES DE ENSINO E DE APRENDIZAGEM E PROPOSTAS METODOLÓGICAS

Dissertação apresentada ao final do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT da Universidade Federal da Grande Dourados (UFGD) como exigência parcial para a obtenção do título de Mestre em matemática.

DOURADOS - MS
Abril/2014

DEDICATÓRIA

Dedico esse trabalho a meu Pai, Nelson, que não está mais entre nós, pelo menos fisicamente, a minha Mãe Ignês e às minhas queridas amigas Cleunice, Maricléia e Rejane pelo carinho com que apoiaram o meu recomeço.

AGRADECIMENTOS

Ao meu orientador, Prof. Dr. Sergio Rodrigues, pelo acompanhamento, presteza e orientação.

Aos professores da Universidade Federal da Grande Dourados – UFGD que atuam no Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, pelas instruções oferecidas, apoio e compreensão nos momentos difíceis.

Aos diretores da Escola Estadual Fernando Corrêa da Costa, município de Rio Brilhante-MS, pelo apoio e liberação parcial da minha carga horária semanal de trabalho sempre que a dedicação ao PROFMAT teve de ser prioridade.

Por fim, agradeço à Sociedade Brasileira de Matemática – SBM pelo oferecimento deste Curso em Rede Nacional e a CAPES pelo apoio financeiro.

RESUMO

Neste trabalho apresentamos uma proposta metodológica para o ensino e a aprendizagem de estruturas algébricas notáveis, que foi desenvolvida pelo autor enquanto Coordenador Pedagógico da Área de Matemática em uma escola na cidade de Rio Brilhante, estado de Mato Grosso do Sul, nos anos de 2012 e 2013 e, experimentada por um grupo de professores que atuam nos oitavos e nonos anos do Ensino Fundamental, no ano de 2013. A proposta tem como objetivo propor materiais e situações didático-pedagógicas que oportunizem aos professores e alunos o reconhecimento da geometria plana como um campo conceitual e os meios de explorá-lo num ambiente de ensino e de aprendizagem para a construção significativa de estruturas algébricas notáveis e para a elaboração de métodos consistentes de manipulação dessas estruturas

Palavras Chaves: Estruturas algébricas notáveis. Campo Conceitual. Ambiente de Ensino e de Aprendizagem.

ABSTRACT

In this work we present a methodology for teaching and learning of remarkable algebraic structures, which was developed by the author while Pedagogical Coordinator of the Mathematics in a school in Rio Brilhante, state of Mato Grosso do Sul in 2012 and 2013 and experienced by a group the teachers who work in the eighth and ninth years of elementary school, in 2013. The proposal aims to propose materials and didactic-pedagogic situations that create opportunities for teachers and students to recognize the flat geometry as a conceptual field, and the means to exploit it, an environment of teaching and learning for meaningful construction for the development of consistent methods of manipulating these structures.

Key - Words: Remarkable Algebraic Structures. Conceptual Field. Environment for Teaching and Learning.

LISTA DE FIGURAS

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Em um longo período atuando em sala de aula no Ensino Médio como professor de matemática e em algumas experiências de assessoria pedagógica, supervisionando e orientando grupos de professores e alunos, frequentemente nos deparamos com alunos que apresentam grandes dificuldades em compreender e efetuar manipulações algébricas básicas.

Na função de docente e em avaliações diagnósticas de início de ano escolar aplicadas em turmas do 1º ano do ensino médio e no decorrer do ano letivo durante as atividades de sala de aula, raramente observamos alunos com habilidades para desenvolver um quadrado da soma ou da diferença de dois termos em um trinômio quadrado perfeito. A maioria dos alunos apresenta soluções do tipo: $(a + b)^2 = a^2 + b^2$ e, aquele que conclui de forma correta, apresenta uma solução com base na aplicação da propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição. E, nas tarefas de fatoração e de completar quadrado, este procedimento único não auxilia muito.

As dificuldades também são observadas em momentos do nono ano do Ensino Fundamental, quando a proposta do programa sugere trabalhar a resolução de equações do 2º grau através do método de completar quadrado; e no terceiro ano do Ensino Médio, diante dos conteúdos da Geometria Analítica, como nas equações gerais de cônicas.

Ainda como docente, tenho o hábito de solicitar aos alunos para trazerem cadernos de anos anteriores, principalmente aos procedentes de outras unidades escolares (comum nos primeiros anos do Ensino Médio) para verificar os processos utilizados por eles quando trabalharam com os produtos notáveis e com a fatoração de expressões resultantes desses produtos. Praticamente em todos os casos encontramos elencos de questões similares, cujas resoluções exigem apenas a repetição da aplicação da propriedade distributiva e da reprodução de fórmulas e regras, não contendo situações problemas e nem contextos que levem os alunos a criarem conjecturas e seus próprios métodos conclusivos.

A verdade é que os nossos alunos estão chegando ao Ensino Médio desprovidos de habilidades e competências que o nível de ensino exige. Decorrem dessa realidade resultados desprezíveis. Nos primeiros anos do Ensino Médio, por exemplo, desta escola, o índice de reprova do ano de 2013 superou os 35% e o de abandono, os 15%. Um dos fatores causadores destes resultados, segundo os alunos, é o fato de não conseguirem entender a "matéria".

É fundamental que a escola, através de sua equipe gestora, pedagógica e docente, desenvolva ações investigativas, interventivas e avaliativas processuais, visando compreender/conhecer, agir e transformar práticas e resultados insatisfatórios.

Sabemos que são muitos os fatores que se integram para a efetivação de um processo de ensino e de aprendizagem. Um não supre o outro e nenhum é tão completo que é suficiente por si só. O Projeto Político Pedagógico[1] – PPP da nossa escola ressalta essa observação.

> [...] Com um bom conjunto de indicadores tem-se, de forma simples e acessível, um quadro de sinais que possibilita identificar o que vai bem e o que vai mal na escola**,** de forma que todos tomem conhecimento e tenham condições de discutir e decidir as prioridades de ação para melhorá-lo. Vale lembrar que esta luta é de *responsabilidade de toda a comunidade*: pais, mães, professores, diretores, alunos, funcionários, conselheiros tutelares, de educação, dos direitos da criança, ONGs, órgãos públicos, universidades, enfim, toda pessoa ou instituição que se relaciona com a escola e se mobiliza por sua qualidade. Educação é um assunto de interesse público.

Um fator que certamente contribuirá para o sucesso escolar dos alunos é a qualidade do trabalho pedagógico desenvolvida em sala de aula. Nesse aspecto, segundo SERRAZINA o professor deve:

> [...] ser um facilitador da aprendizagem significativa dos alunos, gerando conhecimento escolar, uma vez que são os alunos que aprendem e o professor deve ser capaz de criar as melhores condições para que isso aconteça; ser um investigador dos processos de ensino/aprendizagem que acontecem na sua turma, gerando assim conhecimento profissional; ser um constante construtor do currículo, conduzindo experiências com seus alunos, refletindo sobre elas e

> reformulando-as; ser um gerador de conhecimento didático significativo ao investigar sobre os processos de desenvolvimento do currículo.

Desta forma, de um duplo pensamento a nossa proposta se originou e foi conduzida: um está no próprio fazer matemático do professor, ou seja, o quanto de matemática e que tipo de matemática precisamos saber para desenvolvermos um bom trabalho e, o outro, está no fazer pedagógico, de como trabalhar a matemática com nossos alunos.

Modificar e/ou criar um bom ambiente de aprendizagem para aprender matemática pode ser o início de uma transformação. Segundo Ponte e Serrazina (2000), o ambiente de aprendizagem é caracterizado pelo maior ou menor envolvimento dos alunos no trabalho e pela rigidez ou informalidade nas relações entre eles e o professor. Relaciona-se com as tarefas propostas, o tipo de comunicação e negociação de significados, o modo de trabalho dos alunos e a cultura de sala de aula.

> Os professores devem promover a criação de ambientes que encorajem os alunos a formular questões, a fazer conjecturas, a tomar decisões, a argumentar para justificar os seus raciocínios; ambientes em que alunos e professor estejam atentos ao pensamento e raciocínio uns dos outros e funcionem como membros de uma comunidade matemática (SOUSA, 2005).

Na nossa leitura, as práticas pedagógicas executadas nas escolas públicas, tendo como referência a escola onde desenvolvemos esta proposta, primam por relações unilaterais entre professores e alunos. Uma rotina improdutiva paira sobre os domínios das salas de aulas, sufocando a capacidade dos alunos de imaginar, de descobrir e de gostar de matemática.

Superar didáticas é desafiar paradigmas, portanto, é sair da zona de conforto, é confrontar modelos, é bastar-se de insatisfação, é experimentar. Assim, ao construir os campos conceituais e os ambientes de aprendizagens e disponibilizá-los como ferramenta - material didático e como ações didático-pedagógicas para o grupo de professores, estamos provando o entusiasmo, a coragem, o experimento, a possibilidade de reverter o quadro de insucesso escolar dos nossos alunos.

2 CONCEPÇÃO DA PROPOSTA

A oportunidade de atuar como coordenador de matemática proporcionou-me tempo e possibilidades de desencadear ações de estudos internos das causas do baixo desempenho dos alunos na disciplina de matemática e dos fatos da aprendizagem adquirida não ser duradoura. Assim, um grupo de professores da escola foi formado e, em sessões periódicas, os estudos foram acontecendo.

Ao longo dos estudos, concluímos que os motivos do “insucesso” do processo de ensino e de aprendizagem, de um modo geral, são multifatoriais, porém que, o que concerne à instituição escola, especificamente ao papel do professor, mudanças didático-pedagógicas, tornando o processo mais dinâmico, prazeroso e eficaz, deveriam acontecer.

Desta conclusão, começamos a pensar em ambientes e recursos que proporcionassem aos professores e alunos a possibilidade de dar mais vazão às suas criatividades e de dinamizar e enriquecer as atividades de sala de aula.

Poderíamos então utilizar recursos multimídias disponíveis na escola e de domínio da equipe de professores. Desta possibilidade, vários materiais didáticos começaram a ser concebidos, elaborados e testados metodologicamente em sala de aula pelos professores que estavam atuando e participando do grupo de estudos.

Os materiais foram produzidos no editor de slides e animados de modo a dar “vida”, dar significado à estrutura matemática proposta e fornecer ao professor a condição de construir diálogos pertinentes e contextualizados com os alunos.

Os livros didáticos de versões atuais disponíveis na escola e os de uso em sala pelos alunos, utilizam de metodologias e esquemas similares aos que desenvolvemos, porém, são discretos, limitam-se a uma introdução ou a uma ilustração e, portanto, não convencem professores e alunos do seu valor didático, logo, pouco explorados.

Inicialmente construímos um material para desenvolver ideias de números inteiros negativos e positivos e significados para as operações com esses números. Em seguida, elaboramos um material para dar sentido às operações de multiplicação e divisão de números racionais. Lembramos que os nossos alunos do Ensino Médio, quando conseguem, determinam o produto de frações, multiplicando numerador com numerador e denominador com denominador e, o quociente, multiplicando em “X” ou, como dizem, “cruzado”, porém, não têm noção alguma do que estão fazendo. Nos mesmos moldes, outro material produzido foi para trabalhar conceitos e operações básicas de porcentagem. Por fim, elaboramos o material que motivou este trabalho e que está sendo exposto conjuntamente com a metodologia de uso em sala de aula.

3. A PROPOSTA

A proposta tem como objetivo propor materiais e situações didático-pedagógicas que oportunizem aos professores e alunos o reconhecimento da geometria plana como um campo conceitual e, os meios de explorá-lo, um ambiente de ensino e de aprendizagem para a construção significativa de estruturas algébricas notáveis e para a elaboração de métodos *consistentes* de manipulação dessas estruturas**.**

Temos como objetivos especiais propor métodos e materiais didáticos para o ensino de tópicos de álgebra do Ensino Fundamental que possam ajudar na prática pedagógica dos professores e levar o aluno a fortalecer e/ou reelaborar conceitos de quadrado, retângulo e de áreas desses polígonos.

Com esses conceitos, esperamos que os alunos consigam estabelecer relações entre as formas geométricas de um quadrado e de um retângulo e as notações algébricas das medidas de suas dimensões. Tais habilidades irão proporcionar condições de reconhecimento de expressões algébricas notáveis, como o quadrado da soma de dois termos, o quadrado da diferença de dois termos e o produto da soma pela diferença de dois termos.

Esperamos também que os alunos consigam construir expressões que indicam as representações numéricas e algébricas dos quadrados da soma e da diferença de dois termos e do produto da soma pela diferença de dois termos e reconhecer que elas são o trinômio quadrado perfeito e a diferença de dois quadrados, respectivamente, e, que deste processo, desenvolvam procedimento e padrões consistentes de fatoração e de completamento de quadrado de expressões afins.

4. DIMENSÕES FÍSICAS E METODOLÓGICAS DA PROPOSTA

A proposta se fundamenta na aspiração de produzir conhecimentos significativos e consistentes relacionados à construção e a manipulação de estruturas algébricas. Para tanto, propomos a reformulação das dinâmicas de sala de aula e a criação de mecanismos de motivação dos alunos para a aprendizagem em questão.

Novos ambientes de aprendizagem podem quebrar rotinas improdutivas e despertar o ânimo e ser construídos, por exemplo, com o simples fato de se deslocar com os alunos para a sala de tecnologia ou levar para a sala de aula materiais/equipamentos que não são de uso freqüente. A curiosidade dos alunos ao notarem algo diferente já é uma predisposição à aprendizagem.

A nossa proposta sugere a reformulação dos conceitos de quadrado, retângulo, dimensão, perímetro, área, expressão numérica e expressão algébrica e a inserção deles em diversas situações problemas. O conjunto destas situações e dos esquemas elaborados para estabelecer relações entre estes conceitos e proporcionar a migração da linguagem e representações geométricas para as algébricas formam os ***campos conceituais*** da proposta.

Os recursos multimídias, através dos quais é possível construir, animar, deslocar, ampliar, reduzir e suprimir figuras geométricas (quadrados e retângulos), as atitudes didático-pedagógicas dos professores durante a condução dos trabalhos e as atividades propostas formam os ***ambientes de ensino e de aprendizagem***.

Da junção destas duas dimensões emergem-se as dinâmicas da proposta. Com os benefícios da tecnologia as dinâmicas, ganham caráter lúdico e imprimem rotinas prazerosas de ensino e da aprendizagem. As figuras geométricas ganham “vida” em forma e em ritmo e a extração das expressões algébricas do campo geométrico flui naturalmente.

4.1 EXPOSIÇÃO DA CONSTRUÇÃO DOS CAMPOS CONCEITUAIS E DAS FORMAS DE EXPLORÁ-LOS METODOLOGICAMENTE

Os campos conceituais são compostos por um aporte 65 slides e foram elaborados metodologicamente (conceitos, linguagem utilizada, momentos e ritmos dos movimentos, sugestões de diálogos, observações e conclusões de padrões algébricos) para construir expressões algébricas notáveis e desenvolver padrões algébricos para manipulá-las. Mostraremos a seguir, os contextos nos quais o material foi elaborado, os conceitos desenvolvidos e as orientações metodológicas para ser utilizados pelo professor em sala de aula.

4.1.1 CONCEITOS DE MEDIDAS ÁREA.

Utilizando-se de recursos tecnológicos, editor de slides e projetor multimídia, os polígonos são desenhados, modificados, movimentados e projetados sincrônico e objetivamente com o propósito da aula.

Inicialmente reelaboramos os conceitos de quadrado, retângulo e de área, pois serão utilizados em todos os casos. Como a proposta é para alunos do Ensino Fundamental e a finalidade é a compreensão da estrutura algébrica, para conceituar área, utilizamos apenas medidas expressas com números naturais.

Desenhamos um quadrado de dimensões razoavelmente grandes (Figura 1) e, assim que ele é projetado/apresentado para os alunos, trabalhamos os seus conceitos. Em seguida, em um movimento, aparece na projeção, ao lado do quadrado já apresentado, um quadrado de dimensões menores e que é convencionado de unidade, ou seja, um quadrado de lado igual a 1. Para Facilitar a comunicação, convenciona-se também que a unidade a ser trabalhada é o centímetro. Então, no caso, tem-se que o quadrado de lado 1 cm ocupa no espaço uma superfície equivalente a $1cm^2$, ou seja, um quadro de 1cm de lado. Seguindo, também em movimentos acionados pelo professor, o “quadradrinho” é copiado várias vezes e deslocados de forma que eles passem a ocupar o espaço do quadrado maior (figura 1). Assim que ele estiver totalmente preenchido concluímos, através do processo de comparação, quantas vezes o quadrado de $1cm^2$ coube nele e, o número que representa está quantidade é a ***área do quadrado***. Desta forma construímos os conceitos de medidas de área com os alunos.

Ilustrando:

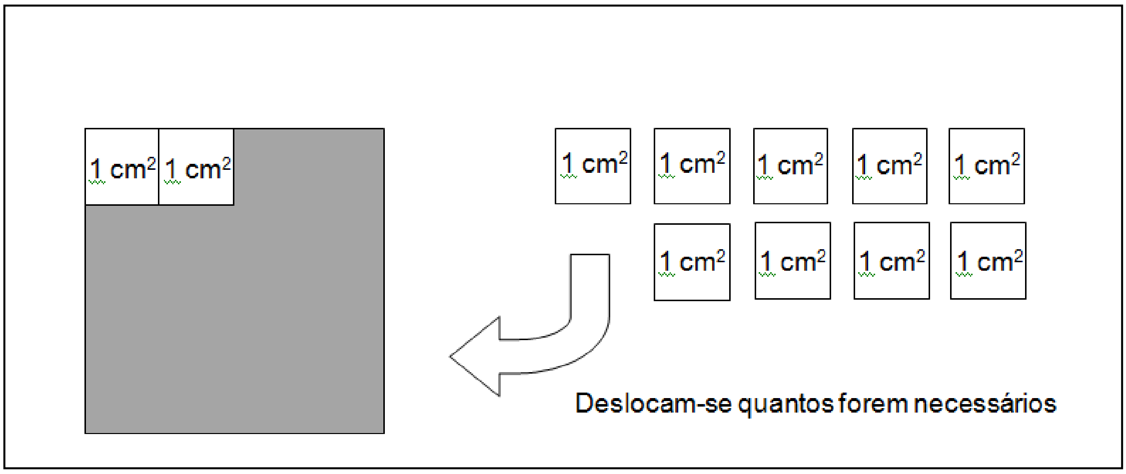


Figura 1

Durante todo o processo, a fim de exercitar o raciocínio e formular conclusões, antes de o professor comandar cada movimento das figuras, ele deve provocar a turma com conjecturas e criar expectativas dos resultados. O roteiro do material foi preparado para proporcionar a dinâmica com os diálogos.

Após concluir o preenchimento do quadrado (figura 1), o professor deve proporcionar aos alunos a possibilidade de concluir que a superfície do quadrado fica tomada por 4 fileiras horizontais com 4 “quadradinhos” (figura 2) cada. Logo, a área do quadrado pode ser representada pelo produto de 4 por 4, ou seja, 4 x 4. Ainda, como o “quadradinho” tem lado de medida igual a 1 cm, uma fileira de 4 quadradinhos equivalerá a 4 cm, ou seja, o lado do quadrado cuja superfície está sendo medida, mede 4 cm. Logo, a área deste quadrado é 4 cm x 4 cm = 16 cm^2. Vejamos a figura:

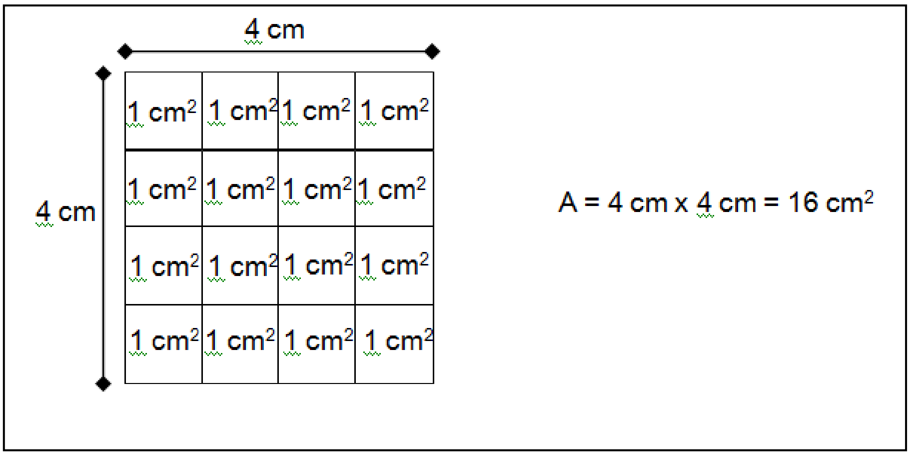


Figura 2

Neste momento o professor e os alunos têm um campo e um ambiente prontos para elaborar um procedimento geral de cálculo de área de um quadrado.

Para calcular a área de um retângulo a ideia é análoga a da utilizada para o quadrado e exposta acima.

4.1.2 A IDEIA DO QUADRADO DA SOMA DE DOIS TERMOS E DO TRINÔMIO QUADRADO PERFEITO E CONCEITOS DE EXPRESSÃO NUMÉRICA E ALGÉBRICA.

Tendo os alunos os conceitos de quadrado e de retângulo e de suas áreas bem elaborados, o professor propõe um campo conceitual para a construção do quadrado da soma de dois termos e do trinômio quadrado perfeito. Com o material pronto (slides editados) e com a ajuda dos recursos multimídias (projetor multimídia, computador e tela de projeção) o ambiente para a ação fica pronto.

Inicialmente o professor projeta uma figura representando um quadrado com dimensões conhecidas, por exemplo, um quadrado de lado igual a 5 cm (caso particular). Com a figura projetada, iniciamos também o diálogo entre professor e alunos, fundamental para o processo. Neste caso, o professor conjectura sobre área do quadrado para verificar se os alunos assimilaram os conceitos de área. Concluindo sobre a área do quadrado projetado, o professor faz a projeção mostrado a medida, assim:

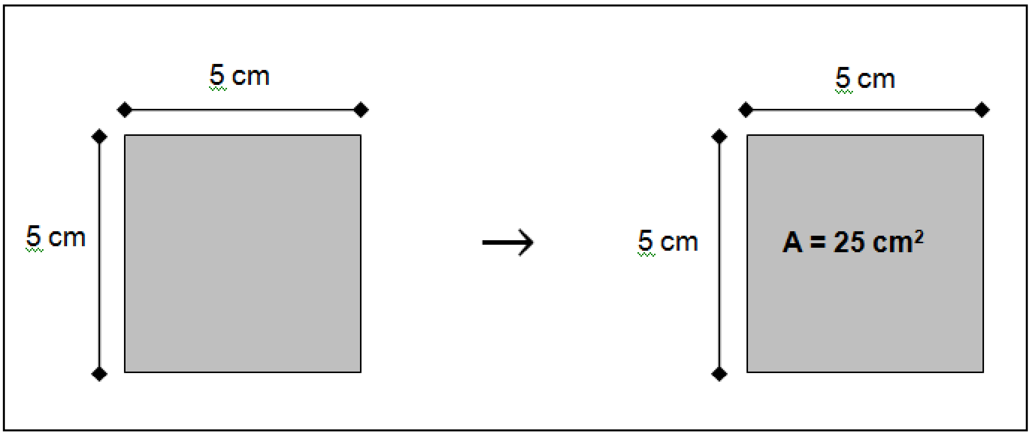


Figura 3

Continuando o processo, o professor propõe a expansão do quadrado, por exemplo, em 2 cm para a direita (dimensão horizontal) e dois cm para baixo (dimensão vertical) e diz para os alunos que deseja (propósito) que a figura, após a expansão, continue sendo um quadrando. Assim feito, o ambiente sugere novas conjecturas e que devem ser exploradas pelo professor. Por exemplo*: será que o fato de expandir o quadrado dado lateralmente, produz no final um novo quadrado*? Assim que o diálogo terminar, o professor projeta a expansão e compara a figura com as conclusões.

Vejamos através da ilustração como fica a figura da situação:

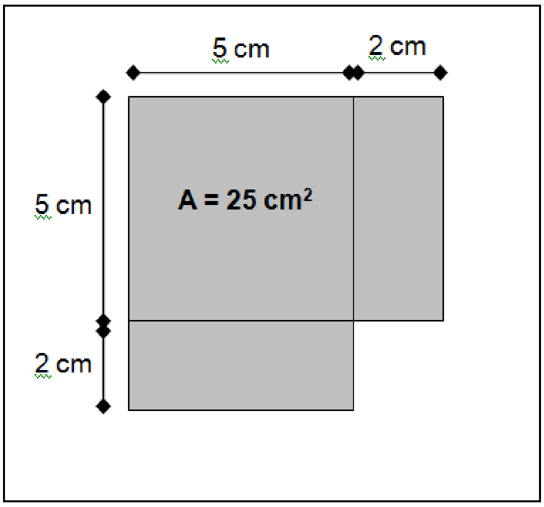


Figura 4

Como no início é sugerido para o professor trabalhar os conceitos de quadrado e de retângulo, esperamos que os alunos identifiquem as figuras resultantes da expansão e suas dimensões, inclusive a medida de suas áreas. Isto também deve ser feito pelo professor através de questionamentos aos alunos (exposição dialogada).

Concluído, o professor faz a projeção e continuam as conjecturas sobre a forma da nova figura.

Vejamos a figura:

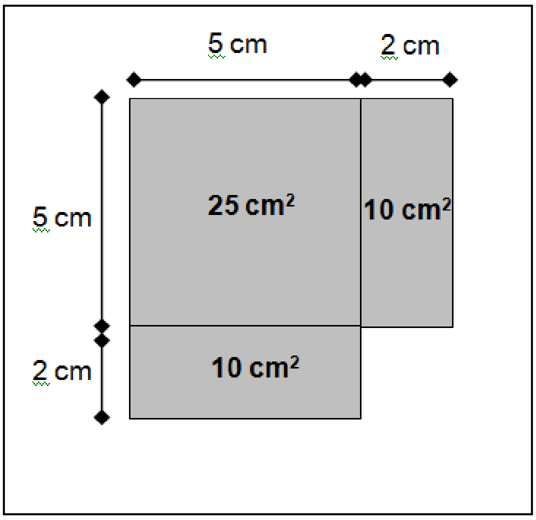


Figura 5

Visualmente (recursos que o material proporciona), com os conceitos trabalhados e com os diálogos desencadeados pelo professor, esperamos que os alunos concluam que a nova figura (figura 5) não representa um quadrado. Esperamos também que os alunos notem que o espaço que falta para a nova figura se tornar um quadrado é uma superfície quadrada e que a medida do lado desta superfície coincide (equivale) com a medida do menor lado do retângulo, portanto, um quadrado de lado de medida igual a 2 cm, ou seja, um quadrado de área igual a $4cm^2$. Vejamos as figuras:

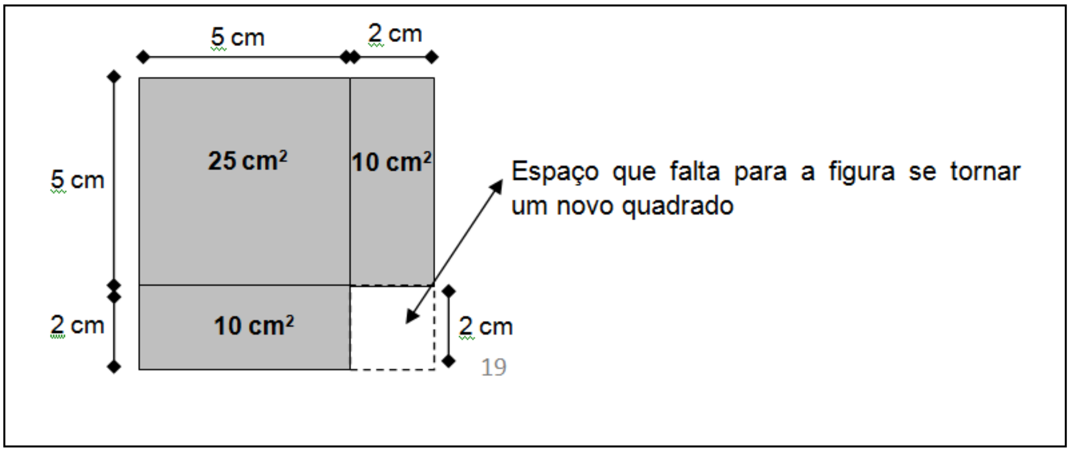


Figura 6

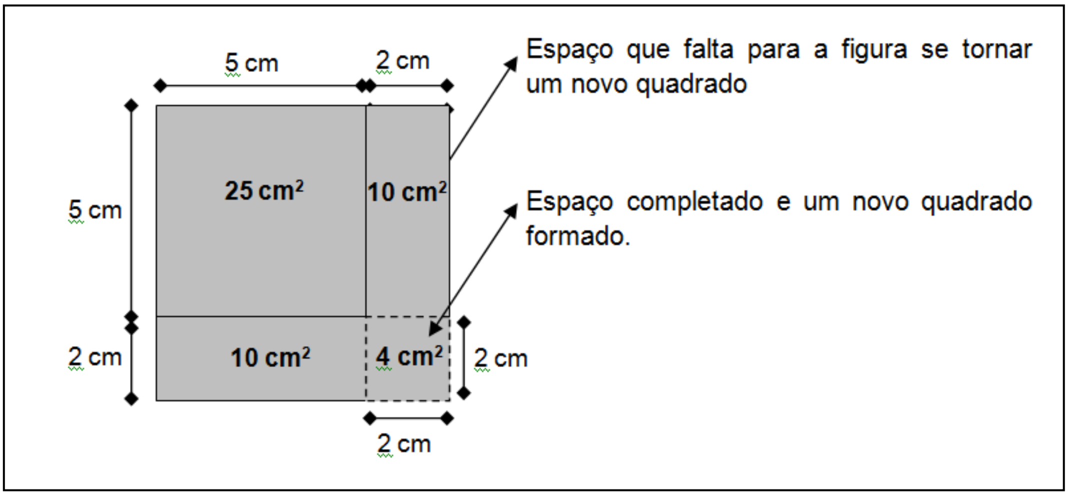


Figura 7

Após a projeção do quadrado que complementa a figura, o professor sintetiza as informações e elabora uma sentença matemática para representar a área do novo quadrado. A sequência da construção da figura, os números utilizados para representar as dimensões e as operações que possuem as propriedades de expandir (aumentar) e complementar devem dar sentido à construção da expressão.

Estruturando a expressão:

- Figura inicial: quadrado de lado igual a 5 cm e área igual a 25 cm^2.
- Figuras aumentadas (resultado da expansão): 2 retângulos de dimensões 5 cm x 2 cm cada, logo, de área igual a 10 cm^2.

- Figura acrescentada para complementar o quadrado: quadrado de lado igual a 2 cm, logo, de área igual a 4 cm^2.

Concluindo, a área da figura resultante da expansão e do completamento tem a seguinte expressão matemática:

$$25\ cm^2 + \underbrace{10\ cm^2 + 10\ cm^{\ 2}}_{\text{Área dos dois retângulos}} + 4\ cm2\ \ =\ \ 25\ cm^2 + 20\ cm^2 + 4\ cm^2$$

Tirando as unidades para facilitar a compreensão, temos:

25 + 10 + 10 + 4 = 25 + 20 + 4

Composição da expressão com as figuras:

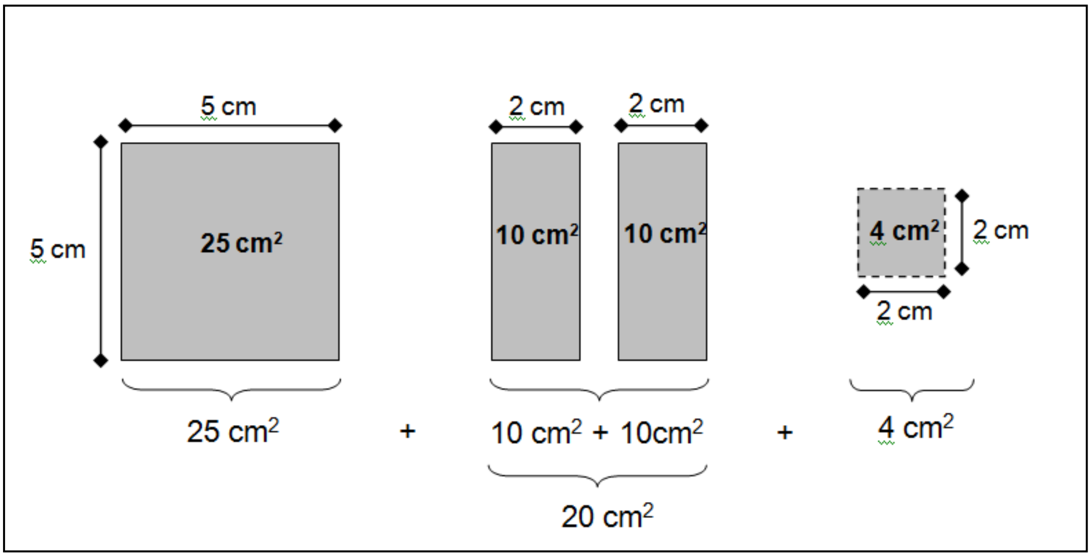


Figura 8

Para a compreensão da estrutura é fundamental que o aluno perceba que a expressão é composta pelas áreas de ***dois quadrados*** e pela soma das áreas de ***dois retângulos congruentes***.

Para dar mais sentido à construção e validar a expressão, o professor deve questionar os alunos sobre a área do quadrado resultante (5 + 2) cm x (5 + 2) cm = 7 cm x 7 cm = **49 cm^2** e sobre o valor total da expressão numérica 25 cm^2 + 20 cm^2 + 4 cm^2 = **49 cm^2.**

Estando construída a sentença, o momento é oportuno para conceituar ***expressão numérica***. O professor mostra para os alunos que a sentença matemática construída possui três termos numéricos e sinal da operação adição. O professor pode expor mais exemplos com outros números e operações.

Cópia do último slide desta sequência:

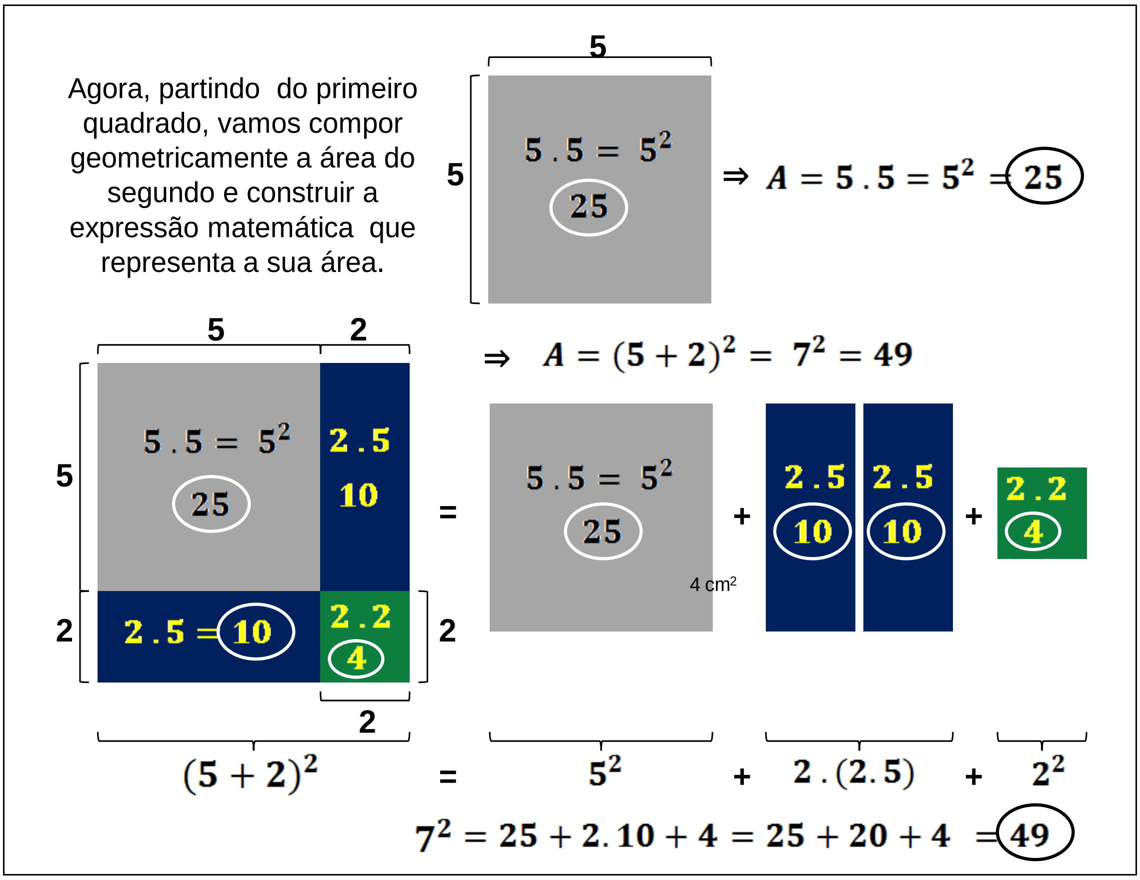


Figura 9

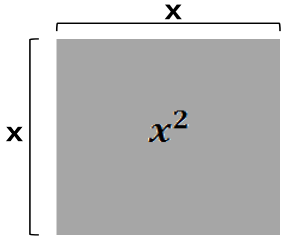
Observados os campos construídos com as figuras, especialmente a figura 7, notamos que a medida do lado do quadrado é dada pela soma de duas medidas: 5 cm e 2 cm, ou seja, (5 + 2) cm. Logo, sendo a figura um quadrado, temos o ***quadrado da soma de dois termos***. Observamos também que a expressão numérica que representa a área total deste quadrado possui três termos, portanto, um trinômio, Assim, ***trinômio quadrado perfeito*** é a expressão matemática que representa a área de um quadrado que foi expandido e completado perfeitamente para continuar sendo um quadrado.

Para construir **expressões algébricas**, seguem roteiros e esquemas análogos aos que foram apresentados acima.

A sequencia de slides mostra a construção de uma expressão algébrica. O **trinômio quadrado perfeito** com uma dimensão genérica.

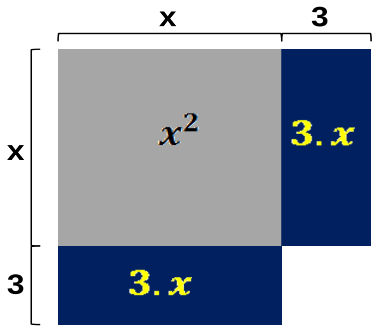
■ **Situação 2** - Tomemos agora um quadrado de dimensões genéricas:

Assim:



$\Rightarrow \quad A = x^2$

Agora vamos aumentá-lo, acrescentando 3 unidades para a direita e três para baixo, assim:



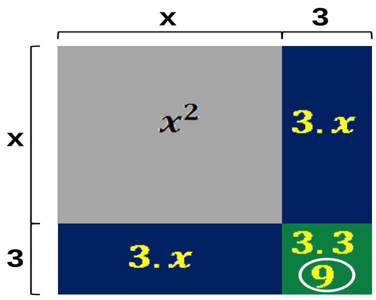
*Podemos observar que apesar das duas dimensões terem sido expandidas igualmente, não obtivemos "ainda" um novo quadrado. Para ter é necessário efetuar um **completamento** na figura.*

E, que figura deverá ser utlizada para completar o quadrado e quais são as suas dimensões?

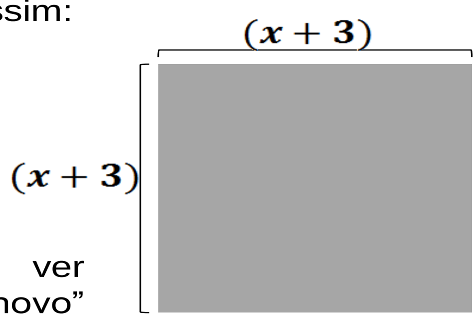
Isto: será um quadrado de lado igual a 3.

Vejamos, então:

Figura 10



Agora sim temos um novo quadrado e podemos representá-lo assim:



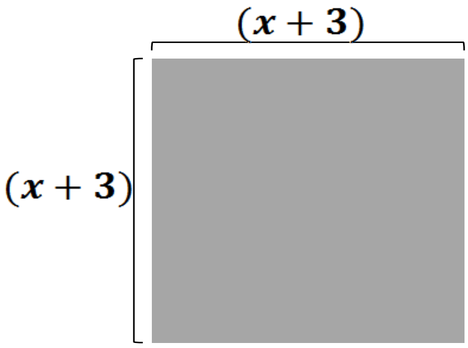
Para concluir, vamos ver como fica a área deste "novo" quadrado:

Já sabemos que a área de um quadrado (região plana ocupada por ele) é calculada multiplicando a medida de uma dimensão pela medida da outra dimensão, porém, como elas são iguais (lados iguais), basta elever ao quadrado a medida do lado do quadrado, certo? Assim:

$$A = l^2.$$

Figura 11

Então, a área do quadrado em questão, cujo lado mede (x + 3), pode ser representada da seguinte forma:



$$A = l^2.$$

$$A = (x+3)^2$$

Lembramos que “x” representa um valor genérico, ou seja, a medida do lado de um quadrado qualquer, como na origem da nossa situação.

Vamos ver agora como desenvolver a expressão $(x + 3)^2$:

Para facilitar a compreensão e considerando que a nossa interpretação é geométrica, vamos voltar ao quadrado expandido e “desmontá-lo” (decompor).

Figura 12

Assim:

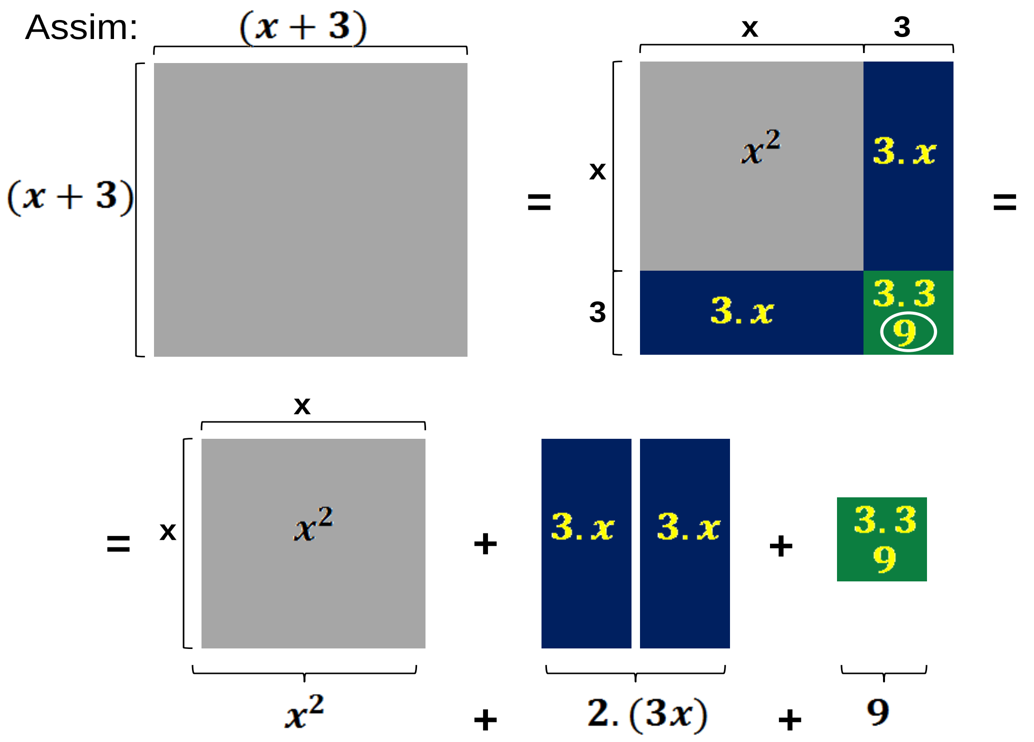


Figura 13

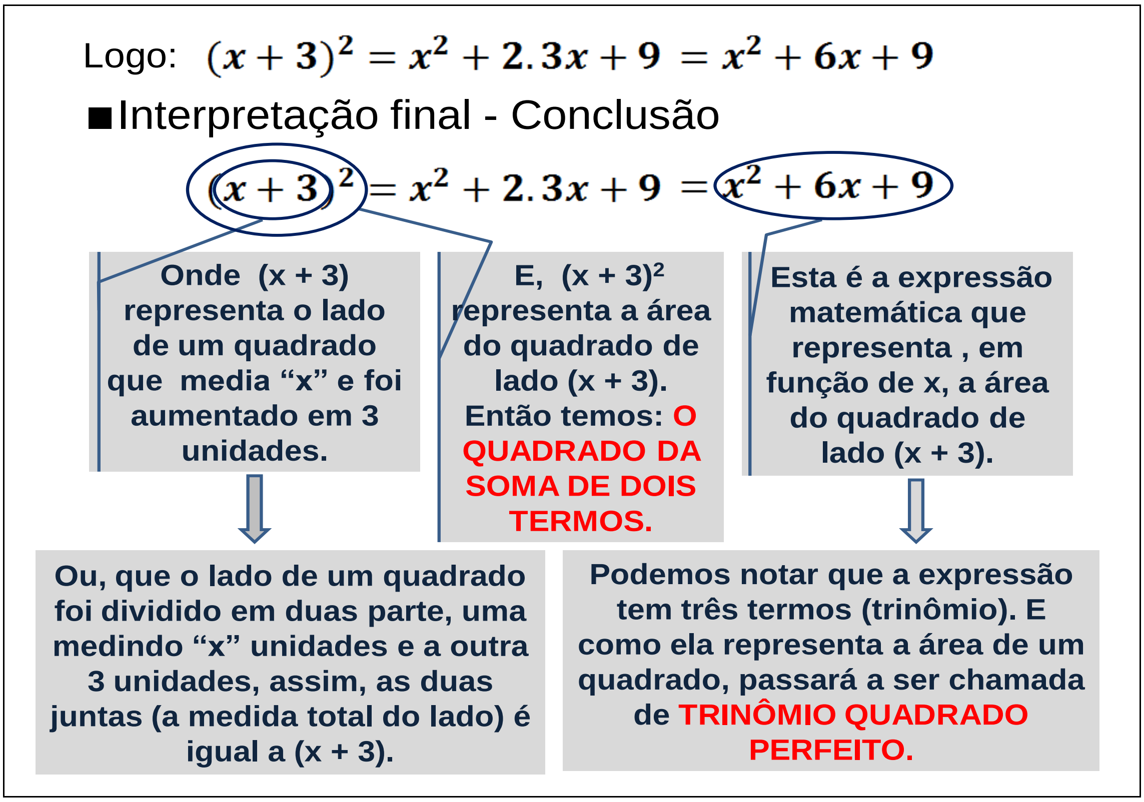


Figura 14

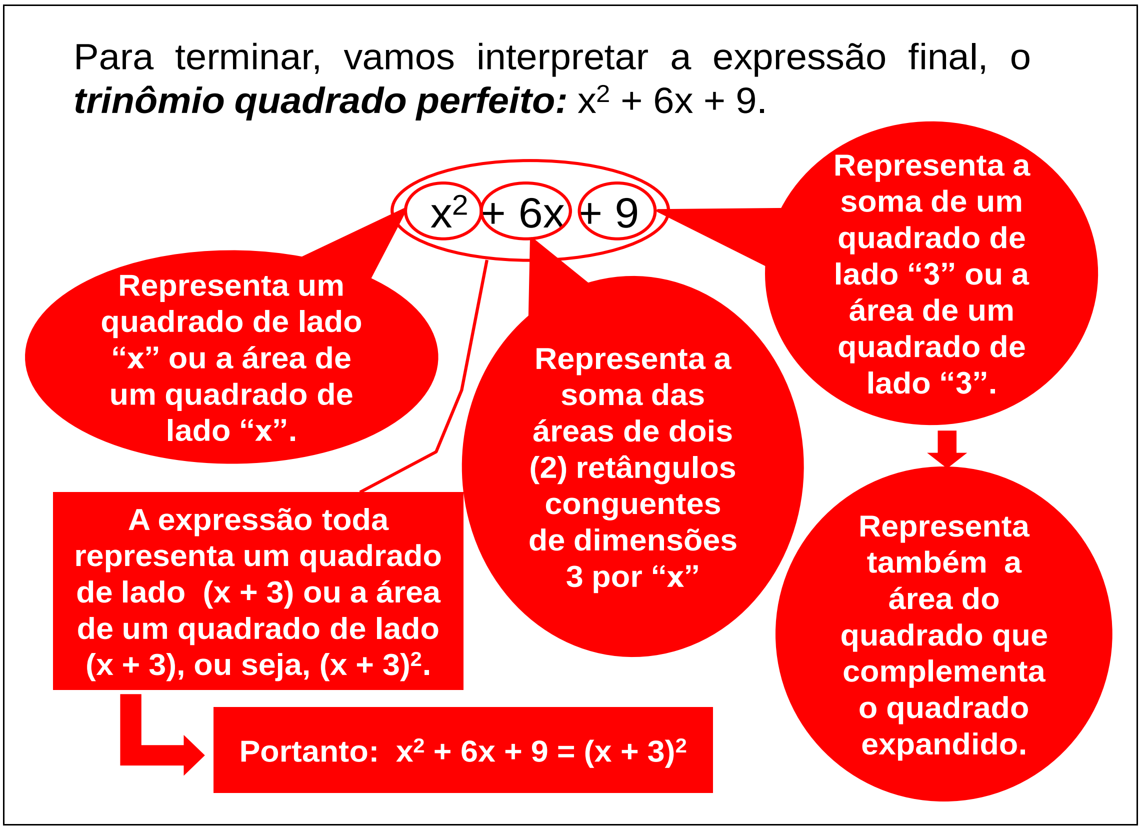


Figura 15

4.1.3 A IDEIA DE COMPLETAR QUADRADO

Nos diálogos sugeridos para o professor manter com os alunos e na projeção e animação da figuras durante o processo de construção da expressão numérica e da algébrica, percebemos facilmente que o polígono que aparece no final para complementar a figura tornando-a um quadrado expandido também é um quadrado (figura 7). Assim, **completar quadrado** é um procedimento aplicado numa expressão matemática que possui um termo representando a área de um quadrado e outro representando a área de dois retângulos de dimensões iguais e, que se deseja fazer dessa expressão a representação da área de um quadrado perfeito (consideramos quadrado perfeito a área de um quadrado cuja medida do lado é um número inteiro positivo).

Esperamos que essa ideia seja concluída pelos alunos, com intermediação do professor, e que eles consigam reconhecer numa sentença matemática a existência dos dois termos e descobrir o termo que falta para complementar. Essa conclusão, de suma importância para os propósitos futuros, deve ser ratificada e reforçada com situações (atividades) similares propostas pelo professor.

Os slides que seguem mostram exemplos de atividades cuja resolução reforça a linguagem, os conceitos e os procedimentos adotados.

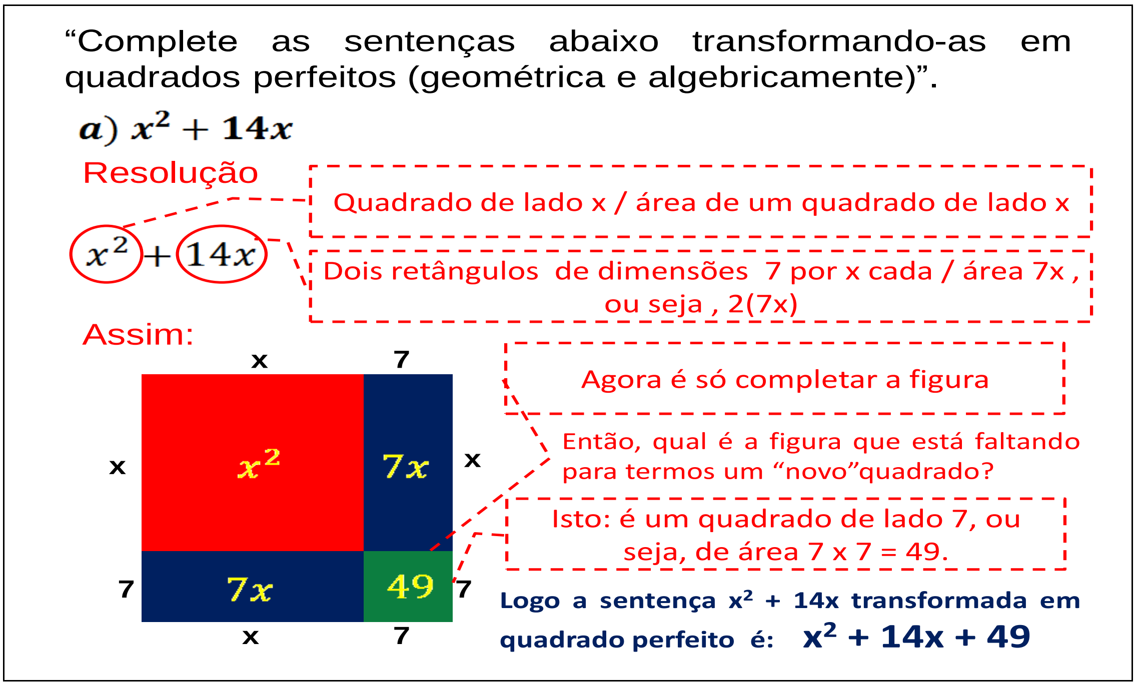


Figura 16

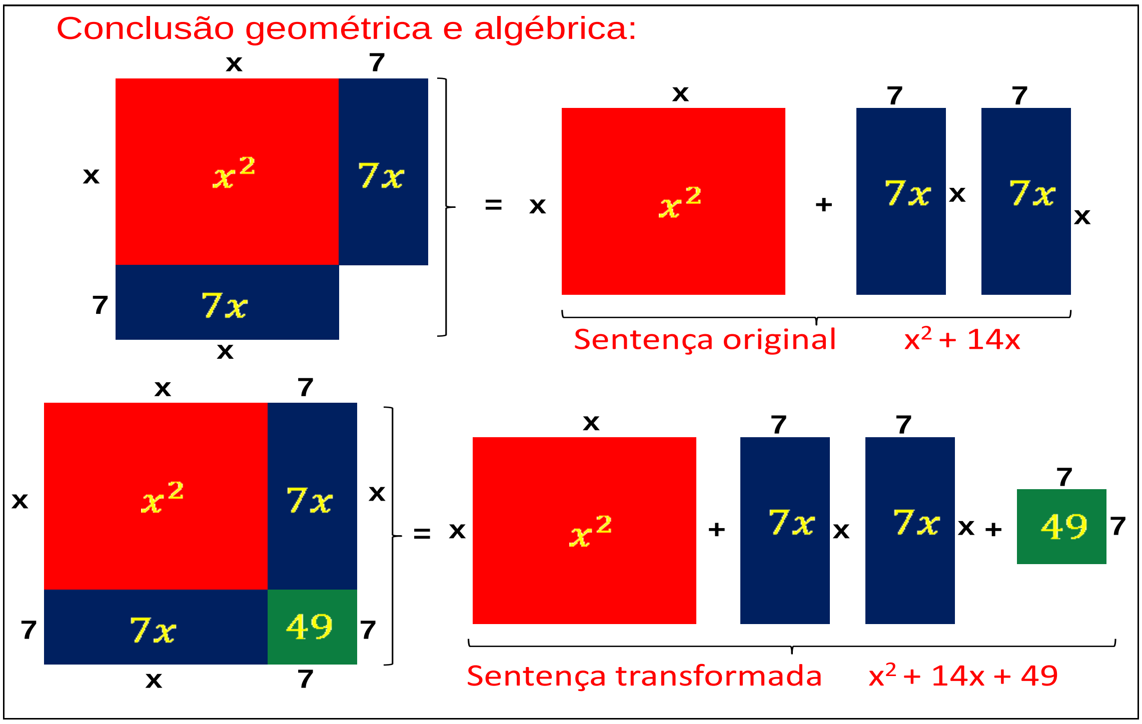


Figura 17

b) $x^2 - 3x$

Resolução

$x^2 - 3x$

Quadrado de lado x / área de um quadrado de lado x

Já sabemos que este termo representa a área de dois retângulos. Então, neste caso, os dois retângulos têm de ter área 3x. Logo, basta dividi-lo por dois para saber a área de cada um.

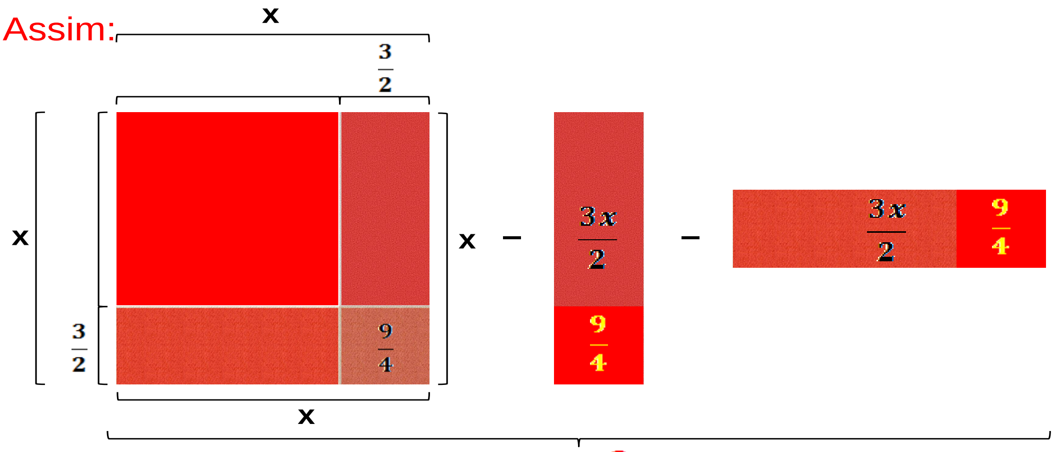
Então, cada retângulo tem área 3x/2. Isto quer dizer: um lado (dimensão) mede 3/2 e o outro lado (outra dimensão) mede x.

Portanto, a sentença nos diz que de um quadrado de lado x (área x^2) temos de retirar dois retângulos de área 3x/2 cada um, ou seja, 2.(3x/2) = 3x.

Para facilitar a compreensão e atender a questão, vamos fazer a representação geométrica da situação.

Figura 18

Assim:

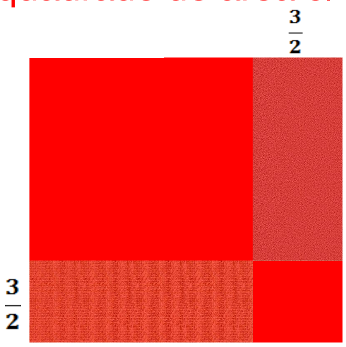


Sentença original: $x^2 - 2\,\dfrac{3x}{2} \;\Rightarrow\; x^2 - 3x$

Devemos observar que ao retirar o retângulo 3/2 por x duas vezes o "quadradinho" de lado 3/2 (área 9/4) também saiu duas vezes. Como isto é possível se na segunda retirada ele não existia mais, pois já havia sido retirado na primeira?

Figura 19

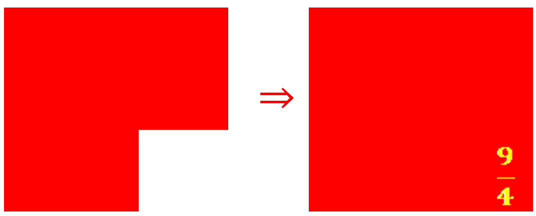
Então, para possibilitar a segunda retirada é necessário recorrer a área restante de x^2 – 2(3x/2) e retirar um quadrado de área 9/4, assim:



⇒

Portanto, esta é a figura que representa a expressão $x^2 - 3x$

Agora ficou fácil de concluir. Basta completar a figura de modo que ela se transforme em um quadrado, assim:



Logo, transformando x^2 – 3x em quadrado perfeito, temos:

$$x^2 - 3x + \frac{9}{4}$$

Figura 20

Agora é só sistematizar a ideia e desenvolver um processo geral para completar quadrados.

Vamos lá:

■ Tomemos o primeiro exemplo:

antes

$x^2 + 14x$

Área de um quadrado de lado x

Área de dois retângulos de lados 7 e x

depois

$x^2 + 14x + 49$

Área de um quadrado de lado x

Área de dois retângulos de lados 7 e x

Área do quadrado de lado 7, (7 x 7 = 49). O 7 é a medida da dimensão (lado) conhecida do retângulo.

Em grau de dificuldade maior o termo a ser utilizado para completar a expressão pode ser obtido dividindo a área dos dois retângulos por dois e elevando o coeficiente (medida conhecida) ao quadrado. Veja no exemplo: 14x : 2 = 7x e 7 x 7 = 49.

Figura 21

O segundo exemplo das atividades mostra um trinômio que se originou do quadrado da diferença de dois termos. O material produzido (slides) mostra em duas situações como esta expressão é construída.

4.1.4 A IDEIA DO PRODUTO DA SOMA PELA DIFERENÇA DE DOIS TERMOS E DA DIFERENÇA DE DOIS QUADRADOS

De forma análoga à que foi adotada para a construção do quadrado da soma de dois termos e do trinômio quadrado perfeito, fazemos com o produto da soma pela diferença de dois termos e da diferença de dois quadrados, ou seja, os diálogos (conjecturas, questionamentos e conclusões), sejam provocados à medida que o professor projeta as figuras e as movimenta objetivamente.

Vejamos:

Inicialmente, com o ambiente pronto, o professor projeta um quadrado de dimensões conhecidas/particulares, por exemplo, um quadrado de lado igual a 7 cm, assim:

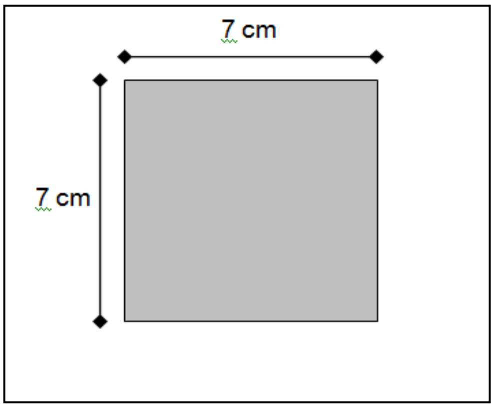


Figura 22

Na sequencia, o professor propõe construir uma nova figura recortando uma das bases e acrescentado (expandindo) em uma das laterais, uma tira de 2 cm de largura. Antes de projetar a figura com os procedimentos propostos, o professor inicia um diálogo para tirar dos alunos informações sobre a forma da nova figura. Concluído, o professor projeta o recorte e a expansão e compara com as conclusões dos alunos. Vejamos a sequência de figura.

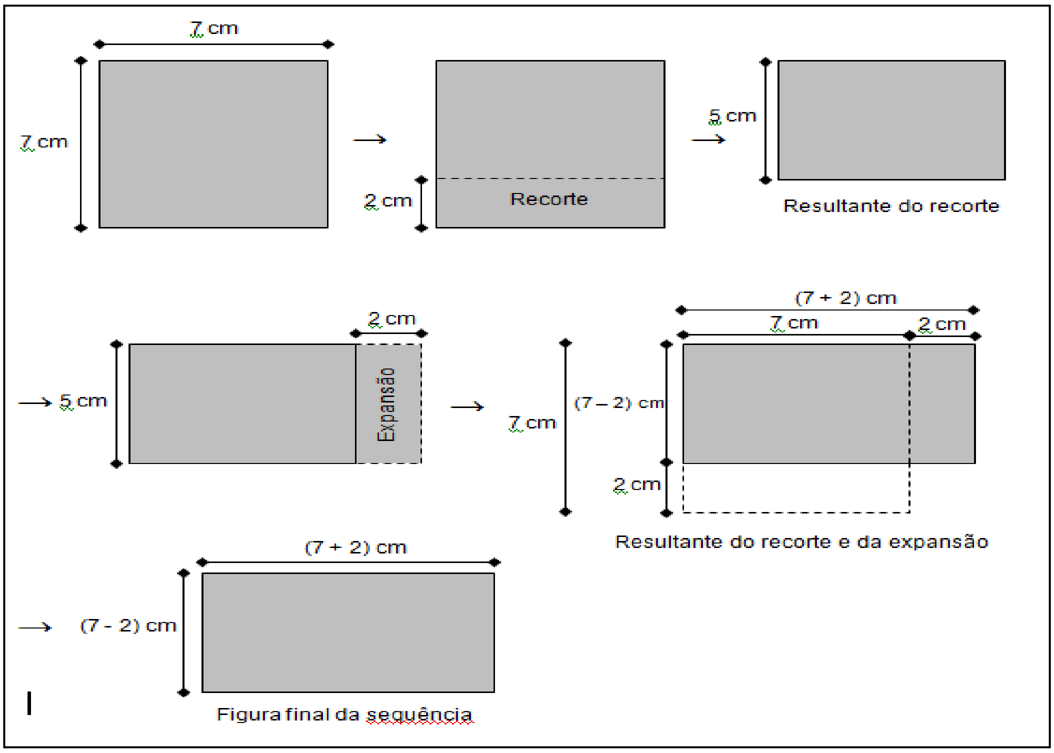


Figura 23

Esperamos que com o campo conceitual construído (sequência de movimentos e de figuras) e com o diálogo provocado pelo professor, os alunos consigam compreender que a figura resultante é um retângulo de (7 + 2) cm de comprimento por (7 – 2) cm de largura, ou seja, que uma dimensão do retângulo é expressa por uma soma de dois números (medidas) e a outra, pela diferença dos mesmos números (medidas). Desta observação e do conceito de área trabalhado no início, concluímos que a área do retângulo é dada por [(7 + 2) x (7 - 2)] cm^2, ou seja, pelo **produto da soma de dois termos pela diferença dos mesmos dois termos.**

Validando a idéia: o professor volta aos slides e projeta as figuras com as áreas respectivas, finalizando com uma comparação, assim:

- Figura original: área igual a 7 cm x 7 cm = 49 cm^2.
- Figura recortada: área igual a 2 cm x 7 cm = 14 cm^2.
- Figura acrescentada: área igual a 2 cm x 5 cm = 10 cm^2.
- Figura final - área da figura original, menos a área da figura recortada, mais a área da figura acrescentada: (7 cm x 7cm) – (2 cm x 7cm) + (2 cm x 5 cm) = 49 cm^2 – 14 cm^2 +10 cm^2 = 45 cm^2.

Portanto, a área do retângulo é igual a **45 cm^2**.

Agora, comparando com a figura final (figura 23 – final da sequência) e calculando a área fazendo o produto das duas dimensões, temos:

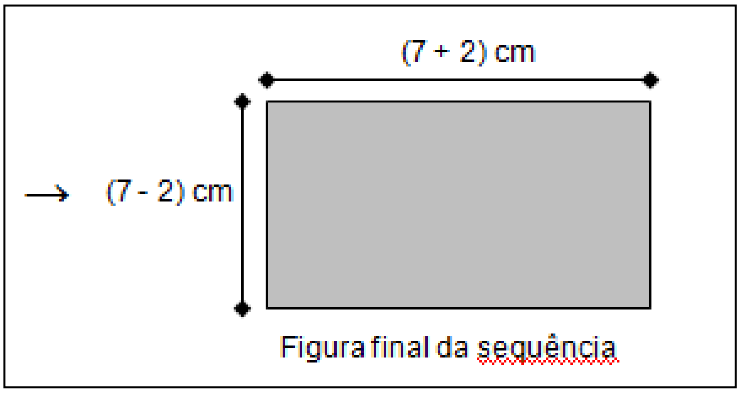


Figura 24

A (área) = (7 + 2) cm x (7 – 2) cm = 9 cm x 5 cm = **45 cm^2**.

Logo, **(7 cm x 7cm) – (2 cm x 7cm) + (2 cm x 5 cm) = (7 + 2) cm x (7 – 2) cm = 45 cm^2**.

Neste ambiente, o professor deve concluir com os alunos que construir a expressão termo a termo, obtêm-se o mesmo valor do produto das dimensões da figura final. Desta forma, argumentamos o fato de que os procedimentos são válidos e que a estrutura tem sentido.

Porém, para construir um **padrão algébrico** para o produto da soma pela diferença de dois termos, vamos sugerir uma interpretação diferente da exposta acima.

Para tanto, vamos partir desta etapa da sequência:

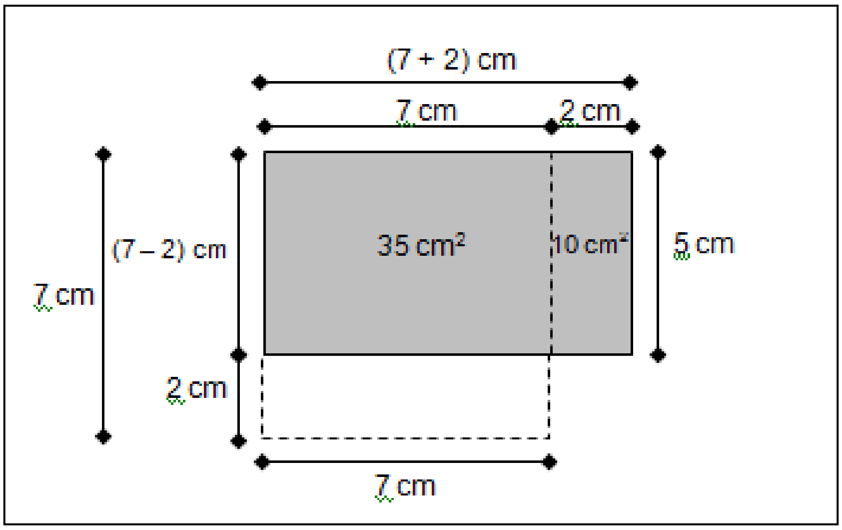


Figura 25

Agora vamos deslocamos a tira expandida (2 cm x 5 cm), que se encontra a direita da figura, para baixo, no lugar daquela que foi recortada. Assim:

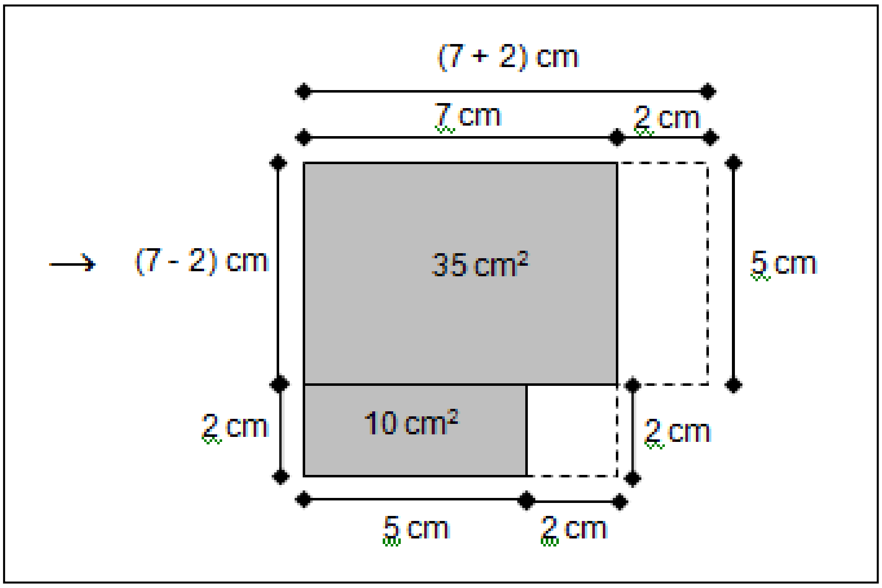


Figura 26

Neste ponto, o professor deve questionar os alunos sobre a área da figura construída. Esperamos que os alunos concluam que a figura anterior (figura 25) e esta (figura 26) têm a mesma área, pois, houve apenas o deslocamento do retângulo de área 10 cm^2.

É oportuno, explorando o campo, mostrar para os alunos que polígonos que têm a mesma área, não têm, necessariamente, o mesmo perímetro.

Esperamos também que os alunos concluam que a área da figura 26 é igual a figura que deu origem a sequência (figura 23) menos um quadrado de lado 2 cm. Assim, como a área da figura 11 é igual (7 cm x 7 cm) então, a área da figura 26 é igual (7 cm x 7 cm) menos (2 cm x 2 cm), ou seja, 49 cm^2 – 4 cm^2 = 45 cm^2.

Vejamos a interpretação geométrica e algébrica:

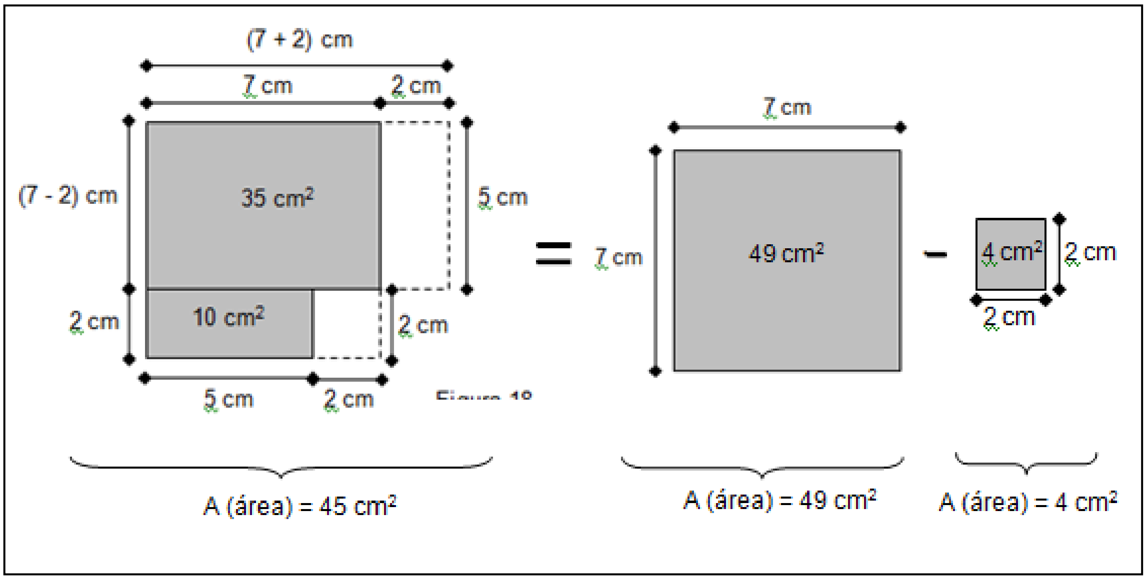


Figura 27

Logo, 45 cm^2 = 49 cm^2 – 4 cm^2

Mas também sabemos que a área da figura 26 é igual a área da figura 24 que é dada pelo produto de (7 + 2) cm por (7 – 2) cm. Então, temos que:

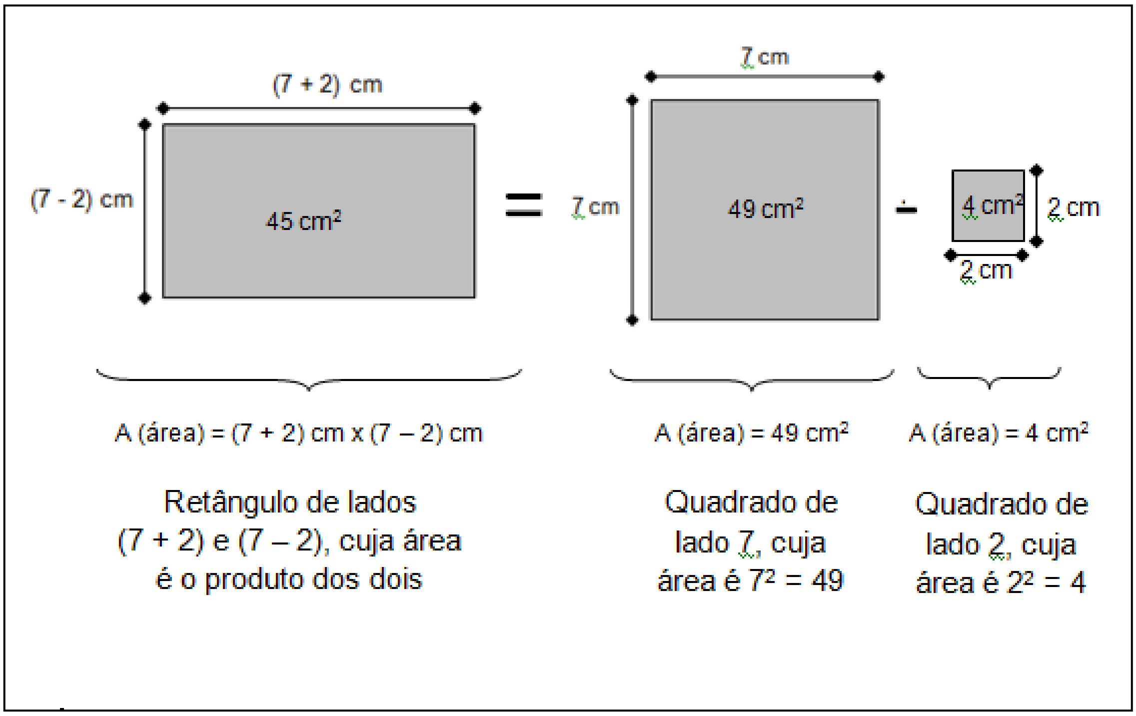


Figura 28

Logo, concluímos que:

O produto de (7 + 2) por (7 – 2) é igual ao quadrado de 7 menos o quadrado de 2.

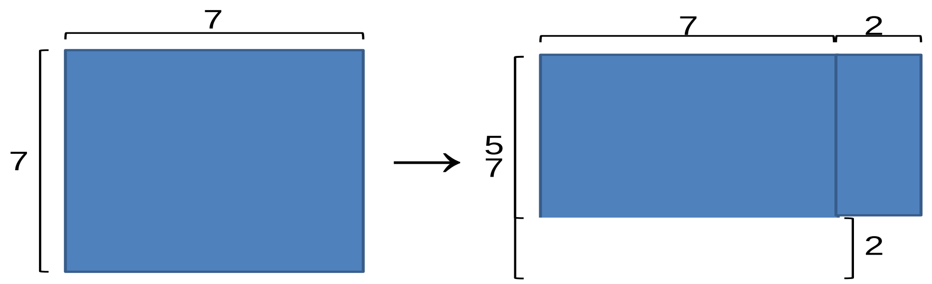
Então, de um modo geral, temos que:

O produto da soma pela diferença de dois termos é igual ao quadrado do primeiro termos menos o quadrado do segundo termo.

Seguem cópias dos slides que mostram a ideia exposta e que foram preparados para trabalhar em sala de aula.

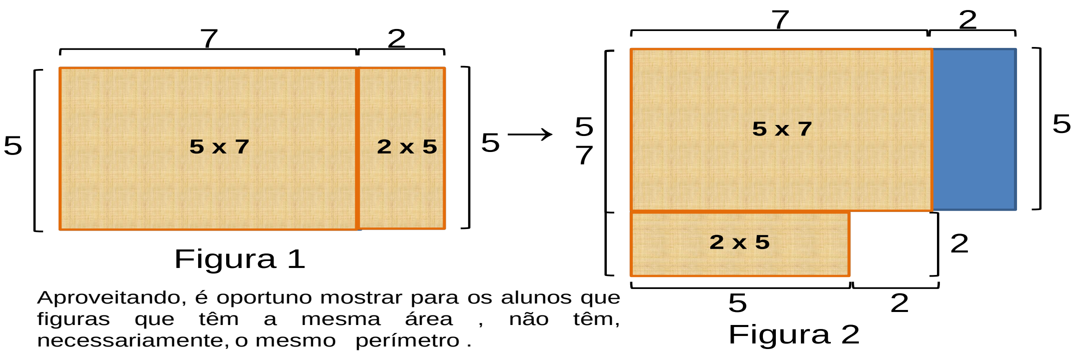
►Vamos fazer uma outra interpretação para a situação 2º esquema

Para tanto, consideramos o mesmo quadrado e o recorte e a expansão das mesmas tiras. Vejamos:



Agora vamos transportar (mover) a tira (retângulo 5 x 2), acrescentada à direita do quadrado para expandi-lo, para a base inferior da figura. Assim:

Figura 29



Observa-se que a figura 1 e a figura 2 têm a mesma área, pois, na figura 2, comparando com a figura 1, o retângulo 2 x 5 está apenas deslocado. No restante, as figuras também têm a mesma área, um retângulo 7 x 5.

Ainda, observando a figura 2 podemos notar que a área dela é igual a área do quadrado original (7 x 7) menos a área do quadrado 2 x 2.

Figura 30

Vejamos:

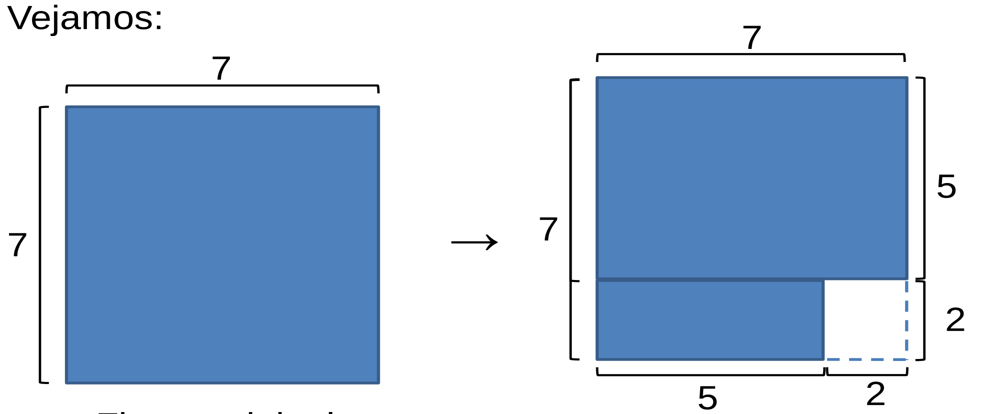


Figura original

Figura final – 2º interpretação

Então, podemos concluir que a área da figura final desta interpretação é:

A = (7 x 7) – (2 x 2) = 49 – 4 = 45

Figura 31

Tanto na primeira quanto no segundo esquema vimos que as figuras finais têm a mesma área, 45. Vejamos:

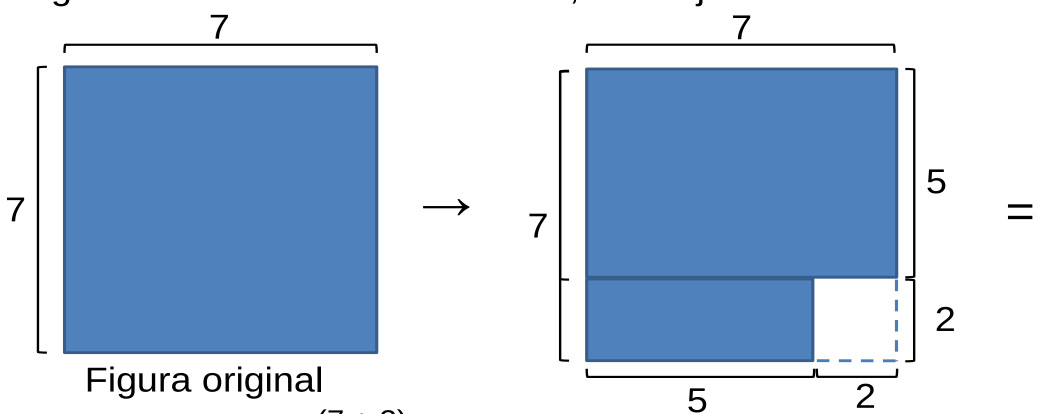


Figura original

Figura final – 2º esquema

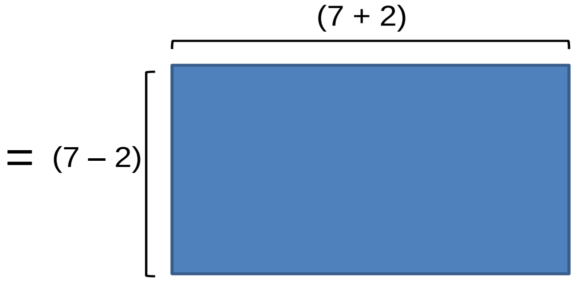


Figura final – 1º esquema

Figura 32

Logo,

$$\underbrace{(7 + 2) \times (7 - 2)}_{\text{Expressão obtida da 1º esquema}} = \underbrace{49 - 4}_{\text{Expressão obtida da 2º esquema}} = \underbrace{45}_{\text{Mesmo resultado}}$$

Conclusão:

Iniciamos o estudo com um quadrado de lado 7. Em seguida uma tira de 2 unidades foi recortada desse quadrado e uma outra de 2 unidades foi acrescentada, produzindo duas figuras finais diferentes.

Observa-se que dois termos (números) foram envolvidos, 7 (medida do lado do quadrado original e 2 (largura da tira recortada e expandida) :

Figura 33

Observa-se também que os dois termos estão nas expressões resultantes.

Na expressão do primeiro esquema, temos o produto da soma pela diferenças deles e na do segundo, temos a diferença dos quadrados deles e, elas, têm o mesmo valor numérico.

De onde, finalmente, concluímos que:

"O produto da soma pela diferença de dois termos é igual a diferença entre o quadrado do primeiro termo e o quadrado do segundo termo."

Soma do 7 com o 2

Diferença entre o 7 e o 2

Diferença entre eles

$$\mathbf{(7 + 2) \times (7 - 2) = 49 - 4 = 45}$$

Produto dos dois (soma pela diferença)

Quadrado do 7 (primeiro termo)

Quadrado do 2 (segundo termo)

Figura 34

4.1.5 A IDEIA DA FATORAÇÃO

O material está produzido e orientado metodologicamente de modo que as expressões algébricas construídas fiquem condicionadas às suas formas de produto indicado (fatorada). Durante a construção, dinâmica regada de movimentos de figuras e de diálogos (conjecturas e questionamentos) provocados pelo professor, o termo produto aparece diversas vezes. Na área do quadrado: produto da medida dos lados e na área do retângulo: produto das duas dimensões. Os campos conceituais proporcionam o caminho inverso da construção das expressões, logo, cabe ao professor, durante o processo, evidenciar o fato para os alunos: ***as expressões originam-se de um produto, portanto, podem voltar ao produto que a originou***.

Vejamos uma atividade que pode ser trabalhada com os alunos.

"Mostre geometricamente e conclua algebricamente que a expressão que segue é um trinômio quadrado perfeito e em seguida escreva-a na forma de produto (fatorada)".

$$\boldsymbol{x^2 - 8x + 16}$$

No início da resolução o professor questiona: o que significa o termo x^2? E o termo – 8x? E o termo 16? Tem como representá-los geometricamente? E a expressão toda, o que representa?

Esperamos que os alunos consigam interagir com o professor e concluir que de um quadrado de lado de medida x (área x^2), recortamos dois retângulos de lados medindo 4 e x (área 4x) cada um e em seguida completamos com um quadrado de lado de medida 4 (área 16). Desenhando:

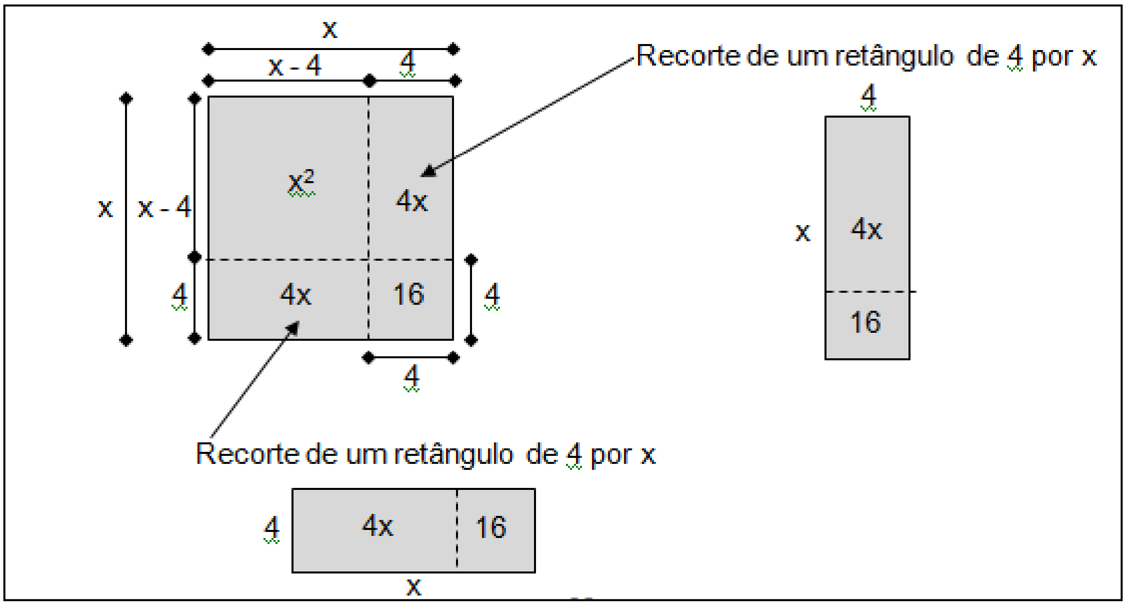


Figura 35

Observando a figura, notamos que a área restante das retiradas dos dois retângulos não é um quadrado de lado (x – 4), pois, na retirada de uma tira de 4 por x (área 4x), a área equivalente a 16 foi retirada junto e na retirada da segunda tira, também 4 por x (área 4x), a área equivalente a 16 saiu novamente. Porém, como ela saiu novamente se já não havia mais? Apesar de a ideia já ter sido desenvolvida durante a construção do quadrado da diferença de dois termos, este é um bom momento para refletir sobre o questionamento.

Concluindo:

A ideia desenvolvida sugere que é necessário "invadir" o quadrado de lado (x – 4) e retirar dele o segundo quadrado de lado 4, possibilitando assim o feito. Porém, o que teremos após esse procedimento é uma figura (figura 36) cuja área é $x^2 - 8x$, pois de um quadrado de área x^2 foram recortados (retirados) dois retângulos de área 4x.

Logo, podemos concluir que a figura restante tem uma área equivalente a $[(x - 4) . (x - 4)] - 16$. Vejamos a figura:

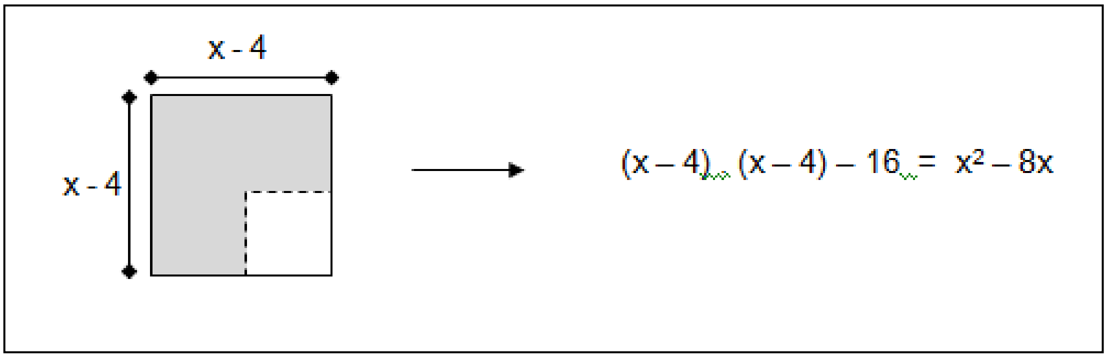


Figura 36

Como queremos a representação da expressão $x^2 - 8x + 16$, basta agora acrescentarmos +16 em $x^2 - 8x$. Geometricamente isso é feito repondo na figura o quadrado de lado 4 que foi retirado anteriormente para possibilitar a retirada da segunda tira de medida 4 por x, assim:

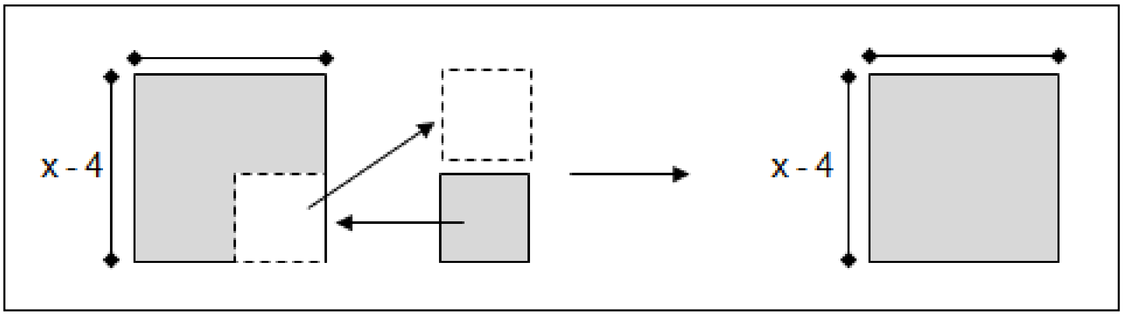


Figura 37

Portanto, a figura final é um quadrado de lado (x – 4), logo, área $(x - 4)^2$. Assim, concluímos que a expressão $x^2 - 8x + 16$ é a representação algébrica da área de um quadrado de lado (x – 4). Desta forma, temos que

$$\mathbf{x^2 - 8x + 16 = (x - 4)^2}$$

4. CONCLUSÃO E RECOMENDAÇÕES

Este trabalho foi idealizado e elaborado numa perspectiva de apresentarmos um material didático com as respectivas orientações metodológicas. É recomendado para professores que atuam no oitavo e no nono ano do Ensino Fundamental e para ser utilizado em sala de aula diante de propostas de construir e manipular estruturas algébricas notáveis através de abordagens diferentes das tradicionais.

Destaca-se pelo diferencial de atribuir significados e/ou validar estruturas algébricas a partir de conceitos e representações do contexto da geometria plana e do uso de recursos multimídias para incrementar e dinamizar os métodos de ensino propostos. Para tanto, criamos os campos conceituais e os meios de explorá-los adequadamente

Através de uma metodologia pautada na contextualização dos conteúdos, desejamos que os alunos atribuam sentido ao que estão aprendendo e sintam que o conhecimento está ao seu alcance, desenvolvendo expectativas de aprendizagem e motivação para apropriar-se dele.

Como nem todos os contextos estão relacionados a experiências extra-matemática, a própria matemática pode oferecer contextos interessantes, na medida em que a situação proposta convide o aluno a pensar, explorar e usar seus conhecimentos para resolvê-la. Nesta perspectiva, estamos criando condições de ensino e de aprendizagem que oferecem ao aluno a oportunidade de ter a participação ativa, vivenciando cada uma das etapas do processo de construção do conhecimento e, consequentemente, subir degraus no nível de conhecimento matemático.

O trabalho foi concebido da experiência acumulada ao longo do período em que atuamos como professor no Ensino Básico e elaborado no período em que atuamos como coordenador de matemática diante da oportunidade proporcionada pelo projeto especial da Secretaria de Estado de Educação implantado nas escolas da rede estadual de ensino, nos anos de 2012 e 2013.

Desta forma, em sala de aula a proposta foi executada e experimentada por um grupo três professores que atuou no Ensino Fundamental no ano de 2013. Coube-nos, anterior a essa etapa e logo após a conclusão da elaboração do material, capacitar os professores para o uso do material e da metodologia inerente. Esta ação, denominada pelo projeto especial da Secretaria de Estado de Educação de formação continuada, foi desenvolvida em uma oficina com duração de 4 horas-aula.

Em sala de aula acompanhamos sistematicamente o trabalho dos professores envolvidos, observando a forma de condução da aula, as atividades propostas, o nível de envolvimento dos professores e dos alunos nas atividades, a capacidade de compreensão dos alunos do método aplicado e as habilidades que estavam sendo desenvolvidas.

Também acompanhamos as avaliações aplicadas nos alunos sobre os conteúdos da proposta. Os instrumentos e os critérios eram previamente discutidos e acordados e os resultados conjuntamente analisados.

Não podemos no momento quantificar indicadores sobre variáveis do desempenho dos alunos, pois, apesar de ser sugerida para os anos finais do Ensino Fundamental, a nossa proposta tem objetivos de aprimorar um processo que decorrem de vários momentos, ou seja, só saberemos se os alunos adquiriram a habilidade de desenvolver e manipular estruturas algébricas notáveis, assim que os conteúdos do Ensino Médio exigirem tais habilidades e os alunos conseguirem desenvolver (lembrar) com naturalidade, o que não acontece atualmente.

Porém, foi possível notar durante a observação em sala de aula, durante a análise dos resultados das avaliações e nos relatos do dia-a-dia dos professores, um envolvimento maior dos dois segmentos no processo. O professor com uma satisfação clara em poder discorrer sobre conteúdos de caráter muito abstrato, através de abordagem mais dinâmica, lúdica e prazerosa; e o aluno, participando com mais interesse ao ver a validação (uma “certa” lógica) de uma estrutura matemática e os seus bons desempenhos apresentados nas avaliações.

Neste ano, voltamos para sala de aula e estamos trabalhando com duas turmas do nono ano. São turmas formadas por alunos que passaram pela experiência no ano passado ao estudarem produtos notáveis e fatoração. Desta forma, ao propor a resolução de equações do 2º grau através do ***processo de completar quadrado***, teremos uma boa oportunidade de verificar se a aprendizagem ocorreu, de ratificar os métodos e de reforçar o conhecimento para o ingresso dos alunos no Ensino Médio.

Também estamos trabalhando no terceiro ano do Ensino Médio e não ficamos surpresos quando, ao aplicar testes informais para verificar o conhecimento deles sobre o conteúdo, concluímos que nenhum aluno demonstrou ter habilidade para desenvolver produtos notáveis e fatoração de expressões algébricas simples e que nunca havia ouvido falar no termo ***completar quadrado***. Desta forma, vejo que essa turma estará me proporcionando mais uma oportunidade de trabalhar com a proposta, que acontecerá no final do ano letivo quando formos trabalhar cônicas.

Enfim, diante dos expostos e com a certeza de estarmos disponibilizando um material que possibilitará a reflexão sobre métodos de ensino e de aprendizagem de conteúdos da matemática, sobre as causas do baixo desempenho dos nossos alunos na disciplina e sobre a necessidade de estarmos constantemente buscando alternativas e incrementando recursos para reverter quadros insatisfatórios, concluímos este trabalho.

REFERÊNCIAS

Programa Gestão da Aprendizagem Escolar – Gestar II. Matemática: Caderno de Teoria e Prática 1 – TP1: matemática na alimentação e nos impostos. Brasília: Ministério da Educação, Secretaria de Educação Básica, 2008.

Programa Gestão da Aprendizagem Escolar – Gestar II. Matemática: Caderno de Teoria e Prática 6 – TP6: matemática nas migrações e em fenômenos cotidianos. Brasília: Ministério da Educação, Secretaria de Educação Básica, 2008.

SOUZA, Joamir Roberto de; PATARO, Patrícia Moreno. Vontade de saber matemática, 8º ano. 2. Ed. São Paulo: FTD, 2012.

SOUZA, Joamir Roberto de; PATARO, Patrícia Moreno. Vontade de saber matemática, 9º ano. 2. Ed. São Paulo: FTD, 2012.

OLIVEIRA, Magda Maciel de. Orientações de Trabalhos Científicos. Campo Grande, MS: Ed. UFMS, 2010

PONTE, J. P. e SERRAZINA, L. (2000). Didáctica da matemática do 1º ciclo. Lisboa: Universidade Aberta.

SOUSA, H. (2003). A aprendizagem da Matemática e o trabalho de projecto numa perspectiva de matemática para todos. Tese de Mestrado. Universidade de Lisboa, Departamento de Educação da Faculdade de Ciências. Lisboa: APM.

SERRAZINA, Lurdes. A formação para o ensino da Matemática: perspectivas futuras. Educação Matemática em revista. São Paulo: SBEM, ano 10, n. 14, ago. 2003. P. 69.

Escola Estadual Fernando Corrêa da Costa. Projeto Político Pedagógico. 2010, p.12.

APÊNDICES

Apêndice 1 - Conjunto de slides que compõem o material didático da proposta

ESTADO DE MATO GROSSO DO SUL
Secretaria de Estado de Educação
Município de Rio Brilhante
ESCOLA ESTADUAL FERNANDO CORRÊA DA COSTA

Diretor:
Profº Mário César Furlan

Vice-Diretor:
Profº Marcus Vinícius da Costa

Coordenação Pedagógica:
Profª Lígia Wanderley G. Adomaitis
Profª Marfisa Duarte Piovesan
Profª Regina M. Antoniazzi

Coordenação de Área:
Profº Valdemir Contiero – Matemática
Profª Viviane Soares Cabelo – Língua Portuguesa

Gerenciadora de Recursos Midiáticos:
Profª Mirian Hammes

Elaboração:
Profº Valdemir Contiero

CAMPOS CONCEITUAIS PARA ESTUDOS DOS PRODUTOS NOTÁVEIS, FATORAÇÃO E DE SUAS APLICAÇÕES

ESTRUTURAS ALGÉBRICAS CONSTRUÍDAS A PARTIR DE ABORDAGENS GEOMÉTICAS

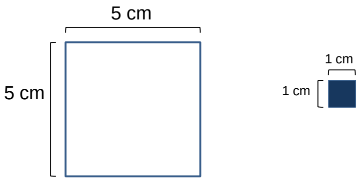
Este material apresenta um conjunto de procedimentos que relacionam conceitos, representações e medidas de figuras geométricas planas com estruturas algébricas notáveis e foi concebido e construído com o propósito de disponibilizar para professores e alunos da educação básica um instrumento mediador de ensino e aprendizagem.

► **Tópicos**

1. Conceito de área: quadrado retângulo
2. Quadrado da soma de dois termos.
3. Quadrado da diferença de dois termos.
4. Trinômio quadrado perfeito.
5. Completamento de quadrados.
6. Dedução da fórmula resolutiva da equação do 2º grau.
7. Produto da soma pela diferença de dois termos.
8. Diferença de dois quadrados.

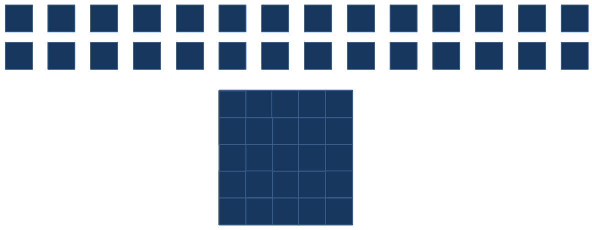
1. Conceito de área: quadrado e retângulo

Situação: desenhamos um quadrado (tomamos uma região do plano em forma de um quadrado) de dimensões conhecidas, por exemplo, um quadrado de lado igual a 5 cm, em seguida desenhamos um quadrado de dimensões menores, por exemplo, um quadrado de lado igual a 1 cm, assim:



Agora, comparando um com o outro, vamos verificar quantas vezes o menor cabe no maior.

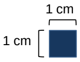
Para tanto, vamos produzir diversos “quadradinhos” (quadrado de lado 1 cm) e depois deslocá-los para a região do quadrado maior, quantos forem necessários para preenchê-lo totalmente. Vejamos:



Observa-se que para preencher o quadrado de 5 cm de lado são necessários 25 quadradinhos de 1 cm de lado.

Esta conclusão deve ser precedida de questionamentos do professor, como: a região do plano ocupada pelo quadrado foi preenchida totalmente? Quantos quadradinhos foram necessários?

O quadradinho de lado 1 cm ocupa no plano uma região equivalente a 1 cm^2, ou seja, um quadrado de 1 cm de lado.



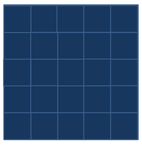
$\longrightarrow$ Quadrado de 1 cm de lado = 1 cm^2

Na situação explorada foram necessários 25 deles para preencher o quadrado de lado 5 cm, assim, dizemos que este quadrado ocupa no plano uma superfície/região de 25 cm^2.

Dizemos também que o quadradinho de 1 cm^2 foi utilizado como uma ***unidade de medida*** para quantificar a região do maior

Logo, concluímos que, área de uma região no plano é um número positivo que associamos à mesma e que serve para quantificar o espaço por ela ocupado.

Agora dever ser proporcionado ao aluno a possibilidade de concluir que a superfície do quadrado fica tomada por 5 fileiras horizontais com 5 quadradinhos cada. Vejamos

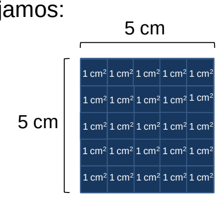


→ Primeira fileira com 5 quadradinhos
→ Segunda fileira com 5 quadradinhos
→Terceira fileira com 5 quadradinhos
→ Quarta fileira com 5 quadradinhos
→ Quinta fileira com 5 quadradinhos

Desta forma a área do quadrado pode ser representada pelo produto de 5 por 5, ou seja, 5 x 5.

Ainda, como o quadradinho tem lado de medida igual a 1 cm, uma fileira de 5 quadradinhos equivalerá a 5 cm, ou seja, o lado do quadrado, cuja superfície está sendo medida, mede 5 cm. Logo, a área deste quadrado é 5 cm x 5 cm = 25 cm^2.

Vejamos:



→ A = 5 cm x 5 cm = 25 cm^2

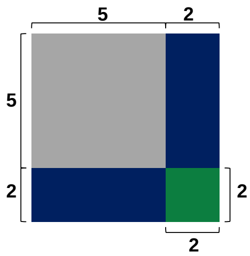
Agora temos um campo e um ambiente prontos para elaborar um procedimento geral de cálculo de área de um quadrado.

Então, chamando a medida do lado de um quadrado qualquer de l, a área deste quadrado é $l \times l = l^2$.

Para calcular a área de um retângulo a ideia é a análoga .

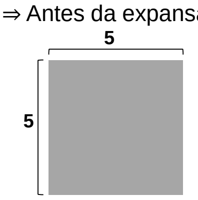
1. Quadrado da soma de dois termos

■ **Situação 1** - Tomemos um quadrado, com dimensões conhecidas, e vamos expandí-lo:



Com a expansão do quadrado cinza, em duas unidades para a direita e duas para baixo e com um completamento, temos um novo quadrado, cuja medida do lado é 7 (5 + 2), assim:

⇒ Antes da expansão:



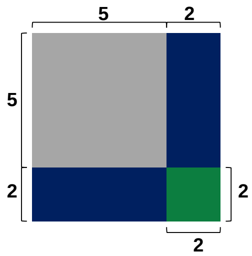
Expandir: dilatar, estender, aumentar.

***Área**: "porção" de uma região (superfície) ocupada por uma figura geométrica plana. E é calculada de acordo com as características/ propriedades da figura.*

No exemplo, o quadrado tem área igual a:

A = 5 x 5 = 5² = 25

⇒ Depois da expansão:



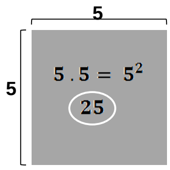
Temos agora um quadrado de lado 7 (5 + 2).

Logo, a área deste quadrado é:

A = (5 + 2) x (5 + 2) = 7² = 25

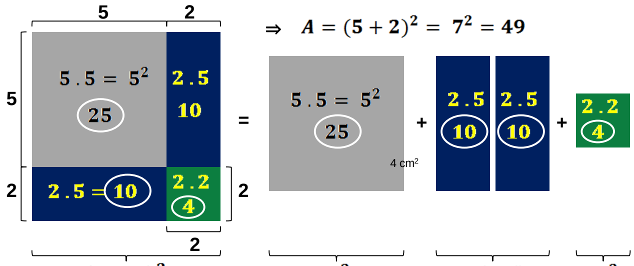
A = 7 x 7 = 7² = 49

Agora, partindo do primeiro quadrado, vamos compor geometricamente a área do segundo e construir a expressão matemática que representa a sua área.



$\Rightarrow\ A = 5\,.\,5 = 5^2 = 25$

$\Rightarrow\ A = (5+2)^2 = 7^2 = 49$

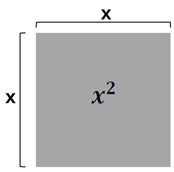


$(5+2)^2 \quad = \quad 5^2 \quad + \quad 2\,.\,(2\,.\,5) \quad + \quad 2^2$

$7^2 = 25 + 2.\,10 + 4 = 25 + 20 + 4 = 49$

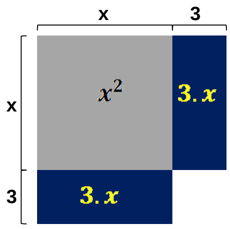
■ **Situação 2** - Tomemos agora um quadrado de dimensões genéricas:

Assim:



$\Rightarrow\ A = x^2$

Agora vamos aumentá-lo, acrescentando 3 unidades para a direita e três para baixo, assim:



*Podemos observar que apesar das duas dimensões terem sido expandidas igualmente, não obtivemos "ainda" um novo quadrado. Para ter é necessário efetuar um **completamento** na figura.*

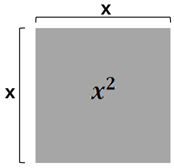
E, que figura deverá ser utlizada para completar o quadrado e quais são as suas dimensões?

Isto: será um quadrado de lado igual a 3.

Vejamos, então:

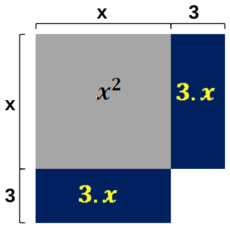
■ **Situação 2** - Tomemos agora um quadrado de dimensões genéricas:

Assim:



$\Rightarrow \quad \boldsymbol{A = x^2}$

Agora vamos aumentá-lo, acrescentando 3 unidades para a direita e três para baixo, assim:

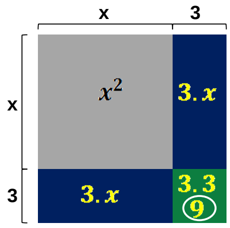


Podemos observar que apesar das duas dimensões terem sido expandidas igualmente, não obtivemos "ainda" um novo quadrado. Para ter é necessário efetuar um ***completamento*** *na figura.*

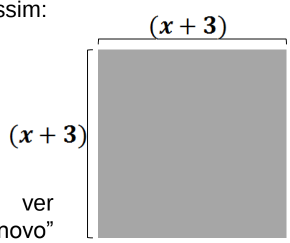
E, que figura deverá ser utlizada para completar o quadrado e quais são as suas dimensões?

Isto: será um quadrado de lado igual a 3.

Vejamos, então:



Agora sim temos um novo quadrado e podemos representá-lo assim:

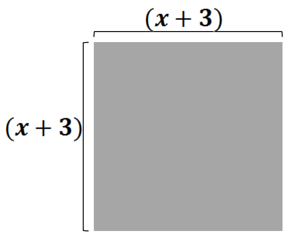


Para concluir, vamos ver como fica a área deste "novo" quadrado:

Já sabemos que a área de um quadrado (região plana ocupada por ele) é calculada multiplicando a medida de uma dimensão pela medida da outra dimensão, porém, como elas são iguais (lados iguais), basta elever ao quadrado a medida do lado do quadrado, certo? Assim:

$$\boldsymbol{A = l^2}.$$

Então, a área do quadrado em questão, cujo lado mede (x + 3), pode ser representada da seguinte forma:



$$\boldsymbol{A = l^2}.$$

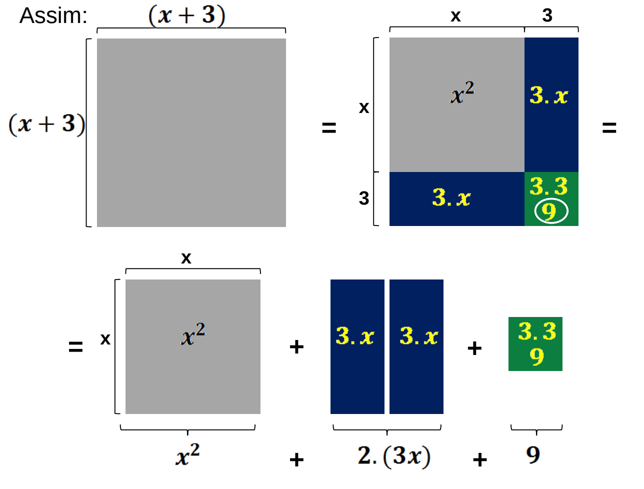
$$\boldsymbol{A = (x+3)^2}$$

Lembramos que "x" representa um valor genérico, ou seja, a medida do lado de um quadrado qualquer, como na origem da nossa situação.

Vamos ver agora como desenvolver a expressão $(x + 3)^2$:

Para facilitar a compreensão e considerando que a nossa interpretação é geométrica, vamos voltar ao quadrado expandido e "desmontá-lo" (decompor).

Assim:



Logo: $(x+3)^2 = x^2 + 2.3x + 9 = x^2 + 6x + 9$

■Interpretação final - Conclusão

$(x+3)^2 = x^2 + 2.3x + 9 = x^2 + 6x + 9$

Onde (x + 3) representa o lado de um quadrado que media "x" e foi aumentado em 3 unidades.

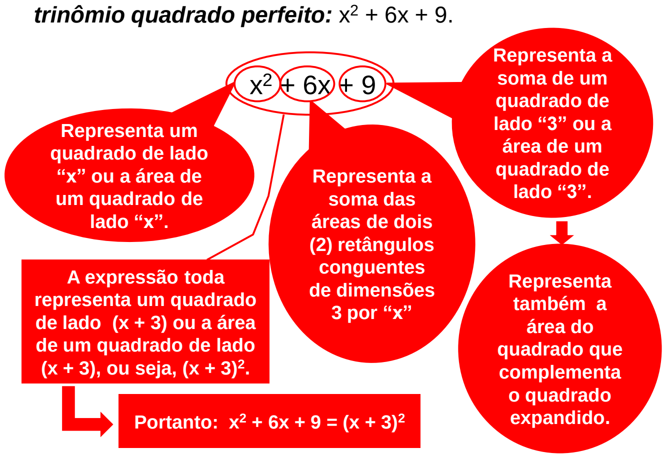
E, $(x + 3)^2$ representa a área do quadrado de lado (x + 3). Então temos: O QUADRADO DA SOMA DE DOIS TERMOS.

Esta é a expressão matemática que representa , em função de x, a área do quadrado de lado (x + 3).

Ou, que o lado de um quadrado foi dividido em duas parte, uma medindo "x" unidades e a outra 3 unidades, assim, as duas juntas (a medida total do lado) é igual a (x + 3).

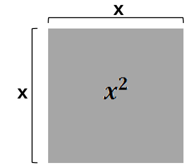
Podemos notar que a expressão tem três termos (trinômio). E como ela representa a área de um quadrado, passará a ser chamada de TRINÔMIO QUADRADO PERFEITO.

Para terminar, vamos interpretar a expressão final, o ***trinômio quadrado perfeito:*** $x^2 + 6x + 9$.



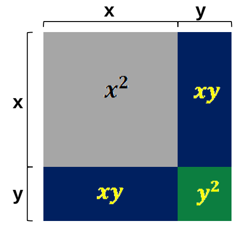
■ **Situação 3** - Generalizando o caso estudado – ***Quadrado da soma de dois termos***.

⇒ Tomemos um quadrado de dimensões genéricas. Assim:



$\Rightarrow\ A = x^2$

Vamos aumentá-lo, acrescentando ***y*** unidades para a direita e ***y*** para baixo, assim:



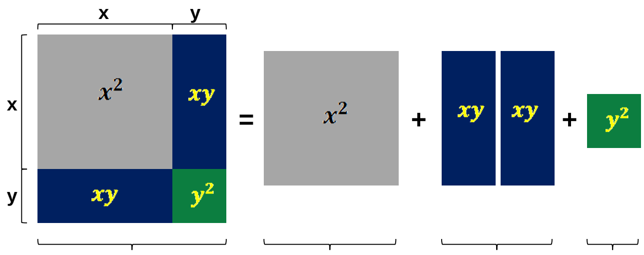
Qual deve ser a área do quadrado que vai completar a figura para formar um novo quadrado?

Isto: será um quadrado de lado y, portanto, de área y^2. Assim:

Logo, temos um quadrado de lado x + y.

⇒ Vamos ver como fica a área deste novo quadrado:

Para tanto, e como fizemos nas situação anteriores, vamos decompô-lo, assim:



$$(x+y)^2 = x^2 + 2.xy + y^2$$

Então, $(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$ → Expressão geral do quadrado da soma de dois termos: ***trinômio quadrado perfeito***

■ Atividades

1. Faça a representação geométrica do desenvolvimento dos quadrados abaixo e determine as expressões algébricas que os representam :

$\boldsymbol{a)}\ (x+2)^2$

$\boldsymbol{b)}\ (x+1)^2$

$\boldsymbol{c)}\ (x+\frac{1}{2})^2$

2. Mostre através de representações geométricas que os trinômios que seguem são áreas de quadrados e determine as expressões algébricas que representam as medidas de seus lados :

$\boldsymbol{a)}\ x^2 + 10x + 25$

$\boldsymbol{b)}\ x^2 + 2x + 1$

$\boldsymbol{c)}\ x^2 + 8x + 16$

3. Complete as sentenças abaixo transformando-as em quadrados perfeitos (geométrica e algebricamente).

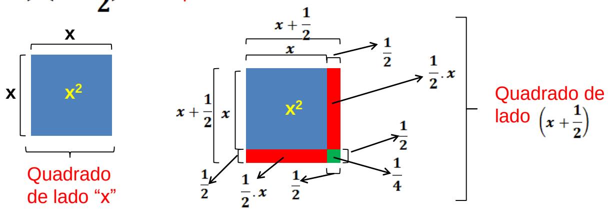
$a)\ x^2 + 14x$

$b)\ x^2 + 20x$

$c)\ x^2 + x$

■ Resolução da letra "c", questão 1.

$c)\ (x + \frac{1}{2})^2$ Aqui temos um quadro de lado de medida "x" que foi ampliado em meia unidade, assim:



Então:

$$\underbrace{\quad}_{(x+\frac{1}{2})^2} \qquad \underbrace{\quad}_{x^2} \qquad \underbrace{\quad}_{2.\left(\frac{1}{2}.x\right)} \qquad \underbrace{\quad}_{\frac{1}{4}}$$

$$(x+\frac{1}{2})^2 = x^2 + \underbrace{2.\left(\frac{1}{2}.x\right)} + \frac{1}{4}$$

$$\boxed{(x+\frac{1}{2})^2 = x^2 + x + \frac{1}{4}}$$

$\frac{1}{2}.x$

⇒ significa a "metade" de um número "x" ou simplesmente "meio" "x".

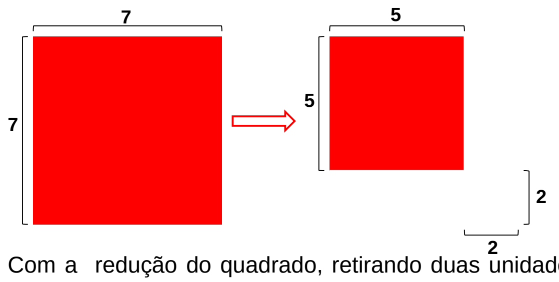
$2.\left(\frac{1}{2}.x\right)$

⇒ significa duas vezes a "metade" de um número "x" ou simplesmente duas vezes "meio" "x".

E duas vezes (o dobro) a metade (meio) de um número "x" é igual ao número "x" inteiro.

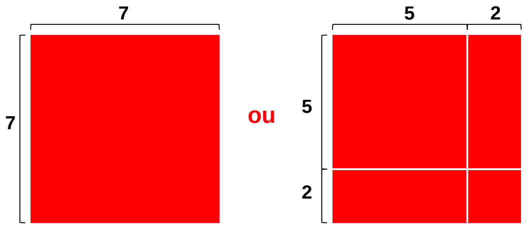
2. Quadrado da diferença de dois termos

■ **Situação 1** - Tomamos um quadrado, de dimensões conhecidas, e vamos reduzí-lo, assim:

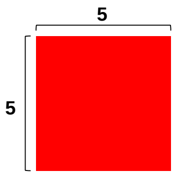


Com a redução do quadrado, retirando duas unidades da direita para a esquerda e duas de baixo para cima, temos um novo quadrado, cuja medida do lado é 5 (7 - 2).

⇒ Antes da redução:



⇒ Depois da redução:



***Reduzir**: encurtar, diminuir.*

Área do quadrado antes da redução:.

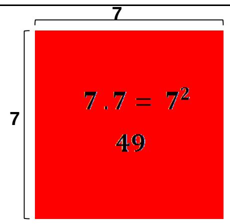
A = 7 x 7 = 7^2 = 49 ou

A = (5 + 2)^2 = 7^2 = 49

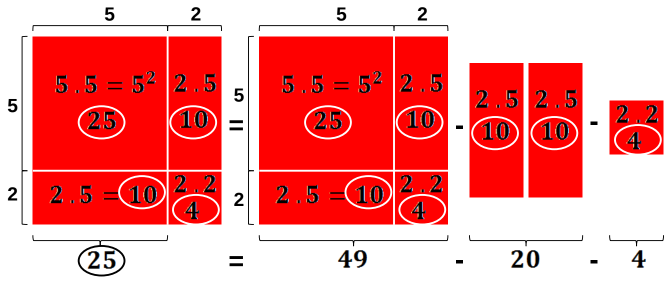
Área do quadrado depois da redução:.

A = 5^2 = 25

Agora, partindo do primeiro quadrado vamos compor a área do segundo quadrado e construir a expressão matemática que representa a sua área.

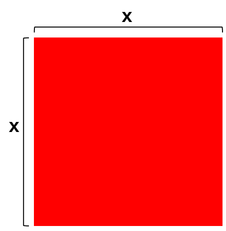


⇒ $A = 7^2 = 49$



Situação 2

■ Imaginemos agora um quadrado de dimensões genéricas. Assim:

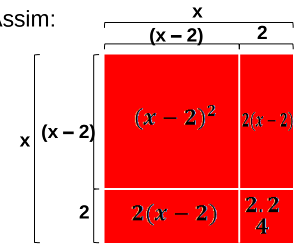


$$A = x \,.\, x = x^2$$

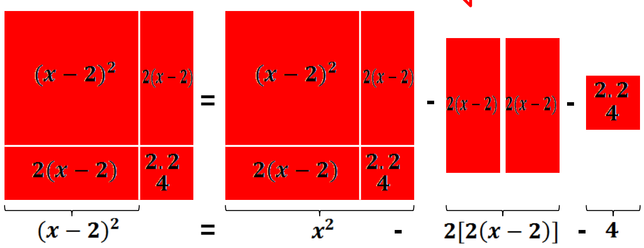
Agora vamos reduzí-lo, retirando 2 unidades da direita para a esquerda e 2 de baixo para cima.

Para a realização deste procedimento, da mesma forma que fizemos nas situações anteriores, vamos criar um esquema com as figuras geométricas.

Assim:



Com o esquema pronto, é só processar a ideia. Vamos lá:



Logo: $(x-2)^2 = x^2 - \underbrace{2[2(x-2)]}_{\text{Vamos “melhorar” esta expressão, simplificando-a .}} - 4$

$(x-2)^2 = x^2 - 2\,[2x - 4] - 4$

$(x-2)^2 = x^2 - 4x + \underbrace{8 - 4}$

$\boxed{(x-2)^2 = x^2 - 4x + 4}$ Desenvolvimento concluído

Neste momento pode ter surgido uma dúvida ou uma inconformidade. Qual é?

Então, quando fizemos as retiradas para ficar com a parte que nos interessava $(x-2)^2$, tínhamos um quadrado de área x^2 do qual ***foi retirado*** dois retângulos de área $2(x-2)$ e um quadrado de área 4. (voltar ao slide anterior), assim: $(x-2)^2 = x^2 - 2[2(x-2)] - 4$.

Porém, a expressão que nos fornece a conclusão do desenvolvimento, parece nos mostrar uma situação diferente, pois, ao invés de subtrair, está somando 4.

Vamos comparar as duas:

Antes: $(x-2)^2 = x^2 - 2[2(x-2)] - 4$

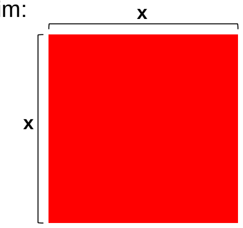
Depois: $(x-2)^2 = x^2 - 4x + 4$

No entanto as duas expressões são equivalentes. A aparente diferença é apenas visual e isso é em razão da segunda estar simplificada.

Mas para que não haja dúvida, vamos fazer a interpretação geométrica (demonstração) da segunda expressão

Para tanto, vamos voltar ao início da situação 2 e retomar a abordagem.

■ Imaginemos agora um quadrado de dimensões genéricas. Assim:

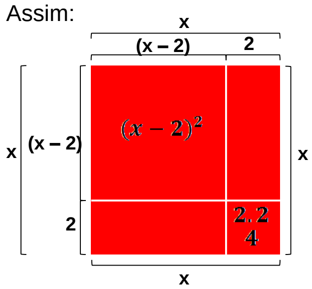


$$A = x \, . \, x = x^2$$

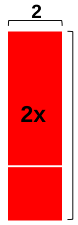
Vamos reduzí-lo, retirando 2 unidades da direita para a esquerda e 2 de baixo para cima.

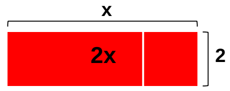
Para a realização deste procedimento, vamos criar um novo esquema com as figuras geométricas:

Assim:



Vamos destacar duas partes importantes do esquema, são elas:





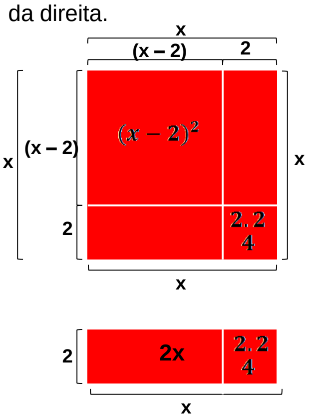
São dois retângulos de área 2x cada.

Com o esquema pronto é só processar a ideia. Vamos lá:

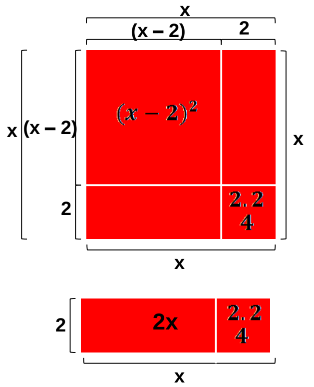
A ideia é retirar da área do quadrado de lado "x" as áreas dos dois retângulos destacados acima.

Porém, para facilitar a compreensão, este procedimento será executado em etapas independentes, assim:

1ª etapa: retirar o retângulo "2x" da direita.

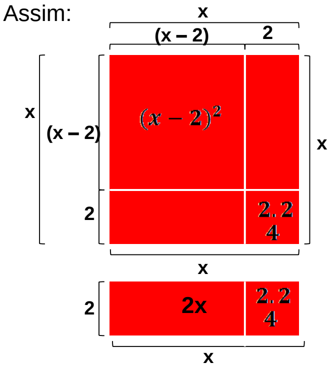


2ª etapa: retirar o retângulo "2x" da parte de baixo.



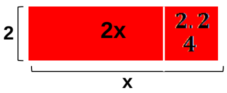
Agora vamos executar numa única etapa:

Assim:



Veja que para continuar, ou seja, retirar a retângulo da parte de baixo é necessario recompor a figura, assim:

Agora podemos continuar, vamos lá:



Aconteceu exatamente o que queríamos, ou seja, obter o quadrado de lado (x – 2).

Então: $(x - 2)^2 = x^2 \underbrace{- 2x + 4 - 2x}_{-4x} \Rightarrow (x + 2)^2 = x^2 - 4x + 4$

Resumindo e concluindo:

Para obtermos um quadrado de lado (x – 2), portanto, área $(x-2)^2$, partimos de um quadrado de lado x (área x^2) e, dele, retiramos dois retângulos de dimensões 2 por x (área 2x) e somamos, para compensar, um quadrado de lado 2 (área 4):

Simbolicamente, temos:

$(x - 2)^2 = x^2 - 2(2x) + 4$

$\boxed{(x - 2)^2 = x^2 - 4x + 4}$ Como queríamos demonstrar

■Interpretação final - Conclusão

$$(x-2)^2 = x^2 - 4x + 4$$

(x - 2) representa o lado de um quadrado que media "x" e foi reduzido em 2 unidades.

⇩

Ou, o lado de um quadrado que foi "suprimido" , retirando de sua área duas "tiras" laterais com 2 unidades de largura , uma da direita para esquerda (ou vice-versa) e outra de baixo para cima (ou vice-versa).

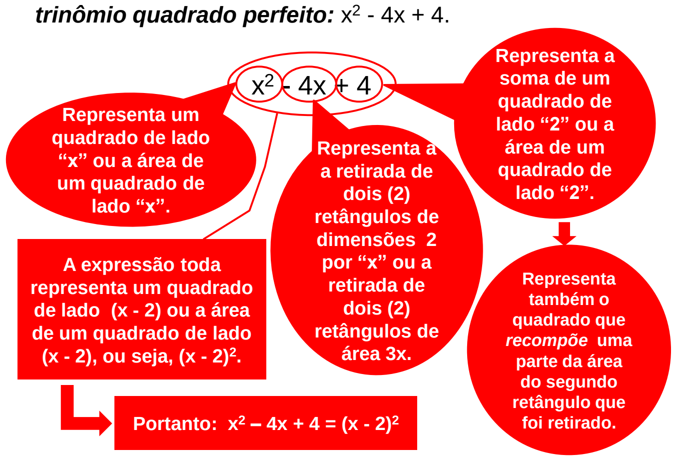
$(x - 2)^2$ representa a área do quadrado de lado (x - 2). Então temos: O QUADRADO DA DIFERENÇA DE DOIS TERMOS.

Esta é a expressão matemática que representa , em função de x, a área do quadrado de lado (x - 2).

⇩

Podemos notar que a expressão tem três termos (trinômio). E como ela representa a área de um quadrado, passará a ser chamada de TRINÔMIO QUADRADO PERFEITO.

Para terminar, vamos interpretar a expressão final, o ***trinômio quadrado perfeito:*** $x^2 - 4x + 4$.



■ Atividades

1. Desenvolva geometricamente e conclua algebricamente os quadrados que seguem, através dos dois modos:

a) $(x - 3)^2$

b) $(x - 1)^2$

c) $(x - \frac{3}{4})^2$

2. Mostre geometricamente e conclua algebricamente, que os trinômios que seguem são quadrados perfeitos:

a) $x^2 - 8x + 16$

b) $x^2 - 2x + 1$

c) $x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{16}$

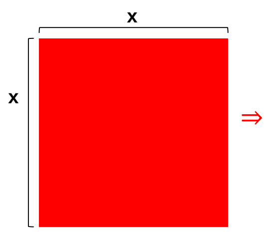
3. Complete as sentenças abaixo transformando-as em quadrados perfeitos (geométrica e algebricamente).

a) $x^2 - 10x$ b) $x^2 - 12x$ c) $x^2 - 3x$

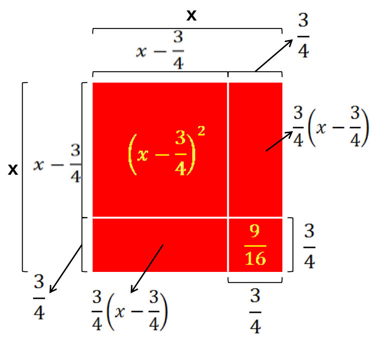
■ Resolução da letra C, questão 1

c) $(x - \frac{3}{4})^2$ Temos aqui, um quadrado de lado de medida “x” que foi reduzido em ¾ de uma unidade, assim:

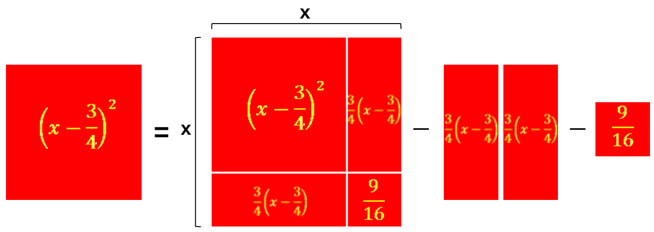
⇒ Primeiro modo:



⇒



Então:



Então:

$$\left(x-\frac{3}{4}\right)^2 = x^2 - 2\left[\frac{3}{4}\left(x-\frac{3}{4}\right)\right] - \frac{9}{16} \quad = x^2 - \frac{3x}{2} + \underbrace{\frac{9}{8} - \frac{9}{16}}$$

$$\left(x-\frac{3}{4}\right)^2 = x^2 - 2\left(\frac{3x}{4} - \frac{9}{16}\right) - \frac{9}{16} \quad = \boxed{x^2 - \frac{3x}{2} + \frac{9}{16}}$$

$$\left(x-\frac{3}{4}\right)^2 = x^2 - \left(\frac{3x}{2} - \frac{9}{8}\right) - \frac{9}{16}$$

A forma utilizada para retirar as expressões do esquema não vai permitir que o aluno "construa" (descubra) uma "regra" geral para desenvolver os quadrados em questão.

Portanto, vamos organizá-las de forma um pouco diferente, assim:

$$\left(x-\frac{3}{4}\right)^2 = x^2 - \frac{3}{4}\left(x-\frac{x}{4}\right) - \frac{3}{4}\left(x-\frac{x}{4}\right) - \frac{9}{16}$$

$$\left(x-\frac{3}{4}\right)^2 = x^2 - \frac{3x}{4} + \frac{9}{16} - \frac{3x}{4} + \underbrace{\frac{9}{16} - \frac{9}{16}}_{0}$$

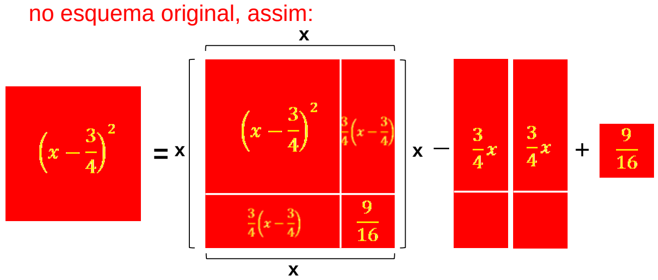
$$\left(x-\frac{3}{4}\right)^2 = x^2 - 2\,\frac{3x}{4} + \frac{9}{16}$$

Instigar o aluno a descobrir a relação deste termo com os dois do quadrado.

$$\left(x-\frac{3}{4}\right)^2 = \boxed{x^2 - \frac{3x}{2} + \frac{9}{16}}$$

⇒ Segundo modo:

Neste caso, vamos fazer apenas uma pequena mudança no esquema original, assim:



Agora é só retirar as expressões do esquema e escrever a geral:

$$\left(x-\frac{3}{4}\right)^2 = x^2 - 2\frac{3}{4}x + \frac{9}{16} = \boxed{x^2 - \frac{3x}{2} + \frac{9}{16}}$$

3. Completamento de quadrados

Como vimos na atividade três, é possível completar algumas expressões algébricas transformando-as (construindo) em ***trinômios quadrados perfeitos***. Claro, que feito isto, teremos expressões diferentes, pois uma não é um quadrado perfeito e a outra é.

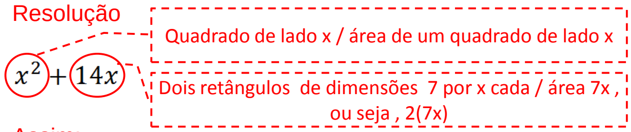
Este procedimento, daqui pra frente, será chamado de ***completamento de quadrados*** e é utilizado em diversas situações que envolvem manipulações algébricas, como por exemplo, na resolução de equações do 2º Grau (***processo de completar quadrados,*** na demonstração da fórmula resolutiva da equação do 2º Grau (***Fórmula de Bhaskara***), nas equações das cônicas, etc.

Vamos retomar uma das atividades já realizadas para reforçarmos a interpretação geométrica e a representação algébrica dos trinômios e, a partir daí, elaborarmos sistemáticas gerais para o completamento de quadrados.

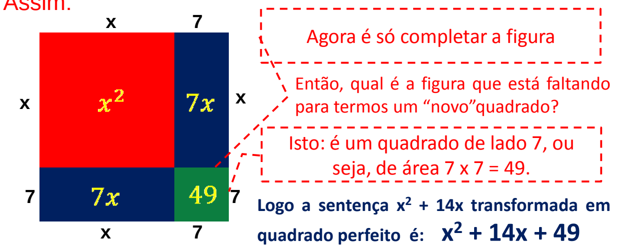
"Complete as sentenças abaixo transformando-as em quadrados perfeitos (geométrica e algebricamente)".

$\boldsymbol{a)\ x^2 + 14x}$

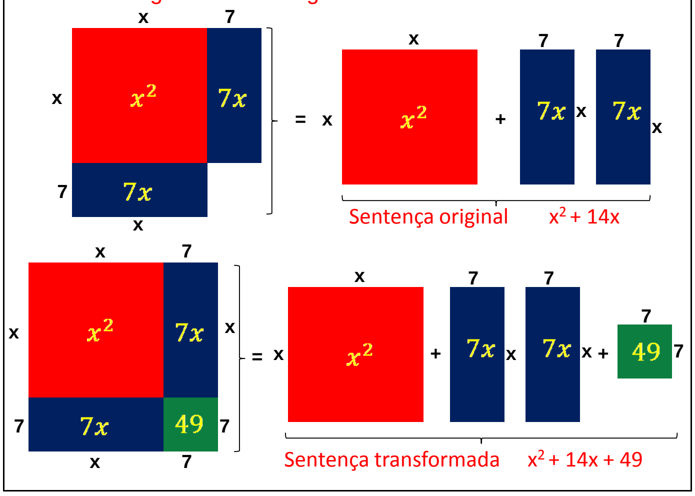
Resolução



Assim:



Conclusão geométrica e algébrica:



b) $x^2 - 3x$

Resolução

$x^2 - 3x$

Quadrado de lado x / área de um quadrado de lado x

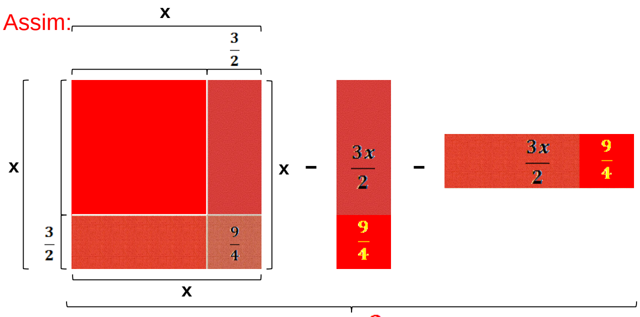
Já sabemos que este termo representa a área de dois retângulos. Então, neste caso, os dois retângulos têm de ter área 3x. Logo, basta dividi-lo por dois para saber a área de cada um.

Então, cada retângulo tem área 3x/2. Isto quer dizer: um lado (dimensão) mede 3/2 e o outro lado (outra dimensão) mede x.

Portanto, a sentença nos diz que de um quadrado de lado x (área x^2) temos de retirar dois retângulos de área 3x/2 cada um, ou seja, 2.(3x/2) = 3x.

Para facilitar a compreensão e atender a questão, vamos fazer a representação geométrica da situação.

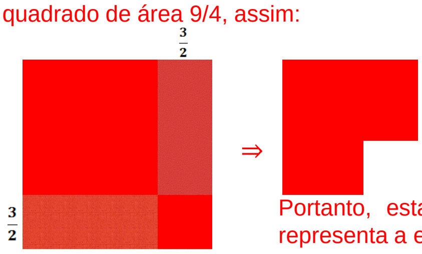
Assim:



Sentença original: $x^2 - 2\frac{3x}{2} \Rightarrow x^2 - 3x$

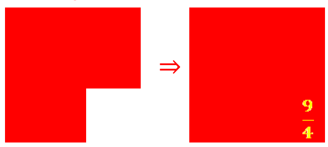
Devemos observar que ao retirar o retângulo 3/2 por x duas vezes o "quadradinho" de lado 3/2 (área 9/4) também saiu duas vezes. Como isto é possível se na segunda retirada ele não existia mais, pois já havia sido retirado na primeira?

Então, para possibilitar a segunda retirada é necessário recorrer a área restante de x^2 – 2(3x/2) e retirar um quadrado de área 9/4, assim:



Portanto, esta é a figura que representa a expressão $x^2 - 3x$

Agora ficou fácil de concluir. Basta completar a figura de modo que ela se transforme em um quadrado, assim:



Logo, transformando x^2 – 3x em quadrado perfeito, temos:

$x^2 - 3x + \frac{9}{4}$

Agora é só sistematizar a ideia e desenvolver um processo geral para completar quadrados.

Vamos lá:

■ Tomemos o primeiro exemplo:

antes

$$x^2 + 14x$$

Área de um quadrado de lado x

Área de dois retângulos de lados 7 e x

depois

$$x^2 + 14x + 49$$

Área de um quadrado de lado x

Área de dois retângulos de lados 7 e x

Área do quadrado de lado 7, (7 x 7 = 49). O 7 é a medida da dimensão (lado) conhecida do retângulo.

Em grau de dificuldade maior o termo a ser utilizado para completar a expressão pode ser obtido dividindo a área dos dois retângulos por dois e elevando o coeficiente (medida conhecida) ao quadrado. Veja no exemplo: 14x : 2 = 7x e 7 x 7 = 49.

Resumindo:

$$\underbrace{x^2 + 14x + 7^2}_{\text{Expressão algébrica correspondente á área do quadrado}} \quad \underbrace{x^2 + 14x + 49}_{\text{Trinômio quadrado perfeito}} \quad \underbrace{(x + 7)^2}_{\text{Forma fatorada do trinômio}}$$

Atividades

1 Qual é o termo que deve-se adicionar a cada expressão a seguir para que se tenha um trinômio quadrado perfeito? Utilize a interpretação geométrica, fazendo um esboço da figura.

$a)\ x^2 + 8x \qquad b)\ x^2 - 10x \qquad c)\ x^2 - 5x \qquad d)\ x^2 + x$

2. Tranforme em trinômios quadrados perfeitos e escreva na forma fatorada as seguintes expressões:

$e)\ 2x^2 + 3x \qquad f)\ 3x^2 - 2x \qquad g)\ ax^2 + bx$

4. PRODUTO DA SOMA PELA DIFERENÇA DE DOIS TERMOS

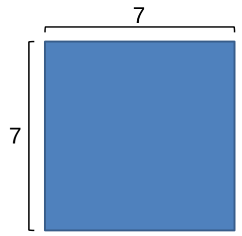
Como nos casos anteriores, vamos construir uma estrutura algébrica para este produto utilizando conceitos de área de figuras geométricas planas.

O estudo partirá de um exemplo particular (motivador) e se estenderá até a obtenção de um padrão algébrico para o desenvolvimento do produto em questão.

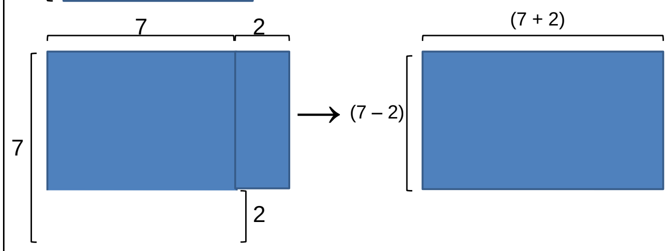
Iniciamos, portanto, com um quadrado de lado medindo 7 unidades de comprimento.

Lembramos que se um quadrado tem lado de medida igual a 7 , então, sua área é de 7 x 7 = 49

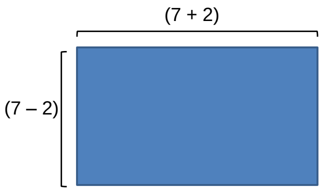
► **Vejamos primeiramente um esquema (interpretação)**



Então, a partir do quadrado de lado 7, vamos construir uma nova figura, recortando da base inferior deste quadrado e expandindo na lateral direita uma tira de 2 unidades de largura. Vejamos:



Observa-se que com este procedimento o quadrado virou um retângulo de dimensões (7 + 2) e (7 – 2).



Sabemos que a área de um retângulo é obtida multiplicando as duas dimensões, ou seja, comprimento x largura.

Figura final – 1º esquema

Então, este retângulo tem área igual a:

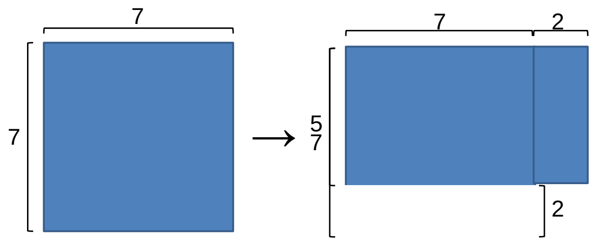
A = (7 + 2) x (7 – 2) = 9 x 5 = 45

É importante observar que as dimensões (7 + 2) e (7 – 2) têm as mesmos termos, porém, uma é a soma deles e a outra é a diferença entre eles.

Logo, ao calcular a área do retângulo, calculamos o **produto da soma pela diferença de dois termos.**

►Vamos fazer uma outra interpretação para a situação 2º esquema

Para tanto, consideramos o mesmo quadrado e o recorte e a expansão das mesmas tiras. Vejamos:



Agora vamos transportar (mover) a tira (retângulo 5 x 2), acrescentada à direita do quadrado para expandi-lo, para a base inferior da figura. Assim:

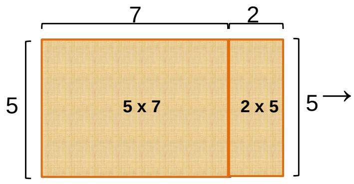


Figura 1

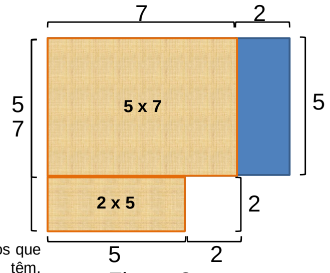


Figura 2

Aproveitando, é oportuno mostrar para os alunos que figuras que têm a mesma área , não têm, necessariamente, o mesmo perímetro .

Observa-se que a figura 1 e a figura 2 têm a mesma área, pois, na figura 2, comparando com a figura 1, o retângulo 2 x 5 está apenas deslocado. No restante, as figuras também têm a mesma área, um retângulo 7 x 5.

Ainda, observando a figura 2 podemos notar que a área dela é igual a área do quadrado original (7 x 7) menos a área do quadrado 2 x 2.

Vejamos:

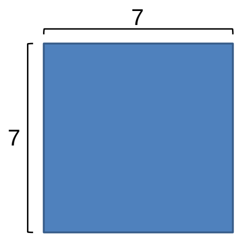


Figura original

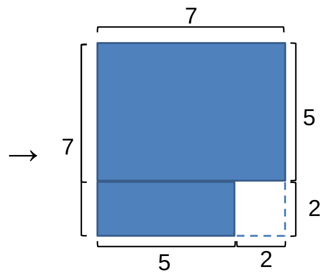


Figura final – 2º interpretação

Então, podemos concluir que a área da figura final desta interpretação é:

A = (7 x 7) – (2 x 2) = 49 – 4 = 45

Tanto na primeira quanto no segundo esquema vimos que as figuras finais têm a mesma área, 45. Vejamos:

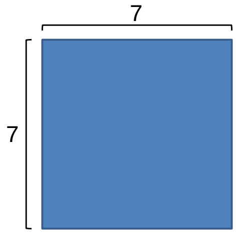


Figura original

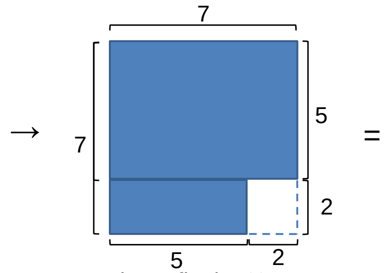


Figura final – 2º esquema

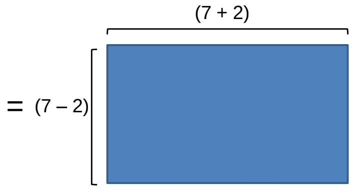


Figura final – 1º esquema

Logo,

$$(7 + 2) \times (7 - 2) = 49 - 4 = 45$$

Mesmo resultado

Expressão obtida da 1º esquema

Expressão obtida da 2º esquema

Conclusão:

Iniciamos o estudo com um quadrado de lado 7. Em seguida uma tira de 2 unidades foi recortada desse quadrado e uma outra de 2 unidades foi acrescentada, produzindo duas figuras finais diferentes.

Observa-se que dois termos (números) foram envolvidos, 7 (medida do lado do quadrado original e 2 (largura da tira recortada e expandida) :

Observa-se também que os dois termos estão nas expressões resultantes.

Na expressão do primeiro esquema, temos o produto da soma pela diferenças deles e na do segundo, temos a diferença dos quadrados deles e, elas, têm o mesmo valor numérico.

De onde, finalmente, concluímos que:

"O produto da soma pela diferença de dois termos é igual a diferença entre o quadrado do primeiro termo e o quadrado do segundo termo."

Soma do 7 com o 2

Diferença entre o 7 e o 2

Diferença entre eles

$$\mathbf{(7 + 2) \times (7 - 2) = 49 - 4 = 45}$$

Produto dos dois (soma pela diferença)

Quadrado do 7 (primeiro termo)

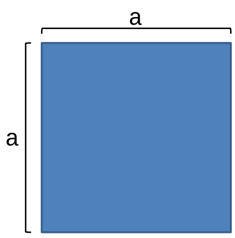
Quadrado do 2 (segundo termo)

► **Generalizando**

Tomamos agora um quadrado de dimensões genéricas e, a partir dele, executamos os mesmos procedimentos do exemplo particular.

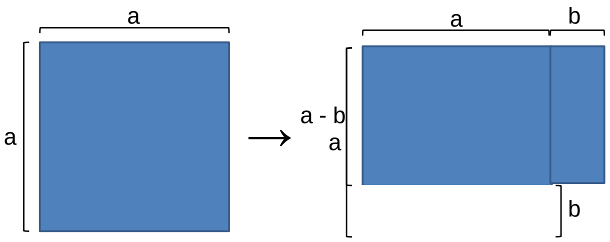
Nesta etapa, vamos executar apenas o segundo esquema.

Para representar de forma geral a medida do lado do quadrado vamos utilizar a incógnita ***a***, assim:



E a largura da tira que será recortada e expandida terá medida ***b***

Vejamos:



Agora vamos transportar (mover) a tira (retângulo a x b), acrescentada à direita do quadrado para expandi-lo, para a base inferior da figura. Assim:

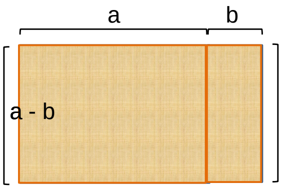


Figura 1

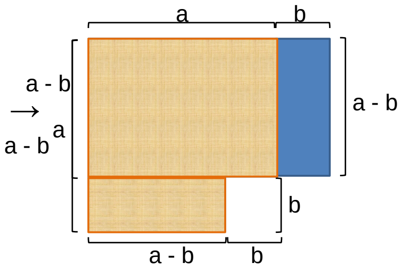


Figura 2

Observa-se que a figura 1 e a figura 2 têm a mesma área, pois, na figura 2, comparando com a figura 1, o retângulo bx(a-b) está apenas deslocado. No restante, as figuras também têm a mesma área, um retângulo a$\times$(a-b).

A área da figura 1 (um retângulo) é $(a + b) \times (a - b)$.

Observando a figura 2 podemos notar que a área dela é igual a área do quadrado original ($a \times a = a^2$) menos a área do quadrado $b \times b = b^2$.

Como as duas figuras têm a mesma área, então, temos que:

$$(a + b) \times (a - b) = a^2 - b^2$$

Portanto, de um modo geral, temos que :

"O produto da soma pela diferença de dois termos é igual a diferença entre o quadrado do primeiro termo e o quadrado do segundo termo."

Soma do *a* com o *b* | **Diferença entre o *a* e o *b*** | **Diferença entre eles**

$$\mathbf{(a + b) \times (a - b) = a^2 - b^2}$$

Produto dos dois (soma pela diferença) | **Quadrado do *a* (primeiro termo)** | **Quadrado do *b* (segundo termo)**

► **Atividades**

1. Determine as expressões algébricas dos produtos abaixo utilizando o desenvolvimento geométrico.

a) $(a + 2)x(a - 2)$

b) $(y + 1)x(y - 1)$

c) $(2m + 3)x(2m - 3)$

a) $\left(x + \frac{1}{2}\right)x(x - \frac{1}{2})$

1. Determine de "forma direta" o produtos dados.

a) $(x + 5)x(x - 5)$

b) $\left(2a - \frac{b}{2}\right)x(2a + \frac{b}{2})$

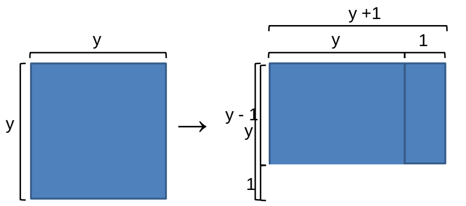
■ Resolução da letra b da questão 1.

b) (y + 1) x (y – 1)

Resolução:

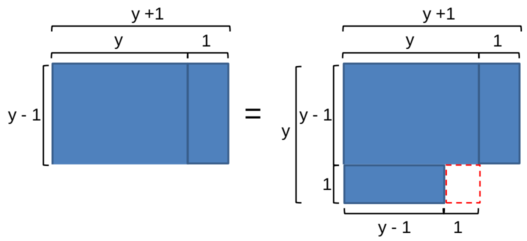
Como vimos, trata-se do produto da soma pela diferença de dois termos, y e 1,

Geometricamente temos a área de um quadrado de lado de medida igual a y, expandida de uma tira de largura igual 1 e suprimida, através de um recorte, uma tira de largura também igual a 1. Assim.



Ficou construído um retângulo de dimensões y + 1 e y – 1, cuja área é o produto das duas, ou seja, (y + 1) x (y – 1).

Para obter a expressão que representa o produto de y + 1 por y – 1, vamos manipular a figura removendo a tira (retângulo) de largura igual a 1 que foi acrescida a direta do quadrado. Assim:



Observa-se que a área da figura final é igual a área da figura inicial (y^2) menos a área de um quadrado de lado 1, ou seja 1^2 = 1. Logo concluímos que :

(y + 1) x (y – 1) = $y^2 - 1^2$ = $y^2 - 1$